# Tabelle

## Grandezze astronomiche

| | | | |
|---|---|---|---|
| Distanza media Terra-Luna | $3{,}8 \cdot 10^{8}\,m$ | massa volumica dell'aria | $1{,}29\,\frac{kg}{m^3}$ |
| massa volumica acqua | $10^{3}\,\frac{kg}{m^3}$ | velocità del suono nell'aria | $331\,\frac{m}{s}$ |
| pressione atmosferica | $1{,}01 \cdot 10^{5}\,P_a$ | 1 **AU** ( unità astronomica ) | $1{,}5 \cdot 10^{11}\,m$ |
| 1 **parsec** ( pc ) | $3{,}08 \cdot 10^{16}\,m$ | 1 anno luce | $9{,}46 \cdot 10^{15}\,m$ |
| velocità orbitale media della terra | $2{,}98 \cdot 10^{4}\,\frac{m}{s}$ | calore di fusione dell'acqua | $540\,\frac{cal}{g}$ |
| massa volumica mercurio | $13{,}5 \cdot 10^{3}\,\frac{kg}{m^3}$ | | |

| | |
|---|---|
| **Terra** | |
| Massa | $5.98 \cdot 10^{24}$ kg |
| Raggio medio | $6.37 \cdot 10^{6}$ m |
| Accelerazione di gravità | $9.81$ m/s$^2$ |
| Pressione atmosferica | $1.01 \cdot 10^{5}$ Pa |
| Periodo di rotazione di un satellite a 100 km di altezza | 86.3 min |
| Raggio dell'orbita geosincrona | 42 200 km |
| Velocità di fuga | 11.2 km/s |
| Momento di dipolo magnetico | $8.0 \cdot 10^{22}$ A · m$^2$ |
| Campo elettrico medio alla superficie | 150 V/m |

| | |
|---|---|
| **Distanza da:** | |
| Luna | $3.82 \cdot 10^{8}$ m |
| Sole | $1.50 \cdot 10^{11}$ m |
| Stella più vicina | $4.04 \cdot 10^{16}$ m |
| Centro della galassia | $2.2 \cdot 10^{20}$ m |
| Galassia di Andromeda | $2.1 \cdot 10^{22}$ m |
| Dimensioni dell'universo osservabile | $\sim 10^{26}$ m |

## Alcuni dati sul sistema solare

| Corpi celesti | Massa ( kg ) | raggio ( m ) | Raggio medio dell'orbita ( m ) |
|---|---|---|---|
| Sole | $1{,}98 \cdot 10^{30}$ | $6{,}96 \cdot 10^{8}$ | ---- |
| Mercurio | $3{,}28 \cdot 10^{24}$ | $2{,}34 \cdot 10^{6}$ | $5{,}79 \cdot 10^{10}$ |
| Venere | $4{,}83 \cdot 10^{24}$ | $6{,}26 \cdot 10^{6}$ | $1{,}08 \cdot 10^{11}$ |
| Terra | $5{,}98 \cdot 10^{24}$ | $6{,}37 \cdot 10^{6}$ | $1{,}49 \cdot 10^{11}$ |
| Marte | $6{,}40 \cdot 10^{23}$ | $3{,}32 \cdot 10^{6}$ | $2{,}28 \cdot 10^{11}$ |
| Giove | $1{,}90 \cdot 10^{27}$ | $6{,}98 \cdot 10^{7}$ | $7{,}78 \cdot 10^{11}$ |
| Saturno | $5{,}68 \cdot 10^{26}$ | $5{,}82 \cdot 10^{7}$ | $1{,}43 \cdot 10^{12}$ |
| Urano | $8{,}67 \cdot 10^{25}$ | $2{,}37 \cdot 10^{7}$ | $2{,}87 \cdot 10^{12}$ |
| Nettuno | $1{,}05 \cdot 10^{26}$ | $2{,}24 \cdot 10^{7}$ | $4{,}50 \cdot 10^{12}$ |
| Plutone | $5{,}37 \cdot 10^{22}$ | $3{,}00 \cdot 10^{6}$ | $5{,}91 \cdot 10^{12}$ |
| Luna | $7{,}34 \cdot 10^{22}$ | $1{,}74 \cdot 10^{6}$ | $3{,}84 \cdot 10^{8}$ |

| Corpi celesti | accelerazione di gravità $\frac{m}{s^2}$ | periodo di rivoluzione | periodo di rotazione ( s ) |
|---|---|---|---|
| Sole | 2,74 | ---- | $2{,}14 \cdot 10^{6}$ |
| Mercurio | 3,73 | $7{,}60 \cdot 10^{6}$ | $7{,}60 \cdot 10^{6}$ |
| Venere | 8,34 | $1{,}94 \cdot 10^{7}$ | ----- |
| Terra | 9,81 | $3{,}16 \cdot 10^{7}$ | $8{,}62 \cdot 10^{4}$ |
| Marte | 3,73 | $5{,}94 \cdot 10^{7}$ | $8{,}86 \cdot 10^{4}$ |
| Giove | 25,89 | $3{,}74 \cdot 10^{8}$ | $3{,}54 \cdot 10^{4}$ |
| Saturno | 11,48 | $9{,}30 \cdot 10^{8}$ | $3{,}61 \cdot 10^{4}$ |
| Urano | 9,02 | $2{,}66 \cdot 10^{9}$ | $3{,}85 \cdot 10^{4}$ |
| Nettuno | 11,18 | $5{,}20 \cdot 10^{9}$ | $5{,}69 \cdot 10^{4}$ |
| Plutone | ---- | $7{,}82 \cdot 10^{9}$ | ----- |
| Luna | 1,62 | $2{,}36 \cdot 10^{6}$ | $2{,}36 \cdot 10^{6}$ |

