Unità Didattica N° 7

Lavoro , Energia , Urti

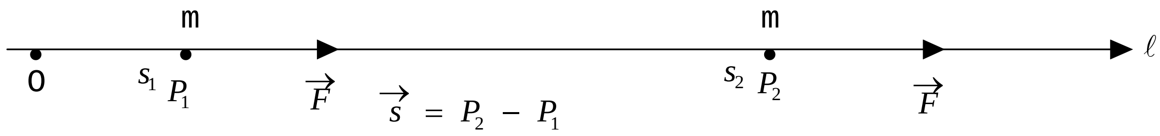
Lavoro compiuto da una forza

Ad un punto P di massa m che si muove con velocità vettoriale $\vec{v}$ sia applicata la forza $\vec{F}$ .In generale $\vec{F}$ e $\vec{v}$ sono vettori funzioni del tempo t e formano tra loro un angolo ϑ . Può convenire decomporre $\vec{F}$ lungo due direzioni , una parallela a $\vec{v}$ (e quindi anche allo spostamento $\vec{s}$ in quanto $\vec{v} // \vec{s}$) e l'altra perpendicolare a $\vec{v}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n \qquad (\vec{F}_t // \vec{v} \ , \ \vec{F}_n \perp \vec{v})$$

La forza $\vec{F}$ compie lavoro quando sposta il suo punto di applicazione da una posizione P_1 ad un ' altra P_2 . Analizziamo due casi :

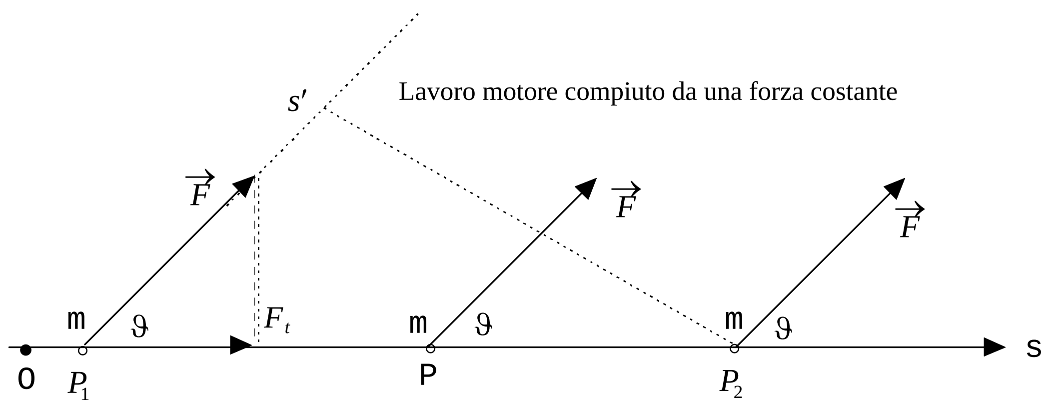
1) $\vec{F}$ è costante in modulo , direzione e verso e forma un angolo nullo con lo spostamento $\vec{s} = P_2 - P_1$.



Definiamo lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\vec{s} = P_2 - P_1$ il seguente prodotto : $\boxed{L = F \cdot s}$ **[1] Lavoro = forza per spostamento**

2) $\vec{F}$ è costante in modulo ,direzione e verso ma forma un angolo ϑ con lo spostamento $\vec{s}$. In questo caso risulta : $\boxed{L = F_t \cdot s}$ **[2]**

<< Il lavoro è uguale al prodotto dello spostamento per il modulo della proiezione della forza lungo la direzione dello spostamento >> Il lavoro è positivo (negativo) se l'angolo ϑ è acuto (ottuso) .



$\vec{F}_n$ **non compie lavoro ;** $\vec{F}_t$ **compie tutto il lavoro . Quindi , se su una particella m agisce una forza** $\vec{F}$ **compie lavoro soltanto il componente di** $\vec{F}$ **che agisce nella direzione dello spostamento , mentre non compie lavoro il componente normale .**

$0 \leq \vartheta < 90°$ **il lavoro è positivo e dicesi lavoro motore (La forza** $\vec{F}$ **agevola il movimento della massa m ;** $\vec{F}_t$ **ha lo stesso verso di** $\vec{s}$ **e quindi di** $\overrightarrow{v}$ **)**

$90° < \vartheta \leq 180°$ **il lavoro è negativo e dicesi lavoro resistente (La forza** $\vec{F}$ **si oppone al moto della particella m ,** $\vec{F}_t$ **ha verso opposto ad** $\vec{s}$ **e quindi a** $\overrightarrow{v}$ **)**

$\vartheta = 90°$ **il lavoro è nullo .**

Se il punto P è soggetto ad un sistema di forze il cui risultante è $\vec{R}$ **allora il lavoro complessivo di queste forze è uguale al lavoro compiuto da** $\vec{R}$ **.**

Lavoro compiuto dalla forza peso

Un corpo di massa m viene portato dalla posizione A alla posizione B lungo due percorsi diversi . Vogliamo fare vedere che il lavoro compiuto dalla forza peso del corpo , $\vec{P} = m\vec{g}$ **, ha lo stesso valore sia lungo il percorso I , sia lungo il percorso II .**

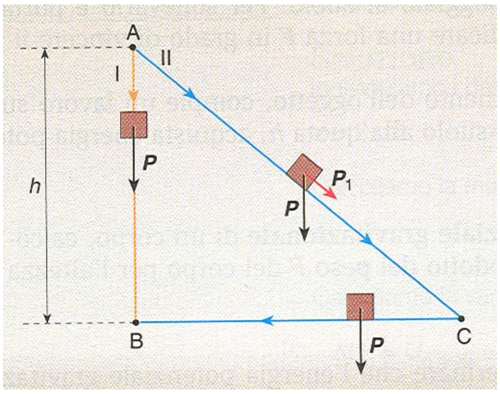
Lungo il percorso I il corpo si muove lungo la verticale passante per A e si sposta di un tratto h . Il lavoro compiuto dalla forza peso vale : $L = Fs = Ph = mgh$

