Un disco omogeneo di massa M e raggio r è libero di ruotare intorno ad un asse per il centro O montato su supporti fissi e privi di attrito come indicato in figura. Una fune è avvolta lungo il bordo del disco ed è collegata con una massa m che viene lasciata cadere sotto l'azione della gravità. Calcolare:

a) l'accelerazione lineare della massa m

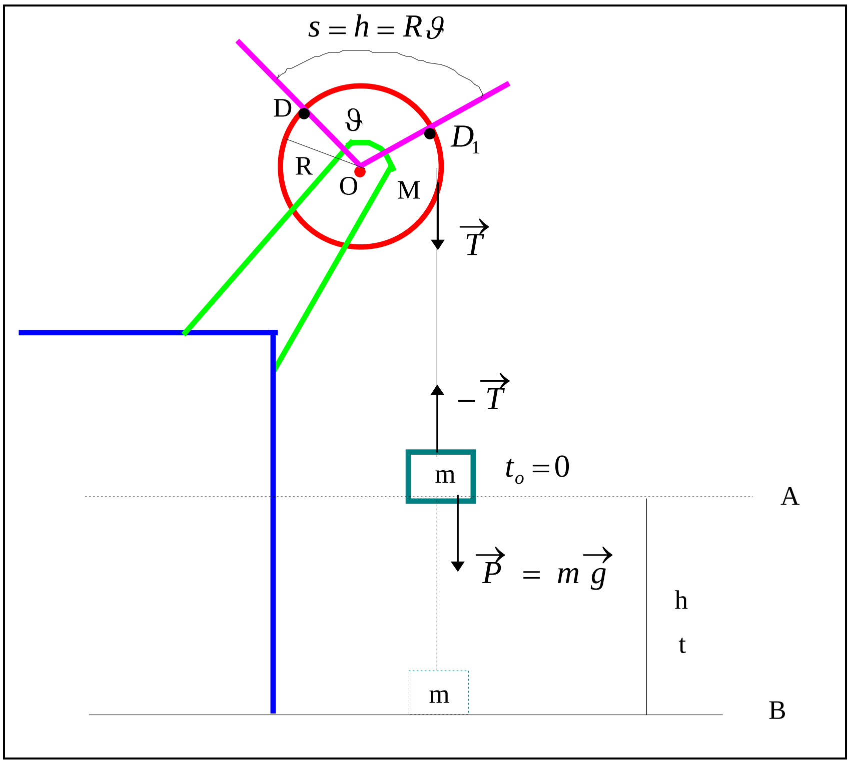
b) la velocità della massa m dopo che ha percorso h metri (oppure dopo t secondi)

c) l'accelerazione angolare del disco e l'accelerazione tangenziale di un punto situato sul bordo del disco

d) la tensione della fune (supposta di massa trascurabile)

e) l'energia cinetica del disco dopo t secondi (oppure quando la massa m si è abbassata di h metri)

f) l'energia cinetica della massa m dopo t secondi (oppure quando la massa m si è abbassata di h metri)



- Una forza costante $\vec{T}$ diretta verticalmente verso il basso provoca la rotazione del disco
- Massa m legata all'estremità di una fune di peso trascurabile.

Se la fune ruota di un angolo ϑ un tratto di fune $h = r\vartheta$ si svolge e la massa m si abbassa del tratto $h = r\vartheta$.

Il punto D, situato sul bordo del disco, descrive l'arco $DD_1 = s = h$ con una velocità lineare $v = \omega r$ uguale alla velocità della massa m

- L'unica forza che esercita un momento torcente sul disco è la tensione $\vec{T}$ della fune, la quale ha braccio **R** rispetto al perno **O**.

