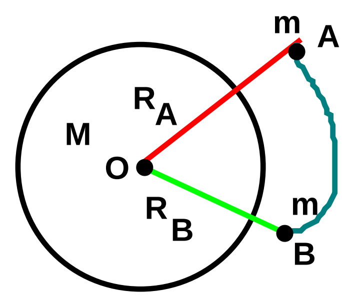
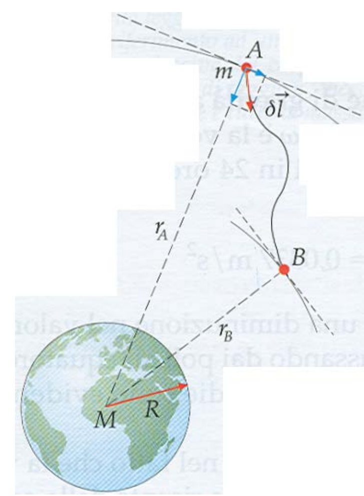
Energia potenziale gravitazionale



Quando la massa m, posta nel campo gravitazionale generato dalla Terra di massa M, passa dalla posizione iniziale A a quella finale B, le forze del campo gravitazionale compiono il seguente lavoro:

$$L_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = G\cdot M\cdot m\left(\frac{1}{R_B}-\frac{1}{R_A}\right) \quad [1]$$

Se $R_B = \infty$ abbiamo: $L_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = -\dfrac{G\cdot M\cdot m}{R_A}$ [2] $L_{A\to\infty}\left(\vec{F}\right)$ rappresenta il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ quando la massa m passa dalla posizione A all'infinito. Il lavoro L è negativo in quanto le forze gravitazionali sono attrattive.



Si può dimostrare che $L_{A\to B}\left(\vec{F}\right)$ non dipende dalla traiettoria che unisce i punti A e B , ma dipende soltanto dalla distanza dei due punti dal centro Della Terra. Questo ci consente di affermare che la **forza gravitazionale** è **conservativa**.

La grandezza: $U = L_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = -\dfrac{G\cdot M\cdot m}{R_A}$ **[6]** prende il nome di **energia potenziale** della massa m quando occupa una posizione del campo gravitazionale generato dalla massa M.

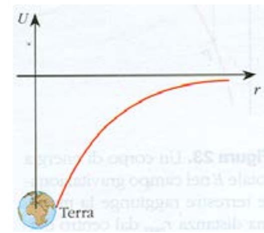
Il valore negativo dell'energia potenziale è una conseguenza dell'avere posto convenzionalmente l'infinito come livello zero per le energie potenziali.

L'espressione 6 , che descrive l'energia di una particella di massa *m* nel campo gravitazionale terrestre, può essere interpretata anche come l'energia potenziale associata al sistema isolato Terra-particella. Un'espressione analoga descrive l'energia potenziale associata a una qualunque coppia di masse m_1 ed m_2:

Energia potenziale gravitazionale
L'energia potenziale gravitazionale di un sistema isolato di due masse m_1 ed m_2 separate da una distanza r è:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Figura 22. Grafico dell'energia potenziale gravitazionale in funzione della distanza dal centro della Terra.



Conservazione dell'energia meccanica nel campo gravitazionale

Se indichiamo con m la massa di un corpo in movimento con velocità v nel campo gravitazionale terrestre e con r la sua distanza dal centro della Terra, per il *principio di conservazione dell'energia meccanica* possiamo scrivere:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_T m}{r} = \text{costante} \qquad 8$$

cioè la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del corpo si mantiene costante durante il moto.

Un corpo dotato di energia totale E nel campo gravitazionale terrestre può spostarsi in ogni punto dello spazio in cui l'energia potenziale gravitazionale U, che varia da punto a punto, è minore o uguale al valore costante dell'energia totale E, come richiede il principio di conservazione dell'energia meccanica. La differenza $E - U$ esprime l'energia cinetica del corpo.

In conclusione, se E è negativa, il corpo non può allontanarsi indefinitamente dalla Terra.

Supponiamo ora che il corpo in esame sia un satellite in *orbita circolare* di raggio r intorno alla Terra (fig. **24**). Per la seconda legge della dinamica, l'accelerazione centripeta $\frac{v^2}{r}$ cui è sottoposto il satellite, moltiplicata per la sua massa m, deve essere uguale alla forza gravitazionale esercitata su di esso dalla Terra, cioè:

$$G \frac{M_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Ne segue che l'energia cinetica del satellite è: $E_c = G \frac{M_T m}{2r}$

Pertanto l'energia totale $E = E_c + U$ diventa: $E = -G \frac{M_T m}{2r}$ **9**

Il risultato fondamentale che a questo punto vogliamo evidenziare è che il satellite ha energia totale negativa, come ci aspettavamo dal momento che esso, percorrendo la sua orbita, rimane sempre a distanza finita dalla Terra.

Più in generale, *l'energia totale è negativa per ogni orbita chiusa* (circolare o ellittica).

Invece, un corpo dotato di energia totale maggiore o uguale a zero si allontana indefinitamente dalla Terra.

Si tenga presente che tutte le considerazioni che abbiamo fatto finora sul segno dell'energia meccanica sono valide esclusivamente nella convenzione di attribuire valore nullo all'energia potenziale gravitazionale della massa m all'infinito.

In questa discussione abbiamo fatto riferimento, per concretezza, al campo gravitazionale terrestre, ma i risultati si estendono ovviamente al campo gravitazionale di ogni altro corpo celeste, sostituendo alla massa M_T della Terra la massa M del corpo considerato. Così la **9**, scritta nella forma:

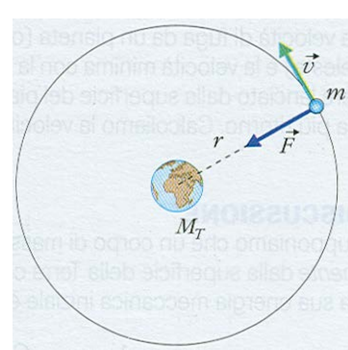
$$E = -G\frac{M\,m}{2\,r}$$

può rappresentare anche, ad esempio, l'energia meccanica di un pianeta di massa m in orbita circolare attorno a una stella di massa M.

La condizione che deve essere rispettata, affinché a un sistema di due masse possano essere applicate equazioni come la **8** o la **9**, è che la massa del corpo che genera il campo sia molto maggiore della massa m in movimento nel campo. In questo caso, allora, la massa più grande può essere ritenuta immobile nella posizione che occupa in un sistema di riferimento inerziale e la sua enegia cinetica può essere perciò trascurata. In caso contrario, nello scrivere l'energia totale del sistema, dovremmo includere anche l'energia cinetica di questa massa.