Calcoliamo adesso il lavoro compiuto dalla forza peso lungo il tratto II :

$$L_{AB} = L_{AC} + L_{CB} = P_t \cdot \ell + 0 = \frac{h}{\ell} mg\ell = mgh$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso quando sposta il suo punto di applicazione dalla posizione iniziale A a quella finale B assume lo stesso valore lungo due percorsi diversi che congiungono questi punti . Si potrebbe dimostrare che il lavoro compiuto dalla forza peso è sempre mgh **qualunque sia il percorso curvilineo che congiunge la posizione iniziale A con la posizione finale B . Vedremo in seguito che tutte le forze che si comportano come la forza peso sono dette forze conservative e godono di particolari proprietà .**

Un corpo di massa m viene portato dalla posizione A alla posizione B lungo due percorsi diversi . Il lavoro compiuto dalla forza peso lungo il percorso I è uguale a quello compiuto lungo il percorso II .



Dimensioni ed unità di misura del lavoro

$$[L] = [F \cdot s] = [L^2 \cdot T^{-2} \cdot M] \quad , \quad \{L\} = joule = 1J = \{F\} \cdot \{s\} = 1N \cdot 1m$$

Nel sistema internazionale l'unità di misura del lavoro è il joule (J) definito come il lavoro compiuto dalla forza di 1 newton quanto questa sposta il suo punto di applicazione di 1 metro , nella direzione e nel verso della forza .

Potenza

Nella definizione di lavoro di una forza poco importa il tempo durante il quale tale lavoro è stato compiuto . Nella pratica , però , è fondamentale sapere in quanto tempo è stato compiuto un certo lavoro . Si dice che si misura la potenza che si sviluppa ($L > 0$) o si assorbe ($L < 0$) in quel lavoro . La potenza media W_m in un intervallo di tempo Δt durante il quale è stato compiuto il lavoro L è :

$$W_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{F \cdot s}{\Delta t} = F \cdot \mathrm{v}$$

La potenza esprime la rapidità con cui un certo lavoro è stato compiuto .

$$[W] = \frac{[L]}{[t]} = \frac{[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]}{[T]} = [M \cdot L^2 \cdot T^{-3}] \, , \{W\} = watt = W = \frac{\{L\}}{\{t\}} = \frac{J}{s} \, , \, 1watt = \frac{1\,joule}{1\sec ondo}$$

L'unità di misura della potenza nel S.I. è il watt (W) definito come la potenza di un motore capace di produrre (assorbire) un joule di lavoro al secondo .
Il watt è il lavoro di 1 joule compiuto in un secondo .
Il watt è una unità di misura piuttosto piccola per cui si usano frequentemente suoi multipli :

$$1chilowatt = 1Kw = 1000W = 10^3 W \quad , \quad 1megawatt = 1Mw = 10^6 W$$

$$1\mathrm{W} = 10^{-3}\,\mathrm{Kw} \quad , \quad 1\mathrm{W} = 10^{-6}\,\mathrm{Mw}$$

Osservazione

In fisica si definisce macchina qualsiasi dispositivo capace di compiere lavoro . La potenza di una macchina è il rapporto tra il lavoro compiuto dalla macchina ed il tempo impiegato a compierlo . E' più preciso parlare di <u>potenza sviluppata o assorbita</u> **dalla forza $\vec{F}$ (quando questa compie il lavoro L) .**

$$L = W \cdot t \quad , \; 1Kwh = 3{,}6 \cdot 10^6 \, J \quad , 1Wh = 3{,}6 \cdot 10^3 \, J \quad ,$$

Kwh **= chilowattora = unità di misura non coerente di lavoro**

Energia cinetica

Ad ogni corpo di massa m e velocità $\vec{v}$ **noi possiamo associare l ' energia cinetica**

$$\boxed{K = E_c = T = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2} \qquad [3]$$

Si tratta di una grandezza scalare , sempre positiva , il cui valore dipende soltanto dalla massa e dal valore istantaneo della velocità . Per capire a fondo il significato della formula [3] analizziamo un caso particolare. Una forza $\vec{F}$ (costante o variabile) sposta un corpo di massa m dalla posizione iniziale A (dove ha velocità $\vec{v}_i$) alla posizione finale B (dove ha velocità $\vec{v}_f$) lungo un percorso che può essere rettilineo o curvilineo . Si dimostra che il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ vale :

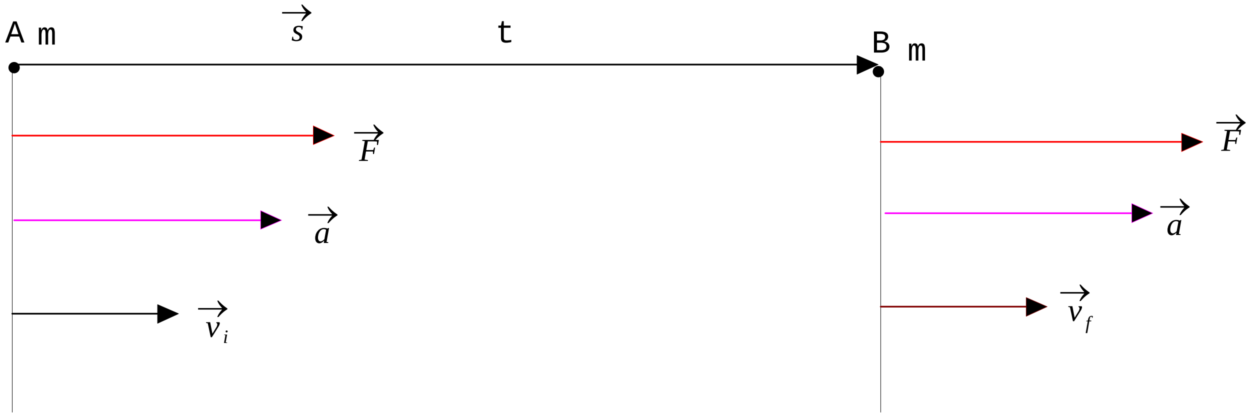
$$L_{AB}\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = T_f - T_i = \Delta T = \Delta E_c \qquad [4]$$