IL SOLE, LA TERRA E LA LUNA

| *Proprietà* | *Sole*[a] | *Terra* | *Luna* |
|---|---|---|---|
| Massa (kg) | $1.99 \cdot 10^{30}$ | $5.98 \cdot 10^{24}$ | $7.36 \cdot 10^{22}$ |
| Raggio medio (m) | $6.96 \cdot 10^{8}$ | $6.37 \cdot 10^{6}$ | $1.74 \cdot 10^{6}$ |
| Densità media ($kg/m^3$) | 1410 | 5520 | 3340 |
| Accelerazione gravitazionale alla superficie ($m/s^2$) | 274 | 9.81 | 1.67 |
| Velocità di fuga (km/s) | 618 | 11.2 | 2.38 |
| Periodo di rotazione[c] (d) | 26 – 37[b] | 0.997 | 27.3 |
| Raggio medio dell'orbita (km) | $2.6 \cdot 10^{17}$[d] | $1.50 \cdot 10^{8}$[e] | $3.82 \cdot 10^{5}$[f] |
| Periodo di rivoluzione | $2.4 \cdot 10^{8}$ a[d] | 1.00 a[e] | 27.3 d[f] |

## Dati relativi al sistema solare

| pianeta | massa (kg) | raggio (m) | g ($m/s^2$) | distanza dal Sole (m) | periodo di rivoluzione (s) |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercurio | $3,18 \cdot 10^{23}$ | $2,50 \cdot 10^{6}$ | 3,63 | $5,79 \cdot 10^{10}$ | $7,60 \cdot 10^{6}$ |
| Venere | $4,90 \cdot 10^{24}$ | $6,08 \cdot 10^{6}$ | 8,87 | $1,08 \cdot 10^{11}$ | $1,94 \cdot 10^{7}$ |
| Terra | $5,98 \cdot 10^{24}$ | $6,38 \cdot 10^{6}$ | 9,81 | $1,49 \cdot 10^{11}$ | $3,16 \cdot 10^{7}$ |
| Luna | $7,34 \cdot 10^{22}$ | $1,73 \cdot 10^{6}$ | 1,62 | – | $2,36 \cdot 10^{6}$ |
| Marte | $6,41 \cdot 10^{23}$ | $3,39 \cdot 10^{6}$ | 3,73 | $2,28 \cdot 10^{11}$ | $5,94 \cdot 10^{7}$ |
| Giove | $1,90 \cdot 10^{27}$ | $7,14 \cdot 10^{7}$ | 26,0 | $7,78 \cdot 10^{11}$ | $3,74 \cdot 10^{8}$ |
| Saturno | $5,70 \cdot 10^{26}$ | $5,75 \cdot 10^{7}$ | 11,2 | $1,43 \cdot 10^{12}$ | $9,30 \cdot 10^{8}$ |
| Urano | $8,79 \cdot 10^{25}$ | $2,55 \cdot 10^{7}$ | 10,5 | $2,87 \cdot 10^{12}$ | $2,65 \cdot 10^{9}$ |
| Nettuno | $1,03 \cdot 10^{26}$ | $2,49 \cdot 10^{7}$ | 13,3 | $4,50 \cdot 10^{12}$ | $5,20 \cdot 10^{9}$ |
| Plutone | $0,13 \cdot 10^{23}$ | $1,10 \cdot 10^{6}$ | 0,73 | $5,90 \cdot 10^{12}$ | $7,85 \cdot 10^{9}$ |

## Grandezze astronomiche

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Distanza media Terra-Luna** | $3,8 \cdot 10^{8}\, m$ | **massa volumica dell'aria** | $1,29 \frac{kg}{m^3}$ |
| **massa volumica acqua** | $10^{3} \frac{kg}{m^3}$ | **velocità del suono nell'aria** | $331 \frac{m}{s}$ |
| **pressione atmosferica** | $1,01 \cdot 10^{5}\, P_a$ | 1 **AU** ( **unità astronomica** ) | $1,5 \cdot 10^{11}\, m$ |
| 1 **parsec** ( pc ) | $3,08 \cdot 10^{16}\, m$ | **1 anno luce** | $9,46 \cdot 10^{15}\, m$ |
| **velocità orbitale media della terra** | $2,98 \cdot 10^{4} \frac{m}{s}$ | **calore di fusione dell'acqua** | $540 \frac{cal}{g}$ |
| **massa volumica mercurio** | $13,5 \cdot 10^{3} \frac{kg}{m^3}$ | $angström\ =\ \mathring{A}$ | $10^{-10}\, m$ |

