Unità didattica N° 7

Lavoro, energia, urti

01) **Lavoro compiuto da una forza**

02) **Potenza**

03) **Il concetto di energia**

04) **Energia cinetica**

05) **Energia potenziale**

06) **Teorema di conservazione dell'energia meccanica**

07) **Forze conservative e forze dissipative**

08) **Urti**

09) **Urti elastici unidimensionali**

11) **Urto anelastico unidimensionale**

10) **Urti obliqui**

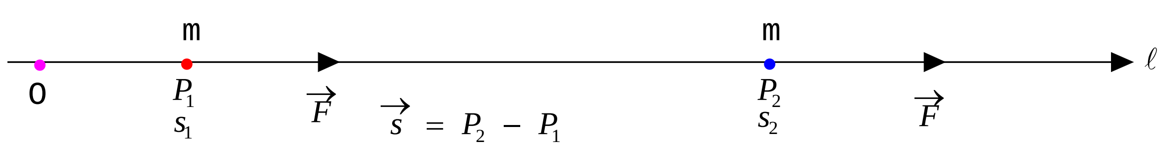
11) **Lancio di un satellite terrestre**

Lavoro compiuto da una forza

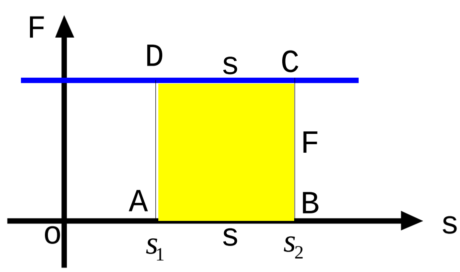
Ad un punto P di massa m che si muove con velocità vettoriale $\vec{\mathbf{v}}$ sia applicata la forza $\vec{F}$. In generale $\vec{F}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ sono vettori funzioni del tempo t e formano tra loro un angolo ϑ. Può convenire decomporre $\vec{F}$ lungo due direzioni, una parallela a $\vec{\mathbf{v}}$ (e quindi anche allo spostamento $\vec{s}$ in quanto $\vec{v} \,//\, \vec{s}$) e l'altra perpendicolare a $\vec{\mathbf{v}}$: $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{t}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}$ $\left(\vec{F}_t // \vec{v}\ ,\ \vec{F}_n \perp \vec{v}\right)$

La forza $\vec{F}$ compie lavoro quando sposta il suo punto di applicazione da una posizione P_1 ad un'altra P_2. Analizziamo due casi:

1) $\vec{F}$ **è** costante in modulo, direzione e verso e forma un angolo nullo con lo spostamento $\vec{s} = P_2 - P_1$.



Definiamo lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\vec{s} = P_2 - P_1$ il seguente prodotto scalare: $\mathbf{L} = \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{s}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ **[1]**

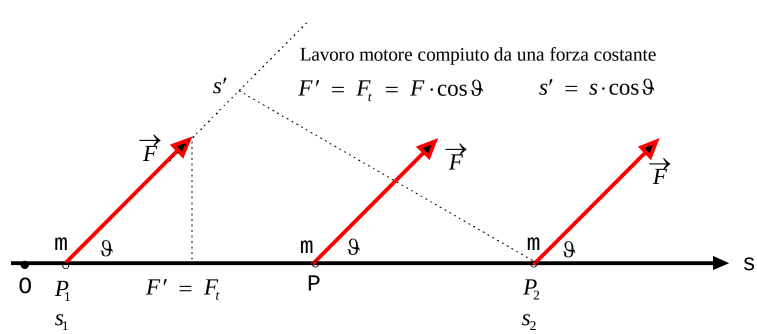


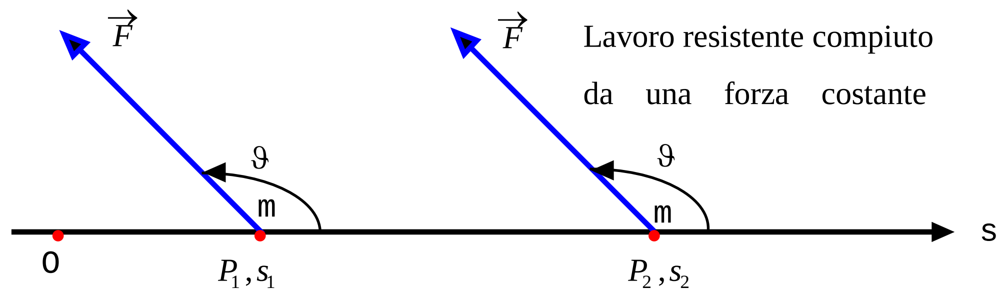
In questo caso, considerato il diagramma della funzione $F = F(s)$, possiamo affermare che il lavoro compiuto dalla forza F è numericamente uguale all'area del rettangolo $ABCD$

2) $\vec{F}$ **è costante in modulo, direzione e verso** ma forma un angolo ϑ con lo spostamento $\vec{s}$.

In questo caso risulta: $\mathbf{L} = \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{s}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \cdot \cos\vartheta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{s}$ $\quad 0 \le \vartheta \le 180°$ **[2]**

$$L = \vec{F} \times \vec{s} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right) \times \vec{s} = \vec{F}_t \times \vec{s} + \vec{F}_n \times \vec{s} = \vec{F}_t \times \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\vartheta$$





$\vec{F}_n$ non compie lavoro; $\vec{F}_t$ compie tutto il lavoro. $L(\vec{F}) = L(\vec{F}_t) = S(ABCD)$ dove in ordinata riportiamo i valori di F_t. Quindi, se su una particella m agisce una forza $\vec{F}$ compie lavoro soltanto il componente di $\vec{F}$ che agisce nella direzione dello spostamento, mentre non compie lavoro il componente normale.

$0 \leq \vartheta < 90°$ il lavoro è positivo e dicesi lavoro motore (La forza $\vec{F}$ agevola il movimento della massa m; $\vec{F}_t$ ha lo stesso verso di $\vec{s}$ e quindi di $\vec{v}$)

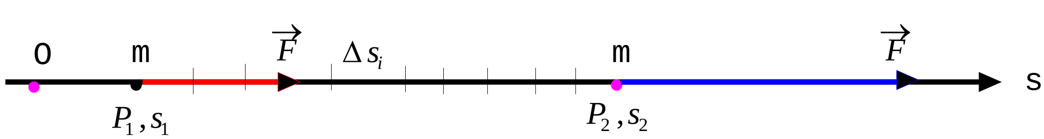
$90° < \vartheta \leq 180°$ il lavoro è negativo e dicesi lavoro resistente (La forza $\vec{F}$ si oppone al moto della particella m , $\vec{F}_t$ ha verso opposto ad $\vec{s}$ e quindi a $\vec{v}$)

$\vartheta = 90°$ il lavoro è nullo. Naturalmente altre forze possono agire sulla massa **m** e quindi $\vec{F}$ può spostare (come nel nostro caso) il suo punto di applicazione in una direzione diversa da quella lungo la quale agisce tale forza. L'equazione [2] si riferisce soltanto al lavoro compiuto sulla particella m dalla singola forza $\vec{F}$. Il lavoro compiuto sulla massa **m** da eventuali altre forze deve essere calcolato separatamente. Il lavoro totale compiuto sulla particella m è la somma algebrica dei lavori compiuti dalle singole forze.

Se il punto P è soggetto ad un sistema di forze il cui risultante è $\vec{R}$ allora il lavoro complessivo di queste forze è uguale al lavoro compiuto da $\vec{R}$.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L(\vec{R}) = L(\vec{F}_1) + L(\vec{F}_2) + L(\vec{F}_3) + \cdots}$$

3) $\vec{F}$ è costante in direzione e verso ma non in modulo



Lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ variabile soltanto in modulo

Si divide lo spostamento $s = P_1P_2$ in tratti Δs_i piccolissimi in maniera che in ciascuno di essi la forza possa ritenersi costante. Risulta: $\mathbf{L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_2 + \cdots = F \cdot \Delta s_1 + F \cdot \Delta s_2 + F \cdot \Delta s_2 + \cdots}$

Teoricamente dovremmo considerare spostamenti infinitesimi $d\vec{s}$ e definire lavoro elementare dL compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ il seguente prodotto scalare: $\mathbf{dL = \vec{F} \times d\vec{s} = F \cdot ds = F \cdot v \cdot dt}$

Il lavoro totale **L** è dato da: $\mathbf{L = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum \vec{F} \times \Delta \vec{s}_i = \int_{P_1}^{P_2} dL = \int_{s_1}^{s_2} F\, ds = \int_{t_1}^{t_2} F\, v\, dt}$ **[3]**

Consideriamo il diagramma γ della funzione $F = F(s)$. Dividiamo l'intervallo $s = s_2 - s_1$ in n intervalli (non necessariamente) uguali. Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\Delta \vec{s}_i$ (con approssimazione tanto migliore quanto maggiore è n) è dato dall'area del rettangolo RSTU. Quando $\Delta \vec{s}_i$ è piccolissimo (teoricamente infinitesimo) l'area del rettangolo si identifica con l'area del trapezoide di base $\Delta \vec{s}_i$ e coincide col lavoro effettivamente compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo $\Delta \vec{s}_i$.

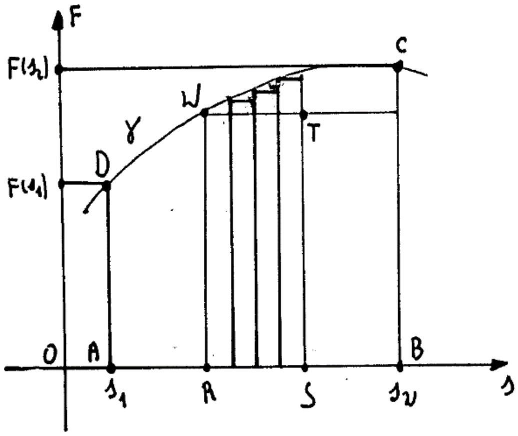
Allora, pur di suddividere il tratto **s** in un numero grandissimo di intervallini parziali (teoricamente in un numero infinito), il lavoro totale compiuto dalla forza variabile $\vec{F}$ quando questa sposta il suo punto di applicazione da P_1 a P_2, sarà dato dalla somma dei lavori elementari parziali così ottenuti.

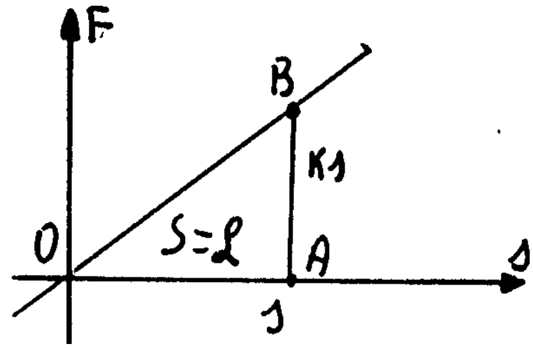
Per esempio consideriamo una molla fissata (nell'estremo B) ad una parete; assumiamo come traiettoria **s** l'asse orizzontale della molla e scegliamo l'origine (s=0) coincidente con l'estremo libero A della molla nella sua posizione di equilibrio. La direzione positiva dell'asse s sia quella che si allontana dalla parete. Supponiamo di allungare la molla cosi lentamente da poterla considerare in ogni istante in equilibrio $(a = 0)$

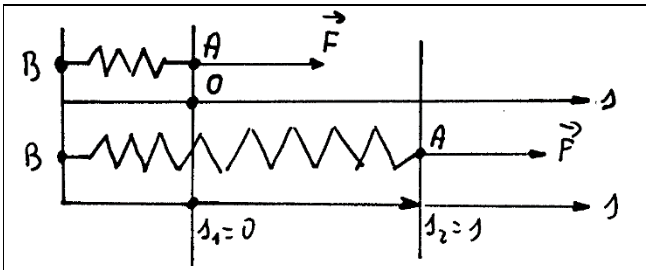
Quando A si porta in una posizione **s**, la molla eserciterà su di noi una forza data con buona approssimazione da: $\vec{F}_1 = -k\vec{s}$ $\quad F_1 = -ks$

Per allungare la molla noi dobbiamo esercitare su di essa una forza $\vec{F}$ uguale e contraria alla forza $\vec{F}_1$ esercitata dalla molla su di noi. La forza applicata all'estremo A dalla molla elastica è pertanto $F = ks$ ed il lavoro fatto da essa per allungare la molla di s metri è dato dall'area del triangolo OAB, cioè :

$$\mathbf{L = \frac{1}{2} \cdot s \cdot ks = \frac{1}{2} k s^2} \qquad \textbf{[4]}$$





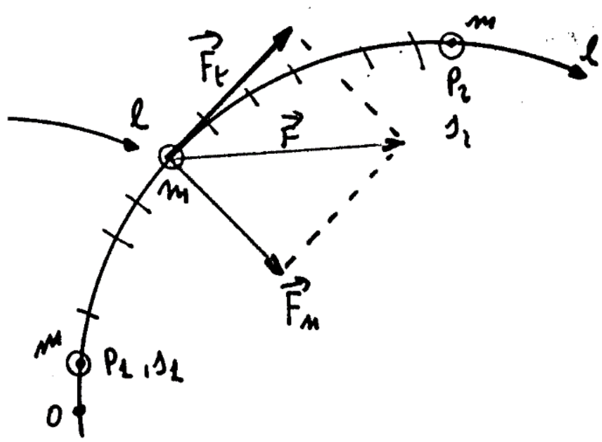
	La forza esercitata nell'allungare una molla è $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{k}\,\vec{\mathbf{s}}$. L'area sotto la curva che dà la forza in funzione dell'allungamento è il lavoro eseguito da $\vec{F}$ nel deformare la molla del tratto $\mathbf{s}$.

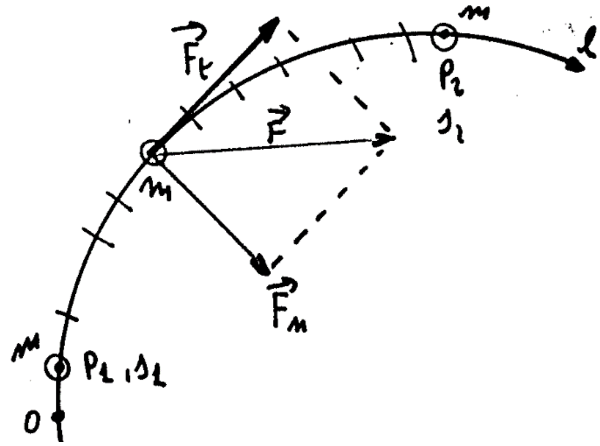
4) $\vec{F}$ è variabile in modulo , direzione e verso ed il suo punto di applicazione descrive una traiettoria ℓ qualsiasi. Tenendo presente che $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$, definiamo lavoro elementare dL compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento infinitesimo $d\vec{s} = \vec{v}\,dt$ il seguente prodotto scalare: $\mathbf{dL = \vec{F} \times d\vec{s} = \vec{F}_t \times d\vec{s} = \vec{F}_t \times \vec{v}\,dt = F \cdot \cos\vartheta \cdot ds = F \cdot v \cdot \cos\vartheta \cdot dt}$

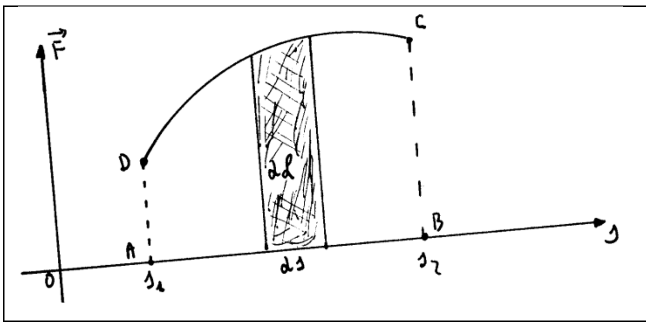
Se vogliamo calcolare il lavoro compiuto da $\vec{F}$ quando il punto P si sposta dalla posizione P_1 alla posizione P_2, basta suddividere l'arco di traiettoria $\overset{\frown}{P_1P_2} = s$ in intervalli infinitesimi $d\vec{s}$ in ciascuno dei quali la forza $\vec{F}$ può ritenersi costante:

$$\mathbf{L = \sum dL = \int_{P_1}^{P_2} dL = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \times d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}_t \times d\vec{s}} \qquad [5]$$

Il lavoro dipende soltanto dal modo in cui la forza $\vec{F}$ agisce in ciascun punto della traiettoria e non dalla legge temporale secondo la quale questa è descritta.







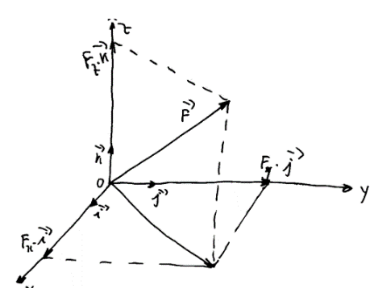
L'area delimitata dal trapezoide $ABCD$ fornisce il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ quando questa sposta il suo punto di applicazione dalla posizione P_1 alla posizione P_2. L'area tratteggiata fornisce il lavoro elementare dL.

Per calcolare il lavoro compiuto da una forza variabile in uno dei suoi elementi usiamo la relazione:

$$\mathbf{L} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \times \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \cdot \cos\vartheta$$

Scriviamo $\vec{\mathbf{F}}$ ed $\vec{\mathbf{r}}$ in funzione della loro componenti cartesiane:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \qquad d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$



Otteniamo: $dL = \vec{F} \times d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$

$$L = \int_a^b \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \quad [\mathbf{A}]$$

Integrali del tipo $[\mathbf{A}]$ sono detti integrali di linea.

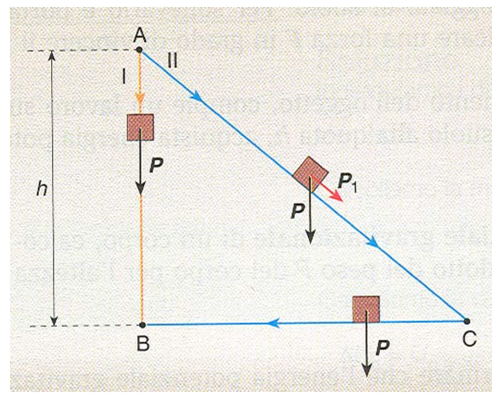
Lavoro compiuto dalla forza peso

Un corpo di massa m viene portato dalla posizione A alla posizione B lungo due percorsi diversi. Vogliamo fare vedere che il lavoro compiuto dalla forza peso del corpo, $\vec{P} = m\vec{g}$, ha lo stesso valore sia lungo il percorso I, sia lungo il percorso II. Lungo il percorso I il corpo si muove lungo la verticale passante per A e si sposta di un tratto h . Il lavoro compiuto dalla forza peso vale: $L = Fs = Ph = mgh$ Calcoliamo adesso il lavoro compiuto dalla forza peso lungo il tratto II:

$$L_{AB} = L_{AC} + L_{CB} = P_t \cdot \ell + 0 = \frac{h}{\ell} mg\ell = mgh$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso quando sposta il suo punto di applicazione dalla posizione iniziale A a quella finale B assume lo stesso valore lungo due percorsi diversi che congiungono questi punti. Si potrebbe dimostrare che il lavoro compiuto dalla forza peso è sempre mgh qualunque sia il percorso curvilineo che congiunge la posizione iniziale A con la posizione finale B. Vedremo in seguito che tutte le forze che si comportano come la forza peso sono dette forze conservative e godono di particolari proprietà.