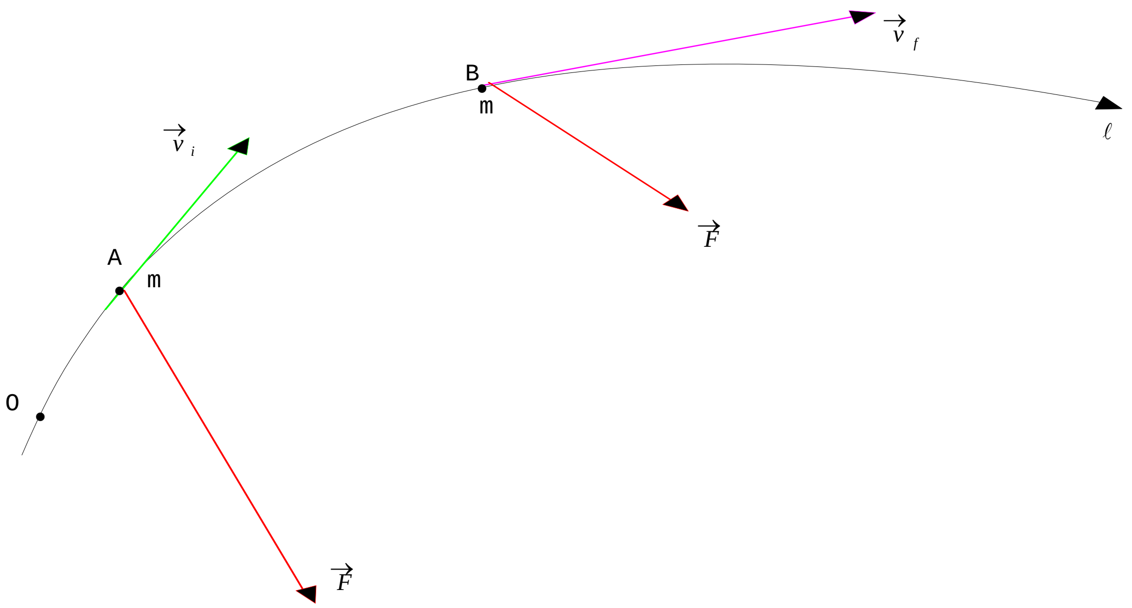
La formula [4] esprime il teorema di variazione dell'energia cinetica che a parole può essere enunciato così : << *Il lavoro compiuto dal risultante $\vec{F}$ di tutte le forze agenti sulla massa m lungo un arco di traiettoria AB è uguale alla variazione dell'energia cinetica subita dalla massa m quando passa dalla posizione iniziale A alla posizione finale B* >> . Il teorema della variazione dell'energia cinetica vale sia per le forze conservative sia per le forze non conservative .

- **Se all'istante iniziale $t_o = 0$ è $\mathrm{v}_i = 0$ (corpo in quiete) e all'istante finale t è $\mathrm{v}_f = \mathrm{v}$ la [4] diventa :**

$$\boxed{L_{AB}\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2}$$

cioè l ' energia cinetica di un corpo di massa m e velocità $\vec{v}$ rappresenta il lavoro motore che una forza esterna $\vec{F}$ (costante o variabile) applicata al corpo compie per portarlo dalla quiete alla velocità $\vec{v}$.





Osservazioni

- **L'energia cinetica acquistata da un corpo avviene sempre a spese di un lavoro compiuto su di esso da una forza esterna**
- **L'energia cinetica di un corpo dipende dal sistema di riferimento . Quindi essa è <u>definita a meno di una costante additiva</u> .**
- **L'energia cinetica di un corpo esprime la capacità di compiere lavoro da parte del corpo per il fatto di possedere una velocità . In parole povere compiere lavoro significa trasferire energia da un corpo ad un altro .**

Forze e campi conservativi

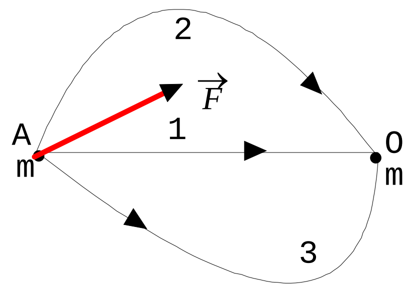
Se in ogni punto di una regione dello spazio si manifesta una forza , diciamo che quella regione è sede di un campo di forze . Lo spazio attorno alla terra è sede di un campo di forze gravitazionali in quanto in un suo qualsiasi punto ogni massa è soggetta alla forza peso .
Tutte le forze della fisica possono essere suddivise in forze conservative e forze non conservative o *forze dissipative* . Abbiamo visto, in uno dei paragrafi precedenti, che la forza peso è una forza conservativa .
Definizione : << Una forza si dice conservativa se il lavoro che compie su un corpo in movimento non dipende dalla particolare traiettoria seguita , ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale . >> . Sono forze conservative : 1) le forze gravitazionali (in particolare la forza peso) 3) le forze elettrostatiche .
Diamo un'altra definizione di forza conservativa equivalente a quella data in precedenza .
<< Una forza è conservativa se il lavoro da essa compiuto lungo un percorso chiuso è nullo >> Il campo gravitazionale generato dalla terra è un campo di forze conservative . Tutte le forze che non sono conservative vengono chiamate forze dissipative o forze non conservative.
Sono forze non conservative le forze d'attrito che si manifestano quando un corpo scivola sulla superficie di un altro corpo e le forze di resistenza alle quali si trovano sottoposti tutti i corpi che si spostano in un mezzo fluido (liquido o aeriforme) .
Delle forze dissipative possiamo dare anche la seguente definizione : << si chiamano forze dissipative quelle forze il cui lavoro totale , lungo un percorso chiuso è negativo >>