ALCUNE PROPRIETÀ DEI PIANETI

| | Mercurio | Venere | Terra | Marte | Giove | Saturno | Urano | Nettuno | Plutone |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distanza media dal Sole ($10^6$ km) | 57.9 | 108 | 150 | 228 | 778 | 1430 | 2870 | 4500 | 5900 |
| Periodo di rivoluzione (anni) | 0.241 | 0.615 | 1.00 | 1.88 | 11.9 | 29.5 | 84.0 | 165 | 248 |
| Periodo di rotazione[a] (giorni) | 58.7 | 243[b] | 0.997 | 1.03 | 0.409 | 0.426 | 0.451[b] | 0.658 | 6.39 |
| Velocità orbitale (km/s) | 47.9 | 35.0 | 29.8 | 24.1 | 13.1 | 9.64 | 6.81 | 5.43 | 4.74 |
| Inclinazione dell'asse rispetto all'orbita | < 28° | ≈ 3° | 23.4° | 25.0° | 3.08° | 26.7° | 97.9° | 29.6° | 57.5° |
| Inclinazione dell'orbita rispetto a quella terrestre | 7.00° | 3.39° | — | 1.85° | 1.30° | 2.49° | 0.77° | 1.77° | 17.2° |
| Eccentricità dell'orbita | 0.206 | 0.0068 | 0.0167 | 0.0934 | 0.0485 | 0.0556 | 0.0472 | 0.0086 | 0.250 |
| Diametro equatoriale (km) | 4 880 | 12 100 | 12 800 | 6 790 | 143 000 | 120 000 | 51 800 | 49 500 | 2 300 |
| Massa (Terra = 1) | 0.0558 | 0.815 | 1.000 | 0.107 | 318 | 95.1 | 14.5 | 17.2 | 0.002 |
| Densità media ($g/cm^3$) | 5.60 | 5.20 | 5.52 | 3.95 | 1.31 | 0.704 | 1.21 | 1.67 | 2.03 |
| Accelerazione gravitazionale alla superficie[c] ($m/s^2$) | 3.78 | 8.60 | 9.78 | 3.72 | 22.9 | 9.05 | 7.77 | 11.0 | 0.03 |
| Velocità di fuga (km/s) | 4.3 | 10.3 | 11.2 | 5.0 | 59.5 | 35.6 | 21.2 | 23.6 | 1.3 |
| Satelliti noti | 0 | 0 | 1 | 2 | 16 + anelli | 18 + anelli | 15 + anelli | 8 + anelli | 1 |

## Dati relativi alla terra

| | |
|---|---|
| massa | $5,98 \cdot 10^{24}$ kg |
| raggio medio | $6,378 \cdot 10^6$ m |
| accelerazione di gravità $g$ | 9,81 $m/s^2$ |
| distanza media dal Sole | $1,49 \cdot 10^{11}$ m |
| distanza media dalla Luna | $3,84 \cdot 10^8$ m |
| densità dell'aria | 1,29 $kg/m^3$ |
| densità dell'acqua | 1000 $kg/m^3$ |
| velocità del suono nell'aria (20° C) | 343 m/s |
| pressione atmosferica | $1,013 \cdot 10^5$ Pa |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Marte** | $0,37 \cdot g$ | **Terra** | $g$ |
| **Luna** | $0,17 \cdot g$ | **Sole** | $28 \cdot g$ |
| **Mercurio** | $0,34 \cdot g$ | **Urano** | $0,84 \cdot g$ |
| **Saturno** | $1,06 \cdot g$ | **Giove** | $2,51 \cdot g$ |
| **Venere** | $0,83 \cdot g$ | | |

**Valore della gravità sulla superficie di alcuni corpi celesti del sistema solare calcolato in unità di accelerazione di gravità g sulla Terra , nell'ipotesi che i corpi celesti siano sferici .**

| | Massa (kg) | Raggio (m) | Periodo di rotazione (s) | Eccentricità orbitale | Raggio medio dell'orbita (m) | Periodo di rivoluzione (a = anno g = giorno) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sole | $1{,}98 \cdot 10^{30}$ | $6{,}96 \cdot 10^{8}$ | $2{,}14 \cdot 10^{6}$ | — | — | — |
| Mercurio | $0{,}33 \cdot 10^{24}$ | $2{,}57 \cdot 10^{6}$ | $7{,}60 \cdot 10^{6}$ | 0,2056 | $5{,}79 \cdot 10^{10}$ | 87,97 g |
| Venere | $4{,}83 \cdot 10^{24}$ | $6{,}31 \cdot 10^{6}$ | $2{,}6 \cdot 10^{6}$ | 0,0068 | $1{,}08 \cdot 10^{11}$ | 224,70 g |
| Terra | $5{,}98 \cdot 10^{24}$ | $6{,}38 \cdot 10^{6}$ | $8{,}61 \cdot 10^{4}$ | 0,0167 | $1{,}50 \cdot 10^{11}$ | 365,25 g |
| Marte | $6{,}37 \cdot 10^{23}$ | $3{,}43 \cdot 10^{6}$ | $8{,}85 \cdot 10^{4}$ | 0,0934 | $2{,}28 \cdot 10^{11}$ | 686,98 g |
| Giove | $1{,}90 \cdot 10^{27}$ | $7{,}18 \cdot 10^{7}$ | $3{,}54 \cdot 10^{4}$ | 0,0483 | $7{,}78 \cdot 10^{11}$ | 11,86 a |
| Saturno | $5{,}67 \cdot 10^{26}$ | $6{,}03 \cdot 10^{7}$ | $3{,}60 \cdot 10^{4}$ | 0,0560 | $1{,}43 \cdot 10^{12}$ | 29,46 a |
| Urano | $8{,}80 \cdot 10^{25}$ | $2{,}67 \cdot 10^{7}$ | $3{,}88 \cdot 10^{4}$ | 0,0461 | $2{,}87 \cdot 10^{12}$ | 84,02 a |
| Nettuno | $1{,}03 \cdot 10^{26}$ | $2{,}48 \cdot 10^{7}$ | $5{,}69 \cdot 10^{4}$ | 0,0100 | $4{,}50 \cdot 10^{12}$ | 164,79 a |
| Plutone | $1{,}37 \cdot 10^{22}$ | $1{,}17 \cdot 10^{6}$ | $5{,}7 \cdot 10^{4}$ | 0,2484 | $5{,}9 \cdot 10^{12}$ | 247,70 a |
| Luna | $7{,}34 \cdot 10^{22}$ | $1{,}74 \cdot 10^{6}$ | $2{,}36 \cdot 10^{6}$ | 0,055 | $3{,}84 \cdot 10^{8}$ | 27,3 g |