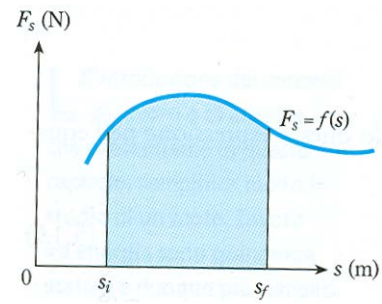
Un corpo di massa m viene portato dalla posizione A alla posizione B lungo due percorsi diversi. Il lavoro compiuto dalla forza peso lungo il percorso I è uguale a quello compiuto lungo il percorso II.



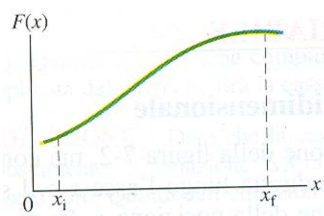
$$[L] = [F \cdot s] = \left[L^2 \cdot T^{-2} \cdot M\right] \quad , \quad \{L\} = joule = 1J = \{F\} \cdot \{s\} = 1N \cdot 1m$$

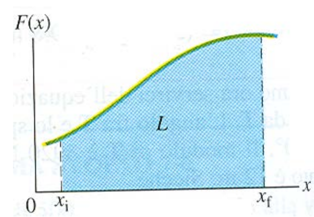
L'unità di misura del lavoro è il joule (J) definito come il **lavoro compiuto dalla forza di 1 newton nello spostare di 1 metro, nella direzione e nel verso della forza , il suo punto di applicazione**. Il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ esprime la quantità di energia che passa da una forma ad un'altra. Sia $F_s = f(s)$ è la legge con la quale F_s varia al variare della posizione s. Consideriamo il grafico γ della funzione $F_s = f(s)$ ottenuto riportando in ascissa la posizione s ed in ordinata il valore della forza F_s. Se la particella si sposta dalla posizione s_i alla posizione s_f, il lavoro compiuto dalla forza che determina tale spostamento coincide numericamente con l'area individuata dalla curva γ e dalle rette $s = s_i$ ed $s = s_f$, cioè con l'area colorata della figura.

Il grafico della componente della forza $\vec{F}$ lungo la direzione di $\vec{s}$ in funzione di s. L'area colorata della figura ci fornisce la misura del **lavoro compiuto** dalla forza $\vec{F}$ durante lo spostamento dalla posizione s_i alla posizione s_f



Curva che descrive una generica forza unidimensionale in funzione dello spostamento della particella sulla quale agisce. La particella si sposta da x_i ad x_f

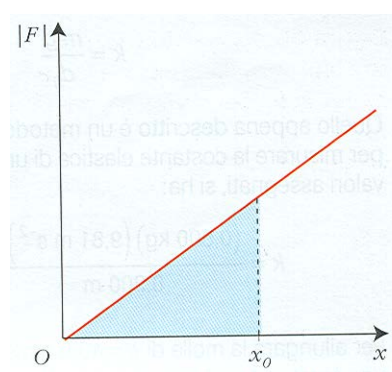




Il lavoro compiuto dalla forza è rappresentato geometricamente dall'area colorata sotto la curva compresa tra gli estremi.

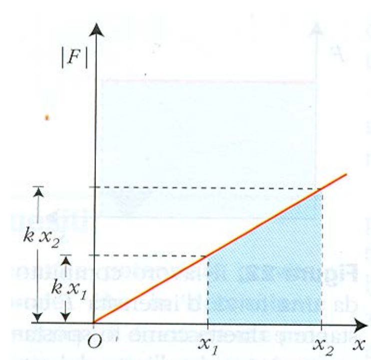
Se la forza $\vec{F}$ agente su una particella lungo l'asse x ha modulo $F = kx$ allora il lavoro compiuto da tale forza per spostare la particella dalla quiete alla posizione x_o vale: $L = \frac{1}{2} k\, x_o^2$ come risulta calcolando l'area del triangolo della figura.

L'area del triangolo colorato rappresenta il lavoro compiuto dalla forza $F = kx$ quando sposta la particella dall'origine alla posizione x_o



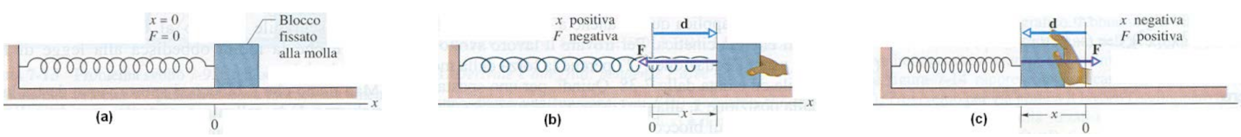
Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ dalla posizione x_1 alla posizione x_2 vale: $L = \frac{1}{2} k\, x_2^2 - \frac{1}{2} k\, x_1^2$ come risulta calcolando l'area del trapezio della figura.

L'area del trapezio colorato rappresenta il lavoro compiuto dalla forza $F = kx$ quando sposta la particella dalla posizione iniziale x_1 alla posizione finale x_2.



Lavoro compiuto dalla forza elastica di richiamo

La figura (a) rappresenta una molla nel suo stato di riposo. Uno dei due estremi è fisso, mentre all'altro estremo che è libero, è attaccato un oggetto assimilabile ad una particella (punto materiale), come per esempio un blocco. Nella figura (b) abbiamo allungato la molla tirando il blocco verso destra. Per reazione la molla tira il blocco verso sinistra, tendendo a ripristinare il suo stato di riposo. Nella figura (c) abbiamo compresso il blocco verso sinistra. Ora la molla spinge il blocco verso destra, per ripristinare anche questa volta il suo stato di riposo. La forza che comprime la molla è una forza deformante che obbedisce alla legge di Hooke e vale: $\mathbf{F = k \cdot x}$. Il verso di questa forza coincide col verso dello spostamento. La forza che agisce sul blocco, dovuta alla presenza della molla, è una forza elastica di richiamo e vale: $\mathbf{F = -k \cdot x}$ Il verso di tale forza è sempre opposto al verso dello spostamento. La forza elastica di richiamo, che agisce sul blocco, è uguale ed opposta alla forza deformante che agisce sulla molla.

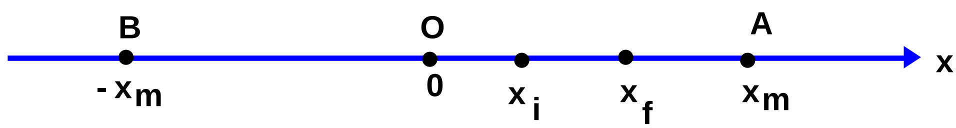


Se il blocco viene allungato di un tratto $OA = x_m$ e poi lasciato libero esso si muove di moto armonico semplice in quanto soggetto alla forza elastica di richiamo $F = -k \cdot x$. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dal tale forza quanto il blocco si sposta da una posizione iniziale x_i ad una posizione finale x_f .

$$\mathbf{L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} -kxdx = \left[-\frac{1}{2}kx^2 \right]_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2} \qquad \textbf{[6]}$$

Il lavoro risulta di segno positivo se $x_i^2 > x_f^2$ (cioè se $|x_i| > |x_f|$) e negativo se $x_i^2 < x_f^2$ (cioè se $|x_i| < |x_f|$). Vale a dire che dipende dal verso di trasferimento dell'energia (potenziale) dalla molla al blocco (energia cinetica) o dal blocco alla molla. Quando il blocco si muove verso la sua posizione di equilibrio $x = 0$ il lavoro è positivo ($|x_i| > |x_f|$), la deformazione della molla si riduce e si ha trasferimento di energia potenziale della molla al blocco che aumenta la sua energia cinetica.

Quando il blocco si allontana dalla sua posizione di equilibrio $x=0$ il lavoro è negativo ($|x_i| < |x_f|$), la deformazione della molla aumenta e si ha trasferimento di energia cinetica dal blocco alla molla che aumenta la sua energia potenziale.

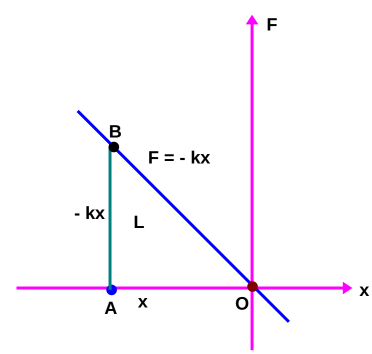


Se $x_i=0$ ed indichiamo con x la generica posizione del blocco, la formula precedente assume la seguente forma: $\mathbf{L_{O\to x}\left(\vec{F}\right) = L = -\frac{1}{2}kx^2}$

In questo caso il lavoro compiuto dalla forza elastica è sempre negativo in quanto risulta $|x_i| < |x_f|$.

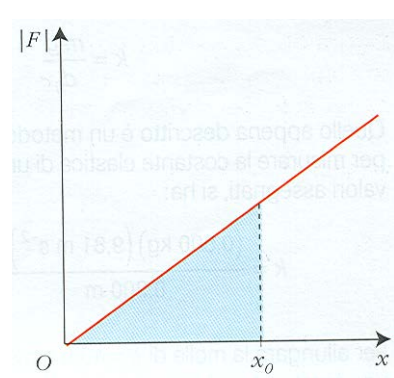
$U = \frac{1}{2}k\,x^2$ è l'energia potenziale di una molla deformata (cioè allungata o accorciata) del tratto x, quando assumiamo la posizione O di equilibrio del blocco come punto avente energia potenziale nulla. Sotto queste ipotesi l'energia potenziale di una molla è sempre positiva.

Come possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica $\vec{f} = -k\cdot\vec{x}$? Basta utilizzare il metodo geometrico, come abbiamo fatto per la forza deformante $F=kx$. Se la molla si allunga del tratto x compie il lavoro negativo $L = -\frac{1}{2}k\cdot x^2$



$$L = S(OAB) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot(-kx) = -\frac{1}{2}kx^2$$

L'**area del triangolo colorato cambiata di segno rappresenta il lavoro compiuto dalla forza elastica** $F=-k\cdot x$ di una molla allungata di un tratto uguale ad x_o

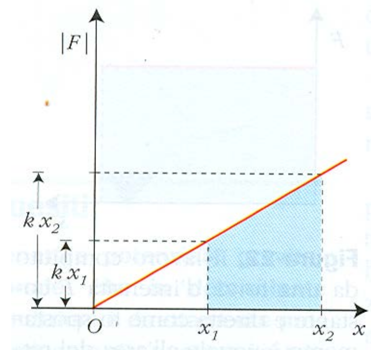


Se la molla, dopo che è stata allungata, viene lasciata libera di ritornare nella posizione di equilibrio, la forza elastica ha lo stesso verso dello spostamento e compie un lavoro positivo pari a:

$$\mathbf{L = \frac{1}{2}k\cdot x^2}$$

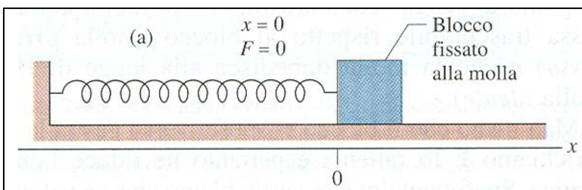
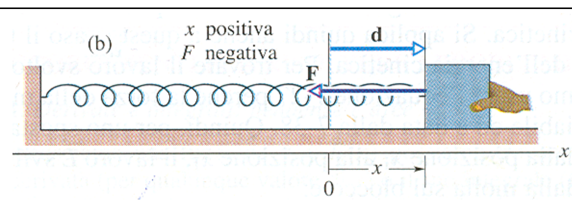
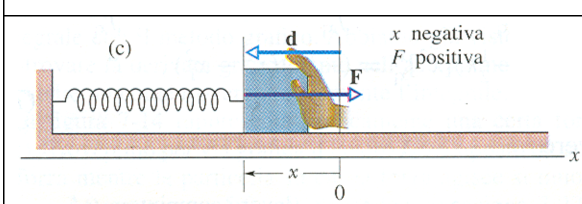
Più in generale, se l'allungamento della molla aumenta da x_1 ad x_2 il lavoro compiuto dalla forza elastica vale: $\mathbf{L = \frac{1}{2} k\, x_1^2 - \frac{1}{2} k\, x_2^2}$

L'**area del trapezio colorato cambiata di segno rappresenta il lavoro compiuto dalla forza elastica** $F = -k \cdot x$ di una molla quando sposta la particella dalla posizione iniziale x_1 alla posizione finale x_2.

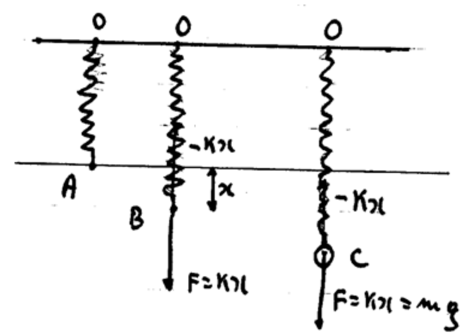


Se la molla ritorna indietro passando dalla posizione x_2 alla posizione x_1, il lavoro è l'opposto del precedente in quanto, adesso, la forza elastica ha lo steso verso dello spostamento. In questo caso il lavoro motore compiuto dalla forza elastica vale: $L = \frac{1}{2} k\, x_2^2 - \frac{1}{2} k\, x_1^2$

L'espressione del lavoro rimane invariata se x esprime la misura di una compressione della molla, anziché di un allungamento.

 **(a)** Una molla nel suo stato di riposo. L'origine dell'asse x è stata collocata all'estremità libera della molla.	 **(b)** Il blocco viene spostato del tratto d, e la molla viene allungata di una quantità x. Notare la forza elastica di richiamo $\vec{F}$ esercitata dalla molla.
	**(c)** La molla viene compressa del tratto x. Anche qui, notare la forza elastica di richiamo.

Calcolare il lavoro necessario per allungare di $\mathbf{2\,cm}$ la molla della figura senza accelerarla. Si sa che se si appende alla molla un corpo di massa $\mathbf{m=4\,kg}$ la molla si allunga di $\mathbf{1{,}5\,cm}$.



Quando nessun corpo è appeso alla mola, i suoi estremi coincidono con i punti $\mathbf{O}$ ed $\mathbf{A}$. Quando la molla è allungata del tratto $\mathbf{x}$ essa esercita la forza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} = -\mathbf{k}(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = -\mathbf{k\,x}$ $[\mathbf{F_e} = -\mathbf{k\,x}]$

Per allungare la molla senza accelerarla occorre applicare alla molla stessa una forza deformante

$$\vec{\mathbf{F}}_d = \mathbf{k}(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = \mathbf{k}\,\vec{\mathbf{x}} \quad [\mathbf{F}_d = \mathbf{k\,x}]$$

Quando la molla si allunga del tratto $\mathbf{x = 1{,}5\,cm = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\,m}$ e quindi: $F = k\,x = m\,g$

$$k = \frac{m\,g}{x} = \frac{4 \cdot 9{,}8}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} = 2{,}61 \cdot 10^{3}\,\frac{N}{m}$$

$$\mathbf{L_{AC}}(\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{d}}) = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}61 \cdot 10^{3} \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^{-2}\right)^2 = \mathbf{5{,}22 \times 10^{-1}\,J} \qquad L = \int_0^x F\,d\,x = \int_0^x k\,x\,d\,x = = \frac{1}{2}k\,x^2$$

Potenza

Nella definizione di lavoro di una forza poco importa il tempo durante il quale tale lavoro è stato compiuto. Nella pratica, però, è fondamentale sapere in quanto tempo è stato compiuto un certo lavoro. Si dice che si misura la potenza che si sviluppa ($L > 0$) o si assorbe ($L < 0$) in quel lavoro. La potenza media W_m in un intervallo di tempo Δt durante il quale è stato compiuto il lavoro **L** è:

$$\mathbf{W_m} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{\Delta t}}$$

La potenza all'istante t è il rapporto tra il lavoro elementare $d\,L$ compiuto nel tempo $d\,t$, e tale intervallo di tempo, cioè:

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{dL}}{\mathbf{dt}} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \times \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}}{\mathbf{dt}} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{v}}\,\mathbf{dt}}{\mathbf{dt}} = \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{cos}\,\vartheta$$

La potenza esprime la rapidità con cui un certo lavoro è stato compiuto.

$$[W] = \frac{[L]}{[t]} = \frac{\left[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}\right]}{[T]} = \left[M \cdot L^2 \cdot T^{-3}\right], \{W\} = watt = W = \frac{\{L\}}{\{t\}} = \frac{J}{s}, \; 1\,watt = \frac{1\,joule}{1\,secondo}$$

L'unità di misura della potenza nel **S.I.** è il watt (W) definito come la potenza di un motore capace di produrre (assorbire) un joule di lavoro al secondo. Il watt è il lavoro di 1 joule compiuto in un secondo.

Il watt è una unità di misura piuttosto piccola per cui si usano frequentemente suoi multipli:

$$1chilowatt = 1Kw = 1000W = 10^3 W \quad , \quad 1megawatt = 1Mw = 10^6 W$$

$$1\mathrm{W} = 10^{-3}\,\mathrm{Kw} \quad , \quad 1\mathrm{W} = 10^{-6}\,\mathrm{Mw}$$

Osservazione: In fisica si definisce macchina qualsiasi dispositivo capace di compiere lavoro. La potenza di una macchina è il rapporto tra il lavoro compiuto dalla macchina ed il tempo impiegato a compierlo. Poiché il lavoro è compiuto da una forza è meglio parlare di potenza sviluppata o assorbita dalla forza $\vec{F}$ (quando questa compie il lavoro **L**).

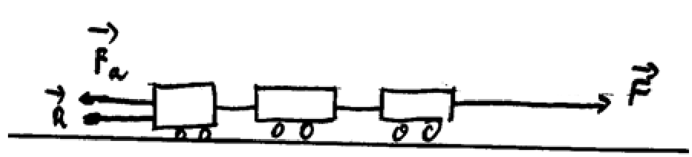
$\mathrm{L} = \mathrm{W}\cdot\mathrm{t}$ **,** $1\mathrm{Kwh} = 3{,}6\cdot10^6\,\mathrm{J}$ **,** $1\mathrm{Wh} = 3{,}6\cdot10^3\,\mathrm{J}$ **,**

Kwh = chilowattora = unità di misura non coerente di lavoro

Il motore di un ascensore assorbe la potenza di $\mathbf{9{,}8KW}$. In quanto tempo raggiunge l'altezza di $\mathbf{20m}$ sapendo che l'ascensore pesa $\mathbf{300kg_p}$?

$$W = \frac{L}{t} \qquad \mathbf{t} = \frac{L}{W} = \frac{3\cancel{00}\cdot\cancel{9{,}8}\cdot2\cancel{0}}{\cancel{9{,}8}\cdot1\cancel{000}} = \mathbf{6s}$$

Un treno viaggia alla velocità costante $\mathbf{v = 144\frac{km}{h}}$ su un tratto rettilineo orizzontale. Il treno, formato da un locomotore e da parecchi vagoni, ha la massa di $\mathbf{m = 5\cdot10^5\,kg}$. Il coefficiente complessivo di attrito volvente è $\mathbf{k = 0{,}003}$ mentre la resistenza dell'aria si può valutare in $\mathbf{15000\,N}$. Calcolare la potenza sviluppata dai motori del locomotore utilizzando $\mathbf{g = 10\frac{m}{s^2}}$.



