Unità Didattica N° 14
La meccanica dei fluidi

Forze concentrate e forze distribuite : il concetto di pressione

Forze concentrate

Una forza si dice **concentrata** quando agisce in un punto del corpo e si trasmette alle altre parti del corpo attraverso deformazioni microscopiche .

Tuttavia è praticamente impossibile applicare una forza (concentrata) in un solo punto . Le **forze concentrate** sono in realtà il risultante di un sistema di forze distribuite in una porzione più o meno estesa del corpo . Un esempio tipico è la **forza peso** . Essa si considera applicata e concentrata in un solo punto , il **baricentro** , ma in realtà è il risultante di un sistema di forze distribuite : le forze con cui la terra attira le singole particelle del corpo .

Forze distribuite

Si dicono **forze distribuite** quelle che agiscono su tutta la massa del corpo ,come ad esempio , le **forze di attrazione gravitazionale** . In questo caso , ogni particella del corpo subisce l'azione della forza indipendentemente dall'esistenza delle altre particelle vicine al corpo . Quando l'azione di una forza è **distribuita su una superficie** , come nel caso della forza esercitata dall'acqua sulla parete di una diga o di un gas sulle pareti interne di un recipiente , si è condotti a considerare il rapporto tra la **forza premente** e la **superficie premuta** , e tale rapporto prende il nome di **pressione** . Quando abbiamo una forza $\vec{F}$ distribuita uniformemente su una superficie **S** ed agente ortogonalmente ad **S** definiamo **pressione** $\vec{p}$ il rapporto tra la forza $\vec{F}$ e la superficie **S** :

$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{S}$$

La pressione così definita è una grandezza vettoriale , ma di solito viene considerata una grandezza scalare e quindi non si usa la notazione vettoriale e questo perché la direzione del vettore $\vec{p}$ è sempre ortogonale alla superficie sui cui preme la forza $\vec{F}$. La pressione in un fluido non ha caratteristiche direzionali ; essa è una funzione scalare del punto che si considera all'interno del fluido e non dipende dall'orientazione della superficie sulla quale è misurata . La formula precedente diventa :

$$p = \frac{F}{S}$$

Il concetto di pressione è adatto a schematizzare il fatto che una forza non si possa dire applicata in un determinato punto , ma piuttosto distribuita su una superficie .

La formula precedente è valida quando la pressione $\vec{p}$ è costante , cioè quando $\vec{F}$ è distribuita uniformemente su tutta la superficie S . Quando questo non si verifica , la pressione varia da punto a punto della superficie . $[p] = \frac{[F]}{[S]} = [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}]$ $\{p\} = pascal = p_a = \frac{\{F\}}{\{S\}} = \frac{N}{m^2}$

Nel **S.I.** l'unità di misura della pressione è il **pascal** (P_a) definita come la **pressione prodotta dalla forza di un newton quando questa agisce perpendicolarmente su una superficie di un metro quadrato** . Si tratta di una unità di misura piccola , sicché nella pratica sono tollerate altre unità di misura non coerenti con quella introdotta nel **S.I.**

Altre unità di misura usate sono l ' **atmosfera** (atm) , il $\frac{\kappa g_p}{cm^2}$, il **bar** , il **torr** .

$1atm = 1,01325 \cdot 10^5\, P_a$ $1P_a = 9,86923 \cdot 10^{-6}\, atm$ $1bar = 10^5\, P_a$ $1P_a = 10^{-5}\, bar$

$1torr = 1mm_{Hg} = 133,32237\, P_a = \frac{1}{760} atm$ $1P_a = 7,5 \cdot 10^{-3}\, torr$

$1\frac{kg_p}{cm^2} = atmosfera\ tecnica = 9,80665 \cdot 10^4\, P_a$ $1atm = 1,033 \frac{\kappa p_p}{cm^2}$

Osservazione N° 1 Per i corpi solidi è **più importante il concetto di forza** , per i fluidi è **più importante il concetto di pressione** .

Meccanica dei fluidi ideali

Si chiama comunemente **fluido un mezzo continuo senza forma propria** . I **liquidi sono fluidi con volume proprio** , gli *aeriformi sono fluidi senza volume proprio* .

Queste definizioni sono valide solo in prima approssimazione . Meglio possiamo definire **fluido** un corpo continuo in cui , in **condizioni di quiete** , le forze che agiscono su di esso sono completamente normali alle rispettive superfici . Anche la distinzione fra **liquidi** ed **aeriformi** (**gas e vapori**) può essere effettuata in maniera più rigorosa di quanto non sia stato fatto in precedenza .
I **liquidi** sono caratterizzati dall'avere una **debole compressibilità** (che è circa pari a quella dei solidi) , sicché variazioni sensibili di volume si realizzano solo con grandissime variazioni di pressione , mentre gli **aeriformi** sono contraddistinti da una **compressibilità molto elevata** .

Concludendo possiamo affermare che i liquidi hanno volume proprio e forma del recipiente che li contiene e sono pochissimo comprimibili mentre gli aeriformi , che sono fortemente comprimibili , hanno forma e volume del recipiente che li contiene .

La *meccanica dei fluidi* si divide in **statica dei fluidi** o **fluidostatica** che studia le condizioni di equilibrio di un fluido e **dinamica dei fluidi** o **fluidodinamica** che studia le condizioni del moto del fluido in relazione alle cause che lo determinano ed agli effetti che produce .

Per distinguere i liquidi dagli aeriformi si suole dividere la fluidostatica in **idrostatica** ed **aerostatica** e la fluidodinamica in **idrodinamica** e **aerodinamica** .

Le forze che agiscono su un fluido sono sempre **forze distribuite** e possono essere di due tipi :

- **forze di volume** se **V** è il volume su cui esse agiscono
- **forze di superficie** se esse si esercitano sulla superficie **S** che delimita il volume **V .**

Le **forze di superficie** vengono trasmesse sulla superficie del volume **V** dai corpi che lo circondano. Questi corpi possono essere la parte rimanente del fluido , pareti , corpi a contatto , etc... Le **forze di volume** si esercitano su ciascuna particella del fluido contenuto nel volume **V** . La **forza peso** è l'esempio classico di **forza di volume** .

Forze agenti su un fluido

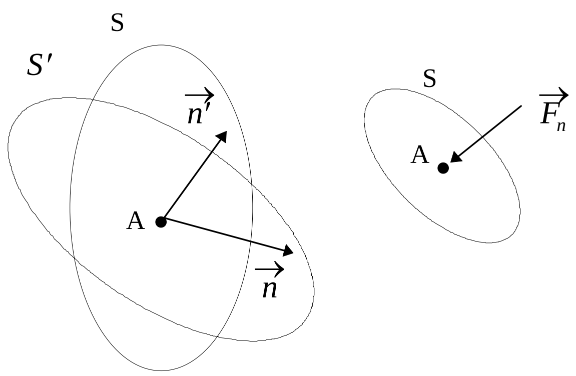
Le forze agenti su un fluido di solito si dividono in : **forze di volume** **forze di superficie** (o di pressione o di contatto) . Le **forze di volume** agiscono su tutti i punti del volume di fluido considerato .Una **forza di volume** è proporzionale alla massa e quindi al volume della porzione di fluido considerato . Un **forza di volume** particolarmente importante è la **forza peso** (e in generale ogni **forza gravitazionale**) . Essa è una **forza di volume** in quanto agisce su ogni particella del fluido considerato . Un altro esempio di **forza di volume** si ha nel caso di un fluido elettrizzato in presenza di un campo elettrico esterno .

Le **forze di superficie** agiscono sulla superficie contorno della porzione di fluido considerato in seguito all'azione che la rimanente parte del fluido esplica su di essa .