## DOMANDE TEORICHE

**D01)** Quanto vale la costante di gravitazione universale G sulla luna ?

**R01)** Lo stesso che sulla superficie terrestre o in qualsiasi altro luogo , poiché si tratta di una costante universale

**D02)** Dire se la forza che determina la rotazione della luna attorno alla terra è il risultante della forza centripeta e della forza gravitazionale dovuta alla terra .

**R02)** Falso ; le due forze sono la stessa identica cosa

**D03)** La massa della luna è molto più piccola della massa della terra . E' giusto dire che la Luna attrae la Terra con una forza minore di quella che la Terra esercita sulla Luna ?

**R03)** No ,in quanto per la terza legge della dinamico la Terra e la Luna interagiscono fra loro con una a avente la stessa intensità.

**D04)** Immaginiamo che venga scoperto un pianeta che orbita attorno al Sole ad una distanza doppia di quella della terra . Che periodo di rivoluzione $T_1$ ha quel pianeta ?

**R04)** Si applica la terza legge di Keplero $T^2 = k\,r^3$ ; $T_2^2 : T_1^2 = r_2^3 : r_1^3$ , $r_2 = 2r_1 \Rightarrow$

$T_2^2 = 8 \cdot T_1^2 \quad T_2 = T_1 \cdot \sqrt{8}$ , $T_1$ = periodo di rivoluzione della terra ; $T_2$ circa 2 anni e 10 mesi

**D05)** A parità di distanza , se triplichiamo la massa die due corpi , di quanto aumenta la forza di attrazione gravitazionale ?

**R05)** di 9 volte

**D06)** Calcolare la massa del Sole , conoscendo il raggio dell'orbita terrestre ed il periodo di rivoluzione della terra .

**R06)** $m_S = \dfrac{4\pi^2}{G} \cdot \dfrac{r^3}{T^2} = 1{,}96 \cdot 10^{30}\ kg$

**D07)** Calcolare la velocità **v** ed il periodo di rivoluzione **T** di un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Terra ad un'altezza di $200\,km$

**R07)** $v = 7{,}8\dfrac{km}{s}$ $\quad T = 88\,\text{minuti}$ . Si tratta di calcolare l'accelerazione di gravità **g** a $6370 + 200$ chilometri dal centro della terra e ricordare le formule relative al moto circolare uniforme che ha **g** come accelerazione centripeta . Oppure possiamo ricorrere alla terza legge di Keplero , conoscendo i dati relativi al moto della Luna

**D08)** Calcolare la velocità **v** ed il periodo di rivoluzione **T** di un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Luna ad un'altezza di $200\,km$

**R08)** $v = 1{,}6\dfrac{km}{s}$ $\quad T = 124$ minuti .

**D9:** A che quota deve trovarsi l'orbita di un satellite geostazionario ? Un satellite è **geostazionario** quando orbita in $24$ ore nello stesso senso della rotazione Terra attorno al proprio asse . In questo modo il satellite appare praticamente fermo nel cielo .

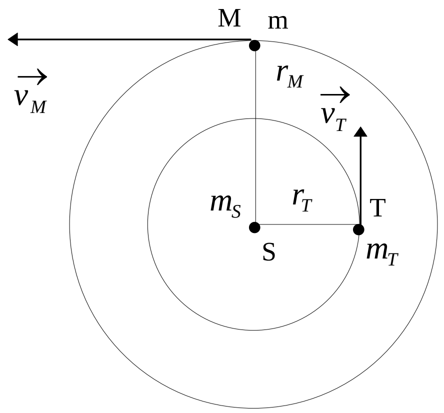
**R09)** $35900\,km$

**D10)** Calcolare il valore dell'accelerazione di gravità $g_G$ si Giove , sapendo che il suo diametro è $11{,}3$ volte maggiore di quello terrestre e la massa $m_G$ $337$ volte maggiore di quella terrestre .

**R10)** $g_G = 2{,}6\,g = 25{,}48\dfrac{m}{s^2}$ . Ciò significa che un corpo , su Giove , persa circa $2{,}6$ volte quello che pesa sulla Terra .

**D11)** La Terra e Marte sono due pianeti del Sole . Supponendo che essi descrivono due orbite circolari aventi rispettivamente raggi $r_T$ ed $r_M$ , calcolare il rapporto delle loro velocità lineari .

**R11)**




$a_T = \dfrac{v_T^2}{r_T}$ = accelerazione centripeta della Terra

$a_M = \dfrac{v_M^2}{r_M}$ = accelerazione centripeta di Marte

$$F_T = m_T \cdot \frac{v_T^2}{r_T} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_T}{r_T^2}$$

$$F_M = m \cdot \frac{v_M^2}{r_M} = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r_M^2}$$

$$G \cdot m_S = v_T^2 \cdot r_T = v_M^2 \cdot r_M \quad \Rightarrow \quad \frac{v_T}{v_M} = \sqrt{\frac{r_M}{r_T}} \quad \Rightarrow \quad v_T > v_M$$

**Problemi risolti**

Si sa che un satellite descrive un'orbita circolare attorno alla Terra a una distanza di circa 500 km dalla sua superficie in circa 98 minuti.
Determinare la frequenza di rotazione del satellite, la sua velocità angolare e periferica, la sua accelerazione centripeta.