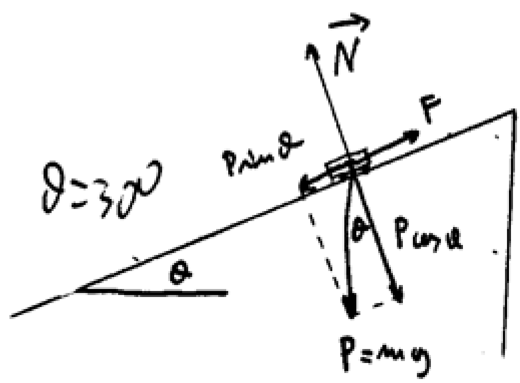
$\vec{F} + \vec{F}_a + \vec{R} = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad F = F_a + R$ = forza applicata al treno proveniente dall'azione dei motori del locomotore.

$\mathbf{F_a} = k \cdot N = k \cdot m \cdot g = 0,003 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 10\, N = \mathbf{15000\,N}$ = forza di attrito volvente

$\mathbf{R = 15000\,N}$ = resistenza dell'aria $\quad \mathbf{F} = F_a + R = 15000 + 15000 = \mathbf{30000\,N}$

$\mathbf{W} = \frac{L}{t} = F \cdot \mathrm{v} = 30000 \cdot 40 = 12 \cdot 10^5\, W = \mathbf{1200\,kW} \quad \mathbf{v = 144\frac{km}{h} = 144 \cdot \frac{5}{18} = \frac{720}{18} = 40\frac{m}{s}}$

Un carrello avente massa $\mathbf{m = 15\,kg}$ è spinto verso l'alto, sul pendio di una collina, da una forza $\vec{\mathbf{F}}$ costante. La collina è inclinata di $\mathbf{30°}$ rispetto al piano orizzontale. Il carrello mantiene una velocità costante $\mathbf{v = 6\frac{m}{s}}$ lungo tutto il pendio. Calcolare il lavoro $\mathbf{L}$ compiuto dalla forza in un minuto e la potenza sviluppata dalla forza. Si trascurino tutti gli attriti.



Le forze agenti sul carrello sono: $\vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{g}}$, $\vec{\mathbf{N}}$ la reazione vincolare. Il risultante $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{o}}$ è dato da: $\vec{P} \cdot sin\,\vartheta + \vec{F} = \vec{o} \quad \mathbf{F} = m\,g\,\sin\vartheta = 15 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{73,5\,N} \quad a = 0 \quad \mathrm{v} = \mathrm{costante}$

$\mathbf{s} = \mathrm{v} \cdot t = 6 \cdot 60 = \mathbf{360\,m} \quad \mathbf{L} = \vec{F} \times \vec{s} = F \cdot s = 73,5 \cdot 360 = \mathbf{26460\,J} \quad \mathbf{W} = \vec{F} \times \vec{\mathrm{v}} = F \cdot \mathrm{v} = 73,5 \cdot 6 = \mathbf{441\,W}$

Il rendimento di una macchina

Definizione: Il **rendimento** η di una macchina è il rapporto tra la quantità di energia L che essa trasforma in lavoro e la quantità di energia U_a che assorba dall'ambiente esterno.

In formule abbiamo: $\eta = \dfrac{\textbf{energia trasformata}}{\textbf{energia assorbita}} = \dfrac{L_u}{U_a}$ energia trasformata = lavoro utile

L'energia assorbita U_a una macchina (un motore) viene sempre completamente restituita, in parte come **lavoro utile** $L = L_u$ ed in parte come **lavoro passivo** L_p che non si può ulteriormente sfruttare (di solito si tratta di energia dissipata sotto forma di calore). Risulta: $U_A = L_u + L_p$

Problema N°1: Una pompa solleva in 9 minuti $5000\,kg$ di acqua all'altezza $h = 20\,m$, consumando $1200\,kJ$ di energia elettrica. Calcolare il rendimento della pompa.

Risoluzione: $t = 9\min = 9 \cdot 60 = 540\,s$ $\quad m_{H_2O} = 5000\,kg \quad h = 20\,m \quad U_a = 1200\,kJ = 1,2 \cdot 10^6\,J$

$L = L_u = m\,g\,h = 5000 \cdot 9,8 \cdot 20 = 980000\,J$ $\qquad \boxed{\eta = \dfrac{L}{U_a} = \dfrac{0,98 \cdot 10^6}{1,2 \cdot 10^6} = \dfrac{0,98}{1,2} = 0,8 = 80\%}$

Nel nostro caso il lavoro passivo non utilizzabile vale:

$$L_p = U_a - L_u = 1,2 \cdot 10^6 - 0,98 \cdot 10^6 = (1,2 - 0,98) \cdot 10^6 = 0,22 \cdot 10^6 = 2,2 \cdot 10^5\,J \quad \text{in 9 minuti}$$

Il lavoro passivo ad ogni secondo vale: $\dfrac{2,2 \cdot 10^5}{540} = 407,4\dfrac{J}{s}$

Problema N°2: Una macchina in equilibrio dinamico assorbe $100\,J$ al secondo e solleva una massa di $2\,kg$ all'altezza di $30\,m$ in $10\,s$. Qual è il rendimento della macchina?

Risoluzione: $L_a = 100\,J$ $\qquad W = \dfrac{L_u}{t} = \dfrac{m\,g\,h}{t} = \dfrac{2 \cdot 9,8 \cdot 30}{10} = 58,8\,J \quad \Rightarrow \quad L_u = 58,8\,J$

$$\boxed{\eta = \dfrac{L_u}{L_a} = \dfrac{58,8}{100} = 0,588}$$

Problema N°3: Quanto lavoro compie in $15\,s$ una macchina i cui rendimento è $0,75$ e che assorbe $6 \cdot 10^4\,J$ in $45\,s$, lavorando sempre nelle stesse condizioni?

Risoluzione: $\eta = \dfrac{L_u}{L_a} \quad \Rightarrow \quad L_u = \eta \cdot L_a$ In $45\,s$ la macchina assorbe $6 \cdot 10^4\,J$, in $15\,s$ ne assorbe $\dfrac{1}{3}$

Quindi: $L_a = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^4\,J = 2 \cdot 10^4\,J$ $\qquad \boxed{L_u = \eta \cdot L_a = 0,75 \cdot 2 \cdot 10^4 = 1,5 \cdot 10^4\,J}$

Osservazione: Il rendimento di un a macchina dà luogo al problema del moto perpetuo.

- Moto perpetuo di prima specie: Consiste nel costruire una macchina capace di fornire una quantità di energia maggiore di quella prodotta. Questa macchina non può essere costruita in quanto violerebbe il principio di conservazione dell'energia.
- Moto perpetuo di seconda specie: Consiste nel costruire una macchina capace di fornire una quantità di energia uguale a quella prodotta. Questa macchina non può essere costruita in quanto violerebbe il secondo principio della termodinamica.

Energia cinetica

Ad ogni corpo di massa **m** e velocità $\vec{v}$ noi possiamo associare l'energia cinetica

$$\mathbf{K = E_c = T = \frac{1}{2} m v^2} \qquad [3]$$

Si tratta di una grandezza scalare, sempre positiva, il cui valore dipende soltanto dalla massa e dal valore istantaneo della velocità. Per capire a fondo il significato della formula [3] analizziamo un caso particolare. Un corpo di massa **m** si muove di moto rettilineo uniformemente vario sotto l'azione di una forza costante $\vec{F}$. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ quando la massa **m** passa dalla posizione A (dove ha velocità $\vec{v}_i$) alla posizione B (dove ha velocità $\vec{v}_f$) in t secondi. F costante $\Rightarrow$ a costante $\Rightarrow$ $a = \frac{v_f - v_i}{t}$

Se all'istante iniziale $t = 0$ scegliamo $s_o = 0$ e $v_o = v_i$ la legge oraria del moto è:

$$s = v_i \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 = v_i \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_f - v_i}{t} \cdot t^2 = v_i \cdot t + \frac{v_f \cdot t - v_i \cdot t}{2} = \frac{2 v_i t + v_f t - v_i t}{2} = \frac{v_f + v_i}{2} t$$

F = costante $\Rightarrow$ $L_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \times (B - A) = F \cdot s = m \cdot \frac{v_f - v_i}{t} \cdot \frac{v_f + v_i}{2} \cdot t = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$

$$\mathbf{L_{AB}(\vec{F}) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = K_f - K_i = \Delta K = \Delta E_c} \qquad [4]$$

Questo risultato è vero non solo per forze $\vec{F}$ costanti e per percorsi rettilinei ma anche per forze comunque variabili e per percorsi curvilinei. La formula [4] esprime il teorema di variazione dell'energia cinetica che a parole può essere enunciato così: <<**Il lavoro compiuto dal risultante $\vec{F}$ di tutte le forze agenti sulla massa m lungo un arco di**

traiettoria AB è uguale alla variazione dell'energia cinetica subita dalla massa m quando passa dalla posizione iniziale A alla posizione finale B>>.

Il teorema della variazione dell'energia cinetica vale sia per le **forze conservative** sia per le **forze non conservative**.

$\mathbf{L_{i\to f}\left(\vec{F}\right)+L_{i\to f}\left(\vec{f}_a\right)=\Delta K=K_f-K_i=\frac{1}{2}m\,v_f^2-\frac{1}{2}m\,v_i^2}$ se sulla massa m agisce anche la forza di attrito $\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}$.

Quando sulla massa m agiscono soltanto forze conservative allora il teorema della variazione dell'energia cinetica assume la seguente forma:

$$\mathbf{L_{i\to f}\left(\vec{F}\right)=\Delta K=K_f-K_i=\frac{1}{2}m\,v_f^2-\frac{1}{2}m\,v_i^2}$$

- Se all'istante iniziale $t_o=0$ è $v_i=0$ (corpo in quiete) e all'istante finale t è $v_f=v$ la [4] diventa:

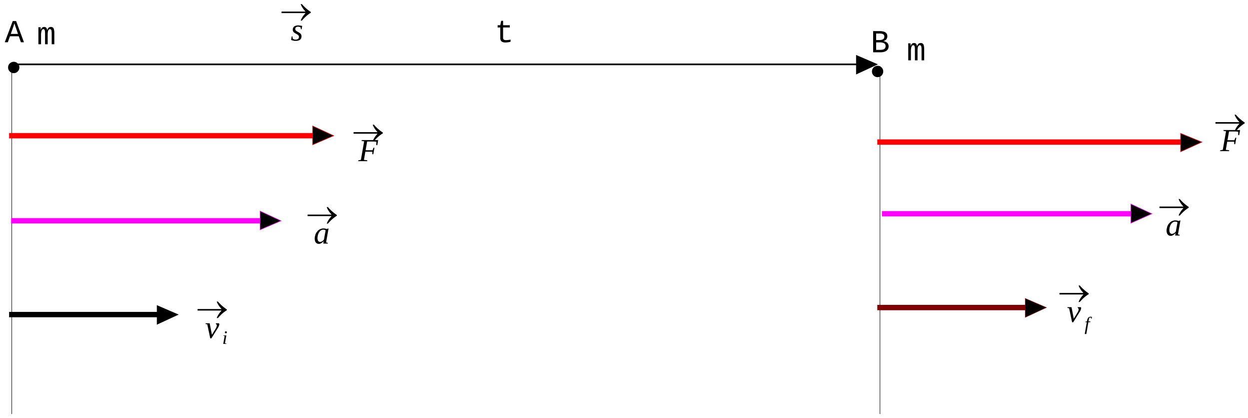
$$\mathbf{L_{AB}\left(\vec{F}\right)=\frac{1}{2}m\,v^2}$$

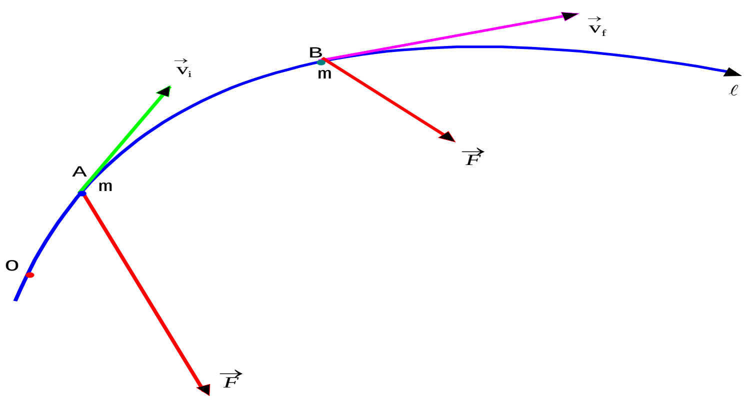
cioè l'**energia cinetica di un corpo di massa m e velocità** $\vec{v}$ **rappresenta il lavoro motore che una forza esterna** $\vec{F}$ **(costante o variabile) applicata al corpo compie per portarlo dalla quiete alla velocità** $\vec{v}$.

Osservazione: Il lavoro L è l'energia trasferita ad un corpo o da un corpo per mezzo di una forza che agisce sul corpo stesso. L'energia ceduta al corpo è un lavoro positivo, mentre quella ceduta dal corpo è un lavoro negativo.

- Se $\vec{v}_i=\vec{v}$ e $\vec{v}_f=\vec{o}$ la [4] diventa: $L_{AB}\left(\vec{F}\right)=-\frac{1}{2}m\,v^2$ $\mathbf{\frac{1}{2}m\,v^2=-L_{AB}\left(\vec{F}\right)=L_{AB}\left(-\vec{F}\right)}$

cioè l'**energia cinetica di un corpo rappresenta anche il lavoro che una forza esterna deve compiere sul corpo per fermarlo.**





Osservazioni

- L'energia cinetica acquistata da un corpo avviene sempre a spese di un lavoro compiuto su di esso da una forza esterna
- L'energia cinetica di un corpo dipende, con la velocità, dal sistema di riferimento. Quindi essa è **definita a meno di una costante additiva**. Infatti un corpo in quiete rispetto alla terra ha una energia cinetica nulla in un sistema di riferimento solidale con la terra, ma ha energia cinetica diversa da zero rispetto al sole o rispetto ad un qualsiasi altro sistema di riferimento che si muove rispetto alla terra.
- Da un punto di vista operativo possiamo affermare che un corpo possiede energia ogni volta che è in grado di compiere del lavoro. Un corpo in movimento essendo in grado di vincere l'attrito, di comprimere una molla urtando contro di essa, o di innalzarsi malgrado la gravità, deve necessariamente possedere energia. Questa capacità di un corpo di compiere lavoro in virtù del suo moto è detta **energia cinetica**, cioè energia associata al moto. Quindi l'**energia cinetica di un corpo** è l'energia che compete al corpo per il fatto di possedere velocità.

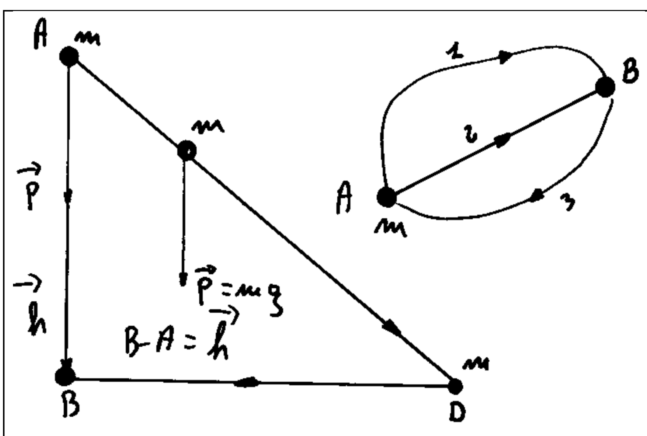
- L' energia cinetica**,** di un corpo esprime la capacità di compiere lavoro da parte del corpo per il fatto di possedere una velocità. In parole povere: compiere lavoro significa trasferire energia da un corpo ad un altro.
- Il teorema dell'energia cinetica è molto somigliante formalmente alla relazione che dà il teorema dell'impulso. Si noti però che l'impulso è utile quando si conosce la forza in funzione del tempo $F(t)$, mentre il lavoro può essere calcolato facilmente quando conosciamo la forza in funzione della posizione $F(s)$. Ora questo secondo caso si presenta più frequentemente del primo: e ciò spiega l'importanza dei concetti di lavoro e di energia.
- Si riferisca il moto della massa **m** a due assi cartesiani ortogonali. Risulta: $\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y$

ed anche: $v^2=v_x^2+v_y^2$, $\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}m v_x^2+\frac{1}{2}m v_y^2$ cioè : $K=K_x+K_y$.

L'energia cinetica si può pensare come la somma aritmetica dell'energia cinetica che compete separatamente a ciascuno dei due moti componenti di **m** lungo i due assi.

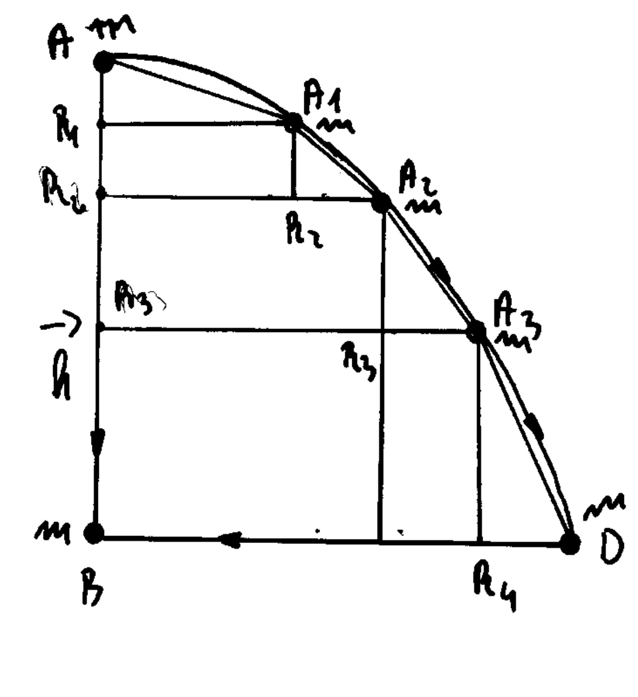
Forze e campi conservativi

Se in ogni punto di una regione dello spazio si manifesta una forza, diciamo che quella regione è sede di un campo di forze. Lo spazio attorno alla Terra è sede di un campo di forze gravitazionali in quanto in un suo qualsiasi punto ogni massa è soggetta alla forza peso.



Tutte le forze della fisica possono essere suddivise in forze conservative e forze non conservative o forze dissipative

Qualche esempio introduttivo ci servirà per capire meglio il significato di forze conservative e forze dissipative.