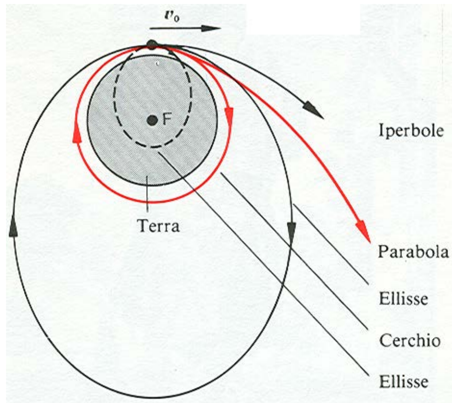
Figura 24. Se un satellite artificiale terrestre di massa m percorre un'orbita circolare di raggio r con velocità $\vec{v}$, la forza gravitazionale $\vec{F}$ costituisce la forza centripeta necessaria a mantenere il satellite su tale orbita. Pertanto si ha:

$$G\frac{M_T\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$



Prime considerazioni sui satelliti artificiali

Consideriamo il lancio di un satellite artificiale. Vogliamo lanciare il satellite in direzione orizzontale da una rampa e trascuriamo per semplicità la resistenza dell'aria. Si presentano le seguenti possibilità:



Traiettorie descritte sotto l'azione della gravità terrestre. Se la velocità di lancio orizzontale alla superficie della Terra è più piccola della velocità corrispondente all'orbita circolare, il corpo ricade sulla Terra.

Velocità di lancio v_o	**Forma dell'orbita**	**Velocità di lancio** v_o	**Forma dell'orbita**
$0 < v_o < v_1$	**Parabola**	$v_o = v_1 = 7{,}9\dfrac{km}{s}$	**Circonferenza**
$v_1 < v_o < v_2$	**Ellisse**	$v_o = v_2 = 11{,}2\dfrac{km}{s}$	**Parabola**
$v_2 < v_o < \infty$	**Iperbole**		

In tutti i casi il centro della Terra si trova in un fuoco della sezione conica.

$v_1 = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$ è detta " **velocità orbitale circolare**" o " **prima velocità cosmica** " .

con M massa della Terra.

$v_2 = \sqrt{2 \cdot \dfrac{G \cdot M}{r}}$ è detta << **velocità di fuga** >> o " **seconda velocità cosmica** ".

La messa in orbita di un satellite artificiale della Terra

Esempio 1. La velocità orbitale circolare.

Un satellite di massa *m* deve essere posto in orbita circolare attorno alla Terra; con quale velocità deve essere lanciato in direzione orizzontale?

Riferiamoci per il momento alla legge della conservazione dell'energia. Poiché lungo una traiettoria circolare l'energia potenziale ha sempre lo stesso valore, anche l'energia cinetica deve rimanere costante. La legge dell'energia ci dice quindi solo che la velocità del satellite deve rimanere costante durante il moto.

Per il calcolo di v dobbiamo servirci della legge fondamentale della dinamica $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$. Poiché l'accelerazione del satellite è fornita dalla forza gravitazionale della Terra, potremo scrivere, indicando con M la massa della Terra, la seguente equazione:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \qquad \text{da cui ricaviamo:} \qquad \boxed{v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}}$$

Questa velocità si chiama *velocità orbitale circolare*. Essa risulta indipendente dalla massa del satellite, quindi è sempre la stessa per tutti i satelliti che descrivono la medesima traiettoria.

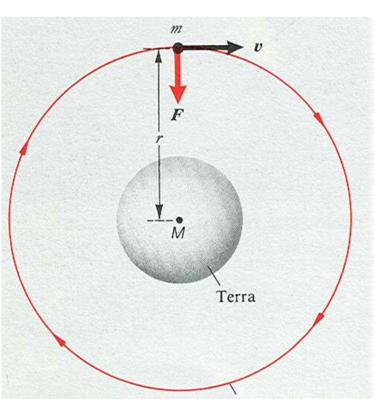
Vogliamo ora calcolare il valore di tale velocità per un satellite in moto su orbita radente la superficie terrestre.

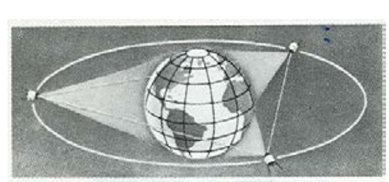
$$\mathbf{v} = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3}} = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7{,}9 \text{ km/s}$$

Come valore del periodo orbitale si ottiene: $T = \dfrac{2 R \pi}{\mathbf{v}} = \dfrac{2 \cdot 6370 \cdot 10^3 \cdot 3{,}14}{7900} = 5066{,}31 \text{ s} = 84{,}31 \text{ min}$

cioè circa un'ora e mezzo.

La velocità orbitale è tanto più piccola quanto più grande è il raggio dell'orbita prescelta. Per $r = 42\,200$ km la velocità orbitale vale solo 3 km/s. In questo caso il satellite descrive un giro completo attorno alla Terra esattamente in un giorno. Se l'orbita del satellite giace nel piano equatoriale terrestre, e se il satellite ruota nello stesso senso della Terra, allora il satellite visto dalla Terra sembra stare fermo. Satelliti di questo tipo, detti geostazionari, hanno un ruolo molto importante nella tecnica delle radiocomunicazioni rendendole possibili su scala mondiale.





Tre satelliti geostazionari che ruotano attorno alla Terra. Se ogni satellite impiega un giorno per compiere una rotazione completa, e le loro orbite giacciono sul piano equatoriale terrestre, i satelliti visti dalla Terra sembrano fermi. Essi sono quindi estremamente utili per la trasmissione radio e televisiva.

Esempio 2. Velocità di fuga.

Un corpo di massa m deve essere lanciato dalla superficie della Terra. Che velocità bisogna imprimergli perché esca dal campo gravitazionale terrestre?

Indichiamo con M la massa della Terra e con R il suo raggio, avremo allora:

Energia alla superficie della Terra: $E = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R}$ Energia a distanza infinita: $E = 0 - 0$

In questo caso la velocità del corpo a distanza infinita è nulla. L'energia rimane costante durante il moto e quindi si ha:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} \mathrm{v}^2 - G \cdot \frac{\cancel{m} \cdot M}{R} = 0 \qquad \text{da cui} \quad \boxed{\mathrm{v} = \sqrt{2 \cdot \frac{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M}}{\mathrm{R}}}}$$

Questa velocità si chiama *velocità di fuga*. Il suo valore non dipende né dalla massa del corpo che viene lanciato né dalla direzione di lancio.

Vogliamo calcolare la velocità di fuga dalla superficie terrestre.

$$\mathbf{v} = \sqrt{2\, G\, \frac{M}{R}} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^{3}}}\ \mathrm{m/s} =$$

$$= 11{,}2 \cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s} = 11{,}2\ \mathrm{km/s}$$

Sulla superficie della Luna la velocità di fuga vale solo 1,6 km/s. Le molecole gassose, dotate di maggior energia alla temperatura ambiente, raggiungono questi valori della velocità e quindi possono sfuggire al campo gravitazionale della Luna. Se la Luna avesse avuto un'atmosfera questa sarebbe perciò diventata con il passar del tempo sempre più rarefatta. La Luna dunque è troppo piccola per poter trattenere un'atmosfera. Sulla Terra invece la velocità di fuga è dieci volte più grande che sulla Luna e quindi la perdita di atmosfera è minima e basta l'espulsione di gas dai vulcani per compensarla. Si spiega così come la Terra abbia potuto mantenere la propria atmosfera.