Isotropia della pressione in fluido in equilibrio

La misura della **pressione** in un punto **A** di un fluido presuppone l'individuazione di un'areola **S** passante per esso e la misura F_n della componente normale della forza agente su **S** , cioè :

$\boxed{p = \frac{F_n}{S}}$ = **pressione** che si esercita sul punto A del fluido

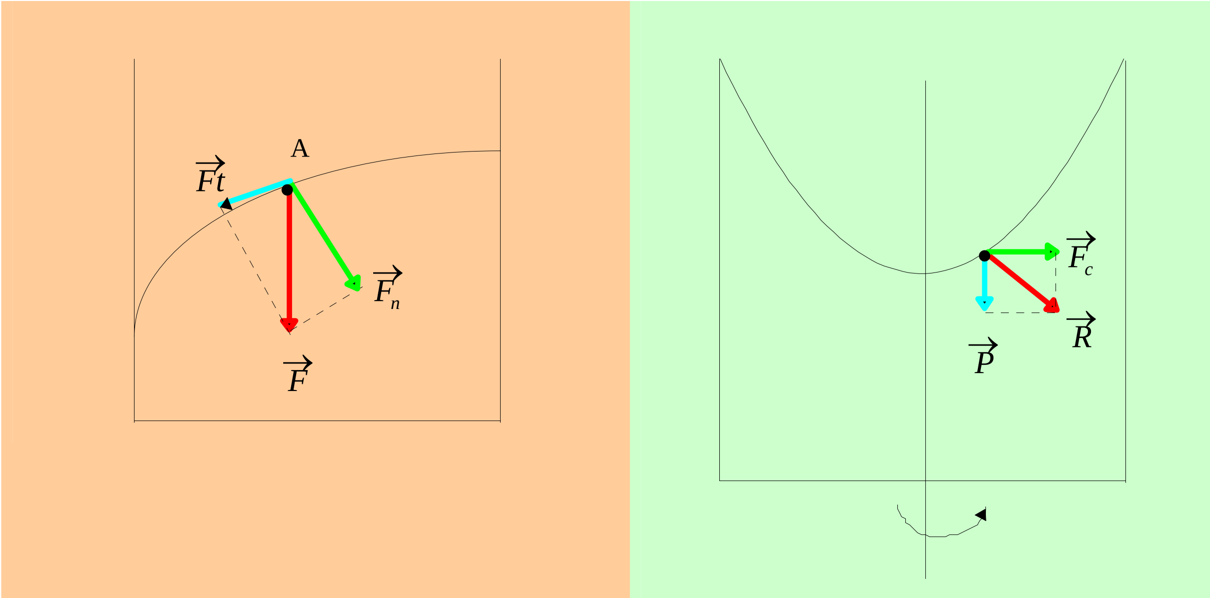


Questa definizione trova una plausibile giustificazione nella cosiddetta **legge di isotropia dei fluidi** in equilibrio che può essere enunciata nella seguente maniera : **il valore della pressione in un punto A di un fluido in equilibrio dipende dalla posizione del punto A prescelto , ma non dipende dall'elemento** (infinitesimo) **di superficie S passante per A .** Poiché la pressione in un punto **A** di un fluido in equilibrio è indipendente dalla giacitura dell'elemento **S** (infinitesimo) di superficie passante per A , ci consente di considerare la pressione come grandezza scalare e non come grandezza vettoriale . Infatti il semplice valore numerico la definisce completamente , rimanendo tacitamente inteso che tale pressione agisce in direzione normale a qualsiasi areola **S** che contenga A .

Superficie libera dei liquidi in equilibrio

Per i liquidi si può parlare di **superficie libera** , cioè di superficie di separazione ben definita tra liquido ed ambiente esterno . In condizioni di equilibrio , la superficie libera di un liquido assume una configurazione ben definita , esattamente tale che ogni molecola che si trova sulla superficie sia sollecitata da un **risultante** di tutte le forze ad essa applicate perpendicolare alla superficie stessa . Sia $\vec{F}$ il **risultante** delle forze agenti su una molecola della superficie libera di un liquido in equilibrio . Decomponendo tale forza $\vec{F}$ nelle due componenti $\vec{F}_t$ ed F_n , rispettivamente tangente e normale alla superficie libera abbiamo : $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$

L'azione della componente F_n viene equilibrata dalla reazione del liquido incomprimibile , mentre la componente $\vec{F}_t$, non equilibrata , imprimerebbe alla molecola una accelerazione che trascinerebbe la molecola verso il basso ed il liquido , in contrasto con l'ipotesi , non sarebbe in equilibrio . Per l'equilibrio deve essere : $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n = \vec{F}$ $(\vec{F}_t = \vec{o})$ cioè la superficie libera di un liquido in equilibrio è in ogni punto normale al risultante di tutte le forze agenti in quel punto . Se , in particolare , sul liquido agisce soltanto la **forza peso** (che è diretta verso il basso lungo la verticale) la superficie libera sarà in ogni punto normale alla verticale . cioè **orizzontale e piana** e si dire **superficie di livello** .



Se la superficie è però molto estesa dovrà in ogni punto essere normale alla forza di gravità e poiché la terra è sferica , la superficie libera sarà **sferica** . Se poi , con la gravità agiscono altre forze sulla superficie libera (per esempio la forza di adesione nel liquidi contenuti nei tubi capillari) , la superficie di livello avrà forma diversa , ma soddisferà sempre alla condizione di essere in ogni punto normale al risultante di tutte le forze agenti in ciascun punto . Quando un liquido è in rotazione , al peso $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ di una particella della superficie libera si somma la forza centrifuga di modulo $\omega^2 r m$ ed il risultante è inclinato rispetto alla verticale e dovendo essere perpendicolare alla superficie libera ,questa risulterà curva ;si dimostra che tale superficie libera è un **paraboloide** .

Legge di Stevino

La **legge di Stevino** ci dice come varia la **pressione** all'interno di un fluido in equilibrio . [10]
Se il fluido oltre ad essere in equilibrio è anche in quiete (la sua velocità è nulla) allora l'equilibrio è **statico** in caso contrario è **dinamico** . Consideriamo un fluido (in particolare un **liquido**) pesante in **equilibrio statico** posto all'interno di un recipiente cilindrico. Supponiamo inoltre che la **massa volumica** $\rho = \frac{m}{V}$ sia costante .

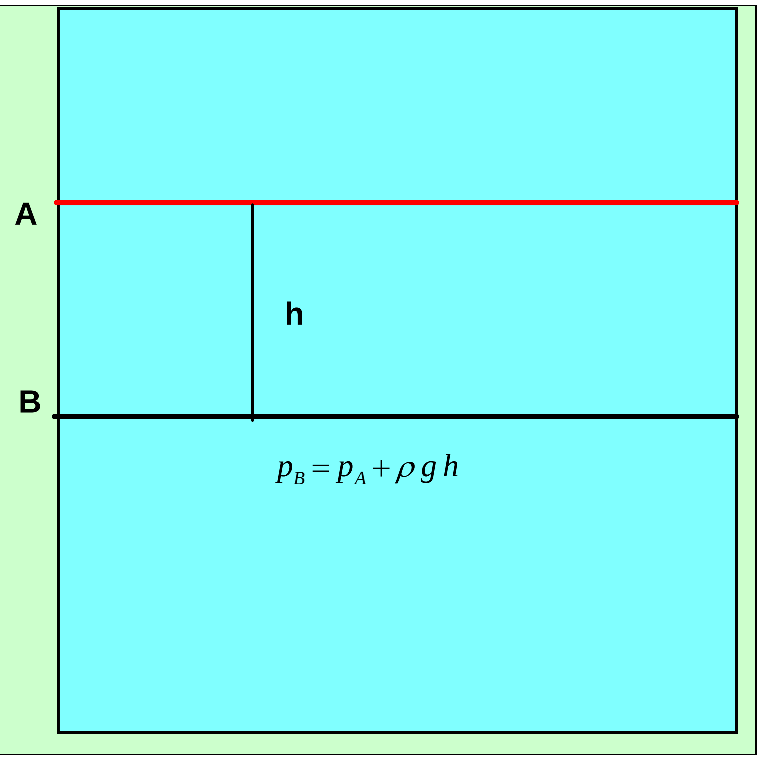
$P = mg = \gamma V = \rho g V$ = **peso di un corpo** $\rho g h = \gamma h$

[10] Un fluido è in **equilibrio** quando sono nulli il risultante ed il momento risultante di tutte le forze agenti sul fluido

In un fluido pesante in equilibrio , la pressione è costante in tutti i punti di uno stesso piano orizzontale . Se la massa volumica del fluido in equilibrio è costante la differenza di pressione tra due livelli orizzontali è uguale al termine $\rho g h = \gamma h$ **che rappresenta la pressione idrostatica .**

$$p_1 = p_2 + \rho g h = p_2 + \gamma \cdot h$$

Legge di Stevino



Se poi consideriamo un recipiente aperto , p_2 coinciderà con la **pressione atmosferica** esistente alla superficie esterna (che di solito coincide con la pressione atmosferica p_{atm}) e quindi la pressione p in un punto posto alla profondità **h** sarà data da : $p = p_{atm} + \rho g h = p_{atm} + \gamma \cdot h$

e **p** non dipende dalla forma del recipiente .