Per la frequenza:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{98\ \text{min} \cdot 60\ \text{s/min}} = 1{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{Hz}$$

Per la velocità angolare:

$$\omega = 2\pi f = 1{,}07 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Per la velocità periferica:

$$v = \omega R = 1{,}07 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\ (6400 + 500) \cdot 10^{3}\ \text{m} =$$

$$= 7{,}38 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Per l'accelerazione centripeta:

$$a_c = \omega^2 R =$$

$$= \left(1{,}07 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \left(6400 + 500\right) 10^{3}\ \text{m} = 7{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

È noto che un satellite artificiale orbitante a una distanza media di 500 km dalla superficie terrestre compie una rivoluzione in 95 minuti.
Tenendo presente questo dato, valutare la massa della Terra.

In base alla relazione:

$$G \frac{M_T \, m_s}{(R_T + 500 \text{ km})^2} = m_s \frac{4\pi^2}{T^2} (R_T + 500 \text{ km})$$

si ottiene:

$$M_T = \frac{4\pi^2}{T^2 G} (R_T + 500 \text{ km})^3 \simeq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

La Terra e il Sole si attirano reciprocamente con una forza pari a $3{,}55 \cdot 10^{22}$N. Conoscendo la massa della Terra ($5{,}979 \cdot 10^{24}$kg), calcola la massa del Sole, sapendo che il raggio medio dell'orbita terrestre è lungo $1{,}4957 \cdot 10^{11}$m

**DATI**

$m_T = 5{,}979 \cdot 10^{24}$kg

$r$ = distanza Terra-Sole = $1{,}4957 \cdot 10^{11}$m

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$

Da $F = G \dfrac{m_T \cdot m_S}{r^2}$ si ha :

$$m_S = \frac{F \cdot r^2}{G\, m_T} = \frac{3{,}55 \cdot 10^{22}\, \cancel{N} \cdot (1{,}4957 \cdot 10^{11})\, \cancel{m}^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \cancel{Nm}^2\, \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}979 \cdot 10^{24}\, \text{kg}} =$$

$$= \frac{3{,}55 \cdot 10^{22} \cdot 2{,}237 \cdot 10^{22}}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}979 \cdot 10^{24}} \text{ kg} = 1{,}991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

**La massa del sole è :** $1{,}991 \cdot 10^{30}\ kg$

Un satellite terrestre ha un periodo di $10^4$ s. Calcolare il raggio della sua orbita e la velocità con cui la percorre.

In base alla relazione:

$$G \frac{M_T m_s}{R_{TS}^2} = m_s \frac{4\pi^2}{T^2} R_{TS}$$

si ottiene:

$$R_{TS} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}} \simeq 10^7 \text{ m}$$

Per la velocità:

$$v = \frac{2\pi R_{TS}}{T} = 6{,}28 \cdot 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calcolare a quale distanza dalla superficie terrestre deve essere lanciato un satellite affinché esegua un'orbita equatoriale geostazionaria, tale, cioè, che rimanga fermo rispetto alla Terra.

Trattandosi di un'orbita geostazionaria, il suo periodo deve essere di 86 400 s. Perciò dalla relazione:

$$G \frac{M_T}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

si ricava:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2} \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot (86\ 400\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 4{,}23 \cdot 10^7\ \mathrm{m} = 42\ 300\ \mathrm{km}$$

Un astronauta ruota attorno a un pianeta su un'orbita avente un raggio doppio di quello del pianeta medesimo.
Egli è in grado di misurare la sua accelerazione centripeta e trova che vale 3 m/s$^2$.
Quanto peserebbe l'astronauta (che ha massa pari a 60 kg) se atterrasse sul pianeta?

Quando l'astronauta ruota sull'orbita di raggio $2\,R_p$ si ha:

$$a_c = \frac{G\,M_p}{(2\,R_p)^2} = \frac{G}{4}\,\frac{M_p}{R_p^2}$$

Quando l'astronauta si trova sul pianeta, il suo peso è dato da:

$$P_a = \frac{G\,M_p\,m_a}{R_p^2}$$

Eliminando nelle due equazioni il termine $G\,M_p/R_p^2$ si ottiene:

$$P_a = 4\,a_c\,m_a = 4 \cdot 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 60\text{ kg} = 720\text{ N}$$

**Supponendo circolare la traiettoria della Terra attorno al Sole , con raggio** $r = 1{,}49 \cdot 10^{11}\, m$ **, calcolare la velocità della Terra nel moto annuale , sapendo che la massa del Sole vale** $m_S = 2 \cdot 10^{30}\, kg$ **.**

**( Fazio Pag. 277 N° 2 )**

**Soluzione.** Essendo l'orbita di equilibrio, la forza centripeta agente sulla Terra coincide con quella gravitazionale, perciò

$$m_T \frac{v^2}{r} = G \frac{m_T m_\odot}{r^2} ,$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{G m_\odot}{r}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1{,}49 \cdot 10^{11}}} =$$

$$= \sqrt{8{,}95 \cdot 10^8} = 2{,}99 \cdot 10^4 \text{ m/s} =$$

$$= 107\,640 \text{ km/h} .$$

**Essendo note la massa della Terra** $m_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\, kg$ **e la distanza media Terra-Luna** $d = 3{,}84 \cdot 10^5\, km$ **, calcolare la velocità orbitale della Luna nel moto di rivoluzione attorno alla Terra . Ricavare poi il periodo di rivoluzione della Luna .**