Il momento meccanico $\vec{\tau}$ esercitato sul disco dalla tensione $\vec{T}$ del filo della fune produce un'accelerazione angolare α data da: $\boldsymbol{\tau = \mathcal{J} \cdot \alpha}$ con α accelerazione angolare del disco

$\tau = T \cdot R$ $\quad \mathbf{T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha}$ $\quad \mathbf{a = \alpha R}$ = accelerazione lineare di un punto del bordo del disco

$$\alpha = \frac{a}{r} \qquad \mathbf{T} = \frac{\mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathcal{J} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{R}^2}$$

- Sulla massa m, appesa all'estremità libera della fune, agiscono due forze:
- la tensione del filo **T** verso l'alto ed il peso $\vec{P} = m\vec{g}$ verso il basso

La legge fondamentale della dinamica applicata alla massa **m** ci consente di scrivere: $\vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

In termini scalari abbiamo: $\mathbf{P - T = ma}$ (la direzione verticale è stata orientata verso il basso)

$\vec{a}$ è l'accelerazione subita dalla massa **m** ed il suo modulo coincide con l'accelerazione lineare di un qualsiasi punto posto sul bordo del disco

- Abbiamo due equazioni $\mathbf{T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha}$ $\quad \mathbf{P - T = ma}$ e tre incognite T, a, α .

La fune fornisce un vincolo che ci consente di stabilire una relazione tra l'accelerazione lineare **a** e l'accelerazione angolare α .

Quando il disco ruota di un angolo ϑ (misurato in radianti), un tratto di fune lungo $\mathbf{s = R}\vartheta$ si svolge e la massa m si abbassa del tratto: $\mathbf{h = s = r}\vartheta$ **[§]**

(Derivando la **[§]** otteniamo : $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\,r\vartheta}{dt} = r \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = r \cdot \omega$) $\qquad \mathbf{v = \omega \cdot R}$

(Derivando una seconda volta otteniamo): $\mathbf{a = \alpha R}$

che è la terza equazione necessaria per risolvere il problema.

$$\begin{cases} \mathbf{a = \alpha R} \\ \mathbf{T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha} \\ \mathbf{P - T = ma} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{R}} \\ \mathbf{T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha} \\ \mathbf{P - T = ma} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{R}} \\ \mathbf{T \cdot R^2 = \mathcal{J} \cdot a} \\ \mathbf{P - T = ma} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{T \cdot R^2}}{\mathcal{J}} \\ \mathbf{mg - T} = \dfrac{\mathbf{mT \cdot R^2}}{\mathcal{J}} \end{cases}$$

$$\mathbf{mg}\mathcal{J} - \mathbf{T}\mathcal{J} = \mathbf{mT \cdot R^2} \qquad \mathcal{J} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{MR^2} \text{ = momento d'inerzia della carrucola}$$

$$\mathbf{mT \cdot R^2} + \mathbf{T}\mathcal{J} = \mathbf{mg}\mathcal{J} \qquad \left(\mathbf{mR^2} + \mathcal{J}\right)\mathbf{T} = \mathbf{mg}\mathcal{J} \qquad \mathbf{T} = \frac{\mathbf{mg}\mathcal{J}}{\mathbf{mR^2} + \mathcal{J}} = \frac{\dfrac{\mathcal{J}}{\mathbf{R^2}}}{\mathbf{m} + \dfrac{\mathcal{J}}{\mathbf{R^2}}} \cdot \mathbf{mg}$$

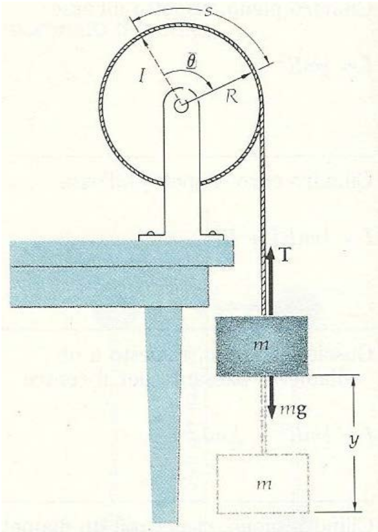
$$\mathbf{T} = \frac{mg\frac{1}{2}M\cancel{R^2}}{m\cancel{R^2} + \frac{1}{2}M\cancel{R^2}} = \frac{mg\frac{1}{2}M}{m + \frac{1}{2}M} = \frac{\mathbf{mM}}{\mathbf{2m+M}} \cdot \mathbf{g} \qquad \mathbf{T \cdot r} = \mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \mathbf{T} = \frac{\mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathcal{J} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{R^2}}$$