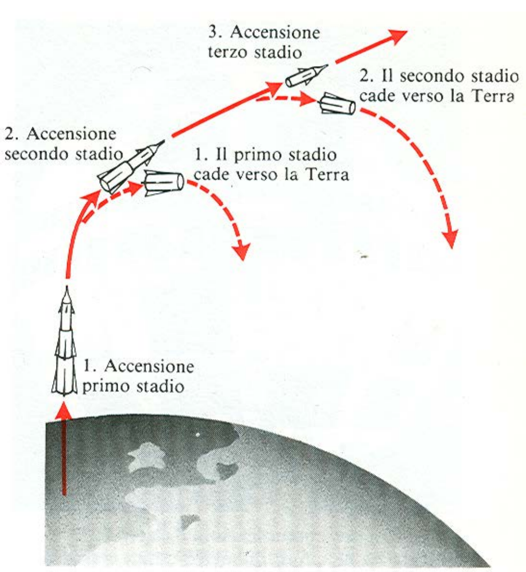
Esempio 3. Il lancio di un satellite terrestre.

Un satellite viene lanciato dalla superficie terrestre e deve girare attorno alla Terra su di una traiettoria circolare. Come si effettua il lancio?

Il razzo, pieno di carburante, alla partenza si alza lentamente da terra e penetra con piccola velocità il denso strato d'aria. Poco dopo che si è alzato, il razzo, mediante un sistema di guida, viene deviato dalla verticale e inclinato nella direzione dell'orbita prevista.

Pochi minuti dopo il decollo il primo stadio del razzo, che ha bruciato già tutto il combustibile e che quindi è diventato inutile, viene sganciato e si accende il secondo stadio. Il razzo, ora più leggero, raggiunge in breve un'elevata velocità. Dopo l'arresto della combustione del secondo stadio la direzione di volo è già quasi orizzontale e il razzo per una decina di minuti procede senza nessuna spinta. In questa fase di lancio le stazioni di controllo hanno la possibilità di correggere la traiettoria azionando i razzi ausiliari.

Eseguite le correzioni, anche il secondo stadio viene sganciato e acceso il terzo. Il satellite raggiunge l'orbìta voluta e, dopo il suo spegnimento, si sgancia dal razzo. A questo punto non è più possibile nessuna modificazione della sua traiettoria.



Il lancio di un satellite terrestre.

Il moto nel campo gravitazionale del Sole

Il Sole, i pianeti e i satelliti che costituiscono il sistema solare creano nello spazio circostante un proprio campo gravitazionale; i vari campi si sovrappongono e i loro effetti si sommano. Tuttavia, considerato che la massa del Sole è decisamente maggiore rispetto a quella dei pianeti (circa 1 milione di volte la massa della Terra e 100 milioni di volte quella della Luna), con buona approssimazione si può studiare il sistema solare come formato da piccole masse puntiformi (i pianeti) che vengono a trovarsi nel campo gravitazionale del Sole.

Considerate le enormi distanze planetarie (la distanza di Plutone dal Sole è dell'ordine di 10^{12} m, mentre il raggio del Sole è dell'ordine di soli 10^8 m), anche il Sole può essere considerato un punto materiale nel sistema, immaginando la sua massa tutta concentrata nel suo baricentro.
Entriamo così nel modello di campo gravitazionale centrale che abbiamo visto nei paragrafi precedenti.

Nell'istante in cui un pianeta entra nel campo gravitazionale del Sole, la forza che lo attira verso il Sole agisce come una forza centripeta e la traiettoria diventa curvilinea. Potremmo avere 4 casi:

- il pianeta cade sul Sole;
- il pianeta entra in un'*orbita chiusa circolare o ellittica* e si lega al Sole, continuando poi a girare intorno ad esso;
- il pianeta passa vicino al Sole, ma descrive una *traiettoria aperta parabolica*;
- il pianeta passa vicino al Sole e descrive una *traiettoria aperta iperbolica*.

Da che cosa dipende il verificarsi di uno dei casi sopra citati?
Ci aiutano nella risposta le considerazioni energetiche sul sistema Sole-Pianeta.

1° caso: il pianeta entra in orbita intorno al Sole

considerando fermo il Sole e in movimento il pianeta che si muove con velocità v a distanza *r* dal Sole, l'energia totale del sistema vale:

$$E = \frac{1}{2} m_p \mathrm{v}^2 - G \cdot \frac{M_S \cdot m_p}{r}$$

Nel moto del pianeta, che per se3mplicità possiamo considerare circolare uniforme abbiamo:

$$a_{centripeta} = a_{gravitazionale}$$

E, di conseguenza, posiamo scrivere: $\frac{\mathrm{v}^2}{r} = G \cdot \frac{M_S}{r^2} \Rightarrow \mathrm{v}^2 = G \cdot \frac{M_S}{r} \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{r}}$

L'espressione dell'energia totale diventa: $E = G \cdot \frac{M_S \cdot m_p}{2r} - G \cdot \frac{M_S \cdot m_p}{r} = -G \cdot \frac{M_S \cdot m_p}{2r}$

Notiamo anzitutto che nel caso dell'orbita circolare:

- l'energia cinetica è esattamente metà del valore assoluto dell'energia gravitazionale: quindi prevale l'energia gravitazionale;
- che *l'energia totale è negativa* e ciò significa che le masse del pianeta e del Sole sono *legate*.

Analoghe considerazioni si possono fare per un'*orbita ellittica*, considerando r come distanza media del pianeta dal Sole. Aumentando la velocità, l'orbita si modifica, ma rimane sempre chiusa fino a che l'*energia totale* risulta *negativa*.

2° caso: il pianeta cade sul Sole

Da quanto scritto prima dobbiamo dedurre che, se l'energia cinetica non è sufficiente a tenere in orbita il pianeta o qualsiasi massa che passa vicino al Sole, la massa cade sul Sole.

In questo caso, la massa del pianeta ha velocità: $\text{v} = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{r}}$

3° caso: il pianeta percorre un'orbita parabolica

Quando l'energia totale del sistema è nulla, il sistema non è più legato e il corpo celeste, pur passando vicino al Sole sfugge alla sua attrazione e riesce ad allontanarsi descrivendo una traiettoria aperta, parabolica:

$$E = \frac{1}{2} m_p \text{v}^2 - G \cdot \frac{M_S \cdot m_p}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_p \text{v}^2 = G \cdot \frac{M_S \cdot m_p}{r}$$

l'energia cinetica è uguale, in valore assoluto, all'energia gravitazionale.

In tal caso la velocità del pianeta è $\sqrt{2\frac{GM_S}{r}}$

4° caso: il pianeta percorre un'orbita iperbolica

Quando l'energia totale del sistema è maggiore di zero, cioè quando risulta:

$$E = \frac{1}{2} m_p \text{v}^2 - G \cdot \frac{M_S \cdot m_p}{r} > 0$$

l'energia cinetica supera il valore assoluto dell'energia gravitazionale e prevale su questa; il Sole non riesce a trattenere il pianeta e questo si allontana con una velocità $v = \sqrt{2\frac{GM_S}{r}}$, descrivendo una traiettoria iperbolica.

