

## **Unità Didattica N° 6**

### **La gravitazione universale**

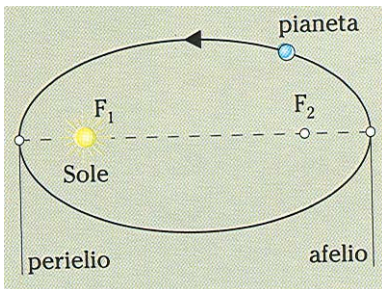
- 01) Le leggi di Keplero**
- 02) La legge di gravitazione universale**
- 03) L'accelerazione di gravità**
- 04) La massa della Terra e la sua massa volumica media**
- 05) La massa dei corpi celesti**
- 06) Massa inerziale e massa gravitazionale**
- 07) Variazione del peso di un corpo al variare della sua distanza dal centro della terra**
- 08) Dalle leggi di Keplero alla gravitazione universale , ovvero come si passa dalle leggi di Keplero alla legge di gravitazione universale**
- 09) La deduzione delle tre leggi di Keplero**
- 10) Cavendish pesa la Terra: accelerazione di gravità e massa della terra**

## Le leggi di Keplero

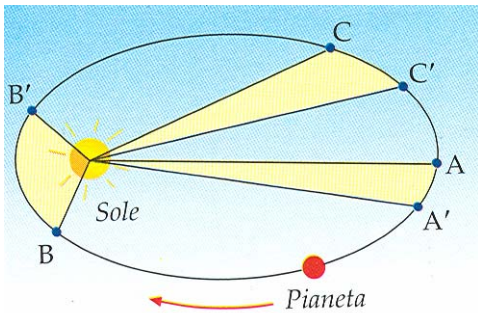
**Prima legge di Keplero :** *le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi* . Le ellissi descritte dai pianeti sono . in generale , poco eccentriche , per cui in alcuni casi possono essere ritenute circolari .

**Seconda legge di Keplero :** *la velocità areolare di ogni pianeta è costante* .

Con parole diverse possiamo dire che le aree descritte dal raggio vettore tracciato dal Sole ad ogni pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle ; questo significa che il raggio vettore che va dal Sole ad ogni pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempi uguali . Come conseguenza di questa legge abbiamo che la velocità di un pianeta nel **perielio** <sup>(2A)</sup> è maggiore di quella posseduta dallo stesso pianeta nell' **afelio** . <sup>(2B)</sup> La **velocità lineare** del pianeta è **minima** all'**afelio** , **massima** al **perielio** . Pertanto essa aumenta quando il pianeta va dall'afelio al perielio e diminuisce quando va dal perielio all'afelio .



**Orbita ellittica descritta da un pianeta che ruota attorno al Sole . Il punto di minima distanza dal Sole è il perielio e quello di massima distanza è l'afelio . La velocità scalare del pianeta varia passando dal valore massimo al perielio al valore minimo all'afelio .**

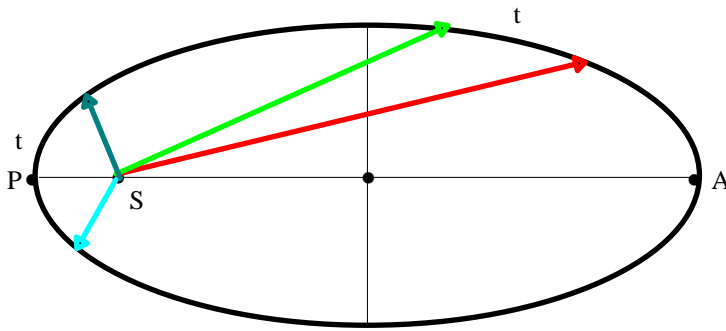


*AA' , BB' , CC' sono archi dell'orbita attorno al Sole percorsi da un pianeta in tempi uguali . Le aree colorate in giallo sono uguali . Questo significa che il raggio vettore tracciato dal Sole al pianeta descrive aree uguali in tempi uguali . Questo significa che la velocità areolare del pianeta si mantiene costante .*

**Terza legge di Keplero :** *i quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a descrivere le proprie orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi* . Con parole diverse possiamo dire che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è lo stesso per tutti i pianeti .

$$\frac{a^3}{T^2} = K$$

<sup>(2A)</sup> posizione del pianeta più vicina al Sole



$$T^2 = k_s \cdot a^3$$

con  $k_s = 3 \cdot 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$  costante che dipende dal corpo centrale , cioè dal Sole

### La legge di gravitazione universale di Newton

La legge di gravitazione universale afferma quanto segue : << **due particelle puntiformi aventi rispettivamente masse  $m_1$  ed  $m_2$  si attraggono con una forza , agente lungo la retta congiungente le due masse , direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza** >> <sup>(2C)</sup> In simboli matematici

abbiamo :

$$F_{AB} = F_{BA} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad [1]$$

Il coefficiente di proporzionalità **G** è una **costante universale** che prende il nome di **costante di gravitazione universale** . Il valore numerico di **G** non dipende dai valori delle masse che interagiscono né dalla geometria del sistema , né dal luogo dove avviene l'interazione . Il suo valore numerico dipende esclusivamente dal sistema di unità di misura usato . Per questo motivo **G** è una **costante universale** .