Energia potenziale

Quando un corpo è sottoposto all'azione di sole forze conservative , allora è utile introdurre una grandezza fisica detta energia potenziale indicata col simbolo U oppure col simbolo E_p .
Definiamo *posizione zero* o posizione a potenziale zero di un campo di forze conservative un punto qualsiasi del campo rispetto al quale l'energia potenziale del campo è nulla .
Adesso vogliamo definire l ' energia potenziale di una massa m posta in un punto A di un campo di forze conservative .

Quando la massa m passa dalla posizione A alla posizione O dove supponiamo che l'energia potenziale del corpo è nulla le forze del campo compiono un lavoro che é detto energia potenziale della massa m . In simboli abbiamo : $\boxed{U(A) = U_A = E_P(A) = L_{A\to O}(\vec{F})}$

Il lavoro compiuto dalla forza conservativa lungo i tre percorsi indicati in figura è lo stesso .



Il valore dell'energia potenziale col relativo segno dipende dalla posizione di riferimento O ; per questo motivo si dice che l ' ***energia potenziale è definita a meno di una costante additiva*** **.**

Si dimostra che << ***la variazione dell'energia potenziale cambiata di segno rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la massa m passa dalla posizione iniziale A a quella finale B*** >>

In simboli abbiamo : $L_{A\to B}(\vec{F}) = -(U_f - U_i) = -\Delta U = U_i - U_f = U_A - U_B$

Abbiamo detto che la posizione di riferimento (insieme dei punti cui si attribuisce energia potenziale zero) è scelta arbitrariamente . In talune situazioni potrebbe essere utile scegliere tale posizione secondo criteri di convenienza . Se la forza è costante (***campo uniforme*** **) non si ha nessun particolare vantaggio a scegliere una posizione di riferimento piuttosto che un'altra . Di solito si sceglie come posizione zero un punto qualsiasi di un piano orizzontale .**

Le forze elastiche di richiamo , compaiono quando si comprime o si allunga una molla , sono forze conservative . Esse sono del tipo : $\vec{F} = -k\vec{s}$

In questo caso la posizione zero coincide con la posizione di equilibrio O della massa m in quanto in tale posizione risulta $F = 0$ **. L' energia potenziale della massa m soggetta alla forza** $\vec{F} = -k\vec{s}$ **, posta alla distanza s da O vale** $U(s) = \frac{1}{2}ks^2$

L ' energia potenziale della massa m è sempre positiva .

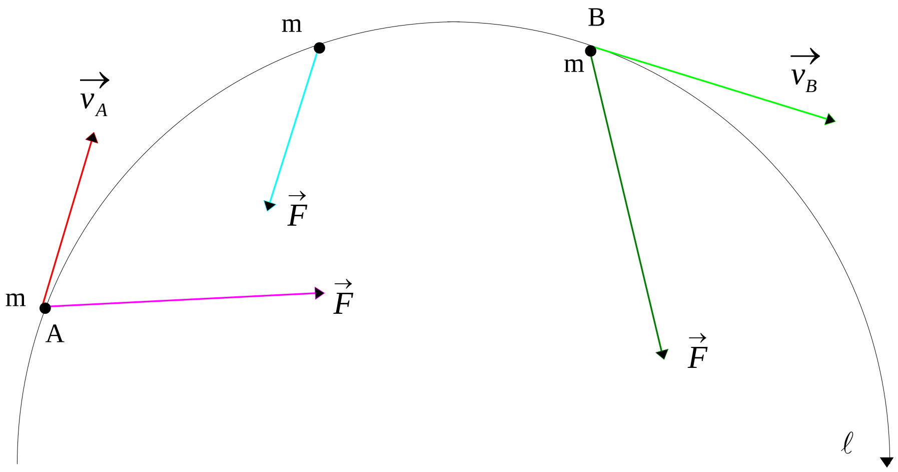
L ' energia potenziale di un corpo è l'energia che compete al corpo per il fatto di occupare una posizione di un campo di forze conservative . Essa rappresenta la capacità potenziale di un corpo in condizioni di quiete di compiere del lavoro in virtù della posizione che esso occupa in un campo di forze conservative .

La conservazione dell'energia meccanica

L'**energia cinetica** e l'**energia potenziale** sono le due forme in cui può presentarsi l'**energia meccanica** di un corpo . Consideriamo una massa m soggetta all'azione di forze conservative e supponiamo che si sposti dalla posizione iniziale A , dove ha velocità $\vec{v}_A$, alla posizione finale B , dove ha velocità $\vec{v}_B$. Poiché l'unica forza che agisce su m è la forza conservativa del campo , possiamo scrivere : $L_{A\to B}(\vec{F}) = T_B - T_A = U_A - U_B$ cioè :

$$\boxed{U_B + T_B = U_A + T_B = U + T = E} \qquad [1]$$

La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è chiamata energia meccanica totale della massa m . L'equazione [1] stabilisce che l ' energia meccanica totale è costante se l'unica forza che esegue lavoro è una forza conservativa . Soltanto quando forze di questo tipo eseguono lavoro , l'energia meccanica totale si conserva .