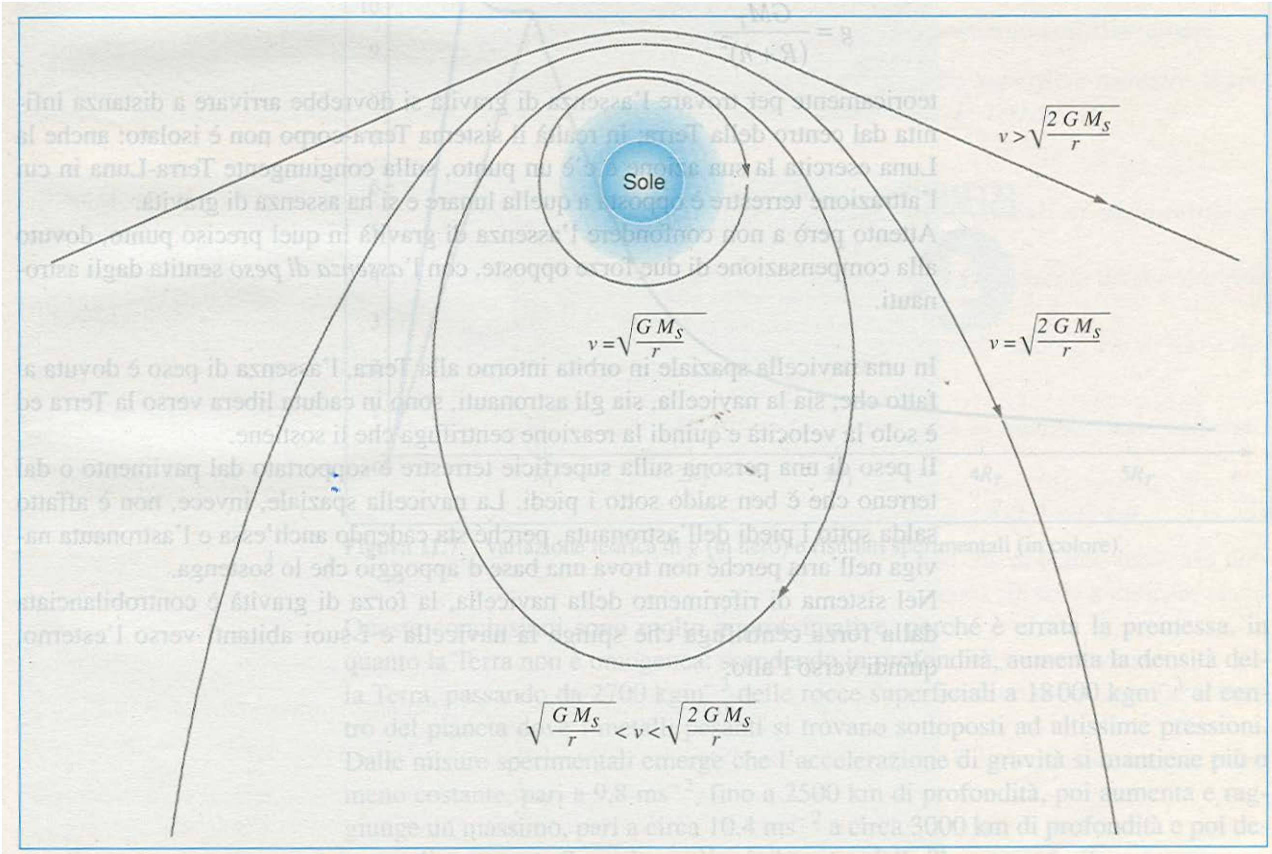


Figura 11.6 Possibili orbite dei corpi celesti nel sistema solare.

Possiamo concludere affermando che:

- *l'orbita descritta dal pianeta dipende dalla sua* **velocità**;

– se $v_P < \sqrt{\dfrac{GM_S}{r}}$ la massa **cade sul Sole**;

se $v_P = \sqrt{\dfrac{GM_S}{r}}$, il pianeta percorre un'**orbita circolare** intorno al Sole;

se $\sqrt{\dfrac{GM_S}{r}} < v_P < \sqrt{2\dfrac{GM_S}{r}}$, il pianeta percorre un'**orbita ellittica**. In tutti questi tre casi l'energia totale del sistema Sole-Pianeta è **negativa.**

Se $v_P = \sqrt{2\dfrac{GM_S}{r}}$, il pianeta percorre un'**orbita parabolica** e l'energia totale del sistema Sole-Pianeta è **nulla**;

se $v_P > \sqrt{2\dfrac{GM_S}{r}}$, il pianeta percorre un'**orbita parabolica** e l'energia totale del sistema Sole-Pianeta è **positiva**.

I due principi di conservazione nel moto dei pianeti sono

- *la conservazione dell'energia meccanica;*
- *la conservazione del momento angolare.*

Il moto nel campo gravitazionale della Terra

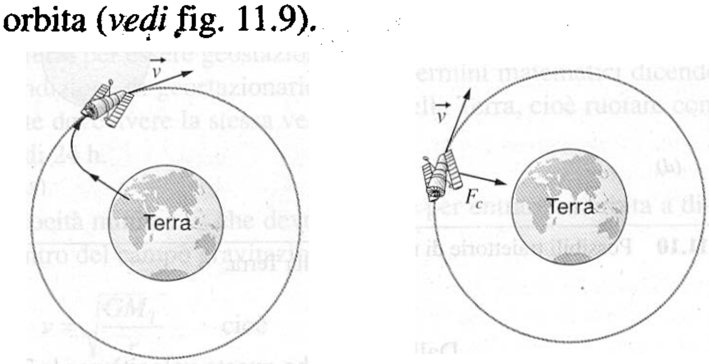
Le considerazioni del paragrafo precedente riguardo al moto di una massa nelle vicinanze del Sole, diventano valide anche per il campo gravitazionale terrestre con il solo accorgimento di sostituire la massa del Sole con quella della Terra. Esse non riguardano solo il moto della *Luna*, ma anche quello dei *satelliti* artificiali che l'uomo ha inviato nello spazio e che sono in orbita intorno alla Terra e le modalità necessarie per metterli in orbita.

Passiamo ora alla possibilità di lanciare in orbita un satellite o alla possibilità che un meteorite cada sulla Terra, entri in orbita intorno alla Terra o le passi accanto allontanandosi nello spazio.

Un corpo lanciato verso l'alto non potrà mai entrare in orbita attorno alla Terra o sfuggire nello spazio; con una maggiore velocità iniziale di lancio può salire più in alto, ma finirà sempre col ricadere.

Infatti, quando si lancia un satellite, nella prima fase il razzo che lo trasporta viene lanciato verso l'alto, affinché giunga nel più breve tempo possibile alla distanza richiesta. Successivamente la traiettoria viene inclinata e quando il satellite si trova sull'orbita desiderata, viene spinto definitivamente, per fargli raggiungere la velocità necessaria per restare in orbita (*vedi* fig. 11.9).

Figura 11.9
Messa in orbita di un satellite artificiale.
Il satellite entra in orbita quando la sua **velocità vettoriale** $\vec{v}$ è perpendicolare alla **forza gravitazionale terrestre**.