Il valore di **G** è lo stesso sia per i corpi celesti che per qualsiasi altro corpo . La prima misura accurata di **G** fu eseguita dallo scienziato inglese **Henry Cavendish** nel **1798** , che si servì di una bilancia di torsione . Si tratta di un esperimento davvero delicato . Il valore di **G** attualmente

accettato nel **S.I.** è il seguente :

$$G = 6,6732 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Si tratta di un valore estremamente piccolo .

$$[G] = \frac{[F \cdot r^2]}{[m^2]} = [L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}]$$

$F_{AB}$  = **forza gravitazionale che agisce sul corpo A e proveniente dall'azione del corpo B**

<sup>(2B)</sup> posizione del pianeta più lontana dal Sole

<sup>(2C)</sup> La legge di gravitazione universale è rigorosamente valida per corpi puntiformi , cioè per corpi le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alla loro mutua distanza .

$F_{BA}$  = forza gravitazionale che agisce sul corpo B e proveniente dall'azione del corpo A

Le forze di gravitazione tra due particelle costituiscono nel loro insieme **azione e reazione** . La prima particella esercita sulla seconda una forza che è diretta verso la prima particella lungo la loro congiungente . Similmente la seconda particella esercita sulla prima una forza che è diretta sulla seconda lungo la loro congiungente . Queste forze hanno lo stesso modulo , la stessa direzione , ma versi opposti .



La **legge di gravitazione universale** è rigorosamente valida soltanto per corpi puntiformi , cioè per corpi aventi dimensioni piccole rispetto alla loro distanza . Essa vale anche per masse non puntiformi purché sferiche .

### Esempio

**Calcolare il valore della forza con cui si attraggono :** 1) il Sole e la Terra 2) la Terra e la Luna  
3) due corpi uguali aventi la massa di 100kg e posti alla distanza di un metro .

$$F_{ST} = F_{TS} = G \frac{m_S \cdot m_T}{r^2} = 6,6732 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1,98 \cdot 10^{30}) \cdot (5,98 \cdot 10^{24})}{(1,49 \cdot 10^{11})^2} =$$

$$= \frac{6,6732 \cdot 1,98 \cdot 5,98}{2,2201} \cdot 10^{21} = 35,5899 \cdot 10^{21} = 3,6 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

$$F_{LT} = F_{TL} = G \frac{m_L \cdot m_T}{r^2} = 6,6732 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(7,354 \cdot 10^{22}) \cdot (5,98 \cdot 10^{24})}{(3,844 \cdot 10^8)^2} = 1,985 \cdot 10^{19} \text{ N}$$

$$F = 6,6732 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100 \cdot 100}{(1)^2} = 6,6732 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

### Osservazione

Se riteniamo valide le leggi di Keplero e le leggi della dinamica , allora possiamo dimostrare la legge di gravitazione universale , che diventa un teorema .

Se , invece , riteniamo valide le leggi della dinamica e la legge di gravitazione universale , allora possiamo dimostrare le tre leggi di Keplero che diventano altrettanti teoremi .

### L'accelerazione di gravità

Il peso di un corpo è la **forza gravitazionale** esercitata su di esso dalla terra . Si tratta di una grandezza vettoriale la cui direzione è orientata dalla posizione occupata dal corpo al centro della terra . Quando un corpo di massa **m** è lasciato cadere liberamente ,la sua accelerazione ( di **gravità** ) è indicata col simbolo  $\vec{g}$  e la forza di gravità che agisce su di esso è il suo peso  $\vec{P}$  . La seconda legge di Newton  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  , applicata ad un corpo in caduta libera , ci dà :  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$  che scritta in forma scalare diventa :  $P = m \cdot g$  . La legge di gravitazione universale ci fornisce la seguente

relazione :  $P = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{r^2}$  .  $P = P \Rightarrow g = G \cdot \frac{m_T}{r^2}$  [B] **g** assume lo stesso valore in

tutti i punti dello spazio distanti **r** metri dal centro della terra . Nella pratica **g** si considera **costante** ( a causa del valore piuttosto grande del raggio della terra ) in regioni prossime alla superficie

terrestre.  $g = G \cdot \frac{m_T}{(R_T)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,979 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,8 \frac{m}{s^2}$   $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$

Il valore di **g** varia al variare della posizione del punto materiale .