La **pressione idrostatica** esistente tra due livelli orizzontali A e B , posti alla distanza **h** , è uguale al rapporto tra il peso P di un cilindro di fluido avente base **S** ed altezza **h** e la superficie **S** . Infatti :

$$p_B - p_A = \gamma h = \frac{P h}{V} = \frac{P h}{S h} = \frac{peso}{\text{superficie}}$$ = **pressione idrostatica** =

$$= \frac{\text{peso di una colonna di fluido avente base S ed altezza h}}{\text{superficie S}}$$

La **pressione idrostatica** è la pressione esercitata dalla gravità in un punto all'interno di un fluido .

S = 1 $\Rightarrow$ $\boxed{\rho g h = P}$ cioè la **pressione idrostatica** in un punto di un fluido coincide numericamente col peso di una colonna di fluido avente sezione unitaria ed altezza h .

Meglio ancora : S = 1 $\Rightarrow$ $\boxed{p_B - p_A = \rho g h = \gamma V = P}$

cioè la **differenza di pressione esistente tra due livelli orizzontali di una massa fluida coincide numericamente col peso di una colonna dello stesso fluido avente per sezione l'unità di superficie e per altezza la differenza fra due livelli** .

Se il livello A coincide con la superficie libera del liquido e se questi è a contatto col vuoto , la **legge di Stevino** in un punto del liquido posto alla profondità h si scrive : $p = \rho g h = \gamma h$

La quantità $\rho g h = \gamma V$ corrisponde alla **pressione idrostatica** esercitata sulla base di una colonna omogenea di fluido in equilibrio di altezza h , per effetto della forza di gravità terrestre .

Infatti se consideriamo una colonna di area di base **S** ed altezza **h** , la forza peso del liquido è distribuita sulla base e vale : $P = mg = \rho S h g$

La corrispondente pressione sulla base vale : $p = \frac{F}{S} = \frac{P}{S} = \rho \cdot g \cdot h = \gamma \cdot h$

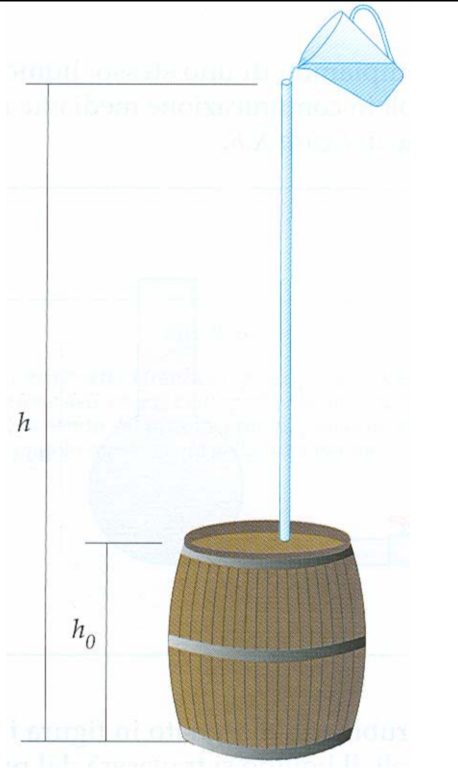
Dunque una colonna di fluido in equilibrio esercita , per effetto della gravità , una **pressione idrostatica** su ogni punto sottostante . Se il fluido considerato è l'aria e si considera un punto in prossimità della superficie terrestre , la colonna di aria che va da questo punto agli estremi dell'atmosfera esercita una pressione idrostatica detta **pressione atmosferica** .

Paradosso idrostatico : botte di Pascal

E' una conseguenza della legge di Stivino .

Nella " botte di Pascal " l'aggiunta di una modesta quantità di liquido , ad esempio acqua , in un tubo sottile determina lo sfondamento delle pareti laterali della botte .

Basta scegliere un tubo avente sezione piccola ed altezza opportuna .



Legge di Pascal

Per tradizione è detta **principio** , ma si tratta di una **legge** , E' una immediata conseguenza della **legge di Stevino** . In assenza di **forze di volume** (ad esempio trascurando la forza peso) la **legge di Stevino** si scrive : $p_A = p_B$ cioè la pressione è **costante** in tutti i punti di un fluido in equilibrio . Pertanto la **legge di Pascal** afferma che , **in assenza di forze di volume , la pressione è costante in tutti i punti di un fluido in equilibrio** .

Nel caso dei fluidi pesanti , non potendo eliminare la **forza peso** , la pressione non è più la stessa in ogni punto del fluido . In questo caso la **legge di Pascal** va formulata in maniera diversa .

La pressione esercitata in un punto qualsiasi di un fluido (in particolare di un liquido) si trasmette con la stessa intensità in tutte le direzioni .

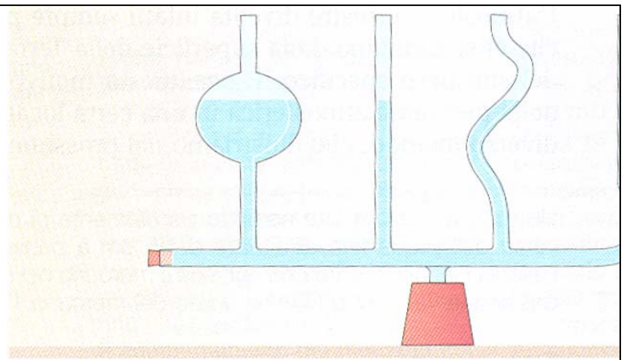
Tale pressione si manifesta come una forza che agisce ortogonalmente ad una sezione , comunque disposta , del fluido stesso .

Liquidi in vasi comunicanti

Due **vasi comunicanti** sono due recipienti qualsiasi collegati fra loro mediante un tubo o un qualsiasi altro dispositivo . Due o più recipienti costituiscono un **sistema di vasi comunicanti** quando solo collegati fra loro mediante tubi o mediante dispositivi di natura qualsivoglia .

Un sistema di vasi comunicanti

Versando un liquido nel primo recipiente si ottiene il riempimento di tutti i vasi . Si osserva che : il liquido raggiunge lo stesso livello in tutti i recipienti comunicanti .



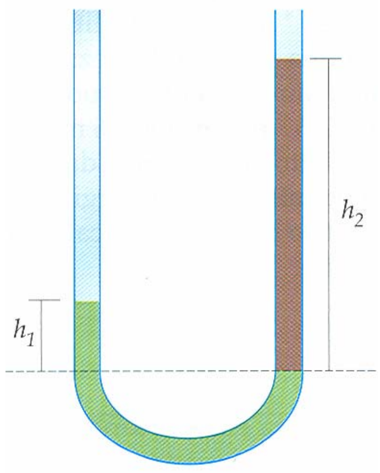
Le superfici libere di vasi comunicanti contenenti uno stesso liquido in condizioni di equilibrio si dispongono alla stessa altezza qualunque siano le forme e le dimensioni dei vasi comunicanti . $h_1 = h_2$ cioè il **liquido giunge allo stesso livello nei due rami** (qualunque sia la forma dei vasi comunicanti) .

La forma tipica dei vasi comunicanti è quella ad **U** . Ma le cose che diremo in seguito sono valide anche per vasi comunicanti aventi forma qualsivoglia . .

Se due vasi comunicanti sono riempiti con due liquidi non miscibili ed aventi **masse volumiche** diverse , il liquido avente **massa volumica maggiore** forma una colonna più bassa rispetto all'altro . Quando si raggiunge l'equilibrio si ha :

$h_1 : h_2 = \rho_2 : \rho_1 = \gamma_2 : \gamma_1 = \delta_2 : \delta_1$ $\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$ $\gamma_1 \cdot h_1 = \gamma_2 \cdot h_2$

Le altezze , misurate a partire da S , piano orizzontale contenente la superficie di separazione dei due liquidi non miscibili , **sono inversamente proporzionali alle masse volumiche** ρ_1 e ρ_2 , e quindi anche ai **pesi volumici** γ_1 **e** γ_2 ed alle **densità relative** δ_1 e δ_2 .



Torchio idraulico o pressa idraulica

E' un dispositivo che permette di esercitare **forze molto intense** mediante l'applicazione di **forze relativamente deboli**.Serve anche per **equilibrare** una forza mediante un'altra di intensità minore . Il suo funzionamento si basa sulla **legge di Pascal** . Il **torchio idraulico** è costituito da **due vasi comunicanti** (due cilindri collegati da un condotto) aventi sezioni diverse e contenenti un liquido che raggiunge lo stesso livello in entrambi i vasi .