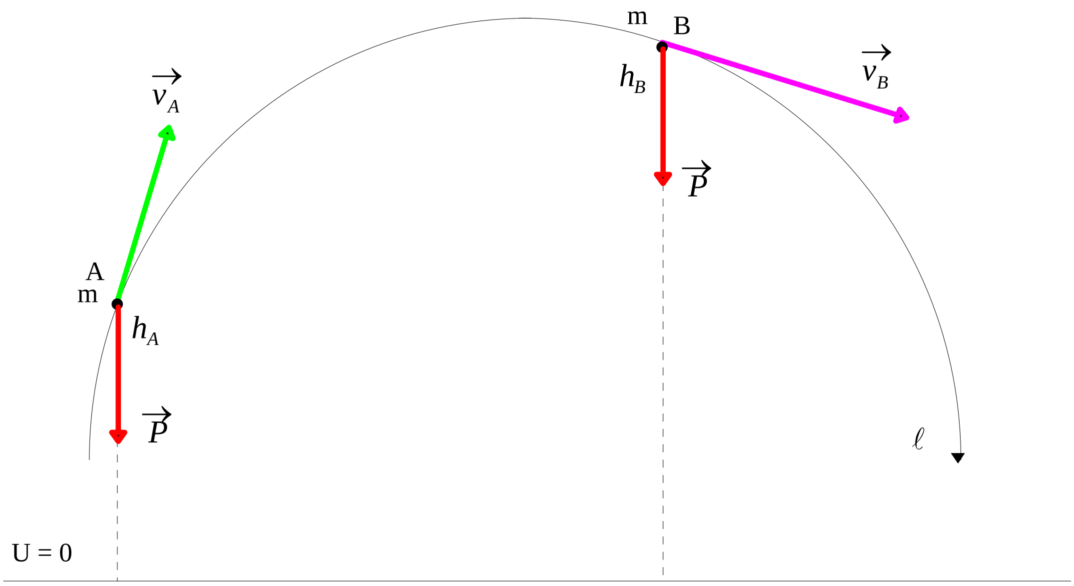


L'equazione [1] è detta legge di conservazione dell'energia meccanica per le forze conservative .

<< **Per un corpo soggetto soltanto a forze conservative si mantiene costante , istante per istante , la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale .** >>

La proprietà importante dell ' energia meccanica E non è il valore effettivo durante il movimento (che dipende dall'osservatore) ma il fatto che questo valore non cambia durante il movimento quando le forze sono conservative .

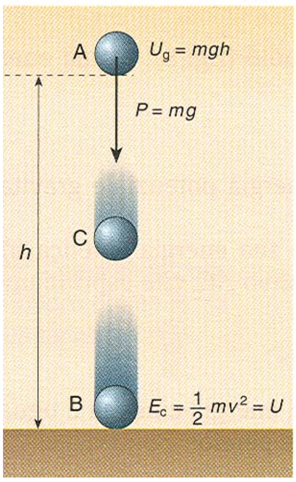
<< **In un sistema isolato soggetto a sole forze conservative si mantiene costante la somma delle energie cinetiche e potenziali di tutte le particelle , cioè si mantiene costante l'energia meccanica totale del sistema .** >>



Nel caso in cui la massa m si muove in prossimità della terra ed è soggetta alla sola forza peso , l'equazione [1] assume la forma :

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = E} \qquad [2]$$

Un esempio di trasformazione dell'energia meccanica



Consideriamo un corpo di massa m che si trova fermo all'altezza h dal suolo . In questa posizione , chiamiamola A , l'energia potenziale gravitazionale del corpo vale : $U_A = mgh$ **mentre la sua energia cinetica è uguale a zero , in quanto il copro è fermo . L'energia meccanica totale del copro nella posizione A vale :**

$$E_A = T_A + U_A = 0 + mgh = mgh$$

Abbiamo scelto come punto ad energia potenziale zero un punto qualsiasi del suolo , che rappresenta un piano orizzontale .

Lasciamo cadere il corpo . Mentre la massa m si avvicina al suolo la sua energia potenziale diminuisce , ma contemporaneamente esso acquista velocità e quindi la sua energia cinetica aumenta . Quando il corpo passa per la posizione C , che si trova alla distanza h_C **dal suolo , la sua energia meccanica è in parte cinetica ed in parte potenziale e vale :**

$$E_C = T_C + U_C = \frac{1}{2}\mathrm{m}v^2 + mgh_C$$

dove v_C **è la velocità del corpo quando passa per il punto C .**

Al momento dell'impatto col suolo il corpo ha perso tutta la sua energia potenziale che si è trasformata completamente in energia cinetica . Se v è la velocità con la quale il corpo tocca il suolo abbiamo :

$$E_B = T_B + U_B = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + 0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$$

<< **La caduta libera di un corpo è un classico esempio di trasformazione dell'energia potenziale in energia cinetica** >>

Una centrale idroelettrica trasforma energia potenziale gravitazionale in energia cinetica e questa si trasforma in energia elettrica . L'acqua del bacino della diga , costruita a monte rispetto alla centrale , possiede energia potenziale gravitazionale . Scendendo a valle attraverso le condotte forzate , l'acqua perde energia potenziale gravitazionale ed acquista energia cinetica in virtù della velocità ottenuta . L'acqua delle condotte messa in movimento fa girare le turbine dell'alternatore che così è in grado di produrre corrente elettrica .