### La massa della Terra e la sua massa volumica media

Dalla misurazione sperimentale di **g** possiamo calcolare la massa della terra . Dalla [B] ricaviamo :

$$m_T = \frac{g \cdot r^2}{G} \quad m_T = \frac{9,8 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Dividendo la massa della terra per il suo volume otteniamo la **massa volumica** della terra :

$$\rho_T = \frac{m_T}{V_T} = 5,5 \frac{g_r}{cm^3}$$

Poiché la **massa volumica della materia sulla crosta terrestre** è minore del valore trovato , deduciamo che la Terra è costituita al suo interno da materiale la cui massa volumica è maggiore del valore  $5,5 \frac{g_r}{cm^3}$  . Se vogliamo calcolare il valore di **g** senza utilizzare la massa della

terra, allora possiamo considerare il moto della luna attorno alla terra . Per quanto visto

precedentemente possiamo scrivere :  $G \cdot m_T = 4 \pi^2 \cdot \frac{\ell^3}{T_L^2}$

con  $\ell$  = raggio della circonferenza descritta dalla luna nella sua rivoluzione attorno alla terra

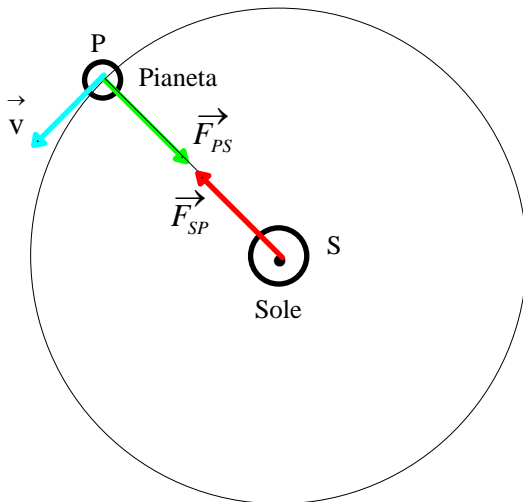
$T_L$  = **periodo di rivoluzione** della luna

Tenendo presente la [B] otteniamo :

$$g = 4 \pi^2 \cdot \frac{\ell^3}{r^2 \cdot T_L^2}$$

**La massa dei corpi celesti**

Se conosciamo il valore della costante di gravitazione universale **G** e qualche altro dato astronomico come il tempo di rivoluzione e la distanza di due corpi celesti , possiamo calcolare il valore della massa di un corpo celeste , cioè possiamo calcolare la massa del Sole , della Terra , di Giove e di tanti altri corpi celesti . Il ragionamento è il seguente :



$\vec{F}_{PS}$  = forza che il Sole esercita sul pianeta P

$\vec{F}_{SP}$  = forza che il pianeta P esercita sul Sole

$\vec{v}$  = velocità vettoriale del pianeta nel suo moto attorno al Sole

La forza centripeta che fa ruotare la terra attorno al Sole è la forza gravitazionale di attrazione esercitata dal Sole .

Consideriamo il caso del **Sole S** e di un **pianeta P** nell'ipotesi che il moto del pianeta attorno al Sole sia circolare ed uniforme .<sup>(5)</sup>

Un pianeta di massa  $m_p$  , ruotando attorno al Sole di massa  $m_s$  lungo un'ellisse , assimilabile in prima approssimazione ad una circonferenza , è ad ogni istante soggetto all'azione di una forza centripeta data dalla seguente relazione :

centripeta data dalla seguente relazione :  $F = G \cdot \frac{m_p \cdot m_s}{r^2}$  con **r** distanza **sole-pianeta**

Per il secondo principio della dinamica possiamo scrivere :  $F = m_p \cdot a_c = m_p \cdot \frac{4 \pi^2 r}{T_p^2}$

$F = F \Rightarrow G \cdot \frac{m_p \cdot m_s}{r^2} = m_p \cdot \frac{4 \pi^2 r}{T_p^2} \Rightarrow m_s = \frac{4 \pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T_p^2}$  [C]

essendo  $T_p$  il **periodo di rivoluzione** del pianeta considerato , cioè il tempo necessario perché il pianeta percorra un'intera orbita . Consideriamo adesso il caso particolare della **Terra** e del **Sole** .

<sup>(5)</sup> Con ottima approssimazione è il caso della terra nel suo movimento attorno al Sole

Sia  $m_s$  la massa del Sole ed  $m_T$  la massa della terra . Supponiamo che l'ellisse descritta dalla terra attorno al sole sia assimilabile ad una circonferenza di raggio  $r$  percorsa con moto uniforme , cioè con velocità vettoriale  $\vec{v}$  avente modulo  $v = \frac{2\pi r}{T}$  costante .