Due stantuffi a tenuta stagna , uno per cilindro , pescano nel liquido e servono a trasmettere le pressioni che si esercitano nel liquido stesso . Per la legge di Pascal la pressione $p_1 = \frac{F_1}{S_1}$ esercitata dallo stantuffo inserito nel cilindro di sezione S_1 minore , si trasmette all'altro di sezione $S_2 > S_1$ ed il rapporto tra la forza esercitata (**verso il basso**) e la spinta (**verso l'alto**) che ne deriva per l'altro stantuffo è tanto maggiore quanto più grande è il rapporto tra le sezioni dei due cilindri . Infatti , supposto il torchio in equilibrio , applichiamo sul pistone a sezione S_1 minore una forza F_1 ad esso normale . Essa produrrà una variazione di pressione sullo strato di liquido sottostante il pistone data da : $p_1 = \frac{F_1}{S_1}$. La stessa variazione di pressione dovrà avvenire , per la **legge di Pascal** , in tutti gli altri punti del liquido , e quindi in particolare sullo strato di liquido sottostante il pistone di sezione S_2 maggiore .

Detta , allora , F_2 la forza che agisce su quest'ultimo , per la legge di Pascal avremo :

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} \quad p_2 = \frac{F_2}{S_2} \quad p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow \quad F_1 = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_2$$

Agendo con una forza relativamente piccola F_1 su una superficie relativamente piccola S_1 si riesce ad esercitare una forza F_2 più intensa su una superficie S_2 più estesa .

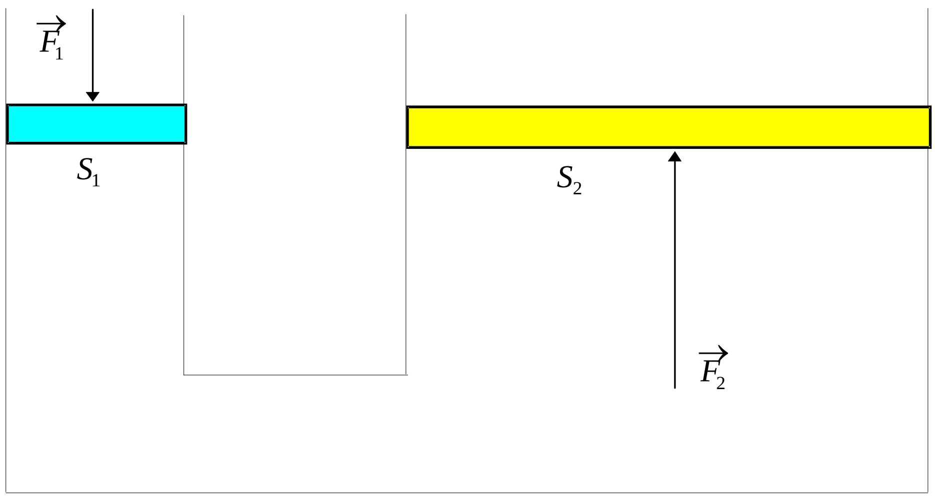
Il funzionamento del **torchio idraulico** è conforme al **principio di conservazione** del lavoro . Infatti , essendo il liquido incomprimibile , quando il pistone di sezione minore si abbassa del tratto h_1 , l'altro s'innalza del tratto h_2 tale che risulti : $S_1 \cdot h_1 = S_2 \cdot h_2$ cioè : $h_1 = \frac{S_2}{S_1} \cdot h_2$

cioè il **volume** (di liquido) espulso a sinistra deve ritrovarsi a destra .

$$L(\vec{F}_1) = F_1 \cdot h_1 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot h_2 = F_1 \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot h_2 = F_2 \cdot h_2 = L(\vec{F}_2)$$

cioè il **lavoro motore** (eseguita da F_1) è uguale in valore assoluto al **lavoro resistente** (compiuto dalla forza $-\vec{F}_2$) .

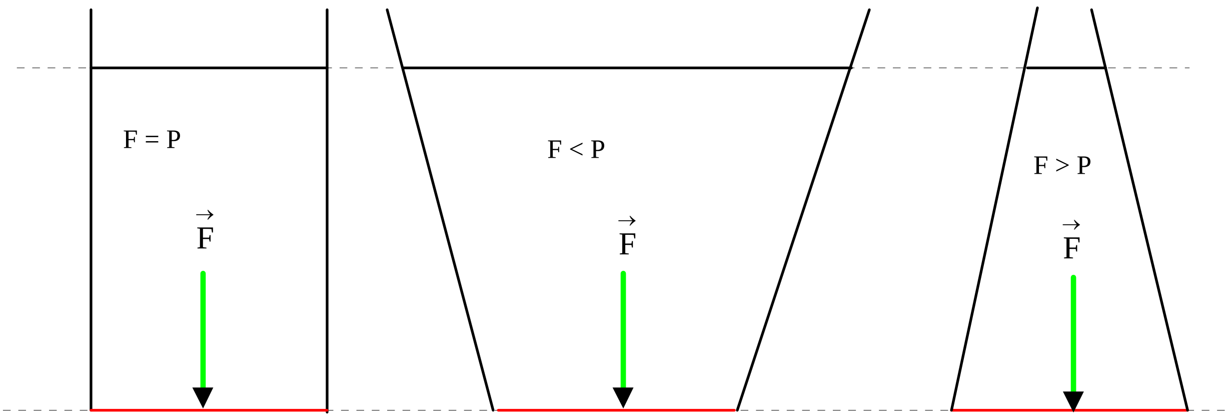
Il **torchio idraulico** è utilizzato nelle grandi officine per la lavorazione dei metalli , per sollevare vetture , per comprimere materiali poroso , per spremere succhi vegetali ,... .



Paradosso idrostatico

Il **paradosso idrostatico di Pascal** afferma che la pressione esercitata sul fondo di un vaso pieno di un liquido non dipende dalla forma del vaso , né dalla quantità di liquido , ma dipende soltanto dall'altezza della colonna del liquido rispetto al fondo .

Consideriamo i tre recipienti della figura aventi tutti basi uguali e riempiti dello stesso liquido fino ad una stessa altezza h . Nei tre recipienti la quantità di liquido è differente ma la pressione sul fondo, per la legge di Stevino , è la stessa e quindi anche la forza F agente sul fondo assume lo stesso valore. Il paradosso si spiega facilmente osservando che il peso complessivo del liquido è equilibrato non solo dalla reazione vincolare della base ma anche dalle reazioni vincolari delle pareti laterali .



Paradosso idrostatico : la pressione sul fondo del recipiente non dipende dalla quantità di liquido contenuto nel recipiente .

Spiegazione : Per la legge di Stevino risulta che la forza dovuta alla pressione che si esercita sul fondo è la stessa per tutti e tre i recipienti nonostante la diversa quantità di liquido contenuta in ciascuno di essi : in ciò consiste il **paradosso idrostatico** . La spiegazione di questo paradosso è piuttosto semplice . Il peso complessivo del liquido non è equilibrato dalla sola forza di pressione F agente sul fondo , ma dal risultante di tutte le forze normali esercitate dalle pareti del recipiente sul liquido che esso contiene . Nel caso del secondo recipiente una parte del peso del liquido è equilibrata dalla reazione vincolare della parete inclinata , mentre nel terzo caso al peso bisogna aggiungere una forza verticale verso il basso dovuta alla reazione delle pareti laterali .

Legge di Archimede

Essa afferma quanto segue : **Un corpo immerso interamente o parzialmente in un fluido riceve una spinta verticale dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato** .Tale forza è applicata nel centro di gravità (detto **centro di spinta**) del fluido spostato .

Per la dimostrazione ci limiteremo al caso in cui il corpo $MNLI$, immerso nel fluido , abbia forma di parallelepipedo trirettangolo , con le basi IL ed MN orizzontali . Il **risultante** delle forze prementi , applicate dal fluido su tutte le facce del corpo $MNLI$, si riduce alle forze che agiscono su MN ($\vec{F}_1$) e su IL ($\vec{F}_2$) . Infatti le forze agenti sulle coppie laterali come ML ed NI sono uguali e contrarie , perché costituite da forze prementi elementari a due a due uguali e contrarie . Restano le facce orizzontali MN ed IL sulle quali agiscono rispettivamente le forze $F_1 = S \cdot p_1$, $F_2 = S \cdot p_2$.

Il **risultante** $\vec{R}$ di tutte le forze applicate esiste ed ha come direzione quella della verticale ed è orientato dal basso verso l'alto .