Supponiamo di trovarci in prossimità della terra dove il campo gravitazionale terrestre è uniforme ed il peso $\vec{P} = m\vec{g}$ può ritenersi costante. Consideriamo due punti A e B dello spazio e due percorsi diversi , ad esempio AB e ADB.

$$L_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}\times\left(B-A\right) = \vec{P}\times\vec{h} = m\,g\,h$$

(possiamo pensare alla caduta verticale di un tratto AB)

$$L_{ADB}\left(\vec{P}\right) = L_{AD}\left(\vec{P}\right) + L_{DB}\left(\vec{P}\right) =$$

$$= \ \vec{P}\times\left(D-A\right) + \vec{P}\times\left(B-D\right) =$$

$$= \ P\cdot\overline{AD}\cdot\cos\vartheta + 0 = m\,g\,h$$

essendo $h = \overline{AB} = \overline{AD}\cos\vartheta$ (possiamo pensare allo scorrimento senza attrito di un punto materiale prima sul piano inclinato perfettamente liscio AB e poi sul piano orizzontale liscio DB).

Abbiamo trovato: $\quad L_{AB}\left(\vec{P}\right) = L_{ADB}\left(\vec{P}\right) = m\,g\,h$

Supponiamo adesso che il percorso per andare da A a B non sia rettilineo ma sia mistilineo. In tal caso basta dividere la curva AD in archi piccolissimi mediante piani orizzontali tali che ogni arco di curva possa essere sostituito dalla sua corda. In tal caso avremo:

$$L_{ADB}\left(\vec{P}\right) = L_{AA_1}\left(\vec{P}\right) + L_{A_1A_2}\left(\vec{P}\right) + L_{A_2A_3}\left(\vec{P}\right) + L_{A_3D}\left(\vec{P}\right) + L_{DB}\left(\vec{P}\right) =$$

$$= L_{\overline{AA_1}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_1A_2}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_2A_3}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_3D}}\left(\vec{P}\right) + 0 =$$

$$= \ mg\cdot\overline{AR_1} + mg\cdot\overline{R_1R_2} + mg\cdot\overline{R_2R_3} + mg\cdot\overline{R_3B} = mg\cdot\left(\overline{AR_1} + \overline{R_1R_2} + \overline{R_2R_3} + \overline{R_3B}\right) = m\,g\,h$$

Quindi **il lavoro compiuto dalla forza peso non dipende dal percorso, ma viene determinato soltanto dalla posizione iniziale A e dalla posizione finale B del punto materiale e dal valore della forza peso** $\vec{P}$.

Abbiamo trovato un caso in cui il lavoro eseguito dalla forza agente non dipende dalla particolare traiettoria seguita dal corpo, ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo. Nel caso delle **forze gravitazionali** si ottiene sempre un risultato analogo anche se si considerano traiettorie più complesse e forze applicate comunque complesse. Tutte le forze che si comportano come le forze gravitazionali si dicono forze conservative.

Definizione generale: << Un campo di forze si dice conservativo se il lavoro compiuto dalle forze del campo su un corpo in movimento non dipende dalla particolare traiettoria seguita, ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale.>>

Sono forze conservative: 1) tutte le forze centrali, in particolare le forze elastiche $\vec{f}=-k\,\vec{x}$, le forze deformanti $\vec{f}=k\,\vec{x}$ 2) le forze gravitazionali, in particolare la forza peso 3) le forze elettrostatiche.

Diamo un'altra definizione delle forze conservative equivalente alla precedente. Consideriamo un campo conservativo e tre percorsi ($A1B$, $A2B$, $A3B$) che congiungono la posizione iniziale A con la posizione finale B. Essendo il campo conservativo possiamo scrivere:

$$L_{A1B}\left(\vec{F}\right)=L_{A3B}\left(\vec{F}\right)=-L_{B3A}\left(\vec{F}\right) \;\Rightarrow\; L_{A1B}\left(\vec{F}\right)+L_{B3A}\left(\vec{F}\right)=0 \;\Rightarrow\; L_{A1B3A}\left(\vec{F}\right)=0$$

Ma $A1B3A$ è un percorso chiuso. Questo ci consente di affermare che << il lavoro delle forze conservative lungo un percorso chiuso è nullo>>. Invertendo il ragionamento si dimostra facilmente che se è nullo il lavoro lungo un percorso chiuso, questo lavoro deve essere indipendente dal percorso effettuato per andare da una posizione iniziale A ad una finale B.

Ne risulta un'altra definizione di forza conservativa. <<**Le forze conservative sono forze il cui lavoro lungo un percorso chiuso è nullo**>>. Tutte le forze che non soddisfano alle definizioni finora date sono chiamate forze non conservative**.** Sono forze non conservative le forze dissipative come le forze d'attrito che si manifestano quando un corpo scivola sulla superficie di un altro corpo e le forze di resistenza alle quali si trovano sottoposti tutti i corpi che si spostano in un mezzo fluido (liquido o aeriforme). Delle forze dissipative possiamo dare anche la seguente definizione: << **si chiamano forze dissipative quelle forze il cui lavoro totale, lungo un percorso chiuso è negativo**>>

Sono forze non conservative anche le forze giroscopiche, cioè quelle forze (come la forza reale di Lorentz e la forza fittizia di Coriolis) che dipendono dalla velocità del punto materiale ed agiscono sempre lungo una direzione perpendicolare al vettore velocità.

- Un campo di forze si dice centrale se la forza, agente in un punto P qualsiasi del campo, è diretta lungo la retta che passa per il punto P scelto e per un punto fisso O detto centro di forza.

Come esempio si può portare la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole su un pianeta e la forza di interazione elettrostatica di due cariche elettriche puntiformi.

- Per le forze conservative possiamo introdurre una grandezza **U** (detta energia potenziale) che è una funzione dipendente dalla posizione (coordinate) del punto P e che gode della seguente proprietà: << il lavoro compiuto dalle forze del campo per spostare da una posizione iniziale A ad una finale B, il corpo su cui il campo agisce, è dato da:

$$\mathbf{L_{AB}\left(\vec{F}\right)=U\left(A\right)-U\left(B\right)=U_i-U_f} \text{ >>}$$

Quindi per i campi di forza conservativi il lavoro dipende solo dai punti estremi del percorso seguito ed è possibile esprimere tale lavoro come differenza tra i valori assunti in corrispondenza dei punti estremi da una funzione **U** che dipende soltanto dalla posizione del punto materiale e viene detta energia potenziale del campo di forze conservative.

Energia potenziale

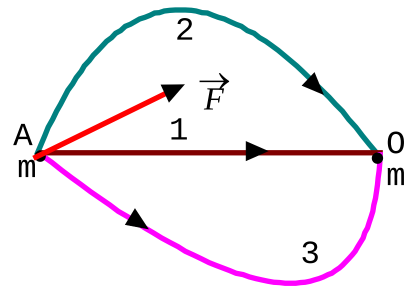
Quando un corpo è sottoposto all'azione di sole forze conservative, allora è utile introdurre una grandezza fisica detta energia potenziale indicata col simbolo **U** oppure col simbolo E_p.

Definiamo punto di riferimento o **posizione di riferimento** o posizione zero di un campo di forze conservative un punto qualsiasi del campo rispetto al quale è nota la posizione del corpo sottoposto all'azione delle sole forze conservative. Il lavoro compiuto dalle forze conservative del campo durante lo spostamento del corpo da una posizione qualunque **A** alla posizione di riferimento **O** viene chiamato energia potenziale del corpo nella posizione iniziale A. Con parole diverse nella forma ma equivalenti nella sostanza possiamo definire l'energia potenziale di una massa **m** posta in un punto A di un campo di forze conservative nella seguente maniera. Nel punto A collochiamo la massa m. Quando la massa m passa dalla posizione A alla posizione O le forze del campo compiono un lavoro detto energia potenziale della massa m.

In simboli abbiamo: $\mathbf{U\left(A\right) = U_A = E_P\left(A\right) = L_{A\to O}\left(\vec{F}\right)}$

E' evidente che risulta : $U\left(O\right) = L_{O\to O}\left(\vec{F}\right) = 0$

Il lavoro compiuto dalla forza conservativa lungo i tre percorsi indicati in figura è lo stesso.



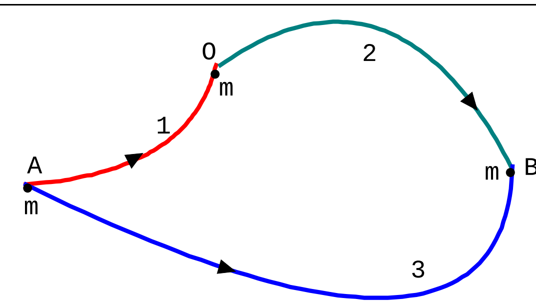
Scegliere il punto **O** come posizione di riferimento significa supporre che l' energia potenziale in O sua nulla e viceversa. Poiché il lavoro delle forze conservative non dipende dal percorso effettuato ma solo dalle posizioni iniziale e finale, l'energia potenziale di un corpo, una volta scelta la posizione zero, dipende esclusivamente dalla posizione occupata dal corpo. Questo significa che l'**energia potenziale U di un corpo è funzione soltanto della posizione da esso occupata**. Il valore dell'energia potenziale col relativo segno dipende dalla posizione di riferimento O; per questo motivo si dice che l'**energia potenziale è definita a meno di una costante additiva**.

$$U_A - U_B = U_i - U_f = L_{A\to O}\left(\vec{F}\right) - L_{B\to O}\left(\vec{F}\right) =$$

$$= L_{A\to O}\left(\vec{F}\right) + L_{O\to B}\left(\vec{F}\right) = L_{1\to 1}\left(\vec{F}\right) = L_3\left(\vec{F}\right) =$$

$$= L_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = L_{i\to f}\left(\vec{F}\right)$$

$$\mathbf{L_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = -\left(U_f - U_i\right) = -\Delta U} \qquad [*]$$



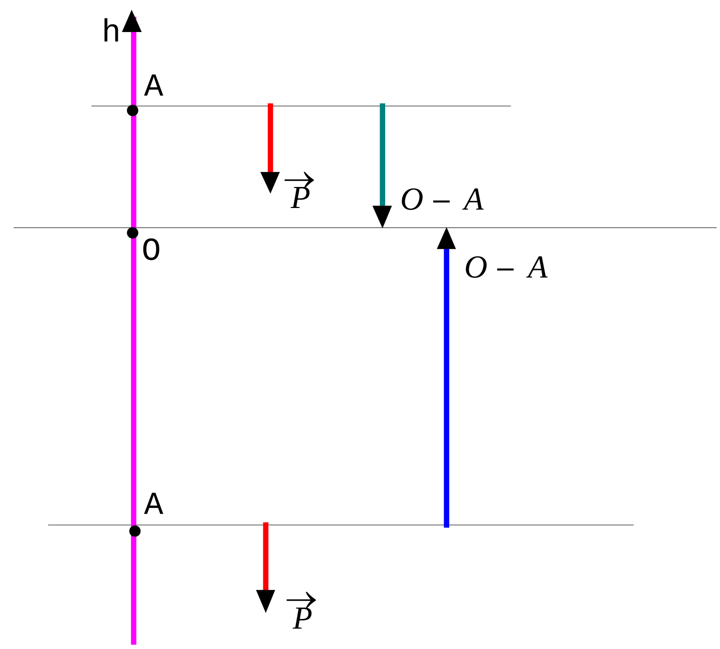
<< **la variazione dell'energia potenziale cambiata di segno rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la massa m passa dalla posizione iniziale A a quella finale B**>> Essa non dipende dalla posizione di riferimento; infatti nella [*] non vi è più traccia della posizione **O**.

- Abbiamo detto che la posizione di riferimento (insieme dei punti cui si attribuisce energia potenziale zero) è scelta arbitrariamente. In talune situazioni potrebbe essere utile scegliere tale posizione secondo criteri di convenienza. Se la forza è costante (campo uniforme) non si ha nessun particolare vantaggio a scegliere una posizione di riferimento piuttosto che un'altra . Di solito si sceglie come energia potenziale un punto qualsiasi di un piano orizzontale.

Consideriamo il campo gravitazionale terrestre in prossimità della terra. La forza $\vec{P} = m\vec{g}$ agente su una massa m è costante e diretta verso il basso.

$U(A) = L_{A\to O}(\vec{P}) = \vec{P}\times(O - A) = m\,g\,h$ con h numero reale relativo , in quanto h è positivo se A è al di sopra del piano orizzontale, negativo se è al di sotto del piano orizzontale.

Quando una massa m cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre, la forza del campo compie un lavoro positivo uguale alla diminuzione dell'energia potenziale gravitazionale.



Più in generale, quando una massa m cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre dall'altezza h_1 all'altezza h_2 ($< h_1$) dalla superficie terrestre, la forza del campo compie un lavoro positivo uguale alla diminuzione dell'energia potenziale. In simboli abbiamo:

$$L = U_1 - U_2 = mgh_1 - mgh_2$$

Viceversa, per portare una massa m da terra all'altezza h è necessario compiere un lavoro contro la forza gravitazionale. Questo significa che è necessario l'intervento di una forza esterna per portare la massa m all'altezza h. La forza esterna compie un lavoro positivo pari a $L = m\,g\,h$, contemporaneamente la forza del campo un lavoro negativo (che rappresenta l'energia potenziale della massa m alla quota h) $-L = -m\,g\,h$ uguale e contrario a quello compiuto dalla forza esterna

Il lavoro compiuto dalla forza esterna viene immagazzinato dalla massa m sotto forma di energia potenziale per essere poi restituito sotto forma di lavoro positivo quando la massa m ritorna liberamente a terra.

Se la forza varia con la posizione del corpo di massa m è conveniente assumere come posizione zero un punto dove la forza è zero.

Se il campo di forze conservative è creato dalla massa puntiforme **M**, allora la posizione zero è un punto all'infinito in quanto: $U(A) = G\cdot\dfrac{M\,m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F(\infty) = 0$

L'energia potenziale della massa m distante r dalla massa **M** che crea il campo radiale è data da: $U(A) = -G \cdot \frac{M\,m}{r}$ $\qquad O \equiv P_\infty$

Il segno meno sta a significare che il lavoro è negativo in quanto la forza gravitazionale, essendo attrattiva, si oppone all'allontanamento della massa m. Quindi l'energia potenziale della massa m posta in un punto del campo gravitazionale generato dalla massa M coincide col lavoro resistente (cioè negativo) compiuto dalle forze del campo quando la massa m va dalla posizione A all'infinito Quando la massa **m** passa dalla posizione iniziale **A** alla posizione finale **B** abbiamo:

$$L_{A\to B}(\vec{F}) = U_A - U_B = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

- Le energia potenziale, compaiono quando si comprime o si allunga una molla, sono energia potenziale. Esse sono del tipo : $\vec{F} = -k\vec{s}$

In questo caso la posizione zero coincide con la posizione di equilibrio O della massa m in quanto in tale posizione risulta $F = 0$. L'energia potenziale della massa m soggetta alla forza $\vec{F} = -k\vec{s}$, posta alla distanza s da O vale $\mathbf{U(s) = \frac{1}{2} k\, s^2}$

L'energia potenziale di m è sempre positiva.

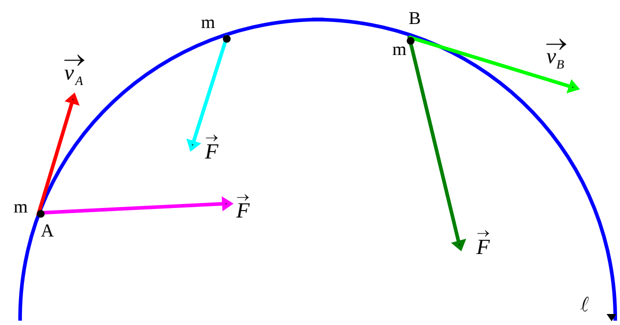
- L'energia potenziale di un corpo è l'energia che compete al corpo per il fatto di occupare una posizione di un campo di forze conservative. Essa rappresenta la capacità potenziale di un corpo in condizioni di quiete di compiere del lavoro in virtù della posizione che esso occupa in un campo di forze conservative. Se una forza esterna $\vec{F}_e$ (cioè non facente parte del campo conservativo) compie un lavoro su un corpo soggetto alle forze di un campo conservativo si può ritenere che tale lavoro venga immagazzinato nel corpo sotto forma di energia potenziale.

La conservazione dell'energia meccanica

L'energia cinetica e l'energia potenziale sono le due forme in cui si può presentare l'energia meccanica di un corpo. Consideriamo una massa **m** soggetta all'azione di un campo di forze conservative e supponiamo che si sposti dalla posizione iniziale **A**, dove ha velocità $\vec{v}_A$, alla posizione finale B, dove ha velocità $\vec{v}_B$. Poiché l'unica forza che agisce su **m** è la forza conservativa del campo, possiamo scrivere: $L_{A\to B}(\vec{F}) = K_B - K_A = U_A - U_B$ cioè:

$$U_B + K_B = U_A + K_B = U + K = E \qquad [1]$$

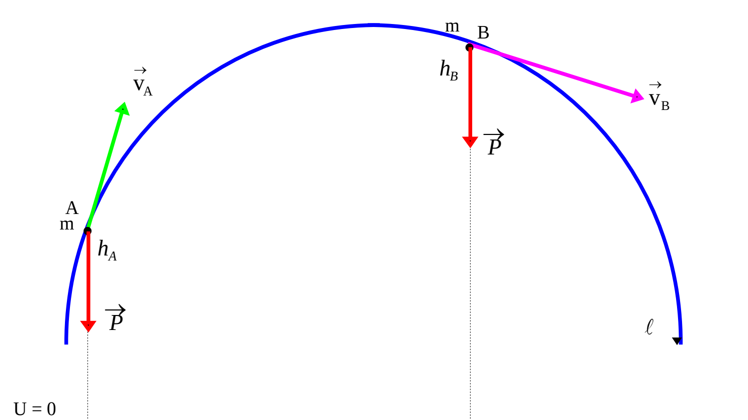
La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è chiamata energia meccanica totale della massa m. L'equazione [1] stabilisce che l'energia meccanica totale è costante se l'unica forza che esegue lavoro è una forza conservativa. Soltanto quando forze di questo tipo eseguono lavoro, l'energia meccanica totale si conserva.



L'equazione [1] è detta legge di conservazione dell'energia meccanica per le forze conservative.

<<**Per un corpo soggetto soltanto a forze conservative si mantiene costante, istante per istante, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.**>>

La proprietà importante dell'energia meccanica E non è il valore effettivo durante il movimento (che dipende dall'osservatore) ma il fatto che questo valore non cambia durante il movimento quando le forze sono conservative. <<**In un sistema isolato soggetto a sole forze conservative si mantiene costante la somma delle energie cinetiche e potenziali di tutte le particelle, cioè si mantiene costante l'energia meccanica totale del sistema**.>>



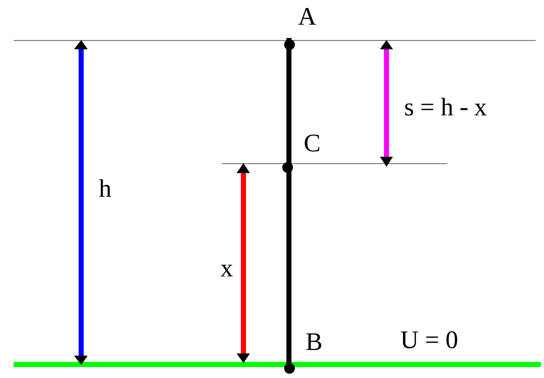
$\Delta K + \Delta U = K_f - K_i + U_f - U_i = L_{i \to f}\left(\vec{f}_a\right)$ se sulla massa m agisce anche la forza di attrito $\vec{f}_a$.