Poiché la terra di massa  $m_T$  si muove di moto uniforme lungo la traiettoria circolare , l'unica accelerazione cui è soggetta è quella centripeta  $\vec{a}_n$  . in base al secondo principio della dinamica la terra è soggetta ad una forza  $\vec{F}$  data da :  $\vec{F}_n = m_T \cdot \vec{a}_n$  cioè :  $F_n = m_T \cdot a_n$

Ma :  $a_n = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$  dove  $T$  è il tempo impiegato dalla terra a percorrere una intera orbita circolare . **Ma chi determina sulla terra questa forza centripeta che la mantiene in orbita ?** E' la forza di attrazione gravitazionale che il Sole esercita sulla Terra e che ci viene data

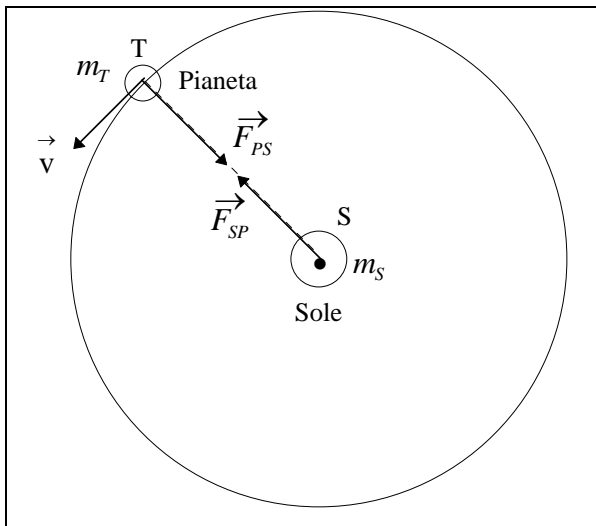
dalla legge di gravitazione universale :  $F = G \cdot \frac{m_T \cdot m_s}{r^2} = m_T \cdot a_n = m_T \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

**forza gravitazionale esercitata dal Sole sulla terra = forza centripeta necessaria a mantenere la Terra nella sua orbita circolare attorno al Sole**

$$m_s = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} \quad [D] \quad r = 1,48 \cdot 10^{11} m \quad , \quad T = 3,156 \cdot 10^7 s \quad , \quad m_s = 1,98 \cdot 10^{30} kg$$

Sostituendo nella [D] otteniamo :  $m_s = 1,964 \cdot 10^{30} kg$  . La [D] è ancora valida per una qualsiasi orbita ellittica con la sola condizione che  $r$  rappresenta il **semiasse maggiore** dell'ellisse . La [D] può essere applicata ad un qualsiasi corpo di massa  $m_T$  che ruoti attorno ad un corpo centrale di massa  $m_s$  .

Più complicato è misurare la massa di un corpo celeste come la **Luna** che non ha satelliti naturali . Il metodo usato è quello delle perturbazioni , cioè dello studio delle modificazioni , rispetto alle traiettorie previste dalle leggi di Keplero , che un corpo induce sui corpi vicini , modifiche che dipendono dal valore della sua massa . Studiando tali perturbazioni si riesce a risalire alla massa del corpo celeste . Un procedimento più semplice è quello di inviare attorno alla Luna un satellite artificiale .



Una massa  $m_T$ , per percorrere una circonferenza di raggio  $r$  con una velocità vettoriale  $\vec{v}$  di modulo costante, ha bisogno di una **forza centrale** di modulo  $\frac{m_T v^2}{r}$ . Questa forza viene fornita dal Sole

sotto forma di **forza gravitazionale**  $G \cdot \frac{m_T \cdot m_S}{r^2}$

$$\frac{m_T v^2}{r} = \text{forza richiesta} \quad G \cdot \frac{m_T \cdot m_S}{r^2} = \text{forza fornita}$$

### **Massa inerziale e massa gravitazionale**

Ogni corpo è caratterizzato da una proprietà fisica detta **massa**, la quale è caratterizzata da due proprietà che danno luogo alla **massa inerziale** ed alla **massa gravitazionale**.

Una forza  $\vec{F}$  applicata ad un corpo libero determina su questo corpo una accelerazione  $\vec{a}$ . Il rapporto fra la forza applicata e l'accelerazione prodotta è una caratteristica intrinseca del corpo e prende il nome di **massa inerziale** del corpo in quanto essa è un indice della tendenza che hanno

tutti i corpi di stare fermi o di muoversi di moto rettilineo uniforme.

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m}$$

L'inerzia rappresenta una importante proprietà della massa che consiste nell'opporci ai cambiamenti prodotti da una eventuale forza esterna che tenti di modificarne la velocità vettoriale e quando vogliamo evidenziare questa proprietà della massa parliamo di **massa inerziale**.

Al contrario, quando si vuole sottolineare la proprietà della massa di interagire con le altre masse secondo la legge di gravitazione universale come avviene, per esempio, con la forza peso, si parla di **massa gravitazionale**.