**( Fazio Pag. 277 N° 3 )**

**Soluzione.** Nel moto di rivoluzione attorno alla Terra la Luna è sottoposta a una forza centripeta $m_L v^2/d$ che coincide con la forza gravitazionale newtoniana, ovvero

$$\frac{m_L v^2}{d} = \frac{G m_L m_T}{d^2} ,$$

cioè

$$v = \sqrt{\frac{G m_T}{d}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{3{,}84 \cdot 10^8}} =$$

$$= \sqrt{1{,}04 \cdot 10^6} = 1{,}02 \cdot 10^3 \text{ m/s} .$$

Il periodo di rivoluzione è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi d}{v} =$$

$$= \frac{6{,}28 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{1{,}02 \cdot 10^3} = 2{,}364 \cdot 10^6 \text{ s}$$

Il periodo misurato vale $T_o = 27{,}3 \cdot 86400\, s = 2{,}359 \cdot 10^6\, s$

**Calcolare l'accelerazione di gravità ad una quota $h = 1000\,km$ dalla superficie terrestre e ad una profondità $s = 1000\,km$**

**( Fazio Pag. 283 N° 6 )**

**Soluzione.** In base alla (6.12):

$$g = \frac{G\,m_T}{(r_T + h)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(7{,}37 \cdot 10^6)^2} = 7{,}34\ \mathrm{m/s^2}.$$

In base invece alla (6.13), assumendo per la densità media della Terra il valore $\varrho = 5{,}52\ \mathrm{g/cm^3}$, si ha:

$$g = \frac{4}{3}\,\pi\,\varrho\,G\,r\,,$$

dove $r = 5{,}37 \cdot 10^6$ m.
Allora:

$$g = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}52 \cdot 10^3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}37 \cdot 10^6 = 8{,}28\ \mathrm{m/s^2}\,,$$

ben diversa dalle previsioni teoriche, probabilmente a causa delle disomogeneità della Terra.

***Supponendo che la Terra sia omogenea con densità $\varrho = 5\ g/cm^3$, se si scava un tunnel che collega polo Nord e Sud terrestri, di quale moto si muoverà un sasso lasciato cadere nel tunnel al Polo Nord con velocità iniziale nulla?***

**Soluzione.** Quando il sasso cade, esso viene attratto verso il centro della Terra, ma, durante la caduta, la massa terrestre che lo attrae è sempre inferiore e contemporaneamente diventa minore la distanza. Per stabilire quale dei due effetti è dominante, scriviamo la massa terrestre nella forma

$$m_T = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho ,$$

ovvero come prodotto tra volume e densità.

La forza gravitazionale si scrive:

$$F = -\frac{G\,m\,m_T}{r^2} = -\frac{G\,m\,\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho}{r^2} =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi G \varrho\, m\, r .$$

Ma, per la legge di Newton ($F = m\,a$), risulta:

$$m\,a = -\frac{4}{3}\pi G \varrho\, m$$

$$a + \frac{4}{3}\pi G \varrho\, r = 0$$

Se indichiamo con $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G \varrho$, la precedente equazione diventa

$$a + \omega^2 r = 0 .$$

Tale equazione è caratteristica di un moto armonico semplice con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \varrho} ,$$

cioè con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G \varrho}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}} .$$

Sostituendo il valore di $\varrho$, si ricava che il moto del sasso è armonico semplice attorno al centro della Terra con periodo

$$T = \sqrt{\frac{3 \cdot 3{,}14}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^3}} =$$

$$= 5300\ \mathrm{s} .$$

Supponiamo di avere scavato una galleria che attraversi la Terra dall'uno all'altro polo, come nella figura 14-8. Ammettiamo che la Terra sia una sfera omogenea, e che non giri. Trovate la forza gravitazionale che agisce su una particella di massa $m$ lasciata cadere nella galleria in funzione della distanza $r$ dal centro della Terra.

**SOLUZIONE:** La forza che agisce sulla particella dipende soltanto dalla massa $M'$ della Terra che è contenuta in una sfera di raggio $r$. La parte della Terra esterna a questa sfera non esercita complessivamente alcuna forza sulla particella.

La massa $M'$ vale

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}, \qquad (14\text{-}18)$$

ove $V'$ è il volume occupato da $M'$, contenuto nella zona interna alla circonferenza tratteggiata nella figura 14-8, e $\rho$ la densità della Terra, considerata omogenea.

Dalle 14-1 e 14-18 si ricava la forza che agisce sulla particella:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{GmM'}{r^2} = \\ &= -\frac{Gm\rho 4\pi r^3}{3r^2} = \\ &= -\left(\frac{4\pi mG\rho}{3}\right) r = -Kr, \end{aligned} \qquad (14\text{-}19)$$

nella quale la costante $K$ vale $4\pi mG\rho/3$. Abbiamo inserito un segno meno per ricordare che i vettori forza $\mathbf{F}$ e spostamento $\mathbf{r}$ sono opposti, il primo diretto verso il centro della Terra e l'altro uscente da quel punto. La 14-19 afferma dunque che la forza che agisce sulla particella è proporzionale al suo spostamento ma diretta in senso opposto: proprio il caso della legge di Hooke.