$\Delta K + \Delta U = K_f - K_i + U_f - U_i = 0$ per sole forze conservative.

Illustriamo il significato fisico dell'equazione [2] attraverso un esempio.

Sia **m** la massa di un grave in prossimità della terra. Tale massa parte dalla quiete dalla posizione A ed attraverso la posizione C.

Tale massa , in quiete nella posizione A, giunge al suolo nella posizione B passando attraverso la posizione intermedia C. Vogliamo dimostrare che: $E(A) = E(C) = E(B)$



A) $v_A = 0$, $T_A = 0$, $U_A = mgh$, $E(A) = T_A + U_A = mgh$

Nella posizione A l'energia della massa m è tutta potenziale.

B) $h = 0$, $v_B = \sqrt{2gh}$, $T_B = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m 2gh = mgh$, $E(B) = T_B + U_B = mgh$

Tutta l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica.

C) $U_C = mgx$, $T_C = \frac{1}{2} m v_x^2$

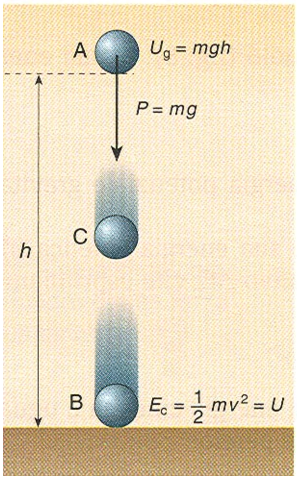
La massa m si muove di moto naturalmente accelerato:

$$s = h - x = \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad v_x^2 = 2gs = 2g(h-x) \quad , \quad T_C = \frac{1}{2} m 2g(h-x) = mgh - mgx$$

$$E(C) = T_C + U_C = mgh - mgx + mgx = mgh \qquad v_C^2 = v_A^2 + 2g(h-x) = 2gh - 2gx$$

Una parte dell'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica. Possiamo concludere affermando che: $E(A) = E(C) = E(B) = mgh$

Un esempio di trasformazione dell'energia meccanica



Consideriamo un corpo di massa m che si trova fermo all'altezza h dal suolo. In questa posizione, chiamiamola A, l'energia potenziale gravitazionale del corpo vale: $U_A = mgh$ mentre la sua energia cinetica è uguale a zero , in quanto il copro è fermo . L'energia meccanica totale del copro nella posizione A vale:

$$E_A = T_A + U_A = 0 + mgh = mgh$$

Abbiamo scelto come punto ad energia potenziale zero un punto qualsiasi del suolo, che rappresenta un piano orizzontale.

Lasciamo cadere il corpo. Mentre la massa m si avvicina al suolo la sua energia potenziale diminuisce, ma contemporaneamente esso acquista velocità e quindi la sua energia cinetica aumenta. Quando il corpo passa per la posizione C, che si trova alla distanza h_C dal suolo, la sua energia meccanica è in parte cinetica ed in parte potenziale e vale:

$$E_C = T_C + U_C = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + mgh_C$$

dove v_C è la velocità del corpo quando passa per il punto C. Al momento dell'impatto col suolo il corpo ha perso tutta la sua energia potenziale che si è trasformata completamente in energia cinetica . Se v è la velocità con la quale il corpo tocca il suolo abbiamo:

$$E_B = T_B + U_B = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + 0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$$

<< **La caduta libera di un corpo è un classico esempio di trasformazione dell'energia potenziale in energia cinetica** >>

Una centrale idroelettrica trasforma energia potenziale gravitazionale in energia cinetica e questa si trasforma in energia elettrica. L'acqua del bacino della diga, costruita a monte rispetto alla centrale, possiede energia potenziale gravitazionale. Scendendo a valle attraverso le condotte forzate, l'acqua perde energia potenziale gravitazionale ed acquista energia cinetica in virtù della velocità ottenuta. L'acqua delle condotte messa in movimento fa girare le turbine dell'alternatore che così è in grado di produrre corrente elettrica.

<< Una slitta che pesa $98\,N$ è lanciata alla velocità $v_i = 10\dfrac{m}{s}$ su un piano orizzontale scabro (coefficienti di attrito $k = 0{,}6$) . Si osserva che dopo avere percorso il tratto $s = 4\,m$ la velocità della slitta si è ridotta a $v_f = 7{,}28\dfrac{m}{s}$. Mostra come si può applicare il principio di conservazione dell'energia durante il moto della slitta . >>

Calcoliamo la forza di attrito : $F_a = k \cdot P = k\,m\,g = 0{,}6 \cdot 9{,}8 = 58{,}8\,N$

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza di attrito durante lo spostamento della slitta

$$L = -F_a \cdot s = -k\,m\,g \cdot s = -58{,}8 \cdot 4 = -235\,J$$

Calcoliamo la massa della slitta : $m = \dfrac{P}{g} = \dfrac{98}{9{,}8} = 10\,kg$

L'energia cinetica iniziale della slitta è : $T_i = \dfrac{1}{2} m v_i^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10)^2 = 500\,J$

L'energia cinetica iniziale della slitta è : $T_f = \dfrac{1}{2} m v_f^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot (7{,}28)^2 = 265\,J$

La slitta ha perduto la seguente quantità di energia cinetica :

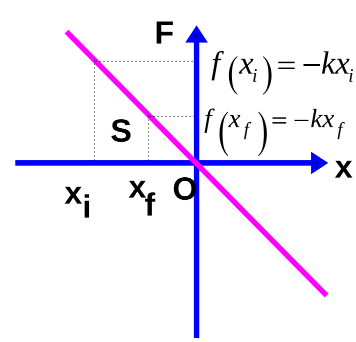
$$\Delta T = T_f - T_i = 265 - 500 = -235\,J$$

La perdita di energia cinetica da parte della slitta coincide col lavoro negativo compiuto dalla forza di attrito che è una forza dissipativi.

Energia potenziale elastica di una molla

L'energia potenziale elastica U di una molla di costante elastica k, compressa o allungata di un tratto x dalla sua posizione di equilibrio, è: $U = \dfrac{1}{2} k\, x^2$

Possiamo dimostrare la [6] senza l'uso degli integrali.



$$L = S = \frac{\left[f(x_i) + f(x_f) \right] \cdot (x_f - x_i)}{2}$$

$$L = \frac{1}{2}(-kx_i - kx_f) \cdot (x_f - x_i) = -\frac{1}{2} k (x_i + x_f) \cdot (x_f - x_i)$$

$$\mathbf{L = -\frac{1}{2} k (x_i + x_f) \cdot (x_f - x_i) = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2) = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2} \qquad [6]$$

Per una forza elastica di richiamo vale il principio di conservazione dell'energia meccanica: **U + K = E**

Nel caso particolare dell'oscillatore armonico abbiamo: $\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx_m^2$ [7]

$v_A=v_B=0$ v_O è massima

x_m = massima elongazione del blocco che rappresenta l'oscillatore armonico

Problema **Una forza $F=4{,}9\,N$ applicata ad un blocco attaccato all'estremo libero di una molla lo allunga del tratto $x_1=12mm$. (a) calcolare la costante elastica della molla**

(b) Calcolare la forza che la molla esercita sul blocco se lo allunghiamo del tratto $x_2=17\,mm$

(c) calcolare il lavoro compiuto dalla molla sul blocco allungato del tratto $x_2=17\,mm$

(d) il lavoro compiuto dalla molla quando il blocco passa dalla posizione $x_3=5\,mm$ alla posizione $x_4=13\,mm$ (e) La molla è allungata del tratto $x_2=17\,mm$. Indi lasciamo ritornare lentamente nella sua posizione di equilibrio e la comprimiamo di $12\,mm$ ($x_5=-12\,mm$). Quanto lavoro sviluppa in totale la molla durante lo spostamento del blocco?

Risoluzione

(a) $k=\frac{F}{x_1}=\frac{4{,}9}{12\cdot 10^{-3}}=408\frac{N}{m}$ **(b)** $f=-kx_2=-408\cdot 17\cdot 10^{-3}=-6{,}9\,N$

(c) Poiché inizialmente la molla è nella sua posizione di equilibrio, possiamo utilizzare la formula $f=-\frac{1}{2}kx_2^2=-0{,}5\cdot 408\cdot\left(17\times 10^{-3}\right)=-5{,}9\cdot 10^{-2}\,J$

Il lavoro compiuto dalla molla è negativo perché lo spostamento del blocco e la forza elastica applicata hanno versi opposti. Il valore del lavoro svolto dalla molla sarebbe lo stesso se essa fosse stata compressa di $17\,mm$

(d) $L=\frac{1}{2}kx_3^2-\frac{1}{2}kx_4^2=\frac{1}{2}k\left(x_3^2-x_4^2\right)=0{,}5\cdot 408\cdot\left[\left(5\cdot 10^{-3}\right)^2-\left(13\cdot 10^{-3}\right)^2\right]=202{,}5\cdot 10^{-6}\left(25-169\right)=$

$$L=-29160\cdot 10^{-6}=-0{,}2916\,J$$

(e) Per questo quesito poniamo $x_i=+17\,mm$ (allungamento), $x_f=-12\,mm$

L'equazione [6] diventa:

$$L=\frac{1}{2}kx_i^2-\frac{1}{2}kx_f^2=\frac{1}{2}k\left(x_i^2-x_f^2\right)=0{,}5\cdot 408\cdot\left[\left(17\cdot 10^{-3}\right)^2-\left(-12\cdot 10^{-3}\right)^2\right]=0{,}03\,J$$

Definizione generale

<< Un campo di forze si dice **conservativo** se il lavoro compiuto dalle forze del campo su un corpo in movimento non dipende dalla particolare traiettoria seguita , ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale . >>

Sono forze conservative: 1) tutte le forze centrali, in particolare le forze elastiche $\vec{f} = -k\vec{x}$, le forze deformanti $\vec{f} = k\vec{x}$ 2) le forze gravitazionali, in particolare la forza peso 3) le forze elettrostatiche.

Diamo un'altra definizione delle forze conservative equivalente alla precedente. Consideriamo un campo conservativo e tre percorsi ($A1B$, $A2B$, $A3B$) che congiungono la posizione iniziale A con la posizione finale B. Essendo il campo conservativo possiamo scrivere :

$$L_{A1B}\left(\vec{F}\right) = L_{A3B}\left(\vec{F}\right) = -L_{B3A}\left(\vec{F}\right) \Rightarrow L_{A1B}\left(\vec{F}\right) + L_{B3A}\left(\vec{F}\right) = 0 \Rightarrow L_{A1B3A}\left(\vec{F}\right) = 0$$

Ma $A1B3A$ è un percorso chiuso. Questo ci consente di affermare che << il lavoro delle forze conservative lungo un percorso chiuso è nullo>>. Invertendo il ragionamento si dimostra facilmente che se è nullo il lavoro lungo un percorso chiuso, questo lavoro deve essere indipendente dal percorso effettuato per andare da una posizione iniziale A ad una finale B. Ne risulta un'altra definizione di *forza conservativa* . << **Le forze conservative sono forze il cui lavoro lungo un percorso chiuso è nullo**>> Tutte le forze che non soddisfano alle definizioni finora date sono chiamate forze non conservative**.** Sono forze non conservative le forze dissipative come le forze d'attrito che si manifestano quando un corpo scivola sulla superficie di un altro corpo e le forze di resistenza alle quali si trovano sottoposti tutti i corpi che si spostano in un mezzo fluido (liquido o aeriforme). Delle forze dissipative possiamo dare anche la seguente definizione: <<**si chiamano forze dissipative quelle forze il cui lavoro totale, lungo un percorso chiuso è negativo**>>. Sono forze non conservative anche le forze giroscopiche, cioè quelle forze (come la forza reale di Lorentz e la forza fittizia di Coriolis) che dipendono dalla velocità del punto materiale ed agiscono sempre lungo una direzione perpendicolare al vettore velocità.

Osservazioni

- Un campo di forze si dice centrale se la forza, agente in un punto P qualsiasi del campo, è diretta lungo la retta che passa per il punto P scelto e per un punto fisso O detto centro di forza. Come esempio si può portare la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole su un pianeta e la forza di interazione elettrostatica di due cariche elettriche puntiformi.
- Per le forze conservative possiamo introdurre una grandezza **U** (detta energia potenziale) che è una funzione dipendente dalla posizione (coordinate) del punto P e che gode della seguente proprietà: <<il lavoro compiuto dalle forze del campo per spostare da una posizione iniziale A ad una finale B, il corpo su cui il campo agisce, è dato da: $\mathbf{L_{AB}(\vec{F}) = U(A) - U(B) = U_i - U_f}$ >>

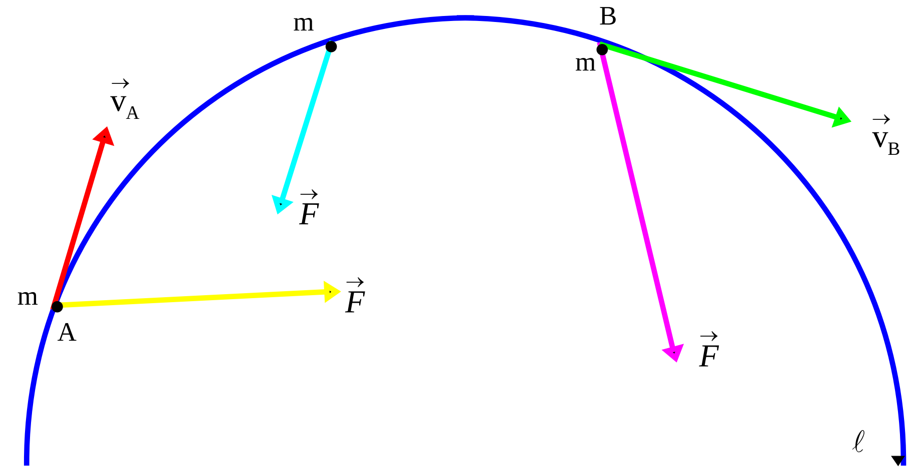
Quindi per i campi di forza conservativi il lavoro dipende solo dai punti estremi del percorso seguito ed è possibile esprimere tale lavoro come differenza tra i valori assunti in corrispondenza dei punti estremi da una funzione **U** che dipende soltanto dalla posizione del punto materiale e viene detta energia potenziale del campo di forze conservative.

La conservazione dell'energia meccanica

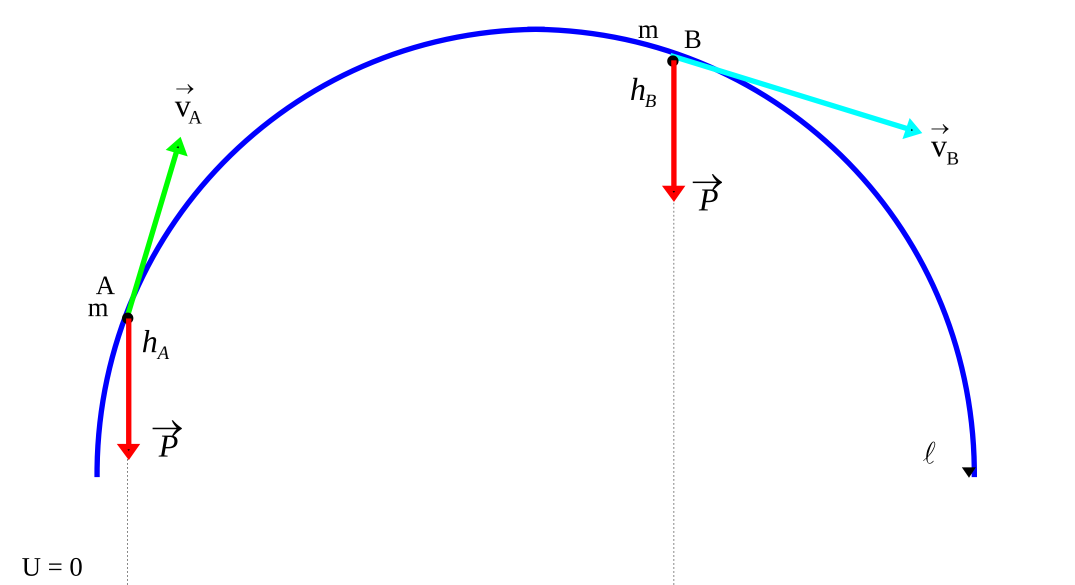
L'energia cinetica e l'energia potenziale sono le due forme in cui si può presentare l'energia meccanica di un corpo. Consideriamo una massa **m** soggetta all'azione di un campo di forze conservative e supponiamo che si sposti dalla posizione iniziale **A**, dove ha velocità $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{A}$, alla posizione finale B, dove ha velocità $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{B}$. Poiché l'unica forza che agisce su **m** è la **forza conservativa** del campo, possiamo scrivere: $\mathbf{L_{AB}(\vec{F}) = K_B - K_A = U(A) - U(B)}$ cioè:

$$\mathbf{K_A + U_A = K_B + U_B = K + U = E} \qquad \textbf{[1]}$$

La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è chiamata energia meccanica totale della massa m. L'equazione [1] stabilisce che l'energia meccanica totale è costante se l'unica forza che esegue lavoro è una forza conservativa. Soltanto quando forze di questo tipo eseguono lavoro, l'energia meccanica totale si conserva.

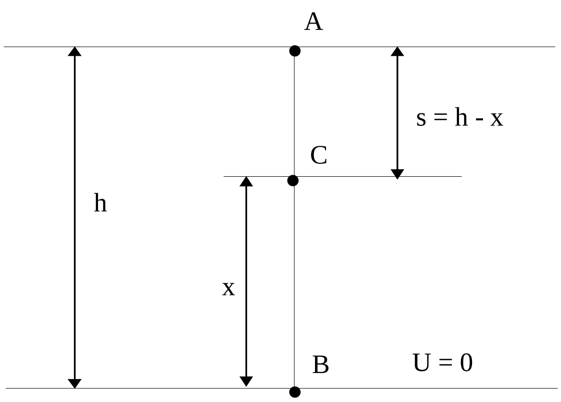


L'equazione [1] è detta legge di conservazione dell'energia meccanica per le forze conservative. << **Per un corpo soggetto soltanto a forze conservative si mantiene costante, istante per istante, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale**.>> La proprietà importante dell'energia meccanica E non è il valore effettivo durante il movimento (che dipende dall'osservatore) ma il fatto che questo valore non cambia durante il movimento quando le forze sono conservative. <<**In un sistema isolato soggetto a sole forze conservative si mantiene costante la somma delle energie cinetiche e potenziali di tutte le particelle, cioè si mantiene costante l'energia meccanica totale del sistema**.>>



Nel caso in cui la massa **m** si muove in prossimità della terra ed è soggetta alla sola forza peso , l'equazione [1] assume la forma: $\frac{1}{2}\mathbf{m}\,\mathbf{v}_A^2+\mathbf{m}\,\mathbf{g}\,\mathbf{h}_A=\frac{1}{2}\mathbf{m}\,\mathbf{v}_B^2+\mathbf{m}\,\mathbf{g}\,\mathbf{h}_B=\frac{1}{2}\mathbf{m}\,\mathbf{v}^2+\mathbf{m}\,\mathbf{g}\,\mathbf{h}=\mathbf{E}$ **[2]**

Illustriamo il significato fisico dell'equazione [2] attraverso un esempio.