Se il satellite viene portato a una certa altezza h rispetto alla superficie terrestre e gli viene impressa una velocità v in direzione perpendicolare alla forza di gravità, il moto segue le leggi che abbiamo visto per le masse che ruotano intorno al Sole, Abbiamo visto che due sono le velocità limite per le diverse traiettorie in un campo gravitazionale:

- la velocità minima v_0 per entrare in orbita, detta **velocità di sostentamento** o anche **1ª velocità cosmica.**

Questa velocità per la Terra è:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} \approx \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{gR_T} =$$
$$= \sqrt{9{,}8\ \mathrm{ms^{-2}} \cdot 6{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{m}} = \sqrt{6{,}25 \cdot 10^6\ \mathrm{m^2 s^{-2}}} = 7{,}9\ \mathrm{kms^{-1}}$$

- la velocità minima per entrare in un'orbita aperta che permetta di allontanarsi dal campo gravitazionale. Essa viene indicata con v_f e detta **velocità di fuga** o anche **2ª velocità cosmica.**

Questa velocità per la Terra è:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} \approx \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} =$$
$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \mathrm{ms^{-2}} \cdot 6{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{m}} = \sqrt{125 \cdot 10^6\ \mathrm{m^2 s^{-2}}} = 11{,}1\ \mathrm{kms^{-1}}$$

(a) se	$v_{\text{satellite}} < v_0$,	il satellite ricade sulla Terra;
(b), (c), se	$v_0 \le v_{\text{satellite}} < v_f$,	il satellite entra in orbita chiusa;
(d), (e) se	$v_{\text{satellite}} \ge v_f$,	il satellite si allontana definitivamente dalla Terra percorrendo un'orbita aperta.

La velocità di fuga da un pianeta

La velocità di fuga da un pianeta (o da un qualsiasi altro corpo celeste) è la velocità minima con la quale un corpo deve essere lanciato dalla superficie del pianeta perché non vi faccia più ritorno.
Calcoliano la velocità di fuga da un pianeta (ad esempio la Terra.) o da un altro corpo celeste. Si chiama velocità di fuga di un corpo di massa m la minima velocità che deve essere posseduta dalla massa m per allontanarsi per sempre dal pianeta di Massa M senza più ricadervi. Supponiamo che un corpo di massa m sia lanciato dalla superficie del pianeta con una velocità iniziale avente modulo v. La sua energia potenziale inizialeè $U_i = -G\cdot\frac{mM}{R}$ con R raggio del pianeta, la sua energia cinetica iniziale è $K_i = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$, la sua energia meccanica totale è

$$E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - G\cdot\frac{m\cdot M}{R}$$

Quando il corpo di massa m non risente più dell'attrazione gravitazionale del pianeta (e questo avviene quando il corpo si trova all'infinito, cioè a grande distanza dal pianeta), la sua energia potenziale è $U_f = 0$, la sua energia cinetica è $K_f = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_\mathrm{f}^2$, la sua energia meccanica totale è:

$$E_f = K_f = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_\mathrm{f}^2 \geq 0$$

Utilizzando la legge di conservazione dell'energia meccanica, possiamo scrivere:

$$E_i = E_f \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - G\cdot\frac{m\cdot M}{R} = K_f \geq 0$$

Il valore di v, in corrispondenza del quale abbiamo $K_f = 0$, cioè $\mathrm{v}_\mathrm{f} = 0$ (il corpo di massa m ha velocità nulla) prende il nome di velocità di fuga o seconda velocità cosmica. Otteniamo:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\mathrm{v}^2 - G\cdot\frac{\cancel{m}\cdot M}{R} = 0 \qquad \mathrm{v_f} = \sqrt{2\cdot\mathrm{G}\cdot\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}}$$

Eseguendo il calcolo numerico per il pianeta Terra, ricordando che risulta $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}\,kg$, $R_T = 6{,}38\cdot10^6\,m$ otteniamo:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2\cdot\left(6{,}67\cdot10^{-11}\right)\cdot\left(5{,}98\cdot10^{24}\right)}{6{,}38\cdot10^6}} = 1{,}12\cdot10^4\,\frac{m}{s} = 11{,}2\,\frac{km}{s}$$

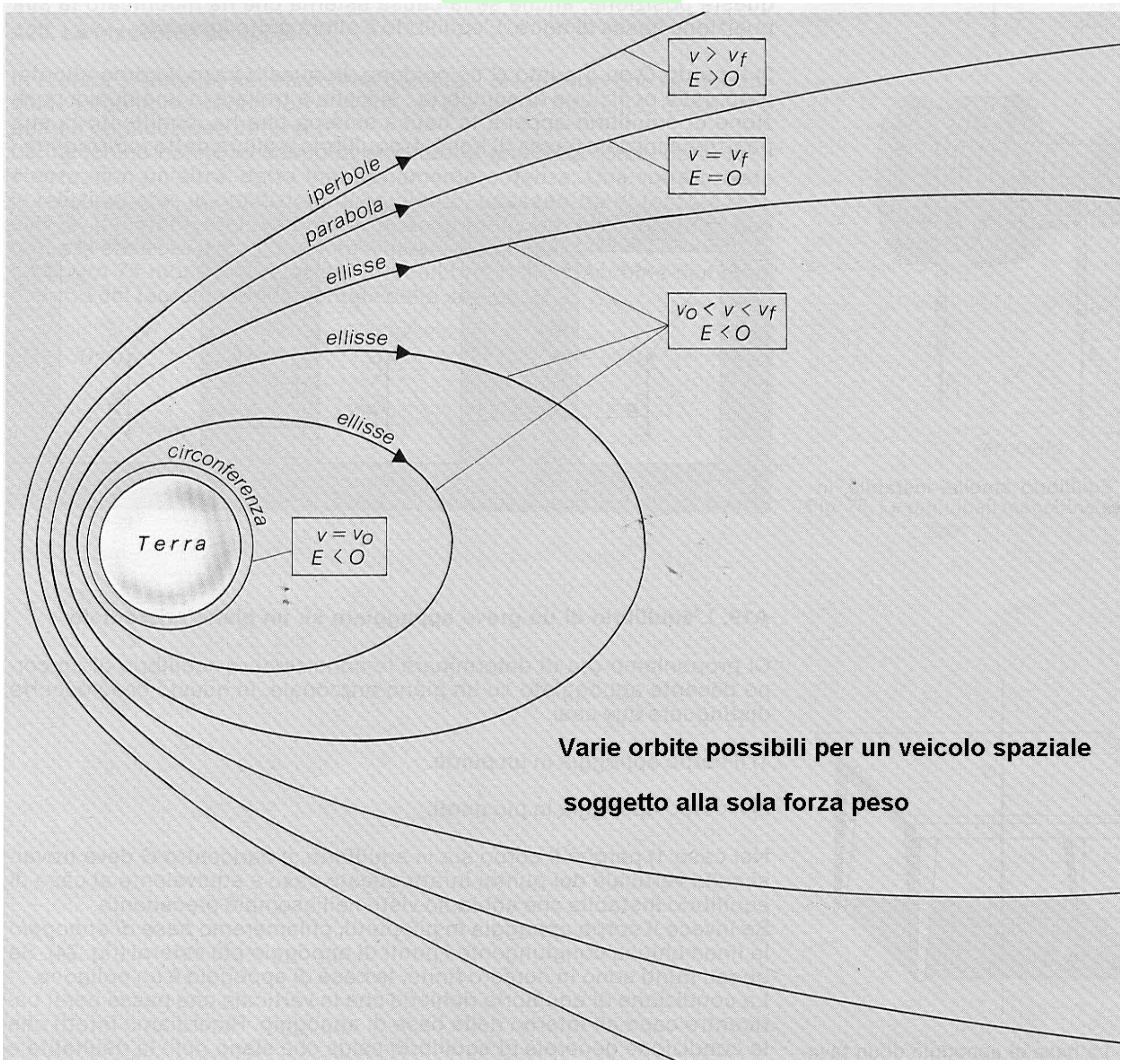
La velocità di fuga non dipende dalla massa del corpo lanciato dalla terra; essa dipende esclusivamente dalla massa della Terra e dal suo raggio.