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ $\quad p_2 - p_1 = \rho g h$ $\quad R = F_2 - F_1 = S\,p_2 - S\,p_1 = S(p_2 - p_1) = S\,\rho\,g\,(h_2 - h_1)$

$R = S h \dfrac{m}{V} g = V \dfrac{m}{V} g = mg = P$ **m** = massa del fluido spostato **P** = peso del fluido spostato

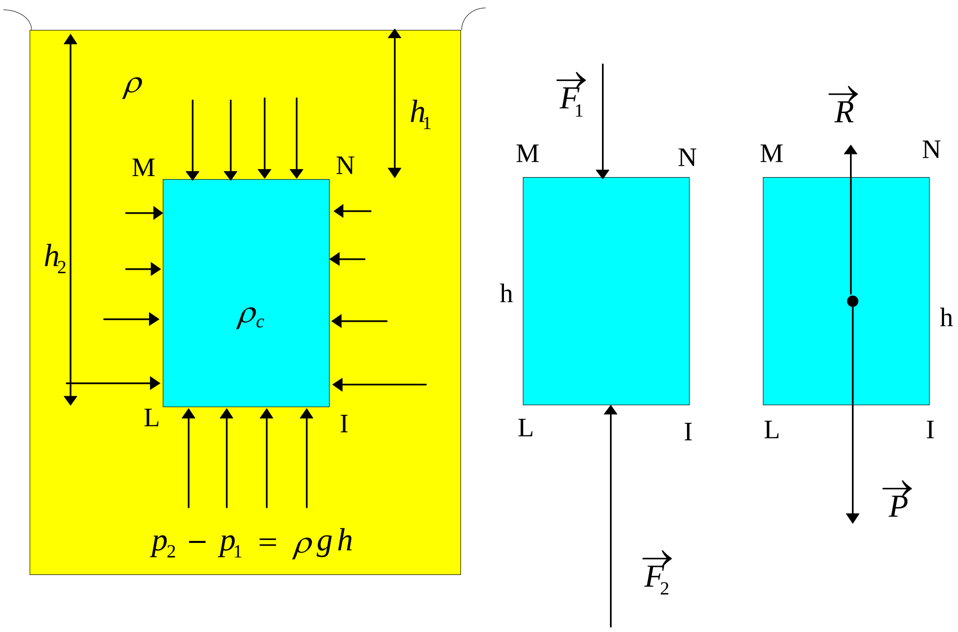
V = volume del corpo immerso = volume del fluido spostato $\boxed{\vec{R} = -\vec{P}_f}$

Il risultante delle forze esercitate dal fluido sul corpo immerso è una forza $\vec{R}$ uguale e contraria al peso del fluido spostato .

P_f = peso del fluido spostato = peso di un volume di fluido uguale al volume del corpo immerso

La dimostrazione precedente si estende facilmente al caso di un corpo avente forma qualsiasi .

$\vec{R}$ ha lo stesso punto di applicazione del peso $\vec{P}_f$, cioè la spinta $\vec{R}$ è applicata al centro di gravità del fluido spostato . Un corpo immerso in un fluido si trova soggetto a due forze verticali opposte : il proprio peso $\vec{P}$ e la spinta di Archimede $\vec{R} = -\vec{P}_f$, l'uno applicato al centro di gravità del corpo , l'altra applicata al centro di gravità del fluido spostato . I due punti di applicazione coincidono certamente se il corpo immerso è **omogeneo** (quindi di massa volumica ρ_c **costante**) , se esso è completamente immerso nel fluido e se questo è un liquido incomprimibile , anch'esso omogeneo e di massa volumica ρ .



Se **V** è il volume del corpo , la forza risultante $\vec{F}$ a cui il corpo immerso trovasi soggetto , rispetto ad un asse verticale **h** orientato verso il basso , ha il seguente valore algebrico :

$$F = P - R = V(\rho_c - \rho_\ell) g = (\gamma_c - \gamma_\ell)\cdot V$$

cioè è verticale e volta verso il basso o verso l'alto , secondo che è $\boxed{\rho_c > \rho_\ell}$ oppure $\boxed{\rho_c < \rho_\ell}$.

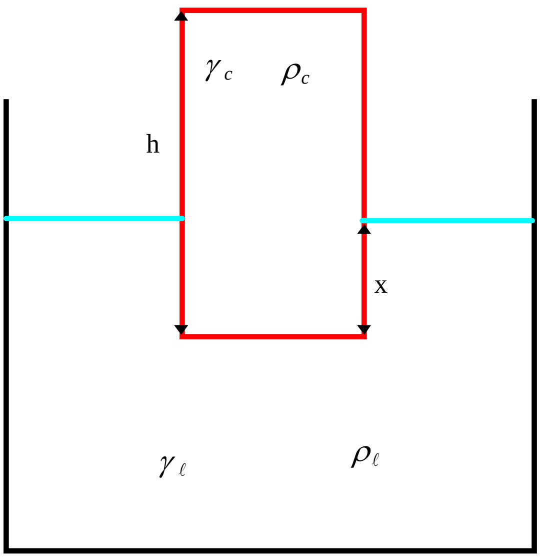
Ma in generale i due punti di applicazione di $\vec{P}$ e di $\vec{R}$ **non coincidono** : il corpo immerso viene a trovarsi soggetto ad una forza risultante verticale $\vec{P} - \vec{R}$ e ad una coppia .

Nel caso di un corpo rigido che galleggia e che abbia una parte immersa e l'altra che emerge dal liquido è evidente che la **forza di spinta equivale al peso del volume del liquido spostato dalla parte immersa .** Indichiamo con **x** la parte immersa del corpo rigido e con **h** l'altezza complessiva del corpo . Poiché la **condizione di equilibrio** si realizza quando la **spinta di Archimede** , che è uguale al peso del volume del liquido spostato , è uguale al peso del corpo immerso nel liquido , possiamo scrivere : $P_c = P_\ell \Rightarrow \gamma_c \cdot V_c = \gamma_\ell \cdot V_\ell \Rightarrow \gamma_c \cdot S \cdot h = \gamma_\ell \cdot S \cdot x \Rightarrow$

$$x = \frac{\gamma_c}{\gamma_\ell}\cdot h = \frac{\rho_c}{\rho_\ell}\cdot h$$

Per un corpo qualsiasi risulta :

$P = m \cdot g = \gamma \cdot V = \rho \cdot V \cdot g$	$\gamma = \rho \cdot g$	$\frac{\gamma_c}{\gamma_\ell} = \frac{\rho_c}{\rho_\ell}$



L'altezza x della parte immersa di un corpo che galleggia è espressa dall ' equazione

$$x = \frac{\gamma_c}{\gamma_\ell} \cdot h = \frac{\rho_c}{\rho_\ell} \cdot h$$

Pressione atmosferica

Abbiamo visto che una colonna di fluido in equilibrio , per effetto della gravità , esercita una **pressione** detta **idrostatica** su ogni punto sottostante . Se il fluido considerato è l'aria e si considera un punto in prossimità della superficie della terra , la colonna d'aria , che va da questo punto agli estremi dell'atmosfera , esercita una **pressione idrostatica** che prende il nome di **pressione atmosferica** . L'atmosfera terrestre è un involucro aeriforme che circonda il nostro pianeta . L'altezza di tale involucro , valutata alcune centinaia di km , non può essere definita con esattezza in quanto non esiste un limite netto fra la massa gassosa e lo spazio interplanetario .

L'atmosfera viene di solito suddivisa in 5 parti :

1) TROPOSFERA (0 —— $11 km$) costituita per il $75,5\%$ da **azoto** , per il $23,2\%$ da **ossigeno** , e per il rimanente $1,3\%$ da **anidride carbonica** e da **gas nobili** (elio , neon , kripto , xeno , radon) .

Nella **troposfera** sono sempre presenti quantità più o meno elevate di vapor d'acqua .

2) STRATOSFERA ($11 - 30 km$

3) MESOSFERA ($30 - 90 km$)

4) TERMOSFERA ($90 - 640 KM$)

5) esosfera (sopra i $640 km$)

La superficie terrestre può quindi essere considerata come immersa al centro di un oceano d'aria . Un certo volume di aria ha un peso per cui è chiaro che l'atmosfera esercita una certa **pressione idrostatica** (detta comunemente **pressione atmosferica** ed indicata col simbolo p_{atm}) sulla superficie terrestre .

Consideriamo una qualunque colonna d'aria **M** , avente per base una certa area **S** della superficie terrestre . Se **P** è il peso dell'aria contenuta in tale colonna ,la superficie **S** è soggetta alla pressione :

$$\boxed{p = p_{atm} = \frac{P}{S}}$$

Possiamo anche dire che **la pressione atmosferica è numericamente uguale al peso di una colonna d'aria di sezione unitaria che , iniziando dal punto in cui si vuole misurare la pressione , si estende sino al limite dell'atmosfera** . Il valore della pressione atmosferica dipende da diversi fattori come l ' **altitudine** , la **temperatura** , l ' **umidità** , la **latitudine** .