Sia **m** la massa di un grave in prossimità della Terra . Tale massa parte dalla quiete dalla posizione A ed attraverso la posizione C .

Tale massa , in quiete nella posizione A , giunge al suolo nella posizione B passando attraverso la posizione intermedia C . Vogliamo dimostrare che:

$$\mathbf{E(A)=E(C)=E(B)}$$

A) $v_A=0,\ K_A=0,\ U_A=mgh\ ,\ E(A)=K_A+U_A=mgh$

Nella posizione A l'energia della massa m è tutta potenziale.

B) $h=0,\ v_B=\sqrt{2gh}\ ,\ K_B=\frac{1}{2}m\,v_B^2=\frac{1}{2}m\,2gh=mgh,\quad E(B)=K_B+U_B=mgh$

Tutta l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica.

C) $U_C=mgx \quad , \quad K_C=\frac{1}{2}m\,v_x^2$

La massa m si muove di moto naturalmente accelerato:

$$s=h-x=\frac{1}{2}gt^2,\quad v_x^2=2gs=2g(h-x),\ K_C=\frac{1}{2}m\cdot 2g(h-x)=mgh-mgx$$

$$E(C)=K_C+U_C=mgh-\cancel{mgx}+\cancel{mgx}=mgh$$

$$v_C^2=v_A^2+2g(h-x)=0+2g(h-x)=2gh-2gx$$

Una parte dell'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica. Possiamo concludere affermando che: $\mathbf{E(A)=E(C)=E(B)=mgh}$

Generalizzazione del principio di conservazione dell'energia meccanica quando sono presenti forze non conservative.

Finora abbiamo considerato soltanto l'azione di una singola forza $\vec{F}$ conservativa su un punto materiale di massa $\mathbf{m}$. Quando la massa $\mathbf{m}$ passa dalla posizione iniziale $\mathbf{A}$ dove ha velocità $\mathbf{v_i}$ ed energia potenziale $\mathbf{U_i}$ alla posizione finale $\mathbf{B}$ dove ha velocità $\mathbf{v_f}$ ed energia potenziale $\mathbf{U_f}$ abbiamo: $\mathbf{L_{A\to B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)=\mathbf{K_f}-\mathbf{K_i}=\mathbf{U_i}-\mathbf{U_f}$

Questa relazione può essere scritta in una delle seguenti maniere:

$\mathbf{\Delta K=-\Delta U}$ $\qquad$ $\mathbf{\Delta K+\Delta U=0}$ $\qquad$ $\mathbf{K_f+U_f=K_i+U_i=E}$

$\mathbf{L_{A\to B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ è il lavoro che compie la forza $\vec{F}$ quando la massa $\mathbf{m}$ passa dalla posizione iniziale $\mathbf{A}$ alla posizione finale $\mathbf{B}$. "La somma della variazione dell'energia cinetica e dell'energia potenziale è zero se la forza $\vec{F}$ che agisce sulla massa $\mathbf{m}$ è conservativa."

Se sulla massa $\mathbf{m}$ agiscono più forze conservative quali la forza peso, la forza elastica di una molla, la forza elettrostatica allora possiamo generalizzare le formule precedentemente ricavate. $\mathbf{L_{A\to B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ diventa $\sum L$, cioè diventa la somma algebrica dei lavori compiuti dalle varie forze conservative. $\mathbf{\Delta U}$ diventa $\sum \Delta U$ = somma delle corrispondenti variazioni di energia potenziale associate alle forze conservative. $\mathbf{\Delta K}$ è sempre la variazione dell'energia cinetica della massa $\mathbf{m}$.

$$\sum L=-\sum \Delta U=\Delta K \qquad\qquad \sum L+\sum \Delta U=0$$

Nella pratica, si presenta frequentemente il caso in cui sulla massa $\mathbf{m}$ agisca, oltre alla forza conservativa $\vec{F}$, anche una forza non conservativa $\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}$, dovuta, ad esempio, all'attrito. In questo caso la somma della variazione dell'energia cinetica e della variazione dell'energia potenziale non è più zero ma è uguale al lavoro (negativo) compiuto dalla forza non conservativa (forza di attrito): $\mathbf{\Delta K+\Delta U=L_{A\to B}}\left(\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}\right)$.

Infatti deve essere: $\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)+\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}\right)=\Delta\mathbf{K}$ **Il lavoro compiuto sulla massa $\mathbf{m}$ da parte di tutte le forze agenti su $\mathbf{m}$ è uguale alla variazione dell'energia cinetica di $\mathbf{m}$**. Ma noi sappiamo che $\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)=-\Delta\mathbf{U}$ e quindi la precedente relazione diventa: $-\Delta\mathbf{U}+\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}\right)=\Delta\mathbf{K}$ cioè: $\Delta\mathbf{K}+\Delta\mathbf{U}=\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}\right)$.

Tale formula può essere scritta così: $K_f-K_i+U_f-U_i=\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$

$K_f+U_f=K_i+U_i+\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)\quad E_f=E_i+\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)\quad E_f-E_i=\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$

Avendo indicato rispettivamente con $E_f=E_B$ e con $E_i=E_A$ l'energia meccanica totale nello stato finale $\mathbf{B}$ e nello stato iniziale $\mathbf{A}$. Questa relazione mostra che in presenza di forze non conservative l'energia meccanica totale non si conserva. Poiché il lavoro $\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}\right)$ compiuto sulla massa $\mathbf{m}$ dalla forza di attrito è sempre negativo deduciamo che l'energia meccanica finale $E_f=E_B$ è sempre minore di quella iniziale $E_i=E_A$. Il lavoro non conservativo $\mathbf{L}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\left(\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}\right)$ rappresenta un trasferimento irreversibile di energia dal corpo di massa $\mathbf{m}$ all'ambiente circostante.

L'energia di un corpo e la relatività ristretta

● Il principio che afferma la costanza della massa di un corpo è valido in tutte le questioni della meccanica classica cioè per masse aventi velocità piccole rispetto alla velocità della luce:

$$\mathbf{c}=300\cdot000\,\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{s}}=3\cdot10^8\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

Einstein dimostrò che la massa di un corpo varia con la sua velocità secondo la relazione:

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\gamma\cdot m_o\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad \beta=\frac{v}{c}$$

dove β è detto parametro di velocità ed è privo di dimensioni in quanto rapporto di grandezze della stessa specie, m_o è la massa a riposo, cioè la massa del corpo quando è in quiete, ed m è la massa del corpo quando ha velocità v. La massa di un corpo tende all'infinito quando la sua velocità tende a quella della luce. $m(c)=\dfrac{m_o}{\sqrt{1-1}}=\dfrac{m_o}{0}=\infty$

Inoltre Einstein stabilì l'equivalenza tra la massa e l'energia secondo la relazione: $\mathbf{E=m\cdot c^2}$

cioè: <<alla massa m corrisponde l'energia E e viceversa>>

- Per le particelle che si muovono a velocità prossime alla velocità della luce, la meccanica di Newton cade in difetto e deve essere sostituita dalla teoria della relatività ristretta di Einstein. Di conseguenza per l'energia cinetica di una particella non possiamo usare l formula $K=\frac{1}{2}mv^2$,ma dobbiamo ricorrere alla formula $K=mc^2(\gamma-1)$ dove c è la velocità della luce nel vuoto
- La velocità della luce è una barriera alla quale i corpi possono avvicinarsi senza mai uguagliarla.
- La meccanica classica è valida per corpi la cui velocità è di gran lunga inferiore alla velocità della, luce. La teoria della relatività ristretta di Einstein si conferma corretta per corpi dotati di qualsiasi velocità.
- Sia m_o la massa di un corpo quando è fermo m_o = massa a riposo

La massa m di un corpo in moto con velocità v vale secondo la teoria della relatività ristretta di Einstein: $\mathbf{m=\dfrac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma\cdot m_o}$

Se risulta: $v \ll c$ allora $m \sim m_o$, cioè per corpi lenti la massa relativistica coincide con quella classica.

L'energia cinetica di un corpo in moto con velocità v (prossima o confrontabile con quella della luce) assume una forma diversa da quella fornita dalla meccanica classica.

Un corpo in quiete avente massa a riposo m_o possiede una energia a riposo o energia di massa del corpo data da: $\mathbf{E_o=m_o\cdot c^2}$

L' energia cinetica relativistica $K=E_c$ di un corpo di massa m e velocità v vale:

$$\mathbf{K=E_c=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}\gamma\,m_o\,v^2}$$

L'energia totale relativistica E di un corpo di massa m e velocità v vale:

$$\mathbf{E=m\cdot c^2=\gamma\cdot m_o\cdot c^2=\gamma\cdot E_o}$$

Risulta: $E = E_o + K$ cioè l' energia totale relativistica di un corpo è la somma della sua energia a riposo e della sua energia cinetica relativistica.

$$E = E_o + K \quad \Rightarrow \quad mc^2 = m_o c^2 + \frac{1}{2} m v^2 \qquad K = E_c = mc^2 - m_o c^2 = (m - m_o) c^2 = (\gamma - 1) \cdot m_o \cdot c^2$$

Per corpi lenti, cioè per corpi per i quali vale la relazione $v \ll c$ abbiamo: $m_o c^2 = m_o c^2 + \frac{1}{2} m v^2$

Esempio N°1: Un elettrone si muove alla velocità $v = \frac{4}{5} c$. Calcolare: (a) l'energia a riposo dell'elettrone (b) la sua energia totale.

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg \qquad c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

(a) $E_o = m_o \cdot c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 81{,}9 \cdot 10^{-15} = 8{,}19 \cdot 10^{-14}\, J$

(b) $\beta = \frac{v}{c} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25-16}{25}}} = \frac{5}{3} \approx 1{,}6666$

$E = \gamma \cdot E_o = \frac{5}{3} \cdot 8{,}19 \cdot 10^{-14} = 5 \cdot 2{,}73 \cdot 10^{-14} = 16{,}65 \cdot 10^{-14} = 1{,}665 \cdot 10^{-14}\, J$

Esempio N°2: Calcolare la massa a riposo di un corpo che si muove alla velocità di $240000 \frac{km}{s}$ e possiede, a tale velocità, l'energia cinetica relativistica di $3 \cdot 10^5\, J$.

$v = 240000 \frac{km}{s} = 24 \cdot 10^7 \frac{m}{s} \qquad K = 3 \cdot 10^{15}\, J$

$\gamma = \frac{v}{c} = \frac{24 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25-16}{25}}} = \frac{5}{3} \approx 1{,}6666$

$\frac{1}{2} m v^2 = K \quad \Rightarrow \quad m = \gamma \cdot m_o = \frac{2K}{v^2} \quad \Rightarrow$

$$m_o = \frac{2K}{\gamma \cdot v^2} = \frac{6 \cdot 10^{15}}{\frac{5}{3} \cdot 9 \cdot 64 \cdot 10^{14}} = \frac{2 \cdot 10^{15}}{5 \cdot 32 \cdot 10^{14}} = \frac{10^{15}}{16 \cdot 10^{15}} = \frac{1}{16} = 0{,}0625\, kg$$

Esempio N°3: Calcolare l'energia totale posseduta da un corpo la cui energia cinetica è $10^5\ J$ e la cui massa a riposo è $10^{-8}\ g_r$.

$K = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 = 10^5\ J \quad m_o = 10^{-8}\ g_r = 10^{-11}\ kg$

$$E = mc^2 = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 + m_o c^2 = 10^5 + 10^{-11} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 10^5 + 9 \cdot 10^5 = 10^6\ J$$

Fenomeni d'urto

L'**urto** è quel fenomeno che si verifica quando due corpi, dotati di moto relativo, vengono a contatto ed in un **tempo infinitamente piccolo mutano le loro velocità**. Si presuppone che l'urto sia un **fenomeno istantaneo** e che quindi nell'istante in cui esso avviene i corpi **cambino velocità ma non posizione**. L'urto tra due corpi non presenta difficoltà solo se essi hanno forme schematizzabili con **semplici figure geometriche**.

Il caso più semplice è quello dell'**urto tra due sfere libere**, al quale ci si riconduce normalmente nello studio dell'urto tra particelle di dimensioni trascurabili.

Un altro caso che presenta un certo interesse è l'**urto di una sfera ed un piano**, quest'ultimo essendo equiparabile ad una sfera di raggio infinito. L'urto elastico tra sfere viene studiato utilizzando i **teoremi di conservazione dell'energia cinetica** e della **quantità di moto totale**. I corpi che urtano presentano componenti non nulle delle velocità lungo la retta normale alle superfici dei corpi nel punto di contatto. **Tutti gli urti sono caratterizzati dalla conservazione della quantità di moto totale**.

Ci limiteremo a studiare un caso semplice che si può realizzare con due sfere animate di solo **moto traslatorio**, così che il moto sia assimilabile a quello di due punti (i

baricentri delle sfere). Un urto si dice elastico quando le sfere che si urtano sono elastiche, ossia rimbalzano l'una contro l'altra in modo che l'energia cinetica totale si conservi. Nelle sfere, dopo l'urto, non rimane nessuna traccia dell'urto subito. L'urto è anelastico quando avviene tra corpi anelastici nei quali ogni deformazione è permanente e l'energia cinetica iniziale, propria delle due sfere, si converte permanentemente in un'altra forma di energia. L'urto è totalmente anelastico o PLASTICO se dopo l'urto i due corpi rimangono uniti con la stessa velocità ($\vec{u}_2 = \vec{u}_1$). Per esempio, l'urto di una pallottola col bersaglio colpito è completamente anelastico quando la pallottola rimane conficcata nel bersaglio stesso. La durata dell'urto vero e proprio, ossia il tempo durante il quale i centri delle due sfere distano meno della somma dei raggio, è in generale molto breve. Le forze agenti per un tempo breve in confronto al tempo di osservazione del sistema sono dette forze impulsive.

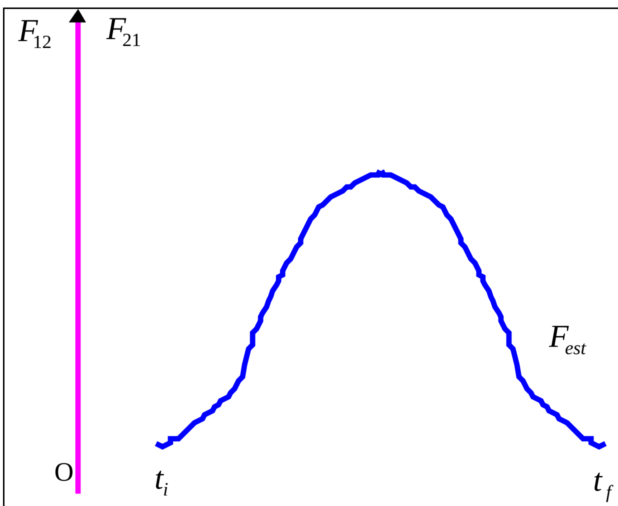
In un urto su ciascuna delle particelle collidenti agisce per un tempo relativamente breve una forza relativamente grande**.**

Quando una particella α $({}^{4}H_{e})$ urta un nucleo di oro $({}^{197}A_{u})$ la forza agente tra essi può essere la ben nota repulsione elettrostatica associata alle cariche delle particelle.

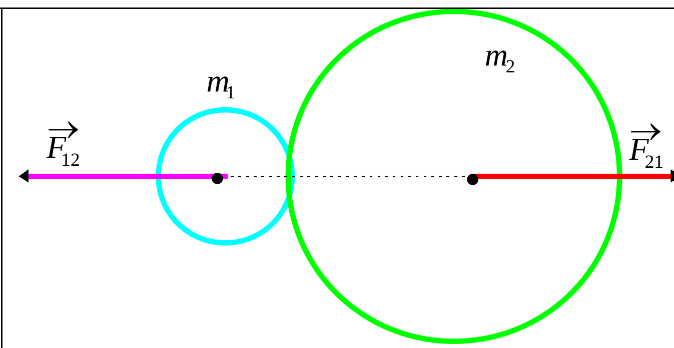
Le particelle possono non toccarsi, ma noi possiamo ugualmente parlare di urto, perché sulla particella α agisce per un tempo breve in confronto al tempo in cui essa viene osservata, una forza relativamente grande, cioè la forza elettrostatica di Coulomb. Pertanto nello studio della fisica l'espressione urto non significa necessariamente un contatto, esso esprime una interazione molto intensa agente per un tempo brevissimo e dovuta a forze interne. Il fenomeno dell'urto è molto complesso. I due corpi, venendo a contatto si deformano. Nascono di conseguenza delle forze di repulsione e queste, agendo sulle due sfere, ricomunicano loro energia cinetica. Uno studio fatto da questo punto di vista presenterebbe delle difficoltà praticamente insormontabili. Invece, applicando i teoremi di conservazione, si possono facilmente ottenere le relazioni che esistono fra le velocità dei corpi che urtano prima e dopo l'urto. Il nostro scopo nello studio dell'urto è il seguente: **date le condizioni iniziali di moto delle particelle collidenti, cosa possiamo sapere dai principi di conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto sui loro moti finali, supponendo di non sapere nulla circa le forze agenti durante l'urto?**

Supponiamo che la curva della figura descriva l'andamento della forza che si esercita su di un corpo durante un urto e che questa forza abbia direzione costante. La collisione ha inizio all'istante t_i, e la forza è nulla sia prima che dopo l'urto. Consideriamo l'urto tra due particelle, ad esempio fra le due particelle di massa m_1 ed m_2 disegnate in figura.

Ad ogni istante $\vec{F}_{21}$ è la forza che la particella <<**1**>> esercita sulla particella <<**2**>>, ed $\vec{F}_{12}$ quella che la particella <<**2**>> esercita sulla particella <<**1**>>. In assenza di forze esterne, la **quantità di moto totale del sistema non viene modificata dall'urto**. Le forze impulsive che agiscono durante l'urto sono forze interne che non modificano la quantità di moto del sistema. <<**Abbiamo definito un urto come una interazione che avviene in un tempo Δt trascurabile in confronto al tempo di osservazione del sistema**>>. <<**Possiamo caratterizzare un urto come un evento nel quale le forze esterne agenti sul sistema sono trascurabili rispetto alle forze impulsive dell'urto**>>. Quando la racchetta colpisce la palla, o una boccia da biliardo ne urta un'altra, è certamente vero che forze esterne agiscono sul sistema. La gravità e l'attrito, per esempio, esercitano forze su questi corpi. Queste forze possono non essere le stesse per ogni corpo urtante, e non sono necessariamente annullate da altre forze esterne. Tuttavia è lecito trascurare queste forze esterne durante l'urto e ritenere valida la conservazione della quantità di moto, purché, come quasi sempre accade, esse siano molto piccole rispetto alle forze impulsive. Allora, la variazione della quantità di moto di una particella che subisce un urto, dovuta all'azione della forza esterna $\vec{F}_{est}$, è trascurabile rispetto a quella prodotta dalla forza impulsiva della collisione. Nella pratica, possiamo applicare il principio di conservazione della quantità di moto se la durata dell'urto è molto piccola.