Per $\mathrm{v_f} = 11{,}2\frac{km}{s}$ il corpo di massa m descrive un'orbita parabolica attorno alla Terra che occupa il fuoco della parabola. Il corpo si allontana dalla Terra lungo la traiettoria parabolica con il modulo della velocità che diminuisce fino ad annullarsi all'infinito.

Per $\mathrm{v_f} > 11{,}2\frac{km}{s}$ il corpo di massa m descrive un'orbita iperbolica , con la Terra che occupa uno dei due fuochi dell'iperbole.

La formula $v_f = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{R}}$ è teoricamente vera quando il corpo vine lanciato partendo dalla superficie della Terra ed il satellite dovrebbe volare raso terra, con tutti gli inconvenienti dovuti al fatto che la terra non è perfettamente sferica, ma ha pianure e rilievi. Nella pratica al posto di R dovremmo scrivere $R + h$, con h distanza del satellite dalla superficie esterna della Terra.

$$v_f = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{R + h}}$$



Varie orbite possibili per un veicolo spaziale soggetto alla sola forza peso

Conclusione finale

Quando il satellite parte dalla Terra (o meglio dalla quota $R + h$) ha energia meccanica totale

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R}$$

Si può dimostrare quanto segue:

a) $v < v_f \Rightarrow E < 0$ Il satellite non possiede energia cinetica sufficiente per sfuggire al campo gravitazionale terrestre e pertanto la sua orbita sarà una circonferenza o una ellisse.

b) $v = v_f \Rightarrow E = 0$ Il satellite possiede energia cinetica sufficiente per sfuggire al campo gravitazionale terrestre, la la sua velocità tende a zero a mano a mano che si allontana dalla Terra; si può dimostrare che la sua orbita è una parabola, con la Terra posta nel fuoco.

c) $v > v_f \Rightarrow E > 0$ Il satellite possiede energia cinetica sufficiente per sfuggire al campo gravitazionale terrestre, e la la sua velocità non tende a zero a mano a mano che si allontana dalla Terra; ma tende ad un valore finale u dato dalla legge di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\,u^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}\,v^2 - G\cdot\frac{\cancel{m}\cdot m_T}{r}$$

con $r = R_T + h$ distanza del satellite dal centro della Terra di raggio R_T .

$$u = \sqrt{v^2 - 2G\cdot\frac{m_T}{r}} = \sqrt{v^2 - 2G\cdot\frac{m_T}{R_T + h}}$$

Si può dimostrare che la sua orbita è una iperbole, con la Terra posta in uno dei due fuochi.

Satellite geostazionario o sincrono

Un satellite è detto **geostazionario** o **sincrono** quando, rispetto ad un osservatore solidale con la Terra, resta in posizione fissa ad una certa altezza al disopra dell'equatore terrestre. Un satellite geostazionario descrive sul piano equatoriale un'orbita circolare ruotando con lo stesso periodo e nello stesso verso in cui la Terra ruota attorno al suo asse. Questo significa che il tempo T impiegato daò satellite a descrivere la sua orbita circolare deve esere uguale al tempo T impiegato dalla Terra a compiera una rotazione completa attorno al proprio asse.

$$T = 24\,ore = 8,64\cdot 10^4\,s = 86400\,s$$

La condizione di geostazionarietà si traduce in termini matematici affermando che il satellite deve avere la **stessa velocità angolare** della Terra. Se il periodo di rotazione attorno al proprio asse della Terra è uguale al periodo di rivoluzione del satellite, la Terra ed il satellite ruotano assieme (in modo **sincrono**) ed il satellite rimane in una posizione fissa rispetto alla Terra. **Ad un osservatore solidale con la Terra il satellite geostazionario appare fermo**. I satelliti geostazionari sono usati per telecomunicazioni e per previsioni meteorologiche.

Determiniamo l'altezza sulla superficie terrestre a cui un tale satellite deve orbitare e la velocità con la quale percorre l'orbita.

Siano $R_T = 6380\,km$ il raggio dellaa Terra ed ha la quota del satellite sincrono che descrive l'orbita circolare con velocità lineare v.

$$v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T} \quad = \quad \text{velocità lineare del satellite geostazionario}$$

L'accelerazione centripeta del satellite è: $$a_c = \frac{v^2}{R_T + h} = \frac{4\pi^2(R_T + h)}{T^2}$$

L'accelerazione gravitazionale del satellite vale: $$a_{grav} = \frac{F_{grav}}{m} = \frac{G\cdot\frac{\cancel{m}\cdot M_T}{(R_T + h)^2}}{\cancel{m}} = G\cdot\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$a_c = a_{grav} \Rightarrow \frac{4\pi^2(R_T + h)}{T^2} = G\cdot\frac{M_T}{(R_T + h)^2} \Rightarrow (R_T + h)^3 = \frac{G\cdot M_T\cdot T^2}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M_T\cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{\left(6,67\cdot 10^{-11}\right)\cdot\left(5,98\cdot 10^{24}\right)\cdot\left(86400\right)^2}{4\pi^2}} = 4,22\cdot 10^7\, m = 42200\, km$$

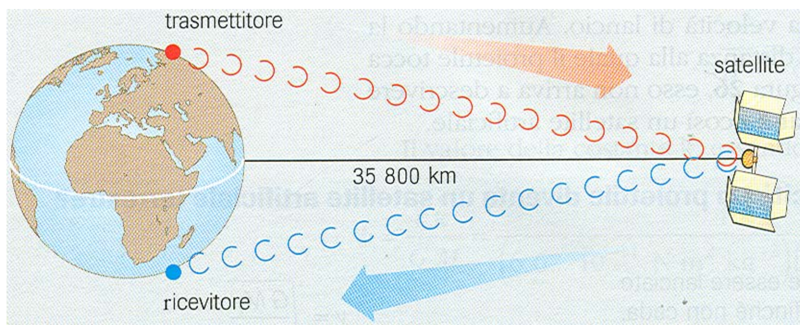
Un **satellite geostazionario** ruota attorno alla Terra descrivendo un'orbita circolare di raggio

$$r = R_T + h = 42\cdot 200\, km$$

$$h = r - R_T = 42200 - R_T = 42200 - 6380 = 35800\, km$$

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi\left(\mathrm{R_T} + h\right)}{T} = \frac{2\pi\cdot 42\,200}{86\,400} = 3,07\frac{km}{s} = 3070\frac{m}{s}$$

Telecomunicazioni intercontinentali per mezzo di un satellite geostazionario.