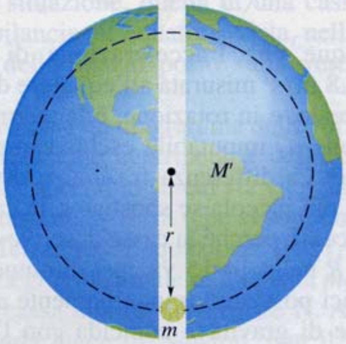



**FIGURA 14-8** Problema svolto 14-5. Una particella è lasciata cadere in una galleria scavata attraverso la Terra.

**H. R. W. Pag. 302**

**( Fazio Pag. 283 N° 7 )**

**Su un pianeta la cui accelerazione di gravità vale $g_P = 19{,}6\dfrac{m}{s^2}$ , quale massa avrà un corpo che sulla Terra pesa $P = 19{,}6\,N$ e quale sarà il suo peso sul pianeta ?**

**( Fazio Pag. 284 N° 8 )**

**Soluzione.** La relazione tra massa e peso è:

$$P = m\,g\,.$$

Sulla Terra il corpo che pesa $P = 19{,}6$ N, ha una massa

$$m = \frac{P}{g} = \frac{19{,}6}{9{,}8} = 2 \text{ kg}\,.$$

Essendo la massa una caratteristica universale dei corpi, anche sul pianeta la massa manterrà lo stesso valore. Sarà poi

$$P' = m\,g' = 2 \cdot 19{,}6 = 39{,}2 \text{ N}\,.$$

**Se le dimensioni di un pianeta sferico omogeneo aumentassero senza variazioni di densità , il peso di un oggetto sulla superficie del pianeta aumenterebbe o diminuirebbe ?**

**( Fazio Pag. 284 N° 9 )**

**Soluzione.** L'aumento di dimensioni implica un aumento di volume, quindi di massa, del pianeta, perciò la forza gravitazionale esercitata sull'oggetto deve aumentare; tuttavia ora l'oggetto si trova più lontano dal centro del pianeta e la forza gravitazionale deve diminuire. Quale dei due effetti è predominante? Per rispondere basta scrivere la (6.11):

$$g = \frac{G\,m_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{p}}^2}\,,$$

dove, essendo il pianeta sferico:

$$m_{\mathrm{p}} = \frac{4}{3}\,\pi\,r_{\mathrm{p}}^3\,\varrho\,.$$

Allora

$$g = G\,\frac{4}{3}\,\frac{\pi\,r_{\mathrm{p}}^3}{r_{\mathrm{p}}^2}\,\varrho = \frac{4}{3}\,\pi\,\varrho\,G\,r_{\mathrm{p}}\,.$$

L'aumento di dimensioni implica un aumento della gravità, quindi del peso dell'oggetto.

**A quale altezza dalla Terra dovrebbe orbitare un satellite << STAZIONARIO >> , tale cioè da avere un periodo di rivoluzione uguale alla durata della rotazione terrestre , in modo da potere essere sempre osservato nello stesso punto del cielo ? ( Fazio Pag. 289 N° 11 )**

Trattandosi di un'orbita geostazionaria, il suo periodo deve essere di 86 400 s. Perciò dalla relazione:

$$G\frac{M_T}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}R$$

si ricava:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}\cdot 6\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\cdot (86\,400\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 4{,}23\cdot 10^7\ \mathrm{m} = 42\,300\ \mathrm{km}$$

**Quale sarà la velocità di un satellite che percorre un'orbita circolare di raggio $r = 6600\,km$ , cioè a $230\,km$ dalla superficie terrestre ? Quanto tempo impiegherà tale satellite a compiere un giro completo attorno alla Terra ?**
**( Fazio Pag. 289 N° 12 )**

**Soluzione.** La velocità cercata è data (vedi l'esercizio precedente) da

$$v = \sqrt{\frac{G\,m_T}{r}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}6\cdot 10^{6}}} =$$

$$= 7{,}77\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 27\,972\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Il periodo del satellite è dato da

$$T = 2\pi r/v = \frac{6{,}28\cdot 6{,}6\cdot 10^6}{7{,}77\cdot 10^3} =$$

$$= 5{,}33\cdot 10^3\mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 28\ \mathrm{min}\ 50\ \mathrm{s}.$$

**Un satellite artificiale di massa $M = 80\,kg$ viene messo in orbita ad un'altezza dalla superfice terrestre pari al raggio terrestre . Calcolare :**

**a) la massa del satellite in orbita b) il peso del satellite in orbita c) la forza centripeta agente sul satellite d) la sua energia potenziale gravitazionale e) la sua velocità periferica f) la sua energia cinetica .**

**massa della Terra = $m_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg$ , raggio della Terra = $r_T = 6{,}37 \cdot 10^6\,m$ )**

**( Fazio Pag. 294 N° 14 )**

**Soluzione.**

a) La massa di un corpo è una caratteristica universale, indipendentemente dalla gravità, perciò il satellite in orbita avrà sempre massa 80 kg.

b) Il peso non è altro che la forza di attrazione newtoniana:

$$F = G\frac{m_T M}{(2\,r_T)^2} = \frac{G\,m_T\,M}{4\,r_T^2} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 80}{4 \cdot (6{,}37)^2 \cdot 10^{12}} =$$

$$= 196{,}6\text{ N} = 20{,}1\text{ kgf}.$$

c) La forza centripeta coincide con la forza gravitazionale, quindi vale 196,6 N.