Esempio di come una forza impulsiva possa variare durante un urto che inizia all'istante t_i e termina all'istante t_f



Due particelle m_1 ed m_2 , urtandosi , sono soggette a due forze uguali ed opposte . Per la terza legge di Newton queste due forze sono , istante per istante , uguali e contrarie .

La variazione della quantità di moto della particella **1** dovuta all'urto vale:

$$\vec{\mathbf{q}}_{1f} - \vec{\mathbf{q}}_{1i} = \int_{t_1}^{t_f} \vec{\mathbf{F}}_{12} \cdot d\,t = \vec{\mathbf{F}}_{12m} \cdot \Delta\,t$$

dove $\vec{F}_{12m}$ rappresenta il valore medio di $\vec{F}_{12}$ durante l'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$.

Analogamente per la particella **2** abbiamo: $\vec{\mathbf{q}}_{2f} - \vec{\mathbf{q}}_{2i} = \int_{t_1}^{t_f} \vec{\mathbf{F}}_{21} \cdot d\,t = \vec{\mathbf{F}}_{21m} \cdot \Delta\,t$

$$\vec{F}_{12m} = -\vec{F}21m \quad \Rightarrow \quad \vec{q}_{2f} - \vec{q}_{2i} = -(\vec{q}_{1f} - \vec{q}_{1i}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{q}}_{1f} + \vec{\mathbf{q}}_{2f} = \vec{\mathbf{q}}_{1i} + \vec{\mathbf{q}}_{2i}$$

Si può allora affermare che la quantità di moto del sistema prima dell'urto è uguale a quella che si ha subito dopo l'urto. L'urto è centrale o normale se i corpi che si urtano si muovono sullo stesso asse, cioè se il moto dei centri delle sfere avviene lungo una stessa retta che è la normale comune alle due sfere. In caso contrario l'urto è obliquo. in questo caso le direzioni del moto delle due sfere dopo l'urto sono diverse da quelle che si avevano prima dell'urto.

Fenomeni d'urto semplificato

Un urto tra due corpi è un fenomeno nel corso del quale i corpi esercitano, l'uno sull'altro, forze molto intense, ma di durata estremamente breve**.** Si presuppone che l'urto sia un **fenomeno istantaneo** e che quindi nell'istante in cui esso avviene i corpi **cambino velocità ma non posizione** . Le forze che si manifestano durante gli urti sono dette **forze impulsive**, in quanto esse sono di breve durata. L'urto tra due corpi non presenta difficoltà solo se essi hanno forme schematizzabili con semplici figure geometriche. Il caso più semplice è quello dell'**urto tra due sfere libere** (assimilabili a **due punti materiali**), al quale ci si riconduce normalmente nello studio dell'urto tra particelle di dimensioni trascurabili. Possiamo considerare due corpi che si urtano come un **sistema isolato**, in quanto le forze esterne che agiscono sui corpi hanno un'intensità trascurabile rispetto a quella delle forze che i corpi si scambiano durante l'urto. Di conseguenza in tutti i fenomeni di urto si mantiene costante la **quantità di moto totale**. Gli urti tra corpi vengono classificati in **urti elastici** ed **urti anelastici**. Nel primo caso l'**energia cinetica del sistema si conserva**, nel secondo caso *non si conserva*. L'**urto è totalmente anelastico** o *PLASTICO* se dopo l'urto i due corpi rimangono uniti e proseguono il loro cammino con la stessa velocità ($\vec{u}_2 = \vec{u}_1$). Per esempio, l'urto di una pallottola col bersaglio colpito è **completamente anelastico** quando la pallottola rimane conficcata nel bersaglio stesso. Nello studio della fisica l'espressione **urto** non significa necessariamente un contatto, esso esprime una **interazione molto intensa agente per un tempo brevissimo e dovuta a forze impulsive interne**.

Urti elastici unidimensionali

Per **urto unidimensionale** intendiamo un urto in cui il moto relativo prima e dopo la collisione avviene sulla medesima retta. Consideriamo due sfere lisce e rigide che, senza ruotare, si muovano inizialmente lungo la retta x congiungente i loro centri, e che quindi si urtano frontalmente, muovendosi dopo l'urto, sempre lungo la stessa retta x (orientata nel verso della sfera avente velocità con modulo maggiore) e senza rotazioni. Le masse delle sfere sono m_1 ed m_2, le loro velocità sono rispettivamente $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ prima dell'urto ed $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ dopo l'urto. Per il **principio di conservazione della quantità di moto** di un sistema isolato, possiamo scrivere:

$$\mathbf{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2}$$

In termini scalari abbiamo : $\mathbf{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2}$ **[1]**

dove v_1, v_2, u_1, u_2 sono valori algebrici positivi (negativi) se le corrispondenti velocità vettoriali hanno (non hanno) lo stesso orientamento di $\vec{x}$ (ad esempio da sinistra verso destra).

Dalla **conservazione dell'energia cinetica** abbiamo: $\mathbf{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_1 u_2^2}$ **[2]**

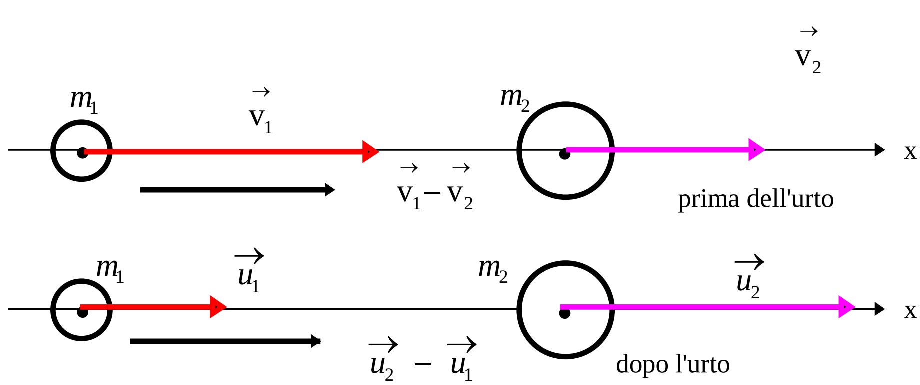
Possiamo scrivere la [1] nella seguente maniera: $\mathbf{m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_2 - u_2)}$ **[3]**

e la [2] nella seguente maniera: $\mathbf{m_1(v_1 - u_1)\times(v_1 + u_1) = m_2(v_2 - u_2)\times(v_2 + u_2)}$ **[4]**

Dividendo membro a membro la [3] e la [4] otteniamo: $\mathbf{v_1 + u_1 = v_2 + u_2}$ **[5]**

$$\begin{cases} v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \\ m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_2 - u_2) \end{cases} \qquad u_2 = v_1 + u_1 - v_2$$

$$\mathbf{u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}} \quad \textbf{[6]} \qquad \mathbf{u_2 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}} \quad \textbf{[7]}$$



Casi particolari

$\mathbf{m_1 = m_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u_1 = v_2 \;;\; u_2 = v_1}$ **Le sfere, dopo l'urto, si scambiano le velocità**

$v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \qquad u_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$

$m_1 = m_2 \ , \ v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0 \ , \ u_2 = v_1$

La prima sfera si ferma di colpo, mentre la seconda sfera scatta via con la velocità che possedeva la prima sfera.

$m_1 > m_2 \ , \ v_2 = 0$ u_1 e v_1 hanno lo stesso segno ma è: $u_1 < v_1$, cioè la sfera urtante m_1 ha massa maggiore, prosegue dopo l'urto nel verso primitivo ma con velocità di intensità minore.

$m_1 < m_2 \ , \ v_2 = 0$ u_1 e v_1 hanno segni opposti, ma è: $|u_1| < |v_1|$

La sfera urtante m_1 , di massa minore, rimbalza tornando indietro, ma con velocità ridotta.

$m_1 >> m_2 \ , \ v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} \approx 0 \ , \quad u_1 \approx -v_1 \ , \quad u_2 \approx 0$

cioè, quando una particella leggera ne urta una molto pesante, la sua velocità viene solo (approssimativamente) cambiata di segno e la particella di massa elevata rimane pressoché ferma. Per esempio, supponiamo che una sfera elastica cada verticalmente sulla terra.

Se l'urto è elastico, la sfera rimbalzerà con una velocità cambiata di segno e raggiungerà la stessa altezza dalla quale era caduta.

$m_1 << m_2 \ , \ v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{m_2}{m_1} \approx 0 \ , \quad u_1 \approx v_1 \ , \quad u_2 \approx 2v_1$

Questo significa che la velocità della particella m_1 rimane praticamente invariata nell'urto con la particella leggera ferma, la quale rimbalza con una velocità che è circa il doppio della velocità della particella pesante incidente.

$m_2 = \infty \ , \ v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} = 0 \ , \ u_1 = -v_1 \ , \ u_2 = 0$ (urto contro una parete fissa)

La sferetta urtante m_1 torna indietro con la stessa velocità che aveva prima dell'urto.

Urto anelastico unidimensionale

Se l'**urto** è **anelastico**, non possiamo usare più la conservazione dell'energia cinetica. L'energia cinetica finale può essere minore di quella iniziale, la differenza essendosi convertita per esempio in calore o in energia potenziale di deformazione. La **conservazione della quantità di moto** continua a valere. Consideriamo un **urto completamente anelastico**.

Le due particelle, dopo l'urto, proseguiranno con una velocità finale comune **u**. Utilizzando soltanto il **principio di conservazione della quantità di moto** otteniamo:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u} \qquad \vec{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{m_1} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{m_2} \cdot \vec{\mathbf{v}}_2}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}$$

Nel caso di un urto unidimensionale la precedente relazione vettoriale può essere scritta in termini scalari nella seguente maniera: $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{m_1} \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{m_2} \cdot \mathbf{v_2}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}$ dove **u**, v_1 e v_2 sono valori algebrici.

Urti obliqui

Un urto si dice obliquo se, dopo la collisione, le due sfere hanno velocità vettoriali $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (e quindi quantità di moto $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$) che formano un certo angolo. Questo significa che le due sfere dopo la collisione si muoveranno lungo rette diverse. In generale, quando si ha a che fare con urti obliqui bisogna imporre la conservazione della quantità di moto da un punto di vista vettoriale, per cui bisognerà imporne la conservazione sia sull'asse x sia sull'asse y. Questo vuole dire che i vettori velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dovranno essere scomposti nei loro componenti orizzontali e verticali ricordando che le rispettive componenti vanno presi con gli opportuni segni. Negli urti elastici oltre a conservarsi la quantità di moto si conserva anche l'energia cinetica.

Tuttavia, l'uso delle leggi di conservazione non basta per determinare il moto delle due sfere dopo l'urto. Infatti, per un urto bidimensionale elastico, che è il caso più semplice, noi abbiamo a che fare con 4 incognite, e cioè le due componenti della velocità di ciascuna sfera dopo l'urto. Ma abbiamo solo tre relazioni note fra di esse, una per la conservazione dell'energia cinetica e due per la conservazione della quantità di moto (una per ciascuna dimensione). Quindi per la determinazione delle velocità delle due sfere dopo l'urto occorrono altre condizioni iniziali. La via più semplice è quella di specificare l'angolo di collisione di una delle due sfere urtanti.

$\vec{p}_i = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}$ = quantità di moto del sistema prima dell'urto

$\vec{p}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$ = quantità di moto del sistema dopo l'urto

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \qquad [D]$$

$$K_i = K_f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2f}^2$$

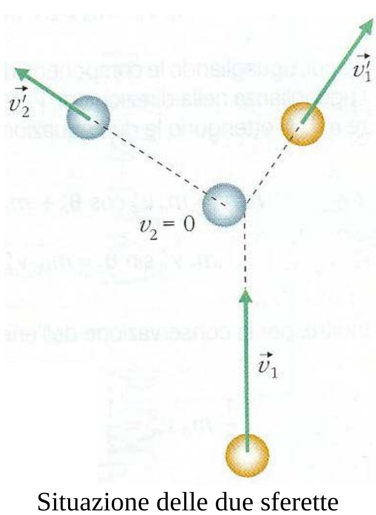
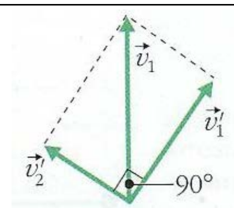
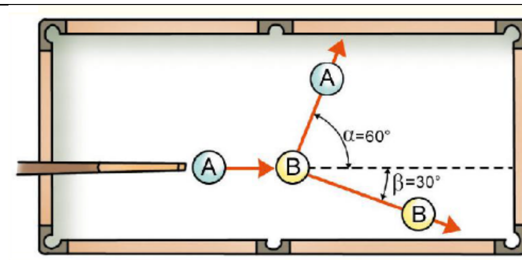
$$\vec{p}_{1i} = m_1 \cdot \vec{v}_{1i} = m_1 \cdot \vec{v}_{1ix} + m_1 \cdot \vec{v}_{1iy} \qquad \vec{p}_{2i} = m_1 \cdot \vec{v}_{2i} = m_1 \cdot \vec{v}_{2ix} + m_1 \cdot \vec{v}_{2iy}$$

$\vec{p}_{1i} = m_1 \cdot \vec{v}_{2f} = m_1 \cdot \vec{v}^2_{1fx} + m_1 \cdot \vec{v}^2_{1fy} \qquad \vec{p}_{2f} = m_2 \cdot \vec{v}_{2f} = m_2 \cdot \vec{v}_{2fx} + m_2 \cdot \vec{v}_{2fy}$

La relazione vettoriale $[D]$ si tramuta in due relazioni scalari. Le equazioni a nostra disposizione sono tre, le incognite da calcolare sono quattro. Occorre un'altra condizione, ad esempio la conoscenza di qualche angolo.

Gli urti obliqui, cioè gli urti che avvengono lungo direzioni diverse, presentano notevoli difficoltà. Noi limiteremo il nostro studio nel caso di una sferetta di massa m che urta una seconda sferetta di massa m inizialmente ferma. Sia $\vec{v}_1$ la velocità della prima sferetta prima dell'urto e nell'ipotesi che la sua direzione sia diversa dalla retta congiungente i loro baricentri.

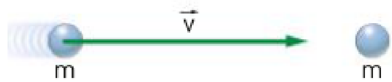
Siano $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$ le velocità dopo l'urto della sferetta urtante e di quella ferma. Per la conservazione della quantità di moto possiamo scrivere: $m\vec{v}_1 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$ Poiché l'urto è elastico possiamo applicare il principio della conservazione della quantità di moto e scrivere: $\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_1'^2 \qquad v_1^2 = v_1'^2 + v_1'^2$ Questo ci consente di affermare che il parallelogramma costruito sui vettori $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$ è un rettangolo la cui diagonale orientata coincide con la velocità $\vec{v}_1$.

 Situazione delle due sferette prima dell'urto	 $v_1' = v_1 \cdot \cos\alpha$ $v_2' = v_1 \cdot \cos\beta$ Se $\alpha = \beta = 45°$ il rettangolo è un quadrato e risulta: $v_1' = v_2' = v_1 \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_1$	 Situazione delle due sferette dopo l'urto. Dopo l'urto le due velocità sono fra loro perpendicolari. La velocità iniziale $\vec{v}_1$ della prima sferetta è la diagonale di un rettangolo costruito sui due vettori $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$ e $\alpha + \beta = 90°$

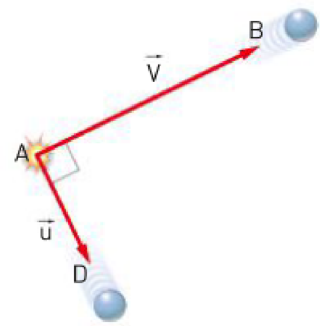
Concludiamo affermando che nell'urto elastico obliquo tra due corpi aventi la stessa massa, di cui uno inizialmente fermo, le direzioni delle velocità dei corpi dopo l'urto sono fra loro ortogonali.

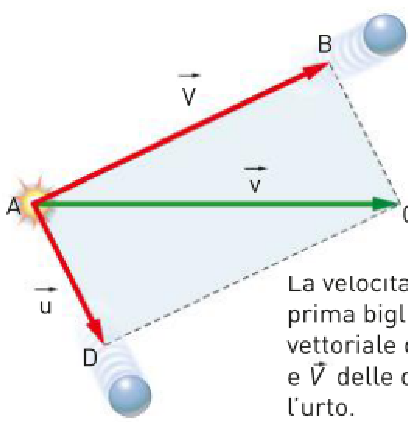
Indichiamo con:

- $\vec{v}$ il vettore velocità della prima biglia prima dell'urto (la seconda biglia ha velocità nulla);

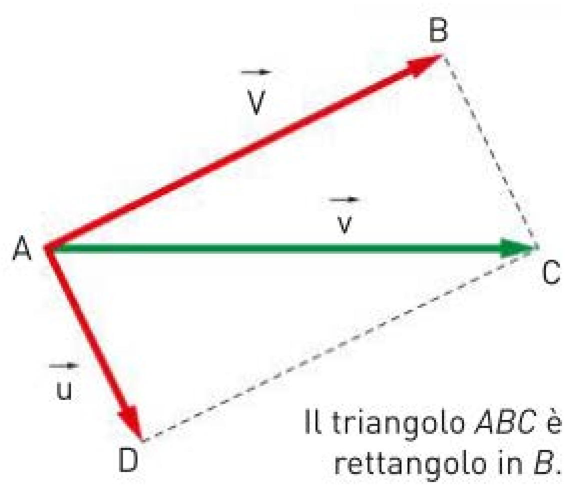


- $\vec{u}$ e $\vec{V}$ i vettori velocità delle due biglie dopo l'urto. Essi, come dimostreremo, sono perpendicolari.



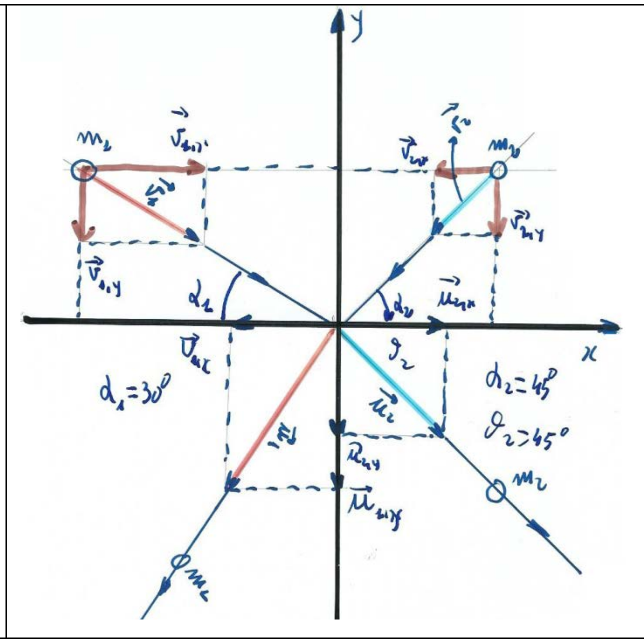


La velocità iniziale $\vec{v}$ della prima biglia è la somma vettoriale delle velocità $\vec{u}$ e $\vec{V}$ delle due biglie dopo l'urto.