$$a=\frac{T\,R^2}{\mathcal{J}}=\frac{\cancel{R^2}}{\frac{1}{2}\cancel{M}\cancel{R^2}}\cdot\frac{m\,\cancel{M}}{2m+M}\cdot g=\frac{2m}{2m+M}\cdot g \qquad \mathbf{a=\frac{2m}{2m+M}\cdot g} \qquad \boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{2m}}{\mathbf{2m+M}}\cdot\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{r}}$$

Il corpo attaccato ad una corda avvolta sulla ruota (vedere figura accanto) determina il moto rigido. Se la ruota gira di un angolo ϑ, si svolge un tratto della corda lungo $\mathbf{s=R\vartheta}$ ed il corpo scende di un tratto $\mathbf{y=R\vartheta}$.

Valgono le seguenti formule:

$$\mathbf{T=\frac{mM}{2m+M}\cdot g} \qquad \mathbf{a=\frac{2m}{2m+M}\cdot g} \qquad \boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{2m}}{\mathbf{2m+M}}\cdot\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{r}}$$



Poiché l'accelerazione $\mathbf{a}$ con cui si muove la massa $\mathbf{m}$ è costante, il moto è uniformemente accelerato e la velocità di $\mathbf{m}$ può essere calcolata applicando la formula:

$$v^2=v_o^2+2as \quad \text{con} \quad v_o=0 \quad s=h \qquad v^2=2as \qquad \mathbf{v=\sqrt{2ah}=\sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{\mathcal{J}}{r^2}}}}$$

$$v^2=\frac{2m}{m+\frac{\mathcal{J}}{r^2}}\cdot g\,h \qquad v^2=\frac{4m}{2m+M}\cdot g\,h \qquad \mathbf{v=\sqrt{\frac{4m}{2m+M}\cdot gh}}$$

● Otteniamo lo stesso risultato se applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica totale al sistema composto dal disco di massa M e dal corpo di massa m.

Quando la massa m si abbassa del tratto **h**, la sua energia potenziale diminuisce della quantità $m\,g\,h$. **Questa energia potenziale si trasforma in energia cinetica dell'intero sistema.**

energia meccanica totale del sistema nella configurazione iniziale **A** =

= energia meccanica totale del sistema nella configurazione finale **B**

Ricordando che $U_A(disco)=U_B(disco)$ possiamo scrivere:

$$\mathbf{U_A(m)+U_A(disco)+K_A(m)+K_A(disco)=U_B(m)+U_B(disco)+K_B(m)+K_B(disco)}$$

$$U_A(m)+0+0=0+K_B(m)+K_B(disco) \qquad m\,g\,h=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}\mathcal{J}\,\omega^2$$

$$m\,g\,h=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}I\,\omega^2 \Rightarrow m\,g\,h=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2}=\frac{1}{2}\left(m+\frac{I}{r^2}\right)v^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}^2 = \frac{2\mathbf{m}}{\mathbf{m} + \frac{\mathcal{J}}{\mathbf{R}^2}} \cdot \mathbf{g}\,\mathbf{h} = \frac{4\mathbf{m}}{2\mathbf{m} + \mathbf{M}} \cdot \mathbf{g}\,\mathbf{h} \qquad \frac{\mathcal{J}}{\mathbf{R}^2} = \frac{1}{2}\mathbf{M}$$