Si definiscono **condizioni normali** per la misura della pressione atmosferica quando consideriamo : 1°) aria priva di vapore d'acqua 2°) quando ci troviamo al livello del mare , alla temperatura di $0°C$, alla latitudine di $45°$. In pratica tali condizioni non si verificano mai contemporaneamente .

L'esistenza della pressione atmosferica può essere verificata facilmente con classiche ed interessanti esperienze le più comuni delle quali sono : 1) **emisferi di Magdeburgo** 2) **crepavesciche** 3) **pipetta** .

Esperienza di Torricelli per la misurazione della pressione atmosferica

(Barometro a mercurio)

Per calcolare la pressione atmosferica dovremmo conoscere il peso di una colonna di aria di area **S** ed altezza uguale a quella dell'intera atmosfera ; cosa questa impossibile per cui sembrerebbe destinato all'insuccesso qualsiasi tentativo di misurare la pressione atmosferica . Ci riuscì brillantemente ed anche semplicemente **Evangelista Torricelli** $(1608-1647)$, allievo di Galileo , eseguendo una ingegnosissima esperienza ed utilizzando il **barometro a mercurio** . Questi consiste in un tubo di vetro **lungo 1 metro** e di piccolo diametro riempito di mercurio ed immerso , con l'estremità aperta , in una bacinella piena di mercurio come si vede in figura .

Lo spazio al di sopra della colonna di mercurio (**vuoto torricelliano**) contiene solo vapori di mercurio la cui pressione è , a temperatura ordinaria , cosi piccola che può essere trascurata . Si osserva che il livello della colonna di mercurio nella canna barometrica scende , fino a disporsi ad un'altezza di $76cm = 760mm$ dalla superficie libera del mercurio contenuto nella vaschetta .

E' importante osservare che il dislivello **h** è sempre uguale a $76cm$, qualunque sia la sezione del tubo (purché di diametro non inferiore a $2mm$) , comunque esso sia inclinato e qualunque sia la sua forma . Il fenomeno si spiega così :la **pressione atmosferica** , agendo sulla superficie libera **L** , si propaga per la **legge di Pascal** in tutte le direzioni e quindi anche verso l'altro . Sia **C** un punto interno alla **canna barometrica** e giacente su un piano orizzontale contenente la superficie libera **L** .

Nel punto **C** la pressione atmosferica è equilibrata dalla pressione idrostatica della colonna di mercurio presente nella canna barometrica . Quindi all'equilibrio abbiamo :

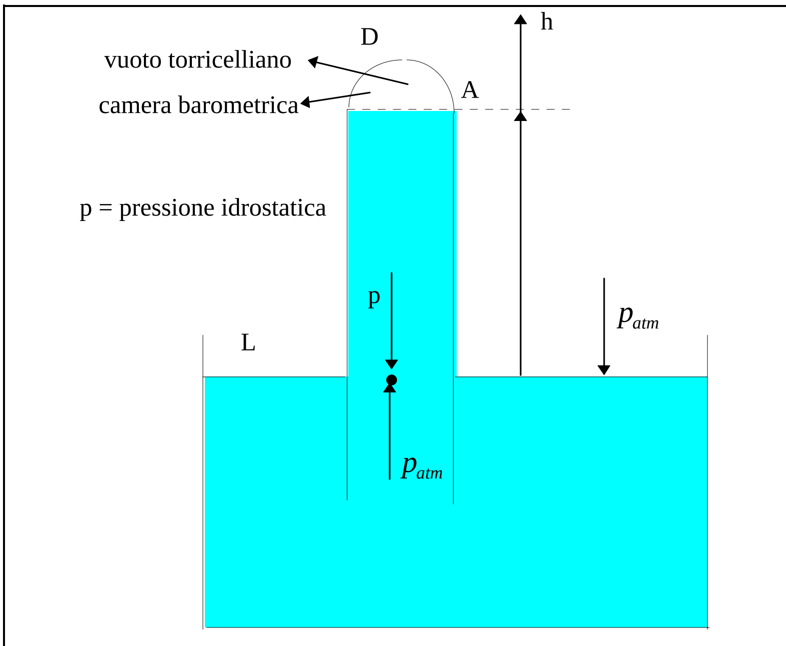
$$p_{atm} = p = \gamma h = \rho g h$$

$\rho = 13595{,}5\dfrac{kg}{m^3}$ $\quad h = 0{,}076m$ $\quad g = 9{,}880665\dfrac{m}{s^2}$ $\quad p_{atm} = 13595{,}5 \cdot 5 \cdot 9{,}80665 \cdot 0{,}76\dfrac{N}{m^2}$

$1atm = 1{,}033\dfrac{kg_p}{cm^2}$ $\qquad 1p_a = \dfrac{1}{101325}atm = 9{,}8 \cdot 10^{-6}\, atm$

Quanto detto è vero se si verificano le seguenti condizioni : **1°)** il mercurio è puro **2°)** il mercurio è alla temperatura di $0°C$ in quanto la massa volumica del mercurio varia con la sua temperatura **3°)** che la scala sulla quale si legge **h** è alla temperatura alla quale è stata eseguita la graduazione che è ordinariamente di $0°C$. La lunghezza della scala varia con la temperatura **t** secondo la relazione $h = h_o(1 + k \cdot t)$ con **k** coefficiente di dilatazione lineare del materiale su cui è incisa la scala . **4°)** si conosce l'accelerazione di gravità **g** nel luogo dove si trova il barometro **. 5°)** Non esistono gas residui nella canna barometrica così che la superficie del mercurio in **A** è effettivamente libera , Invero non mancherà mai la **tensione del vapore saturo** del mercurio che a $20°C$ è di circa $0{,}1\dfrac{N}{m^2}$.

6°) la scala che serve per la misurazione di **h** sia ben verticale **7°)** che non vi siano fenomeni di **capillarità** (la canna barometrica deve avere un diametro di circa $2cm$)



L= superficie libera del mercurio nella vaschetta

h = dislivello tra la superficie libera **L** e la superficie libera **A** della canna barometrica

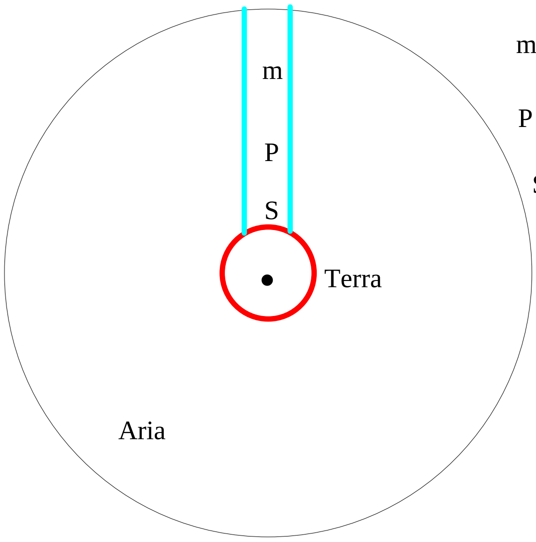
γ = peso volumico del mercurio

ρ = massa volumica del mercurio

$p_A = 0 \quad (\approx 0{,}1\dfrac{N}{m^2})$

Osservazione N° 1

Per eseguire l'esperienza di Torricelli è stato scelto il mercurio , liquido ad elevata massa volumica , in modo da ottenere una colonna di altezza modesta . Se , come sostanza barometrica , avessimo scelto acqua a $4°C$ la colonna liquida sarebbe stata alte $10,33m$.



m = massa di una colonna di aria

P = peso di una colonna di aria

S = area della base della colonna di aria

Osservazione N° 2

Una unità di misura della pressione atmosferica molto usata nella pratica è il **millimetro di mercurio** ($mm\,Hg$) definito come la pressione esercitata da una colonna di mercurio alta un millimetro , alla temperatura di $0°C$ ed alla latitudine di $45°$, dove risulta $g = 980,665\frac{cm}{s^2}$.

Essa è chiamata **torr** (da Torricelli) . Come unità di pressione si usa anche l ' **atmosfera** uguale a $760\,torr$. In meteorologia si usa anche il **bar** uguale a $760\,torr$ o il **millibar** .