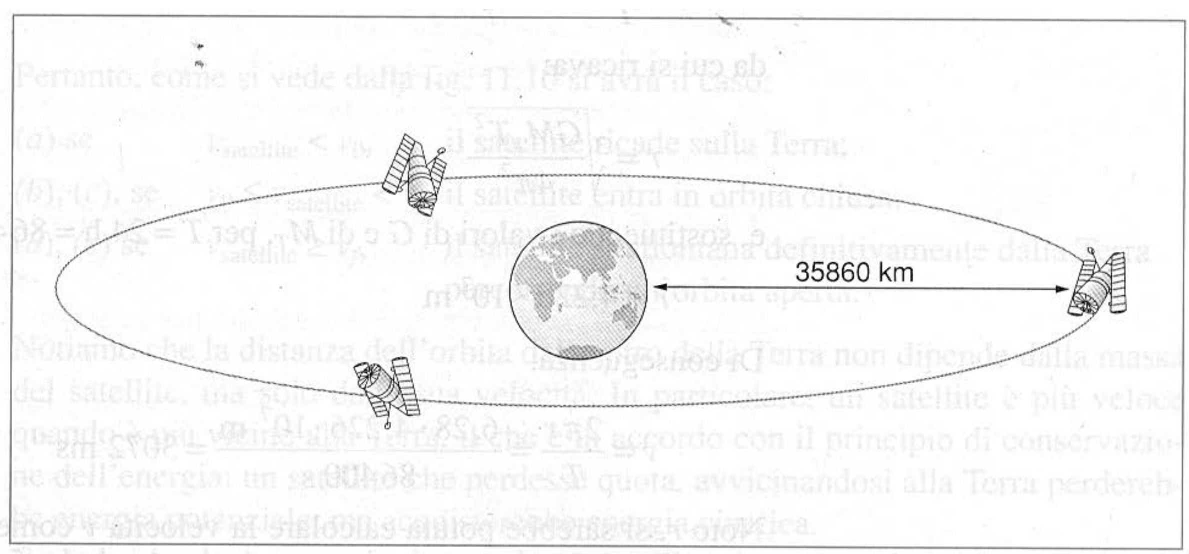
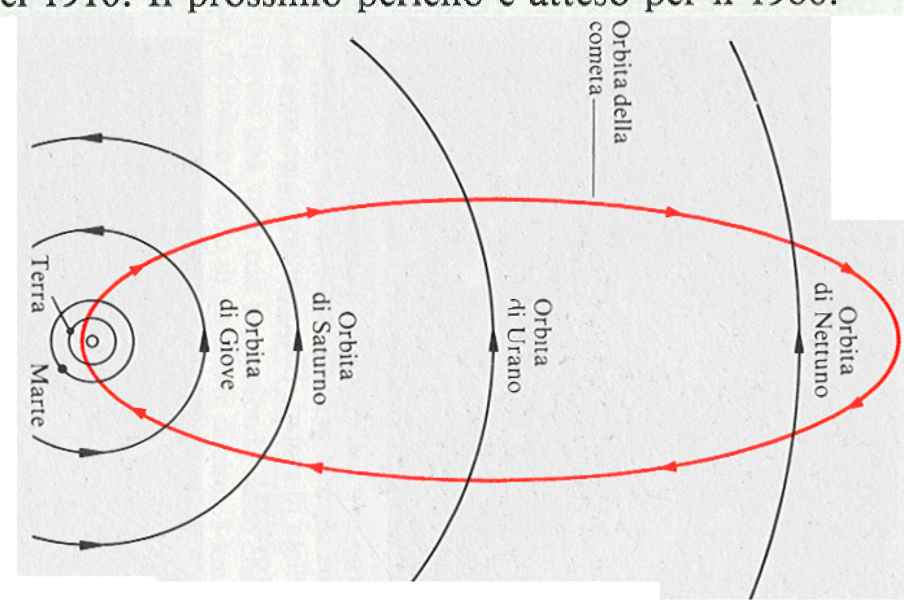


Figura 11.12 Sono sufficienti tre satelliti geostazionari situati a 120° l'uno dall'altro per coprire tutta la superficie terrestre.

I. Le comete. Le comete sono frammenti di materia il cui diametro al massimo raggiunge il valore di alcuni chilometri. In genere si muovono attorno al Sole, su orbite ellittiche molto allungate, e i loro periodi di rivoluzione possono essere di migliaia o anche di milioni di anni. Il calcolo delle loro orbite è estremamente difficile, perché il tratto di orbita lungo il quale ciascuna cometa viene osservata è molto breve e alla misura può sembrare quasi parabolico.

Quando una cometa si avvicina al Sole, si riscalda e una parte del materiale di cui è costituita evapora e finisce per formare nello spazio la coda della cometa, che può raggiungere una lunghezza di 300 milioni di chilometri, diventando molto appariscente nel cielo. La coda è costituita da gas rarefatti ed è sempre rivolta in direzione opposta al Sole. Più avanti vedremo come questo fatto sia dovuto alla pressione esercitata dalla radiazione solare. Quando la cometa si è sufficientemente allontanata dal Sole, l'evaporazione cessa e la cometa diventa invisibile fino al prossimo ritorno.

In questo modo noi raccogliamo, ad esempio per la cometa di Halley, informazioni di secolo in secolo. Questa cometa gira attorno al Sole in appena 76 anni e fu vista già nel 1066: infatti la sua apparizione è illustrata su di un arazzo dell'epoca. Successivamente venne osservata nel 1531, 1607 e 1682 e l'astronomo inglese Edmund Halley, che calcolò la sua orbita, predisse giustamente la sua nuova apparizione per il 1758. La cometa apparve poi anche nel 1835 e nel 1910. Il prossimo perielio è atteso per il 1986.



L'orbita della cometa di Halley

Ogni volta che una cometa passa vicino al Sole perde un po' di materia diventando così sempre più piccola fino a scomparire. Per esempio la cometa Biela, nel 1846, passando vicino al Sole si spezzò in due parti che ricomparvero nel 1852. Da allora la cometa è scomparsa. Sono però state osservate, nei momenti in cui la cometa avrebbe dovuto ritornare, degli sciami luminosi di stelle cadenti probabilmente i resti della cometa.

J. I meteoriti. I meteoriti sono frammenti di materia provenienti dallo spazio – probabilmente dalla fascia degli asteroidi – che cadono sulla Terra. Ad esempio, la pietra santa della Mecca è un meteorite.

Grossi meteoriti sono fortunatamente rari, infatti con la loro caduta potrebbero produrre effetti disastrosi come prova il cratere di 180 metri di profondità prodotto da un meteorite in Arizona. I piccoli meteoriti all'entrata nell'atmosfera vengono così fortemente riscaldati per attrito che vaporizzano manifestandosi come luminose stelle cadenti. Si parla allora di meteore.

Se si escludono i 400 kg di pietra che gli astronauti dell'Apollo hanno portato sulla Terra dalla Luna, i meteoriti sono gli unici materiali extraterrestri che possiamo analizzare, e rivestono quindi un ruolo molto importante nella ricerca.