La massa $\mathbf{m}$ si muove di moto naturalmente accelerato per cui la sua legge oraria del moto è:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2}\mathbf{a}\,\mathbf{t}^2 = \frac{\mathbf{m}}{2\mathbf{m} + \mathbf{M}} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}^2$$

$$K(disco) = \frac{1}{2}\mathcal{J}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M\,r^2\cdot\omega^2 = \frac{1}{4}M\cdot(\omega r)^2 = \frac{1}{4}M\,\mathrm{v}^2 = \frac{1}{\cancel{4}}M\cdot\frac{\cancel{4}\,m}{2m+M}\cdot g\,h =$$

$$= \frac{m\,M}{2m + M}\cdot g\,h = \frac{m\,M}{2m + M}\cdot g\cdot\frac{m}{2m + M}\cdot g\cdot t^2 = \frac{m^2\,M}{(2m + M)^2}\cdot g^2\,t^2$$

$$\mathbf{K(disco)} = \frac{\mathbf{m}^2\,\mathbf{M}}{(\mathbf{2m} + \mathbf{M})^2}\cdot\mathbf{g}^2\,\mathbf{t}^2 \qquad \mathbf{K(disco)} = \frac{\mathbf{m}\,\mathbf{M}}{\mathbf{2m} + \mathbf{M}}\cdot\mathbf{g}\,\mathbf{h}$$

Altro modo di calcolare l'energia cinetica del disco

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\,\omega^2 \Rightarrow K_B(disco) = \frac{1}{2}I\,\omega^2 = m\,g\,h - \frac{1}{2}m\,\mathrm{v}^2 = m\,g\,h - \frac{1}{2}m\frac{4m}{2m+M}g\,h =$$

$$= m\,g\,h - \frac{2m^2}{2m+M}g\,h = \left(m - \frac{2m^2}{2m+M}\right)\cdot g\,h = \frac{m\,M}{2m+M}\cdot g\,h \quad \mathbf{K_B(disco)} = \frac{\mathbf{m}\,\mathbf{M}}{\mathbf{2m} + \mathbf{M}}\cdot\mathbf{g}\,\mathbf{h}$$

Supponendo che il disco parta da fermo, calcolare il lavoro compiuto dalla tensione T della fune in t secondi. Calcolare anche l'aumento di energia cinetica rotazionale del disco.

$\tau = T\cdot r =$ costante   Per il disco che ruota attorno al perno O abbiamo trovato:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{2m}}{\mathbf{2m} + \mathbf{M}}\cdot\mathbf{g} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{2m}}{\mathbf{2m} + \mathbf{M}}\cdot\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{T} = \frac{\mathbf{m}\,\mathbf{M}}{\mathbf{2m} + \mathbf{M}}\cdot\mathbf{g} \qquad \mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{4m}}{\mathbf{2m} + \mathbf{M}}\cdot\mathbf{g}\,\mathbf{h}$$

Essendo costante il momento applicato al disco, l'accelerazione angolare risultante α è pure costante. Lo spostamento angolare totale con accelerazione angolare costante si ricava dall'equazione: $\vartheta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2$ essendo : $\omega_o = 0$ ed $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{2m}}{\mathbf{2m} + \mathbf{M}}\cdot\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{r}}$

Il lavoro compiuto da T in uno spostamento angolare finito quando il momento meccanico è costante ci viene fornito dalla seguente relazione:

$$L = \tau(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \tau\cdot\vartheta = Tr\cdot\frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}rT\alpha t^2 = \frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{m\,M}{2m+M}\cdot g\cdot\frac{2m}{2m+M}\cdot\frac{g}{r}\cdot t^2 \quad \mathbf{L} = \frac{\mathbf{m}^2\,\mathbf{M}}{(\mathbf{2m} + \mathbf{M})^2}\cdot\mathbf{g}\,\mathbf{t}^2$$

Tale lavoro deve tradursi in un aumento di energia cinetica del disco. Il disco, partendo da fermo, acquista una velocità angolare $\omega = \alpha t$

$$K(disco) = \frac{1}{2} I\,\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} Mr^2 \cdot \alpha^2 t^2 = \frac{1}{4} M \cdot (\alpha r)^2 \cdot t^2 = \frac{1}{4} M \cdot a^2 \cdot t^2 =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}} M \cdot \frac{\cancel{4} m^2}{(2m+M)^2} g^2 t^2 = \frac{\mathbf{m^2 M}}{\mathbf{(2m+M)^2}} \cdot \mathbf{g\,t^2} = \mathbf{L}$$

Quindi l'aumento di energia cinetica del disco è uguale al lavoro compiuto dal risultante delle forze agenti sul disco. Tale risultante, come sappiamo, è la tensione della fune, cioè il peso della massa m.