La massa inerziale e la massa gravitazionale di un corpo hanno significati diversi, anche se hanno lo stesso valore numerico e si misurano entrambe in chilogrammi.

Si possono realizzare diversi esperimenti con i quali è possibile misurare e confrontare la massa gravitazionale e la massa inerziale di uno stesso corpo.

Tutti gli esperimenti finora realizzati hanno sempre dato lo stesso valore per cui, in seguito, parlando di massa di un corpo non preciseremo più se si tratta di massa inerziale o di massa gravitazionale.



## Variazione del peso di un corpo al variare della sua distanza dal centro della terra

Calcoliamo l'accelerazione di gravità di un corpo di massa  $m$  posto all'altezza  $h$  rispetto alla superficie della Terra, che consideriamo sferica, di raggio  $R_T$  e massa  $m_T$ . Sul corpo agisce la forza di gravitazione universale (peso del corpo)  $F = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$  che, per la legge

fondamentale della dinamica, vale:  $F = m \cdot g$ . Confrontando le due equazioni otteniamo:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{(R_T + h)^2} \quad \text{e quindi:} \quad \boxed{g = G \cdot \frac{m_T}{(R_T + h)^2}}$$

con  $R_T + h$  distanza del corpo dal centro della terra.

Il peso di un corpo diminuisce con l'aumentare della sua distanza dal centro della terra.

L'interazione gravitazionale, che è relativamente debole, è responsabile di importanti fenomeni quali le orbite ellittiche descritte dai pianeti ed è dovuta all'attrazione del Sole.

Le maree sono dovute alla reciproca attrazione esercitata tra la Luna e le masse d'acqua degli oceani.

## Le leggi di Keplero e la gravitazione universale, ovvero come si passa dal moto dei pianeti alla legge di gravitazione universale

La legge di gravitazione universale può essere dedotta dalle leggi della dinamica e dalle leggi di Keplero. Noi la dimostreremo nel caso semplice di un'orbita circolare. Nel caso generale di orbite ellittiche occorre il calcolo differenziale. Enunciamo le tre leggi di Keplero.

### Prima legge di Keplero

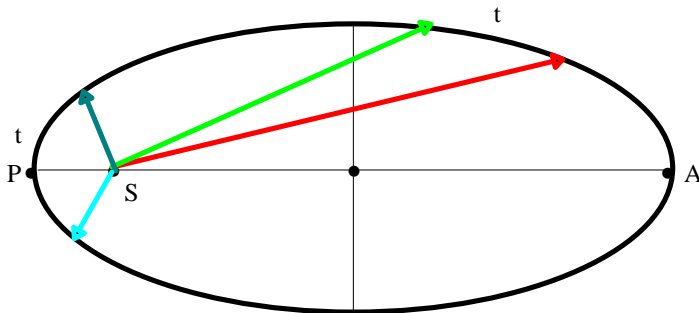
Le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi. Le ellissi descritte dai pianeti sono, in generale, **poco eccentriche**, per cui in alcuni casi possono essere ritenute circolari. Il pianeta si trova alla massima distanza dal Sole nella posizione **A**, detta **Afelio**, ed alla minima distanza nella posizione **P**, detta **perielio**.

### Seconda legge di Keplero (o legge delle aree)

Le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il Sole col pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle. Questo significa che la **velocità areolare** del pianeta rispetto al punto occupato dal Sole si mantiene costante. La **velocità lineare** del pianeta è **minima** all'**afelio**, **massima** al **perielio**. Pertanto essa aumenta quando il pianeta va dall'afelio al perielio e diminuisce quando va dal perielio all'afelio.

**Terza legge di Keplero**

I quadrati dei tempi **T** ( **periodi** ) impiegati dai diversi pianeti a percorrere la loro orbita ellittica sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi descritte .



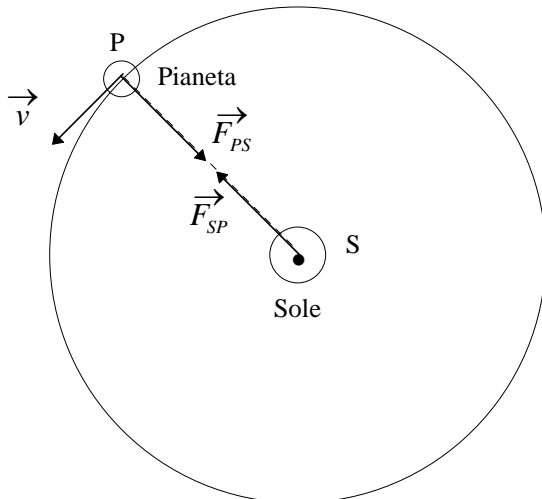
$$T^2 = k_s \cdot a^3$$

con  $k_s = 3 \cdot 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$  costante che

dipende dal corpo centrale , cioè dal Sole

dalle leggi di Keplero , dedotte sperimentalmente , e dalle leggi della dinamica possiamo dedurre la **legge di gravitazione universale** .