<< **Una slitta che pesa** $98\,N$ **è lanciata alla velocità** $\mathrm{v}_i = 10\frac{m}{s}$ **su un piano orizzontale scabro (coefficienti di attrito** $k = 0{,}6$ **) . Si osserva che dopo avere percorso il tratto** $s = 4\,m$ **la velocità della slitta si è ridotta a** $\mathrm{v}_f = 7{,}28\frac{m}{s}$ **. Mostra come si può applicare il principio di conservazione dell'energia durante il moto della slitta .** >>

Calcoliamo la forza di attrito : $F_a = k\cdot P = k\,m\,g = 0{,}6\cdot 9{,}8 = 58{,}8\,N$

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza di attrito durante lo spostamento della slitta

$$L = -F_a\cdot s = -k\,m\,g\cdot s = -58{,}8\cdot 4 = -235\,J$$

Calcoliamo la massa della slitta : $m = \frac{P}{g} = \frac{98}{9{,}8} = 10\,kg$

L'energia cinetica iniziale della slitta è : $T_i = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_i^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot (10)^2 = 500\,J$

L'energia cinetica iniziale della slitta è : $T_f = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot (7{,}28)^2 = 265\,J$

La slitta ha perduto la seguente quantità di energia cinetica :

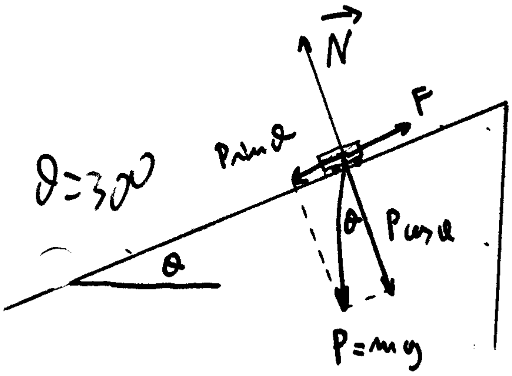
$$\Delta T = T_f - T_i = 265 - 500 = -235\,J$$

La perdita di energia cinetica da parte della slitta coincide col lavoro negativo compiuto dalla forza di attrito che è una forza dissipativi .

A.F. p. 186 N° 8.2

Un carrello avente massa $m = 15\,kg$ è spinto verso l'alto, sul pendio di una collina, da una forza $\vec{F}$ costante. La collina è inclinata di 30^0 rispetto al piano orizzontale. Il carrello mantiene una velocità costante $v = 6\,m/s$ lungo tutto il pendio. Calcolare il lavoro L compiuto dalla forza in un minuto e la potenza sviluppata dalla forza. Si trascurino tutti gli attriti.

Le forze agenti sul carrello sono: $\vec{F}$, $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{N}$ la reazione vincolare. Il risultante $\vec{R} = \vec{0}$ è dato da: $\vec{P}\sin\vartheta + \vec{F} = 0$



$F = mg\sin\vartheta =$

$= 15 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 73{,}5\ N$

$a = 0 \quad v = cost \Rightarrow$

$s = v \cdot t = 360\ m$

$L = \vec{F} \times \vec{s} = F \cdot s = 73{,}5 \cdot 360 = 26460\ J$

$W = \vec{F} \times \vec{v} = F \cdot v = 73{,}5 \cdot 6 = 441\ W$

Quantità di moto

Definiamo **sistema di punti materiali** l'insieme **S** di due o più punti materiali [1] che interagiscono tra di loro . In generale ai corpi che costituiscono il sistema sono applicate delle forze che vengono classificate in **forze interne** e **forze esterne** . Le **forze interne** sono quelle che si esercitano sui corpi del sistema e che provengono dall'azione di altri corpi appartenenti al sistema considerato. Le **forze esterne** sono quelle che si esercitano sui corpi del sistema ma che provengono dall ' azione di corpi che non fanno parte dell ' universo .

Una **forza interna** (***esterna***) sarà indicata col simbolo $\vec{F}^{(i)}$ ($\vec{F}^{(e)}$).Un **sistema** si dice **isolato** quando sui corpi che lo costituiscono non agiscono **forze esterne** . In un sistema isolato il **risultante** (cioè la somma vettoriale) di tutte le **forze esterne** agenti su di esso è **nullo** .

Possiamo concludere affermando che un sistema di punti materiali è isolato quando :

1) è trascurabile ogni forma di interazione di **S** con punti materiali che non fanno parte del sistema

2) oppure è nullo il risultante delle forze esterne agenti su **S**

3) oppure non agiscono forze esterne su **S**

4) le forze esterne agenti su S sono trascurabili rispetto alle forze interne .

Come esempio possiamo consideriamo il sistema ***Terra-Luna*** . La terra e la luna si attirano reciprocamente in base alla legge di gravitazione universale . In prima approssimazione possiamo considerare il sistema terra-luna come un sistema isolato , ma si tratterà di una approssimazione grossolana in quanto il sistema è soggetto anche all'attrazione del Sole e degli altri pianeti .

Si potrà allora considerare il sistema ***Terra-Luna*** come un sistema soggetto alla forza esterna dovuta al Sole , oppure considerare il sistema **Terra-Luna-Sole** come un sistema isolato . Se poi vogliamo migliorare il **grado di isolamento** del sistema dobbiamo prendere in considerazione anche gli altri pianeti del sistema solare . In quest'ultimo caso il sistema solare può essere considerato come isolato con un'approssimazione migliore di quelle precedenti .