Dimostrare che per il sistema considerato (disco + massa appesa all'estremità libera della fune) vale il principio di conservazione dell'energia meccanica totale.

Il risultante delle forze agenti sul sistema disco + massa appesa alla fune è la forza di gravità (peso) agente sul corpo sospeso. Si tratta di una forza conservativa. Considerando il sistema globalmente, si vede che nella discesa verticale verso il basso la massa appesa perde la seguente energia potenziale **U = mgh** dove h è il tratto verticale percorso dalla massa m appesa alla fune durante la discesa.

Contemporaneamente la massa **m** acquista energia cinetica di traslazione ed il disco di massa **M** energia cinetica di rotazione. L'energia cinetica totale del sistema massa + disco è:

$$\frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\,\omega^2$$

dove **v** è la velocità lineare della massa appesa. Dobbiamo dimostrare che:

$$m\,g\,h = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

Per il moto traslatorio della massa **m** si ha: $\mathbf{v^2 = 2ah}$ essendo nulla la velocità iniziale. $h = \frac{\mathrm{v}^2}{2a}$

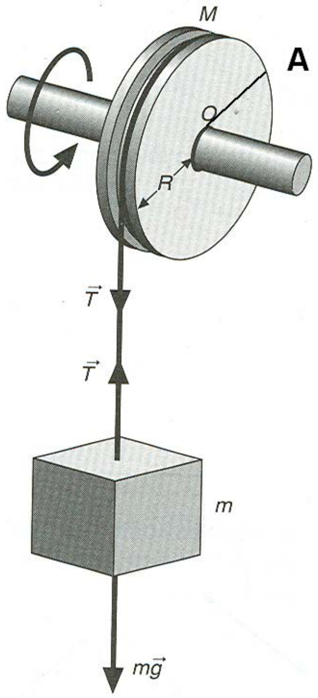
Sappiamo pure che risulta $\mathbf{a = \frac{2m}{2m+M} \cdot g}$ per averlo dimostrato in precedenza

$$m\,g\,h = mg \cdot \frac{\mathrm{v}^2}{2a} = m\cancel{g} \cdot \frac{\mathrm{v}^2}{2} \cdot \frac{2m+M}{2m\cancel{g}} = \frac{1}{4}(2m+M)\mathrm{v}^2$$

$$\frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} Mr^2 \cdot \frac{\mathrm{v}^2}{r^2} = \frac{1}{4}(2m+M)\mathrm{v}^2$$

L'energia meccanica si conserva

Una carrucola di raggio $R = 30\,cm$ e massa $M = 2\,kg$ può ruotare attorno al proprio asse orizzontale privo di attrito. Mediante una corda di massa trascurabile ed avvolta attorno alla gola di una carrucola è sospeso un corpo di massa $m = 500\,g_r$. Calcolare:



a) l'accelerazione lineare di un punto del bordo della carrucola

b) la velocità angolare della carrucola dopo 3 secondi

c) l'angolo descritto dal raggio vettore OA dopo 4 secondi

d) la tensione della corda **e)** l'energia cinetica della carrucola dopo 5 secondi **f)** l'accelerazione della massa m g) di quanto si abbassa la massa m dopo 6 secondi h) la reazione dell'asse di rotazione della carrucola i) il tempo impiegato dalla massa m per abbassarsi di $1m$

L) la velocità lineare di un punto della carrucola distante $\frac{R}{4}$ dall'asse di rotazione dopo 8 secondi.