Consideriamo il caso del **Sole S** e di un **pianeta P** nell'ipotesi che il moto del pianeta attorno al Sole sia circolare ed uniforme .<sup>(5)</sup>



$\vec{F}_{PS}$  = forza che il Sole esercita sul pianeta P

$\vec{F}_{SP}$  = forza che il pianeta P esercita sul Sole

$\vec{v}$  = velocità vettoriale del pianeta nel suo moto attorno al Sole

La forza centripeta che fa ruotare la terra attorno al Sole è la forza gravitazionale di attrazione esercitata dal Sole .

Supponiamo che la traiettoria descritta dal pianeta sia una circonferenza . La **costanza della velocità areolare** si tramuta nella costanza della velocità lineare . Il pianeta si muove attorno al

Sole di moto circolare uniforme con velocità lineare  $v = \frac{2 \pi r}{T} = \omega r$  ed accelerazione

centripeta  $a_c = \omega^2 r$

<sup>(5)</sup> Con ottima approssimazione è il caso della terra nel suo movimento attorno al Sole

La forza che agisce sul pianeta , permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità scalare costante , deve essere esclusivamente **centripeta** ( cioè senza componente tangenziale ) .

$$\text{Essa risulta uguale a : } F_{PS} = m_p \cdot a_c = m_p \cdot \frac{v^2}{r} = m_p \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m_p \cdot r \quad [2]$$

dove  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  è il **periodo di rivoluzione** del pianeta attorno al Sole ,  $m_p$  è la massa del pianeta ,  $r$  è il raggio dell'orbita descritta dal pianeta .

Utilizzando la terza legge di Keplero  $T^2 = k_s \cdot r^3$  e sostituendo nella [2] otteniamo :

$$F_{PS} = \frac{4\pi^2}{k_s} \cdot \frac{m_p}{r^2} = C \cdot \frac{m_p}{r^2} \quad [3]$$

Questo è il primo risultato importante : **la forza esercitata dal sole sui pianeti è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole e direttamente proporzionale alla massa del**

**pianeta** . La forza esercitata dal pianeta sul Sole ha l'espressione :  $F_{SP} = \frac{4\pi^2}{k_p} \cdot \frac{m_s}{r^2}$  [4]

Questa volta è il pianeta che funge da corpo centrale .

Per la terza legge della dinamica sul Sole agisce una forza  $F_{SP}$  uguale ed opposta a quella che

$$\text{agisce sulla terra : } F_{PS} = F_{SP} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{k_s} \cdot \frac{m_p}{r^2} = \frac{4\pi^2}{k_p} \cdot \frac{m_s}{r^2} \Rightarrow \boxed{m_p \cdot k_p = m_s \cdot k_s}$$

Poiché il risultato è stato dedotto per un pianeta qualsiasi , possiamo affermare che il prodotto  $m \cdot k$  è una **costante universale** , che non dipende dal particolare pianeta considerato . Sarà pure una

**costante universale** anche la grandezza :  $G = \frac{4\pi^2}{mk} = \frac{4\pi^2}{m_p k_p} = \frac{4\pi^2}{m_s k_s}$

Da queste uguaglianze ricaviamo le uguaglianze :  $\frac{4\pi^2}{k_p} = G \cdot m_p$  ,  $\frac{4\pi^2}{k_s} = G \cdot m_s$

Sostituendo i risultati trovati nella [3] e nelle [4] otteniamo :

$$F_{PS} = G \cdot \frac{m_s \cdot m_p}{r^2} \quad F_{SP} = G \cdot \frac{m_s \cdot m_p}{r^2}$$

Concludiamo ricordando che dalla legge di gravitazione universale e dalle leggi della dinamica possiamo dedurre le tre leggi di Keplero .

### La deduzione delle tre leggi di Keplero

Le tre leggi di Keplero , da questi dedotte sperimentalmente , sono una conseguenza delle tre leggi della dinamica applicate al caso particolare del moto di un corpo ( **pianeta** ) di massa **m** che ruota attorno ad un altro corpo ( stella ) ritenuto fermo e di massa **M** , attratto da una forza inversamente proporzionale dal quadrato della loro distanza .

Innanzitutto si può dimostrare matematicamente che, con una forza  $\propto \frac{1}{r^2}$ , la traiettoria del pianeta rispetto al baricentro della stella (ritenuta fissa) è rappresentata da una conica. I pianeti che tornano sempre verso la stella percorrono delle **ellissi**.

La **seconda legge di Keplero** è una conseguenza della **conservazione del momento angolare** (o momento della quantità di moto)  $\vec{l} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ . Se  $\vec{l}$  è un vettore costante allora si può dimostrare che la **velocità areolare** del pianeta è costante.