d) L'energia potenziale gravitazionale del sistema satellite-Terra (non del solo satellite!) è:

$$U = -G\frac{m_T M}{2\,r_T} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 80}{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} =$$

$$= -2{,}5 \cdot 10^9\text{ J}.$$

e) Nota la forza centripeta calcolata in c), risulta

$$v = \sqrt{\frac{2\,r_T\,F_{cp}}{M}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot 1{,}97 \cdot 10^2}{80}} =$$

$$= 5{,}6 \cdot 10^3\text{ m/s}.$$

f) $K = \frac{1}{2}M\,v^2 = 40 \cdot (5{,}6 \cdot 10^3)^2 =$

$$= 1{,}25 \cdot 10^9\text{ J}.$$

**A quale distanza dalla Terra può orbitare un satellite artificiale lanciato con velocità $v_o = 8 \frac{km}{s}$ ?**

**( Fazio Pag. 294 N° 15 )**

**Soluzione.** Applicando il principio di conservazione dell'energia e indicando con $x$ la distanza richiesta, si ha

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{m m_T}{r_T} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m m_T}{x}; \tag{6.24}$$

nella relazione scritta sopra sembrerebbe che le incognite siano due, ovvero la velocità $v$ del satellite e il raggio dell'orbita; tuttavia, dobbiamo ricordare che, anche a distanza $x$ dal centro della Terra, la forza gravitazionale newtoniana deve uguagliare la forza centripeta e perciò si potrà scrivere

$$G \frac{m m_T}{x^2} = \frac{m v^2}{x},$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{G m_T}{x}},$$

che, sostituita nella (6.24), porta al risultato seguente:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G m m_T}{r_T} = -\frac{1}{2} \frac{G m m_T}{x},$$

da cui

$$x = \frac{G m_T r_T}{(2 G m_T - v_0^2 r_T)} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{(2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} - 64 \cdot 10^6 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6)} =$$

$$= \frac{2{,}54 \cdot 10^{21}}{3{,}9 \cdot 10^{14}} = 6{,}51 \cdot 10^6 \text{m} = 6510 \text{ km } (140 \text{ km di altezza}).$$

**Calcolare il lavoro compiuto dalle forze gravitazionali quando un corpo di massa** $m = 5\,kg$ **viene allontanato dalla distanza** $r_1 = 100\,km$ **alla distanza** $r_2 = 500\,km$ **. ( Fazio Pag. 295 N° 17 )**

**Soluzione.** Innanzi tutto è necessario precisare che, per allontanare un corpo dalla superficie terrestre il lavoro viene compiuto *contro* le forze gravitazionali e non dalle forze gravitazionali, in quanto queste tendono ad avvicinare due corpi e non ad allontanarli.
Tale lavoro risulta dato, in base alla (6.21), da

$$L = -\,G\,m\,m_T\left(\frac{1}{r_T + r_1} - \frac{1}{r_T + r_2}\right),$$

dove $r_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m .
Allora:

$$L = -\,6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}47 \cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}87 \cdot 10^6}\right) =$$

$$= -\,1{,}79 \cdot 10^7\,\text{J}\,.$$

Il segno negativo sta a indicare che il lavoro viene compiuto *contro* le forze gravitazionali.

**La velocità da imprimere ad un oggetto perché diventi un satellite terrestre è detta priva velocità cosmica** $v_1$ **. Ipotizzando orbite circolari , calcolare il rapporto tra la prima e la seconda velocità cosmica . ( Fazio Pag. 297 N° 20 )**

**Soluzione.** Il satellite è in orbita circolare quando la forza centripeta coincide con la forza di attrazione gravitazionale, ovvero quando

$$\frac{m\,v_1^2}{r} = \frac{G\,m\,m_T}{r^2},$$

cioè

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\,m_T}{r}}\,.$$

La velocità di fuga, o seconda velocità cosmica, è data da

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\,G\,m_T}{r_T}}\,.$$

Perciò

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_T}{2\,r}}\,.$$

Essendo *r* il raggio dell'orbita del satellite, il minimo valore di *r* coincide con il raggio terrestre: in tal caso il satellite viaggerebbe "rasoterra" e il rapporto richiesto avrebbe come valore massimo

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)_{max} = \sqrt{\frac{r_T}{2\,r_T}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71\,.$$

**Un satellite della Terra , in orbita circolare ad una quota $h = 230\,km$ rispetto alla superficie terrestre , ha periodo $T = 89\min$ . Qual è il valore della massa della Terra che si può desumere da questi dati ?**

**SOLUZIONE:** Applichiamo la terza legge di Keplero al sistema satellite-Terra: la 14-31, risolta rispetto a $M$, dà

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} . \qquad (14\text{-}32)$$

Il raggio $r$ dell'orbita del satellite risulta

$$r = R + h = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} + 230 \cdot 10^3 \text{ m} = 6.60 \cdot 10^6 \text{ m} ,$$

ove $R$ è il raggio della Terra. Sostituendo nella 14-32 a $R$ e $T$ i rispettivi valori si ha:

$$M = \frac{(4\pi^2)(6.60 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(89 \cdot 60 \text{ s})^2} = 6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg} .$$

Allo stesso modo potremmo ricavare la massa del Sole dal periodo e dal raggio dell'orbita (circolare equivalente) della Terra, o la massa di Giove dal periodo e dal raggio orbitale di una qualsiasi delle sue lune, senza bisogno di conoscere la massa di quella particolare luna.