$$m = 500\,g_r = \frac{1}{2}kg = 0,5\,kg \qquad M = 2\,kg \qquad R = 30\,cm = 0,3\,m$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}M \cdot R^2 \qquad \tau = \mathcal{J} \cdot \alpha \quad \Rightarrow T \cdot R = \mathcal{J} \cdot \alpha \qquad a = \alpha \cdot R \quad \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \quad P - T = ma \quad Mg - T = ma$$

a) l'accelerazione lineare di un punto del bordo della carrucola

$a = \alpha \cdot R$ = accelerazione di un punto qualsiasi del bordo della carrucola

α = accelerazione angolare della carrucola

Come polo dei momenti scegliamo il punto O centro di massa della carrucola. Rispetto a tale polo il momento della forza peso $\vec{P}_c = M \cdot \vec{g}$ della carrucola è nullo. Solo la tensione $\vec{T}$ del filo ha momento diverso da zero e l'equazione del moto della carrucola è $\tau = \mathcal{J} \cdot \alpha$. Per la massa m l'equazione del moto è: $m\vec{g} + \vec{T} = m\,\vec{a}$ che, in termini scalari, diventa: $mg - T = m\,a$.

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{R} \ ; \ \dfrac{\mathcal{J}}{R^2} = \dfrac{1}{2}M \\ T = \dfrac{\mathcal{J}}{R} \cdot \alpha = \dfrac{\mathcal{J}}{R} \cdot \dfrac{a}{R} = \dfrac{\mathcal{J}}{R^2} \cdot a = \dfrac{1}{2}Ma \qquad mg - T = m\,a \quad \Rightarrow \quad mg - \dfrac{1}{2}Ma = m\,a \quad 2mg - Ma = 2m\,a \\ mg \ - \ T \ = \ m\,a \end{cases}$$

$$a = \frac{2m}{M + 2m}g \qquad \boxed{a = \frac{1}{2+1} \cdot 9,8 = 3,27\frac{m}{s^2}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{a}{R} = \frac{3,27}{0,3} = 10,9\frac{rad}{s^2}}$$

b) la velocità angolare della carrucola dopo 3 secondi

Il moto della carrucola è rotatorio uniformemente vario.

$$\omega = \omega_o + \alpha t = \alpha t = (10,9)\cdot 3) = 32,7\frac{rad}{s} \qquad \omega = 32,7\frac{rad}{s}$$

c) l'angolo descritto dal raggio vettore OA dopo 4 secondi

$$\vartheta = \vartheta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}(10,9)\cdot 16 \qquad \vartheta = 87,2\,rad$$

d) la tensione della corda

$$T = \frac{\mathcal{J}}{R}\cdot\alpha = \frac{\mathcal{J}}{R}\cdot\frac{a}{R} = \frac{\mathcal{J}}{R^2}\cdot a = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3,27 = 3,27\,N \qquad T = 3,27\,N$$

e) l'energia cinetica della carrucola dopo 5

$$K = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M\cdot R^2\cdot(\alpha t)^2 = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot(0,3)^2\cdot(10,9\cdot 5)^2 = \frac{1}{2}(0,09)\cdot(54,5)^2 = 133,66\,J$$

$$K = 133,66\,J$$

f) l'accelerazione della massa m $\quad a = \frac{1}{2+1}\cdot 9,8 = 3,27\frac{m}{s^2}$

g) di quanto si abbassa la massa m dopo 6 secondi

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 3,27\cdot 36 = 58,86\,m \qquad h = 58,86\,m$$

h) la reazione dell'asse di rotazione della carrucola

Le forze che agiscono sulla carrucola sono la tensione $\vec{T}$ ed il peso della carrucola $\vec{P}_c = M\cdot\vec{g}$. L'asse della carrucola consente le rotazioni ed impedisce qualsiasi traslazione. La reazione dell'asse di rotazione della carrucola è uguale ed opposta al risultante $\vec{R}$ di tutte le forze esterne applicate nel baricentro della carrucola. Tali forze applicate nel baricentro della carrucola danno come risultante

$$\vec{R} = \vec{T} + M\cdot\vec{g} \qquad \vec{Z} = -\vec{R} \qquad Z = R = T + Mg$$

$$Z = T + Mg = 3,27 + 2\cdot 9,8 = 3,27 + 19,6 = 22,87\,N \qquad Z = 22,87\,N$$

i) il tempo impiegato dalla massa m per abbassarsi di $1m$

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1}{3,27}} = \sqrt{0,61} = 0,78\,s \qquad t = 0,78\,s$$