Si definisce **quantità di moto** di un punto materiale di massa **m** e velocità $\vec{v}$ la grandezza vettoriale : $\boxed{\vec{q}=\vec{p}=m\vec{v}}$ $\quad [q] = [m \cdot v] = \left[M \cdot L \cdot T^{-1}\right] \quad \{q\} = \{m\} \cdot \{v\} = \dfrac{kg \cdot m}{s}$

Impulso

Supponiamo che una forza $\vec{F}$, che per semplicità supponiamo costante , agisca per un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1 = t_f - t_i$ su un punto materiale di massa **m** . Definiamo **impulso della forza $\vec{F}$ relativo all'intervallo di tempo** Δt la grandezza vettoriale :

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot (t_f - t_i)$$

$$[I] = [F \cdot t] = \left[M \cdot L \cdot T^{-1}\right] \quad , \quad \{I\} = \{F\} \cdot \{t\} = N \cdot s$$

Per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{t_f - t_i} \quad ; \quad \vec{F} \cdot (t_f - t_i) = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \Delta \vec{q}$$

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \Delta \vec{q} \qquad = \qquad \textbf{teorema dell'impulso}$$

<< **La variazione della quantità di moto $\Delta \vec{q} = \vec{q}_f - \vec{q}_i$ di un punto materiale soggetto all'azione di una forza $\vec{F}$ nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è uguale all'impulso corrispondente .** >> Il teorema dell ' impulso continua a valere anche quando la forza $\vec{F}$ è variabile nel tempo .

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}}$$

<< **il rapporto tra la variazione della quantità di moto ed il tempo in cui essa si verifica è uguale alla forza che agisce su m .** >>

Le relazioni $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ed $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$ per ogni singola particella sono completamente equivalenti in meccanica classica . E' da notare che Newton ha introdotto la seconda legge della dinamica nella forma $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$. Questa forma è più generale della $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ perchè quest'ultima espressione presuppone m costante , mentre l'altra non richiede che la massa debba restare costante durante il moto .

---

[1] Per punto materiale intendiamo un qualsiasi corpo le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alle dimensioni dell'ambiente nel quale il fenomeno si verifica

Teorema di conservazione della quantità di moto

Il ***teorema della conservazione della quantità di moto*** afferma quanto segue :

<< **in un sistema isolato la quantità di moto totale $\vec{Q}$ si mantiene costante nel tempo** >> .

Per un sistema formato da due soli punti materiali m_1 ed m_2 abbiamo :

$$\text{Hp : } \begin{cases} \vec{Q}_i = \vec{Q}(t_i) = \vec{q}_{1i} + \vec{q}_{2i} = m_1\vec{v}_{1i} + \vec{v}_{2i} = \text{quantità di moto del sistema all'istante } t_i \\ \vec{Q}_f = \vec{Q}(t_f) = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} = m_1\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} = \text{quantità di moto del sistema all'istante } t_f \end{cases}$$

$$\text{Th : } \left\{ \vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t_f) \right. \quad cioè \quad \vec{Q}_i = \vec{Q}_f \qquad \text{cioè : } \quad m_1\vec{v}_{1i} + \vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

<< La **variazione della quantità di moto di un sistema isolato è zero** >>

Il **principio di azione e reazione** ed il *principio di conservazione della quantità di moto* sono fra loro **equivalenti** . Questo significa che , ammessa la verità di uno dei due principi , si può dimostrare la verità dell'altro .

Fenomeni d ' urto

Un urto tra due corpi è un fenomeno nel corso del quale i corpi esercitano , l'uno sull'altro , forze molto intense , ma di durata estremamente breve **.** Si presuppone che l'urto sia un **fenomeno istantaneo** e che quindi nell'istante in cui esso avviene i corpi **cambino velocità ma non posizione** . Le forze che si manifestano durante gli urti sono dette **forze impulsive** , in quanto esse sono di breve durata . L'urto tra due corpi non presenta difficoltà solo se essi hanno forme schematizzabili con **semplici figure geometriche** .

Il caso più semplice è quello dell ' **urto tra due sfere libere** (assimilabili a **due punti materiali**), al quale ci si riconduce normalmente nello studio dell'urto tra particelle di dimensioni trascurabili . Possiamo considerare due corpi che si urtano come un **sistema isolato** , in quanto le forze esterne che agiscono sui corpi hanno un'intensità trascurabile rispetto a quella delle forze che i corpi si scambiano durante l'urto . Di conseguenza in tutti i fenomeni di urto si mantiene costante la **quantità di moto totale** .

Gli urti tra corpi vengono classificati in **urti elastici** ed **urti anelastici** . Nel primo caso l' **energia cinetica del sistema si conserva** , nel secondo caso *non si conserva* .

L ' **urto è totalmente anelastico** o *PLASTICO* se dopo l'urto i due corpi rimangono uniti e proseguono il loro cammino con la stessa velocità ($\vec{u}_2 = \vec{u}_1$) . Per esempio , l'urto di una pallottola col bersaglio colpito è **completamente anelastico** quando la pallottola rimane conficcata nel bersaglio stesso .

Nello studio della fisica l'espressione **urto** non significa necessariamente un **contatto** , esso esprime una **interazione molto intensa agente per un tempo brevissimo e dovuta a forze impulsive interne** .

Urti elastici unidimensionali

Per **urto unidimensionale** intendiamo un urto in cui il moto relativo prima e dopo la collisione avviene sulla medesima retta . Consideriamo due sfere lisce e rigide che , senza ruotare , si muovano inizialmente lungo la retta x congiungente i loro centri , e che quindi si urtano frontalmente , muovendosi dopo l'urto , sempre lungo la stessa retta x (orientata nel verso della sfera avente velocità con modulo maggiore) e senza rotazioni .