La **terza legge di Keplero** è una conseguenza del fatto che nel moto del pianeta la forza gravitazionale è una forza esclusivamente centripeta. Dimostriamo la terza legge di Keplero nel caso particolarmente semplice di un pianeta che descrive un'orbita circolare.

Supponiamo che un pianeta **P** descriva un'orbita circolare. P si muove di moto circolare uniforme e possiede un'accelerazione centripeta il cui modulo ci viene dato dalla formula:  $a_c = \omega^2 r$

dove  $\omega$  è la velocità angolare del pianeta ed  $r$  è la sua distanza dal Sole. In un moto circolare uniforme, la velocità angolare è legata al periodo **T** dalla relazione:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Il modulo dell'accelerazione centripeta del pianeta assume la seguente forma:  $a_c = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$

Se  $m_p$  è la massa del pianeta esso, per la legge fondamentale della dinamica, è attratto verso il centro del Sole da una forza il cui modulo vale:  $f = m_p a_c = m_p \frac{4\pi^2}{T^2} r$

Questa forza è di origine gravitazionale e, quindi, vale:  $f = G \frac{m_s \cdot m_p}{r^2}$ .  $f = f \Rightarrow$

$$G \frac{m_s \cdot m_p}{r^2} = m_p \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_s} = k_s \quad [A]$$

Al secondo membro della [A] compare una quantità che è **indipendente** dal pianeta considerato: dipende solo dalla massa del Sole, che funge da corpo centrale (e da costanti come  $\pi$  e **G**).

Quindi il rapporto  $\frac{T^2}{r^3}$  è lo stesso per tutti i pianeti. E' essenziale che l'intensità della forza di attrazione gravitazionale sia proporzionale a  $\frac{1}{r^2}$ ; diversamente, non c'è modo di giustificare la terza legge di Keplero.

Marte	$0,37 \cdot g$	Terra	$g$
Luna	$0,17 \cdot g$	Sole	$28 \cdot g$
Mercurio	$0,34 \cdot g$	Urano	$0,84 \cdot g$
Saturno	$1,06 \cdot g$	Giove	$2,51 \cdot g$
Venere	$0,83 \cdot g$		

Valore della gravità sulla superficie di alcuni corpi celesti del sistema solare calcolato in unità di accelerazione di gravità  $g$  sulla Terra , nell'ipotesi che i corpi celesti siano sferici .

	MASSA (kg)	RAGGIO (m)	PERIODO DI ROTAZIONE (s)	ECCENTRICITÀ ORBITALE	RAGGIO MEDIO DELL'ORBITA (m)	PERIODO DI RIVOLUZIONE (a = ANNO g = GIORNO)
Sole	$1,98 \cdot 10^{30}$	$6,96 \cdot 10^8$	$2,14 \cdot 10^6$	—	—	—
Mercurio	$0,33 \cdot 10^{24}$	$2,57 \cdot 10^6$	$7,60 \cdot 10^6$	0,2056	$5,79 \cdot 10^{10}$	87,97 g
Venere	$4,83 \cdot 10^{24}$	$6,31 \cdot 10^6$	$2,6 \cdot 10^6$	0,0068	$1,08 \cdot 10^{11}$	224,70 g
Terra	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,38 \cdot 10^6$	$8,61 \cdot 10^4$	0,0167	$1,50 \cdot 10^{11}$	365,25 g
Marte	$6,37 \cdot 10^{23}$	$3,43 \cdot 10^6$	$8,85 \cdot 10^4$	0,0934	$2,28 \cdot 10^{11}$	686,98 g
Giove	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,18 \cdot 10^7$	$3,54 \cdot 10^4$	0,0483	$7,78 \cdot 10^{11}$	11,86 a
Saturno	$5,67 \cdot 10^{26}$	$6,03 \cdot 10^7$	$3,60 \cdot 10^4$	0,0560	$1,43 \cdot 10^{12}$	29,46 a
Urano	$8,80 \cdot 10^{25}$	$2,67 \cdot 10^7$	$3,88 \cdot 10^4$	0,0461	$2,87 \cdot 10^{12}$	84,02 a
Nettuno	$1,03 \cdot 10^{26}$	$2,48 \cdot 10^7$	$5,69 \cdot 10^4$	0,0100	$4,50 \cdot 10^{12}$	164,79 a
Plutone	$1,37 \cdot 10^{22}$	$1,17 \cdot 10^6$	$5,7 \cdot 10^4$	0,2484	$5,9 \cdot 10^{12}$	247,70 a
Luna	$7,34 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	$2,36 \cdot 10^6$	0,055	$3,84 \cdot 10^8$	27,3 g

## DOMANDE TEORICHE

**D01)** Quanto vale la costante di gravitazione universale  $G$  sulla luna ?

**R01)** Lo stesso che sulla superficie terrestre o in qualsiasi altro luogo , poiché si tratta di una costante universale

**D02)** Dire se la forza che determina la rotazione della luna attorno alla terra è il risultante della forza centripeta e della forza gravitazionale dovuta alla terra .