L) la velocità lineare di un punto della carrucola distante $\frac{R}{4}$ dall'asse di rotazione dopo 8 secondi.

$$\text{v} = \omega\cdot\frac{R}{4} = \alpha t\cdot\frac{R}{4} = (10,9)\cdot 8\cdot\frac{0,3}{4} = 6,54\frac{m}{s} \qquad \text{v} = 6,54\frac{m}{s}$$

Il sistema indicato in figura è costituito da una carrucola di raggio $R = 50cm$ e massa $M = 12kg$ e da due masse $m_1 = 3kg$ ed $m_2 = 5kg$ poste agli estremi di una corda che passa nella gola di una carrucola . La corda non scorre nella gola ma si muove con la carrucola. Calcolare:

1) l'accelerazione lineare delle due masse

2) le tensioni dei due tratti di corda

3) l'accelerazione angolare della carrucola

4) la velocità angolare della carrucola dopo 10 secondi

5) l'angolo descritto dalla carrucola dopo 5 secondi

6) l'energia cinetica della carrucola dopo 8 secondi

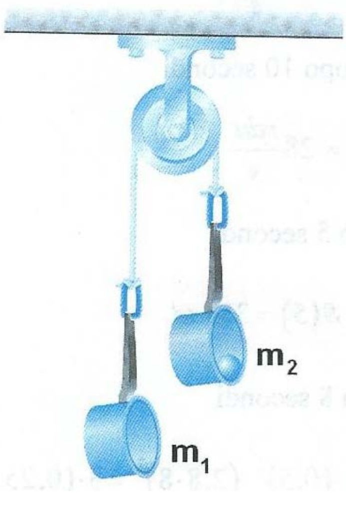
7) la reazione dell'asse di rotazione della carrucola

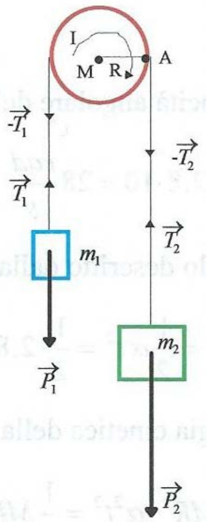
8) la velocità lineare di un punto della carrucola distante $\frac{R}{3}$ dall'asse di rotazione dopo $12s$.

9) il tempo impiegato dalla massa m_2 per abbassarsi di $1m$

10) la velocità angolare della carrucola quando la massa m_2 si abbassa di $1m$

11) Dimostrare che dopo $1s$ il lavoro compiuto sul sistema dalla forza di gravità è uguale all'energia cinetica dell'intero sistema, provando con ciò che l'energia meccanica si conserva.





$$m_1 = 3kg \quad m_2 = 5kg \quad M = 12kg \quad R = 50cm = 0,5m \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \frac{\mathcal{J}}{R^2} = \frac{1}{2}M$$

1) Calcolare l'accelerazione lineare delle due masse

Alle masse m_1, m_2 applico la legge fondamentale della dinamica; alla carrucola applico la seconda equazione cardinale della dinamica. Ottengo:

$$\begin{cases} T_1 - m_2 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ (T_2 - T_1)\cdot R = \mathcal{J}\cdot\alpha \\ \alpha = \dfrac{a}{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1 = m_2 g + m_1 a \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \\ T_2 - T_1 = \dfrac{\mathcal{J}}{R}\cdot\dfrac{a}{R} = \dfrac{\mathcal{J}}{R^2}\cdot a = \dfrac{1}{2} M\,a \end{cases} \qquad m_2 g - m_2 a - m_2 g - m_1 a = \frac{1}{2} M\,a$$

$$2m_2 g - 2m_2 a - 2m_2 g - 2m_1 a = M\,a \qquad a = \frac{2(m_2 - m_1)}{2(m_2 + m_1) + M}\cdot g = \frac{2\cdot 2}{16+12}\cdot g = \frac{1}{7}\cdot g = 1{,}4\frac{m}{s^2} \qquad a = 1{,}4\frac{m}{s^2}$$