Le masse delle sfere sono m_1 ed m_2 , le loro velocità sono rispettivamente $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ prima dell'urto ed $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ dopo l'urto . Per il **principio di conservazione della quantità di moto** di un sistema isolato , possiamo scrivere : $\boxed{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2}$

In termini scalari abbiamo : $\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2}$ **[1]**

dove v_1 , v_2 , u_1 , u_2 sono **valori algebrici** positivi (negativi) se le corrispondenti velocità vettoriali hanno (non hanno) lo stesso orientamento di $\vec{x}$ (ad esempio da sinistra verso destra) .

Dalla **conservazione dell'energia cinetica** abbiamo : $\boxed{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_1 u_2^2}$ **[2]**

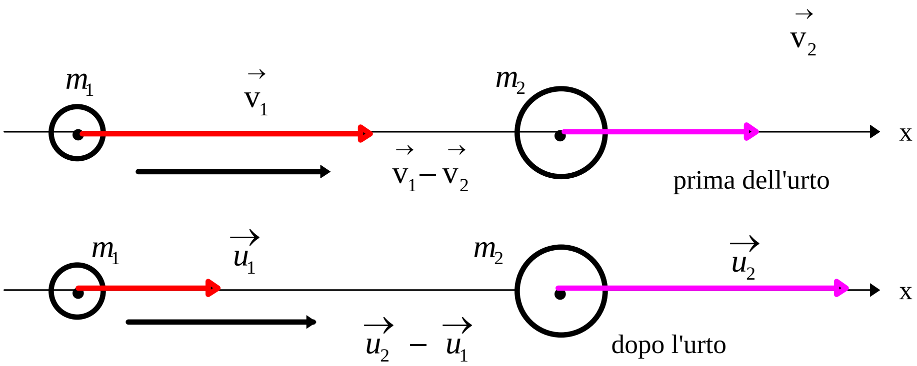
Possiamo scrivere la [1] nella seguente maniera : $\boxed{m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_2 - u_2)}$ **[3]**

e la [2] nella seguente maniera : $\boxed{m_1(v_1 - u_1)\cdot(v_1 + u_1) = m_2(v_2 - u_2)\cdot(v_2 + u_2)}$ **[4]**

Dividendo membro a membro la [3] e la [4] otteniamo : $\boxed{v_1 + u_1 = v_2 + u_2}$ **[5]**

$$\begin{cases} v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \\ m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_2 - u_2) \end{cases} \qquad u_2 = v_1 + u_1 - v_2$$

$$\boxed{u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}} \quad \textbf{[6]} \qquad \boxed{u_2 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}} \quad \textbf{[7]}$$



Casi particolari

$\boxed{m_1 = m_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{u_1 = v_2\,;\,u_2 = v_1}$ **Le sfere , dopo l'urto , si scambiano le velocità**

$\boxed{v_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{u_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \cdot v_1}$ $\boxed{u_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1}$

$\boxed{m_1 = m_2 , v_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{u_1 = 0 , u_2 = v_1}$

La prima sfera si ferma di colpo , mentre la seconda sfera scatta via con la velocità che possedeva la prima sfera .

$\boxed{m_1 > m_2 , v_2 = 0}$ u_1 e v_1 hanno lo stesso segno ma è : $\boxed{u_1 < v_1}$, cioè la sfera urtante m_1 ha massa maggiore , prosegue dopo l'urto nel verso primitivo ma con velocità di intensità minore .

$\boxed{m_1 < m_2 , v_2 = 0}$ u_1 e v_1 hanno segni opposti , ma è : $|u_1| < |v_1|$

La sfera urtante m_1 , di massa minore , rimbalza tornando indietro , ma con velocità ridotta .

$\boxed{m_1 >> m_2 , v_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{m_1}{m_2} \approx 0$, $u_1 \approx -v_1$, $u_2 \approx 0$

cioè , quando una **particella leggera** ne urta una **molto pesante** , la sua velocità viene solo (approssimativamente) **cambiata di segno** e la particella di massa elevata rimane pressoché ferma

Per esempio, supponiamo che una sfera elastica cada verticalmente sulla terra.

Se l ' **urto è elastico** , la sfera rimbalzerà con una velocità cambiata di segno e raggiungerà la stessa altezza dalla quale era caduta .

$\boxed{m_1 << m_2 , v_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{m_2}{m_1} \approx 0$, $u_1 \approx v_1$, $u_2 \approx 2v_1$

Questo significa che la velocità della particella m_1 rimane praticamente invariata nell'urto con la particella leggera ferma , la quale rimbalza con una velocità che è circa il doppio della velocità della particella pesante incidente .

$\boxed{m_2 = \infty , v_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{m_1}{m_2} = 0$, $u_1 = -v_1$, $u_2 = 0$ (**urto contro una parete fissa**)

La sferetta urtante m_1 torna indietro con la stessa velocità che aveva prima dell'urto .

Urto anelastico unidimensionale

Se l ' **urto** è **anelastico** , non possiamo usare più la **conservazione dell'energia cinetica** .
L ' energia cinetica finale può essere minore di quella iniziale , la differenza essendosi convertita per esempio in calore o in energia potenziale di deformazione . La **conservazione della quantità di moto** continua a valere . Consideriamo un **urto completamente anelastico** . Le due particelle , dopo l'urto , proseguiranno con una velocità finale comune **u** . Utilizzando soltanto il **principio di conservazione della quantità di moto** otteniamo :

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u} \qquad \boxed{\vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

Nel caso di un **urto unidimensionale** la precedente relazione vettoriale può essere scritta in termini scalari nella seguente maniera : $\boxed{u = \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}}$ dove **u** , v_1 e v_2 sono **valori algebrici** .