$1bar = 760\,torr \quad 1torr = 1,3158\,millibar$

Osservazione N° 3

Risulta :

$1atm = 101325\,P_a = 101325\frac{N}{m^2} = 760\,mm\,Hg \qquad 1torr = 1mm\,Hg = \frac{1}{760}atm = 133,322\,P_a$

Il termine **torr** ricorda il fisico Evangelista Torricelli .

Osservazione N° 4

Qual è l'altezza di una colonna di acqua che dà una pressione pari a quella dell'atmosfera ?

$\rho_{Hg} = 13590 \dfrac{kg}{m^3} \quad \rho_{H_2O} = 1000 \dfrac{kg}{m^3} \quad h_{Hg} = 0{,}76\, m \qquad \rho_{H_2O} \cdot h_{H_2O} \cdot g = \rho_{Hg} \cdot h_{Hg} \cdot g$

$$h_{H_2O} = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} \cdot h_{Hg} = \frac{13590}{1000} \cdot 0{,}76 = 10{,}3286\, m$$

Osservazione N° 5

La pressione atmosferica diminuisce al crescere dell' **altitudine** in gli strati d'aria diventano via più rarefatti . Una formula che ci dice con buona approssimazione come varia la pressione atmosferica con l'altitudine **h** misurata in metri è la seguente : $p = p_o \cdot {}^{-127\, h}$ ove p_o è la pressione per $h = 0$ ed **e** è la base dei logaritmi naturali .

Barometri

I **barometri** sono strumenti che servono per misurare la **pressione atmosferica** I barometri si dividono in **barometri a mercurio** e **barometri metallici** . Nel **barometro a mercurio** (di Torricelli) la pressione atmosferica viene equilibrata dalla pressione idrostatica di una colonna di mercurio contenuto in una canna di vetro (**canna barometrica**) lunga **1 metro** , chiusa all'estremità superiore ed immersa in una vaschetta che contiene anch'esso mercurio e si trova in comunicazione con l'aria . L'altezza **h** è legata alla pressione atmosferica p_{atm} dalla formula :

$$p_{atm} = \rho\, g\, h$$

Il **barometro a mercurio** più importante é quello di **Fortin** . Tutti i moderni barometri a mercurio sono basati sul modello originario di Torricelli , differendo soltanto per alcuni accorgimenti che permettono una lettura più accurata e sicura .

I **barometri metallici** misurano la pressione atmosferica equilibrandola con una molla elastica .

Manometri

I **manometri** sono strumenti che ci consentono di misurare la **pressione di un fluido** .

Concetti generali sul moto dei fluidi ideali

Definizione : Un **fluido ideale** è un fluido incomprimibile e privo di attrito interno . **Incomprimibile** significa che la massa volumica del fluido è costante in ogni suo punto .

Il moto di un fluido ideale è determinato da una differenza di pressione esistente tra due zone del fluido . Il fluido si muove dai punti dove la pressione è maggiore verso i punti nei quali la presione è minore .

In un liquido in moto , ogni sua molecola possiede una sua velocità vettoriale $\vec{v}$, definita in direzione , modulo e verso . L'insieme di tutte le velocità della massa liquida , in una determinata zona dello spazio , si chiama **campo delle velocità** .

Se la velocità delle singole particelle del liquido , pur cambiando da punto a punto e nel tempo , rimane costante in ogni singolo punto dello spazio , il moto del liquido si dice **stazionario** .

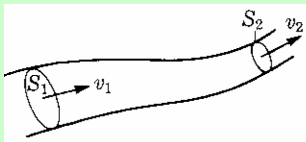
Questo significa che in ogni punto di un fluido in **moto stazionario** , la **velocità di ogni particella che via via passa per quel punto è sempre la stessa .** [1]

Una particella di fluido che si sposta dal punto **P** sino a **N** ed **R** , nel caso di **moto stazionario** , descrive una curva detta **linea di flusso** o **linea di corrente** o **filetto di fluido** .

Quindi le **linee di flusso** rappresentano realmente i percorsi descritti dalle particelle elementari del liquido . Se idealmente tracciamo nel liquido una linea chiusa e poi consideriamo le linee di flusso che passano per i suoi punti , queste formano quello che si chiama un **tubo di flusso** .

Un tubo di flusso si comporta come un vero e proprio condotto nel senso che , in assenza di vortici , il liquido che esso trasporta non si mescola con quello adiacente .

In un **moto stazionario** le **linee di flusso** rappresentano le traiettorie idealmente seguite da ogni minuscola porzione del liquido considerato . Le linee di flusso che passano per i punti di un contorno chiuso costituiscono un tubo di flusso , il quale coincide col condotto dove scorre il liquido .



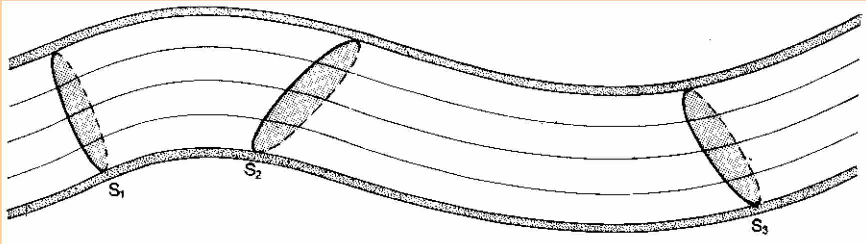
Esaminiamo ora una conseguenza molto importante delal ipotesi dell'incompressibilità del fluido considerato . Consideriamo a tale scopo una superficie S chiusa che delimita un certo Volume V all'interno del fluido .

[1] Se tutte le particelle del liquido considerato hanno **velocità angolari nulle** , il **moto è irrotazionale** . Il caso del **moto rotazionale** comprende i **moti vorticosi** . In questo paragrafo ci occuperemo di **moti stazionari** , irrotazionali di fluidi **incomprimibili e non viscosi** .

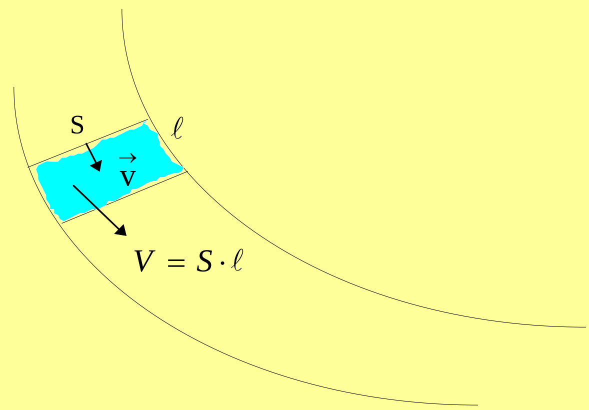
Per l'ipotesi dell'incompressibilità , se un certo volume di fluido entra in tale superficie in un certo intervallo di tempo , lo stesso volume dovrà uscirne , non potendosi avere compressioni o rarefazioni del fluido . Se dunque consideriamo un fluido in moto in un condotto e indichiamo con S_1 , S_2 , S_3 , alcune sezioni del condotto , per quanto già detto , in un stesso intervallo di tempo i volumi di fluido che transitano attraverso queste sezioni sono gli stessi , non essendovi passaggio di fluido atraverso le pareti del condotto . [2]

Il volume di fluido che nell'unità di tempo transita attraverso un'arbitraria sezione del condotto non dipende dal condotto .

Se il **moto** del liquido è **stazionario** , la **quantità di liquido** che passa attraverso una qualsiasi sezione del tubo di flusso nell'unità di tempo è **costante** .



Se nel tempo **t** passa un volume **V** di fluido attraverso una sezione normale **S** , allora si definisce **portata attraverso la sezione normale S** il seguente rapporto : $Q = \frac{V}{t}$ = flusso di volume o **portata di volume** . Nel caso particolare del regime stazionario , poiché le velocità delle sezioni non dipendono dal tempo , la **portanta è costante nel tempo** .



La **portata di un tubo di flusso** rappresenta il rapporto **Q** tra il volume di liquido che passa attraverso una sezione del tubo di flusso nel tempo t ed il tempo t stesso .

Poiché risulta $\boxed{V = S \cdot \ell}$ abbiamo : $\boxed{Q = \frac{S \cdot \ell}{t} = S \cdot v}$

S = superficie della sezione normale **v** = velocità posseduta dalle particelle che passano per la sezione S .

[2] Il termine **condotto** ha in fisica un significato più generale di quello che gli viene comunemente attribuito : sono condotti le tubazioni in generale , i canali , i fiumi , i recipienti che contengono fluidi .