Il triangolo *ABC* è rettangolo in *B*.

Problema: Una sfera di massa $m_1 = 200\,g_r = 0,2\,kg$ con velocità vettoriale $\vec{v}_1$ di modulo $v_1 = 3\dfrac{m}{s}$ colpisce in un urto perfettamente elastico una sfera di massa $m_2 = 300\,g_r = 0,3\,kg$ in moto con velocità vettoriale $\vec{v}_2$ di modulo $v_2 = 2\dfrac{m}{s}$ e con direzione diversa. Determinare le velocità dopo l'urto sapendo che la velocità della sfera $m_2 = 300\,g_r = 0,3\,kg$ forma con l'asse delle ascisse un angolo $45°$ prima e dopo l'urto, e che la sfera $m_1 = 200\,g_r = 0,2\,kg$, prima dell'urto, forma un angolo di $30°$.



Urto elastico obliquo fra due masse m_1 ed m_2.

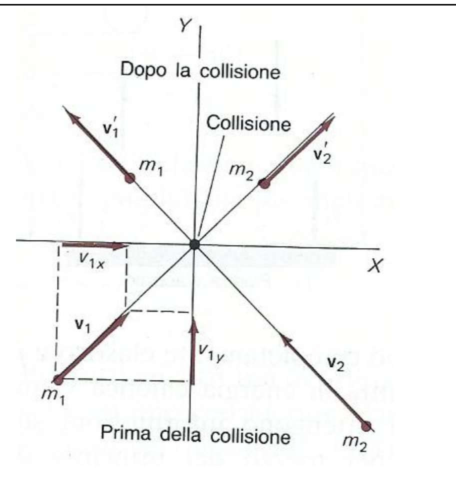
Si ha la conservazione della quantità di moto lungo gli assi cartesiani e la conservazione dell'energia cinetica totale.

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \qquad K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

$$m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_1 \cdot v'_{1x} + m_2 \cdot v'_{2x}$$

$$m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} = m_1 \cdot v'_{1y} + m_2 \cdot v'_{2y}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$$



Siano $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ le velocità vettoriali della prima e della seconda sfera dopo l'urto.

$$\vec{p}_1 = (p_{1x}; p_{1y}) = (0,2; -0,1) \quad \vec{p}_2 = (p_{2x}; p_{2y}) = (-0,3; -0,3) \quad \vec{u}_1 = (x; y) \quad \vec{u}_2(X; Y) \quad x, y, X, Y \in \mathbb{R}$$

$$m_1 \cdot v_{1x} = m_1 \cdot v_1 \cdot \cos\alpha_1 \qquad m_1 \cdot v_{1y} = m_1 \cdot v_1 \cdot \sin\alpha_1$$

$$m_2 \cdot v_{2x} = m_2 \cdot v_2 \cdot \cos\alpha_2 \qquad m_2 \cdot v_{2y} = m_2 \cdot v_2 \cdot \sin\alpha_2$$

$$p_{1x} = m_1 \cdot v_{1x} = 0,2 \qquad p_{1y} = m_1 \cdot v_{1y} = -0,1 \qquad p_{2x} = m_2 \cdot v_{2x} = -0,3 \qquad p_{2y} = m_2 \cdot v_{2y} = -0,3$$

$$p_{1x} + p_{2x} = -m_1 x + m_2 X \qquad 0,2 - 0,3 = -0,2x + 0,3X \qquad -0,1 = -0,2x + 0,3X \qquad 1 = 2x + 3X$$

$\mathbf{1 = 2x + 3X}$ conservazione della quantità di moto lungo l'asse delle ascisse

$$p_{1y} + p_{2y} = m_1 y + m_2 Y \qquad -0,1 - 0,3 = -0,2y - 0,3Y \qquad -0,4 = -0,2y - 0,3Y \qquad 0,4 = 0,2y + 0,3Y$$

$\mathbf{4 = 2y + 3Y}$ conservazione della quantità di moto lungo l'asse delle ordinate $\mathbf{Y = -X}$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} m_1 v_{1x}^2 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} m_2 v_{2x}^2 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} m_1 \left(x^2 + y^2\right) + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} m_2 \left(X^2 + Y^2\right) \quad m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 = m_1 \left(x^2 + y^2\right) + m_2 \left(X^2 + Y^2\right)$$

$$m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 = m_1 \left(x^2 + y^2\right) + 2 \cdot m_2 X^2$$

$$3 = 0,2\left(x^2 + y^2\right) + 0,3 \cdot 2 \cdot X^2 \qquad 0,2x^2 + 0,2y^2 + 0,6X^2 = 3 \quad 2x^2 + 2y^2 + 6X^2 = 30$$

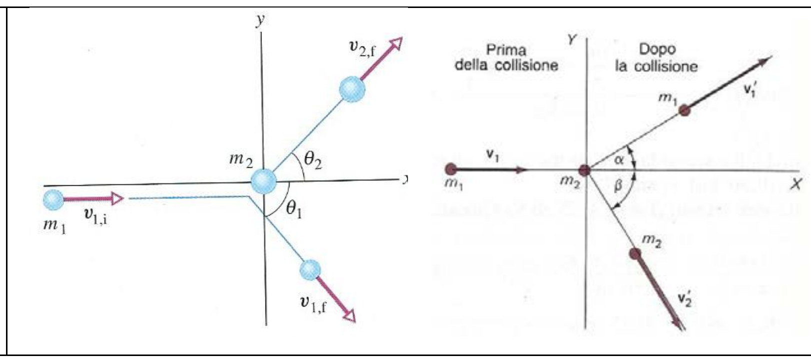
$\mathbf{x^2 + y^2 + 3X^2 = 15}$ conservazione dell'energia cinetica lungo l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} \mathbf{1 = 2x + 3X} \\ \mathbf{4 = 2y + 3Y} \\ \mathbf{x^2 + y^2 + 3X^2 = 15} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2,1 \\ y = -2,7 \\ X = 1,7 \end{cases} \quad \vec{u}_1 = (-2,1; -2,7) \quad \vec{u}_2 = (1,7; -1,7)$$

$$\begin{cases} x = 3,3 \\ y = 0,8 \\ X = 0,8 \end{cases} \quad \text{valori non accettabili}$$

Urto elastico obliquo tra due sferette di cui una ferma

Collisione elastica tra due corpi nella quale l'urto non è frontale. Il corpo di massa m_2 (bersaglio) è inizialmente a riposo.



Consideriamo l'urto obliquo elastico fra la sferetta di massa m_1 avente velocità $\vec{v}_{1i}$ e la sferetta di massa m_2 inizialmente ferma. La direzione del moto della particella incidente m_1 dopo l'urto forma un angolo ϑ_1 con la direzione iniziale e la particella bersaglio m_2, inizialmente ferma, si muove dopo l'urto lungo una direzione che forma un angolo ϑ_2 con la direzione iniziale di m_1.

Applicando la conservazione della quantità di moto $\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$, che è una relazione vettoriale, otteniamo due equazioni scalari. Per la componente orizzontale otteniamo:

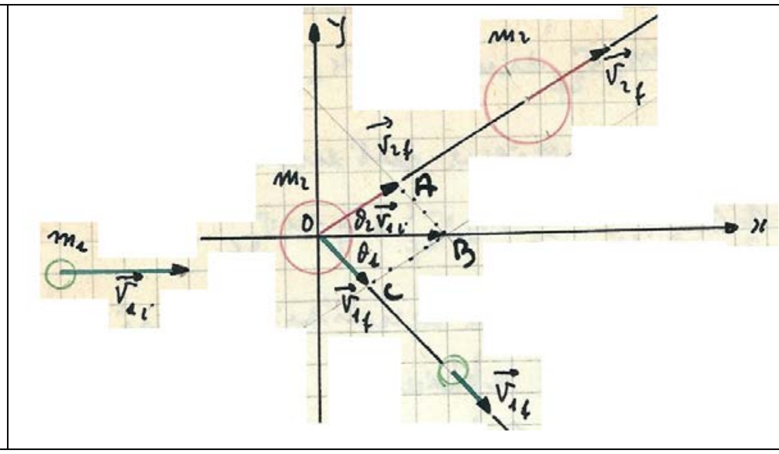
$$\mathbf{m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\vartheta_1 + m_2 v_{2f} \cos\vartheta_2} \qquad [1]$$

Per la componente verticale otteniamo: $\mathbf{0 = m_2 v_{2f} \sin\vartheta_2 - m_1 v_{1f} \sin\vartheta_1}$ $\quad [2]$

La conservazione dell'energia cinetica ci fornisce la seguente relazione:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} v_{2f}^2 \qquad \mathbf{m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2} \qquad [3]$$

Se conosciamo le condizioni iniziali (m_1, m_2, v_{1i}) abbiamo 4 incognite ($v_{1f}, v_{2f}, \vartheta_1, \vartheta_2$) e solo 3 equazioni fra queste incognite. Possiamo determinare il moto dopo l'urto solo se fissiamo il valore di una di queste incognite, ad esempio ϑ_1.



Se le masse sono uguali ($m_1 = m_2$), cioè in un urto obliquo elastico tra particelle di uguale massa, si può dimostrare che risulta $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 90°$, cioè in un urto elastico obliquo fra particelle di uguale massa, una delle quali inizialmente ferma, succede sempre che l'angolo formato dalle traiettorie delle due particelle dopo l'urto è retto. Infatti; $m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad \Rightarrow \quad A\hat{O}B = 90°$

Il parallelogrammo $OABC$ è un rettangolo. Quindi: $A\hat{O}C = 90°$

Le tre equazioni $[1]$, $[2]$, $[3]$ contengono 7 incognite: due masse m_1 ed m_2, 3 velocità v_{1i}, v_{1f}, v_{2f} e 2 angoli ϑ_1 e ϑ_2. Conoscendo i valori di una quaterna qualsiasi di queste 7 incognite, da queste tre equazioni possiamo ricavare le 3 incognite rimanenti.

Supponiamo di conoscere $\vec{v}_{1i}$, m_1, m_2, ϑ_2. Otteniamo le seguenti relazioni:

$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} \cdot \cos\vartheta_1 + m_2 v_{2,f} \cdot \cos\vartheta_2$ per la componente lungo l'asse delle ascisse

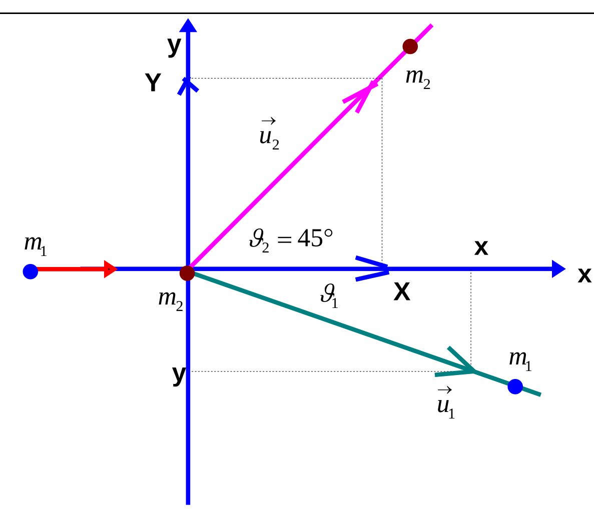
$0 = -m_1 v_{1,f} \cdot \sin\vartheta_1 + m_2 v_{2,f} \cdot \sin\vartheta_2$ per la componente lungo l'asse delle ordinate

$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,j}^2 \qquad m_1 v_{1,i}^2 = m_1 v_{1,f}^2 + m_2 v_{2,j}^2$ conservazione dell'energia cinetica totale

Caso particolare

$m_1 = 2\,g_r \qquad m_2 = 1\,g_r \qquad v_{1,i} = 2\frac{m}{s} \qquad \vartheta_2 = 45°$

$\vec{v}_{1i} = (2,0)$ $\quad \vec{u}_1 = (x, y)$ = velocità fella sferetta m_1 dopo l'urto $\quad \vec{u}_2 = (X, Y)$ = velocità della sferetta m_2 dopo l'urto



$m_1 \mathrm{v}_{1,i} = m_1 x + m_2 X$ $\quad \mathbf{4 = 2x + X}$ conservazione della quantità di moto lungo l'asse x

$0 = -m_1 y + m_2 Y$ $\quad \mathbf{0 = -2y + Y}$ conservazione della quantità di moto lungo l'asse y

$\frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad m_1 \mathrm{v}_{1,i}^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \quad 8 = 2\left(x^2 + y^2\right) + X^2 + Y^2 \quad \mathbf{8 = 2\left(x^2 + y^2\right) + 2X^2}$

conservazione dell'energia cinetica totale $\quad \vartheta_2 = 45° \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y = X}$

Il sistema da risolvere è il seguente; $\begin{cases} \mathbf{4 = 2x + X} \\ \mathbf{0 = -2y + Y} \\ \mathbf{4 = x^2 + y^2 + X^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1,3 \\ y = -0,7 \\ X = Y = 1,3 \end{cases} \quad \vec{u}_1 = (1,3; -0,7) \quad \vec{u}_2 = (1,3; 1,3)$

Urto elastico obliquo contro una parete

Consideriamo una sfera di massa m_1 che urta obliquamente ed elasticamente contro una parete fissa di massa $m_2 = \infty$. Risulta: $\vec{\mathrm{v}}_{2,i} = \vec{o}$

Si scomponga la velocità $\vec{\mathrm{v}}_{1,i}$ della sfera m_1 urtante nelle due componenti $\vec{\mathrm{v}}_{1i,y}$ parallela al piano urtato e $\vec{\mathrm{v}}_{1i,x}$ normale: $\quad \vec{\mathrm{v}}_{1,i} = \vec{\mathrm{v}}_{1i,x} + \vec{\mathrm{v}}_{1i,y}$

Dopo l'urto, trascurando gli attriti, $\vec{\mathrm{v}}_{1i,y}$ rimane inalterata, $\vec{\mathrm{v}}_{1i,x}$ si tramuta in $-\vec{\mathrm{v}}_{1i,x}$, cioè:

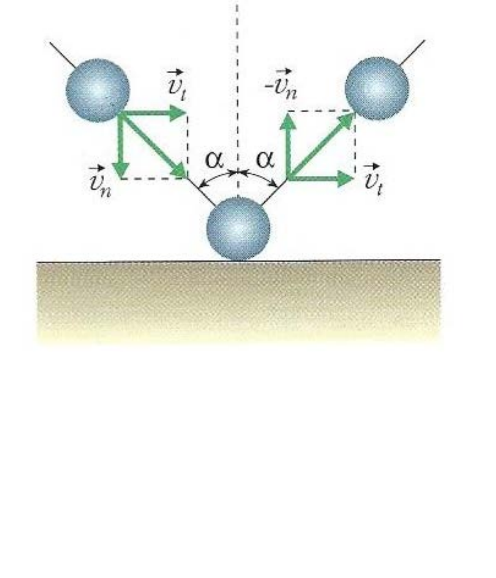
$$\vec{\mathrm{v}}_{1,f} = \vec{\mathrm{v}}_{1f,x} + \vec{\mathrm{v}}_{1f,y} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \vec{\mathrm{v}}_{1f,x} = -\vec{\mathrm{v}}_{1i,x} \\ \vec{\mathrm{v}}_{1f,y} = \vec{\mathrm{v}}_{1i,y} \end{cases}$$

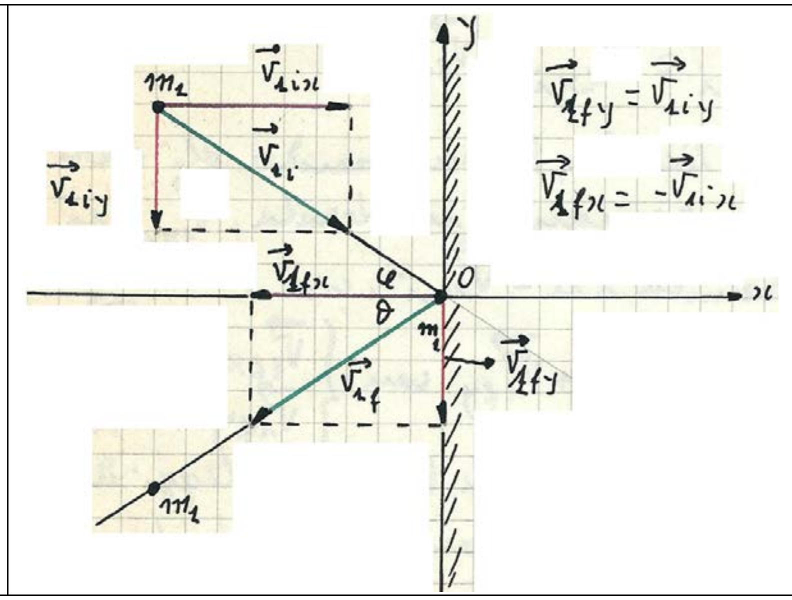
Se ne deducono le ben note leggi della riflessione meccanica.

- l'urto elastico di una sferetta contro una parete fissa si svolge nel piano individuato dalla direzione della velocità $\vec{\mathrm{v}}_{1,i}$ della sferetta prima dell'urto e dalla normale x alla parete.
- l' angolo di riflessione ϑ è uguale all' angolo di incidenza φ.

La parete determina una variazione della quantità di moto della sfera uguale a $-2m_1 \vec{\mathrm{v}}_{1i,x}$ e quindi riceve dalla sfera un impulso della stessa grandezza, in direzione opposta a quella di $\vec{\mathrm{v}}_{1i,x}$.

Si definiscono angolo di incidenza e angolo di riflessione gli angoli che la direzione della velocità della sferetta, rispettivamente prima e dopo l'urto, forma con la direzione perpendicolare alla parete nel punto di collisione.


$\vec{v}_t$
$-\vec{v}_n$
α
α
$\vec{v}_n$
$\vec{v}_t$


y
m_1
$\vec{v}_{1ix}$
$\vec{v}_{1i}$
$\vec{v}_{1iy}$
$\vec{v}_{1fy} = \vec{v}_{1iy}$
$\vec{v}_{1fx} = -\vec{v}_{1ix}$
$\vec{v}_{1fx}$
φ
θ
O
x
m_1
$\vec{v}_{1fy}$
$\vec{v}_{1f}$
m_1

Bibliografia Urti

1) H.R. pag. 203

2) C.F. pag. 216

3) Porreca pag. 167

4) Bernardini pag. 285

5) Perucca pag. 304

6) Lazzarotto pag. 157

7) Guizzetti Piazzalli pag. 105

8) Segré Roberti pag. 106

9) Nobel I pag. 180

10) Toraldo di Francia pag. 124

11) Caldirola pag. 242

12) Roller Blum pag. 172

Pendolo Balistico

1) Perucca pag. 307

2) H.R. 212

3) Roller Blum pag 175