2) Calcolare le tensioni dei due tratti di corda

$$T_1 = m_1(g+a) = 3(9{,}8+1{,}4) = 3\cdot 11{,}2 = 33{,}6\,N \qquad T_1 = 33{,}6\,N$$

$$T_2 = m_2(g-a) = 5(9{,}8-1{,}4) = 5\cdot 8{,}4 = 42\,N \qquad T_2 = 42\,N$$

3) Calcolare l'accelerazione angolare della carrucola

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1{,}4}{0{,}5} = 2{,}8\frac{rad}{s^2}$$

4) Calcolare la velocità angolare della carrucola dopo 10 secondi

$$\omega = \omega_o + \alpha t = \alpha t = 2{,}8\cdot 10 = 28\frac{rad}{s} \qquad \omega(10) = 28\frac{rad}{s}$$

5) Calcolare l'angolo descritto dalla carrucola dopo 5 secondi

$$\vartheta = \vartheta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}8\cdot 25 = 35\,rad \qquad \vartheta(5) = 35\,rad$$

6) Calcolare l'energia cinetica della carrucola dopo 8 secondi

$$K = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha^2 t^2 = \frac{1}{4}MR^2(\alpha t)^2 = \frac{1}{4}\cdot 12\cdot(0{,}5)^2\cdot(2{,}8\cdot 8)^2 = 3\cdot(0{,}25)\cdot(22{,}4)^2 \qquad K = 376{,}32\,J$$

7) Calcolare la reazione dell'asse di rotazione della carrucola

$Z = T_1 + T_2 + Mg = 33{,}6 + 42 + 12 \cdot 9{,}8 = 193{,}2\,N$ $\quad \boxed{Z = 193{,}2\,N}$

8) Calcolare la velocità lineare di un punto della carrucola distante $\frac{R}{3}$ dall'asse di rotazione dopo $12\,s$.

$\mathrm{v} = \omega \cdot \frac{R}{3} = \alpha t \cdot \frac{R}{3} = 2{,}8 \cdot \cancel{12}\,4 \cdot \frac{0{,}5}{\cancel{3}} = 5{,}6 \frac{m}{s}$ $\quad \boxed{\mathrm{v}(12) = 5{,}6 \frac{m}{s}}$

9) Calcolare il tempo impiegato dalla massa m_2 per abbassarsi di $1\,m$

$h = \frac{1}{2} a t^2 \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2}{1{,}4}} = \sqrt{1{,}428} = 1{,}2\,s$ $\quad \boxed{t = 1{,}2\,s}$

10) Calcolare la velocità angolare della carrucola quando la massa m_2 si abbassa di $1\,m$

$\omega = \alpha\, t = 2{,}8 \cdot 1{,}2 = 3{,}36 \frac{rad}{s}$ $\quad \boxed{\omega(1{,}2) = 3{,}36 \frac{rad}{s}}$

11) Dimostrare che dopo $1\,s$ il lavoro compiuto sul sistema dalla forza di gravità è uguale all'energia cinetica dell'intero sistema, provando con ciò che l'energia meccanica si conserva.

$h = \frac{1}{2} a t^2 \quad h(1) = 0{,}7\,m \quad L\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = \left(P_2 - P_1\right) \cdot h = \left(m_2 - m_1\right) g \cdot h = (5 - 3) \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}7 = 13{,}72\,J$

$K_{car} = 3 \cdot 0{,}25 \cdot 7{,}84 = 5{,}88\,J \quad K_{m_1 m_2} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)(a \cdot t)^2 = 4 \cdot 1{,}96 = 7{,}84\,J$

$K_{car} + K_{m_1 m_2} = 7{,}84 + 5{,}88 = 13{,}72\,J$ $\quad \boxed{L\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = K_{car} + K_{m_1 m_2}}$