**R02)** Falso ; le due forze sono la stessa identica cosa

**D03)** La massa della luna è molto più piccola della massa della terra . E' giusto dire che la Luna attrae la Terra con una forza minore di quella che la Terra esercita sulla Luna ?

**R03)** No ,in quanto per la terza legge della dinamica la Terra e la Luna interagiscono fra loro con una  $a$  avente la stessa intensità.

**D04)** Immaginiamo che venga scoperto un pianeta che orbita attorno al Sole ad una distanza doppia di quella della terra . Che periodo di rivoluzione  $T_1$  ha quel pianeta ?

**R04)** Si applica la terza legge di Keplero  $T^2 = k r^3$  ;  $T_2^2 : T_1^2 = r_2^3 : r_1^3$  ,  $r_2 = 2r_1 \Rightarrow$

$$T_2^2 = 8 \cdot T_1^2 \quad T_2 = T_1 \cdot \sqrt{8} \quad , \quad T_1 = \text{periodo di rivoluzione della terra} ; T_2 \text{ circa 2 anni e 10 mesi}$$

**D05)** A parità di distanza , se triplichiamo la massa die due corpi , di quanto aumenta la forza di attrazione gravitazionale ?

**R05)** di 9 volte

**D06)** Calcolare la massa del Sole , conoscendo il raggio dell'orbita terrestre ed il periodo di rivoluzione della terra .

$$\mathbf{R06)} \quad m_s = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2} = 1,96 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

**D07)** Calcolare la velocità  $v$  ed il periodo di rivoluzione  $T$  di un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Terra ad un'altezza di  $200 \text{ km}$

**R07)**  $v = 7,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$   $T = 88 \text{ minuti}$  . Si tratta di calcolare l'accelerazione di gravità  $g$  a  $6370 + 200$

chilometri dal centro della terra e ricordare le formule relative al moto circolare uniforme che ha  $g$  come accelerazione centripeta . Oppure possiamo ricorrere alla terza legge di Keplero , conoscendo i dati relativi al moto della Luna

**D08)** Calcolare la velocità  $v$  ed il periodo di rivoluzione  $T$  di un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Luna ad un'altezza di  $200\text{ km}$

**R08)**  $v = 1,6 \frac{\text{km}}{\text{s}}$   $T = 124$  minuti .

**D9:** A che quota deve trovarsi l'orbita di un satellite geostazionario ? Un satellite è **geostazionario** quando orbita in 24 ore nello stesso senso della rotazione Terra attorno al proprio asse . In questo modo il satellite appare praticamente fermo nel cielo .

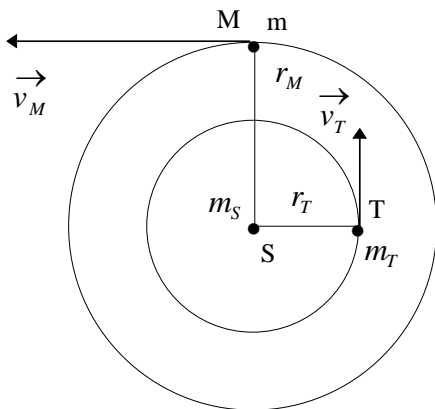
**R09)**  $35900\text{ km}$

**D10)** Calcolare il valore dell'accelerazione di gravità  $g_G$  su Giove , sapendo che il suo diametro è 11,3 volte maggiore di quello terrestre e la massa  $m_G$  337 volte maggiore di quella terrestre .

**R10)**  $g_G = 2,6 g = 25,48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  . Ciò significa che un corpo , su Giove , pesa circa 2,6 volte quello che pesa sulla Terra .

**D11)** La Terra e Marte sono due pianeti del Sole . Supponendo che essi descrivono due orbite circolari aventi rispettivamente raggi  $r_T$  ed  $r_M$  , calcolare il rapporto delle loro velocità lineari .

**R11)**



$$a_T = \frac{v_T^2}{r_T} = \text{accelerazione centripeta della Terra}$$

$$a_M = \frac{v_M^2}{r_M} = \text{accelerazione centripeta di Marte}$$

$$F_T = m_T \cdot \frac{v_T^2}{r_T} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_T}{r_T^2}$$

$$F_M = m \cdot \frac{v_M^2}{r_M} = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r_M^2}$$

$$G \cdot m_S = v_T^2 \cdot r_T = v_M^2 \cdot r_M \Rightarrow \frac{v_T}{v_M} = \sqrt{\frac{r_M}{r_T}} \Rightarrow v_T > v_M$$