Peso effettivo e peso apparente per un corpo di massa m

Assenza di gravità per un astronauta all'interno di una navicella spaziale che orbita attorno alla Terra

Domanda: Un astronauta in orbita su una nave spaziale a $1000\,km$ dalla superficie d ella Terra si sente senza peso. Perché? Forse perché, a questa quota, è trascurabile la forza di gravità esercitata dalla Terra sull'astronauta?

Iniziamo la discussione domandandoci cosa dobbiamo intendere per **peso di un corpo**. Il peso di un corpo di massa m è la forza esercitata sul corpo dalla forza di gravita..

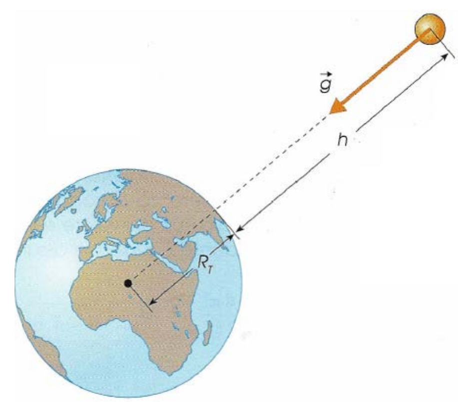
Sulla Terra, il **peso di un corpo** coincide con la forza di gravità che la Terra esercita sul corpo.

Similmente il **peso di un corpo** sulla Luna è dovuto all'attrazione gravitazionale della Luna.

Consideriamo un astronauta all'interno di una navicella spaziale in orbita alla quota $h = 1000\,km$ rispetto alla superficie sterna della Terra. A questa distanza l'accelerazione di gravità vale $g = 7{,}3\dfrac{m}{s^2}$. Infatti risulta: $g = g_o \cdot \dfrac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$ con $g_o = 9{,}8\dfrac{m}{s^2}$ accelerazione di gravità sulla superficie della Terra. Ad una quota $h = 1000\,km$ abbiamo: $g = 9{,}8 \cdot \dfrac{(6{,}37 \cdot 10^6)^2}{(6{,}37 \cdot 10^6 + 10^6)^2} = 7{,}3\dfrac{m}{s^2}$

Un corpo do massa $m = 1\,kg$ sulla Terra pesa $P = 1 \cdot 9{,}8 = 9{,}8\,N$; alla quota $h = 1000\,km$ pesa:

$$P_{R_T + h} = 1 \cdot 7{,}3 = 7{,}3\,N$$



Dimostrazione delle formule precedenti

Sulla superficie della Terra l'accelerazione (di gravità) va calcolata applicando la formula:

$$g_o = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{m \cdot R_T^2} = G \cdot \frac{m_T}{R_T^2} = 9{,}81\frac{m}{s^2} \qquad m_T = \frac{g_o \cdot R_T^2}{G}$$

Se il corpo si trova ad un'altezza h dalla superficie terrestre, la sua distanza dal centro della Terra è $R_T + h$ e l'intensità della forza gravitazionale diventa: $F = G \cdot \dfrac{m \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$

In questa situazione l'accelerazione del corpo va calcolata applicando la formula:

$$g_o = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{\cancel{m} \cdot m_T}{\cancel{m} \cdot (R_T + h)^2} = G \cdot \frac{m_T}{(R_T + h)^2} = \cancel{G} \cdot \frac{m_T}{(R_T + h)^2} \cdot \frac{g_o \cdot R_T^2}{\cancel{G}} = g_o \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Quindi, per un osservatore solidale con la Terra, un astronauta di massa $m = 60\,kg$ ha un peso pari a:

$$P = 60 \cdot 7{,}3 = 438\,N$$

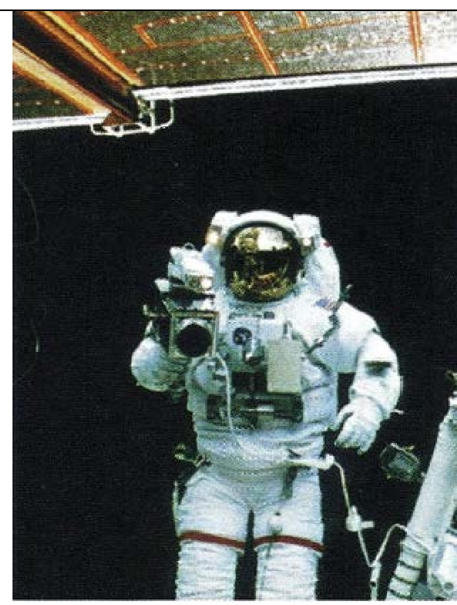
Tuttavia si dice che gli astronauti in orbita attorno alla Terra sono privi di peso.

Dobbiamo distinguere tra peso effettivo di un corpo e suo peso apparente. Si ha il peso effettivo di un corpo di massa m quando viene calcolato rispetto ad un sistema di riferimento inerziale; si ha il peso apparente quando viene calcolato rispetto ad un sistema di riferimento accelerato dove sono presenti delle forze inerziali o forze fittizie. Il peso apparente è la somma di tutte le forze reali e fittizie che agiscono sul corpo in un sistema accelerato. In un sistema di riferimento inerziale solidale con la Terra, la navicella spaziale ruta attorno alla Terra per effetto della forza gravitazionale che è la forza centripeta che consente alla navicella di descrivere la sua orbita circolare.

Ben diversa è la situazione in un sistema di riferimento non inerziale collegato con la navicella. In questo sistema la navicella, ed anche l'astronauta, è soggetto alla forza di gravità ed alla forza centrifuga, sotto l'azione delle quali è in equilibrio.

La situazione dell'astronauta all'interno della capsula spaziale è in equilibrio sotto l'azione della forza do gravità che è una forza centripeta e della forza apparente che è una forza centrifuga. Queste due forze sono uguali ed opposte. Ciò che, nel linguaggio comune, si chiama peso (apparente) è la somma vettoriale nulla della forza gravitazionale (forza reale) e della forza fittizia (forza centrifuga).

Concludiamo che rispetto alla navicella spaziale gli astronauti galleggiano in quanto sono privo di peso (apparente). In particolare possiamo precisare che se l'astronauta tiene i piedi sul pavimento della capsula non è soggetto ad alcuna reazione da parte del pavimento della capsula in qwuanto non esercita alcuna azione su di esso.

L'astronauta è in equilibrio rispetto alla navicella spaziale in quanto soggetto a due forze aventi la stessa direzione, lo stesso modulo e versi opposti: la forza di gravità $\vec{F}_g$ (forza reale in quanto nasce come interazione fra corpi) e la forza centrifuga $\vec{F}_{cen}$ (forza inerziale o apparente in quanto non nasce come interazione fra corpi ma esiste perché riferita ad un sistema accelerato).	

Problemi sulla gravitazione universale

- H.R.W. pag. 305 N° 14.6 + 14.7 + 14.8 + 14.9 + 14.10
- Mazzoldi pag. 173 N° 5-4 + Tabella di pagina 185
- Caforio Ferilli pagina 402 N° 2 pagina 419 N° 185 pag. 424 N° 08 pag. 428 N° 35 p.431 N°63