La **portata** misura numericamente la quantità di fluido che passa , nell'unità di tempo , attraverso una qualsiasi sezione del condotto .

$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot \ell = \rho \cdot S \cdot \mathrm{v} \cdot t$ = **massa di fluido avente velocità v e che nel tempo t passa attraverso la sezione S del condotto**

Dalla relazione $m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot \ell = \rho \cdot S \cdot \mathrm{v} \cdot t$, dividendo ambo i membri per t , otteniamo :

$$\boxed{Q_m = \frac{m}{t} = \rho \cdot S \cdot \mathrm{v}}$$

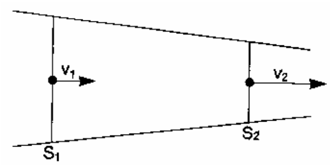
Che prende il nome di **portasta di massa** e rappresenta il rapporto tra la massa m che nel tempo t passa attraverso una qualsiasi sezione del condotto ed il tempo t .

Quando si parla semplicemente di **portata** si intende riferirsi alla **portata di volume** .

L ' equazione di continuità

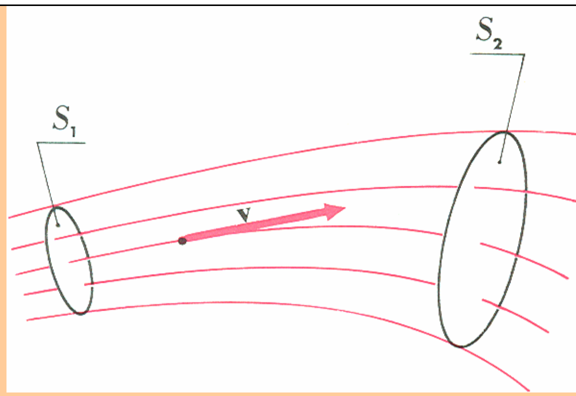
Consideriamo il moto stazionario di un liquido in un condotto e siano S_1 ed S_2 due sezioni normalidi esso . Supponiamo che le velocità siano le stesse in tutti i punti di ciascuna sezione normale alle pareti del condotto , in modo che si possa parlare di **velocità della sezione** . Se indichiamo con v_1 e v_2 le velocità delle sezioni S_1 ed S_2 , il volume del fluido che transita nell'unità di tempo attraverso S_1 può esprimersi con $\mathrm{v}_1 \cdot S_1$, mentre quello che transita nell'unità di tempo attraverso S_2 è dato da $\mathrm{v}_2 \cdot S_2$. In base alla costanza della portata tali volumi debbono essere uguali . $V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \cdot \ell_1 = S_2 \cdot \ell_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \cdot \mathrm{v}_1 \cdot t = S_2 \cdot \mathrm{v}_2 \cdot t \quad \Rightarrow$

$\mathrm{v}_1 \cdot S_1 = \mathrm{v}_2 \cdot S_2$ e , quindi , $\boxed{\dfrac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_2} = \dfrac{S_2}{S_1}}$



Questa relazione esprime il teorema di **Leonardo da Vinci** : << **In condizioni stazionarie le velocità del liquido in due punti del condotto sono inversamente proporzionali alle sezioni normali di esso passanti per quei punti .** >>

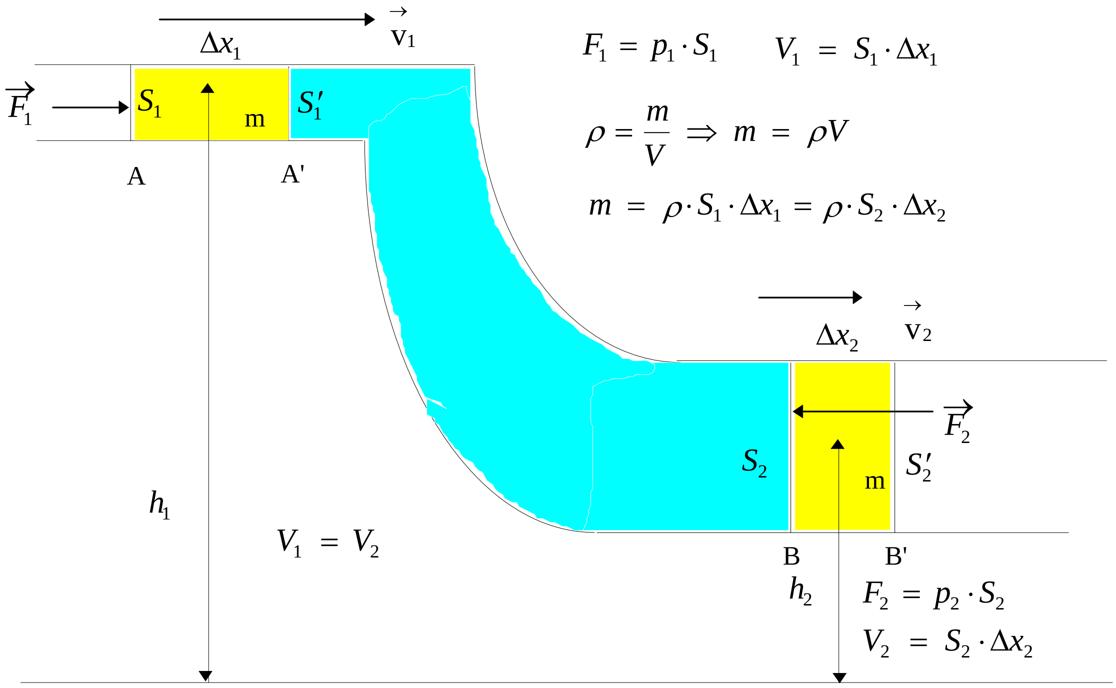
Schematizzazione di un **tubo di flusso** : sono tracciate alcune **linee di flusso** dette anche **linee di corrente** . Un **condotto** può essere considerato come un **tubo di flusso** . In regime stazionario la **portata di un condotto è costante** .



Teorema di Bernoulli

L ' **equazione di Bernoulli** è l'equazione più importante della **dinamica dei fluidi** . Essa descrive il moto attraverso un **condotto** di un **fluido ideale** , cioè di un fluido incomprimibile e privo di attrito interno , come mostrano le seguenti figure .

L'applicazione del principio di conservazione dell'energia al moto dei liquidi perfetti porta alla scoperta di una legge che costituisce il fondamento dell'idrodinamica : il **teorema di Bernoulle** .



$F_1 = p_1 \cdot S_1 \qquad V_1 = S_1 \cdot \Delta x_1$

$\rho = \dfrac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V$

$m = \rho \cdot S_1 \cdot \Delta x_1 = \rho \cdot S_2 \cdot \Delta x_2$

$F_2 = p_2 \cdot S_2$

$V_2 = S_2 \cdot \Delta x_2$

Una porzione di liquido ideale (prima porzione in giallo , seconda porzione in azzurro) si muove in un tubo di flusso da sinistra verso destra passando dalla configurazione AB alla configurazione A ' B '

Supponiamo che il fluido scorra in discesa [3] e che il condotto aumenti la sua sezione al diminuire della sua quota . Supponiamo che il liquido scorra da sinistra verso destra in un lungo condotto in cui sono individuati due **tratti orizzontali** di diversa sezione , cioè consideriamo un tubo di flusso all'interno di un fluido ideale e muoventesi in **regime stazionario** .

All'interno di questo tubo di flusso consideriamo la parte limitata dalle due sezioni S_1 ed S_2 , poste rispettivamente ai livelli h_1 e h_2 . Supponiamo che S_1 ed S_2 si trovino in due tratti orizzontali del tubo di flusso . Nel seguito considereremo il moto del volume di fluido che si trova tra le due sezioni S_1 ed S_2 .

[3] Potrebbe scorrere in salita , i risultati sono gli stessi

Il **teorema di Bernoulli** esprime il principio di conservazione dell'energia applicato ad un fluido ideale in moto stazionario . Il moto di una porzione limitata di fluido è determinato da tre fattori :

1) la **forza peso** che agisce sulla porzione stessa

2) la **forza di pressione** $\vec{F}_1$ che viene esercitata su di essa da quella parte di fluido che si trova alla sua sinistra

3) la **forza di pressione** $\vec{F}_2$ esercitata da quella parte di fluido che si trova alla sua destra .

Operando con i fluidi è conveniente non trattare direttamente con le forze ma con le pressioni che vengono provocate da esse . $p_1 = \dfrac{F_1}{S_1}$ e $p_2 = \dfrac{F_2}{S_2}$

sono pressioni esercitate dal liquido rispettivamente nelle sezioni S_1 ed S_2 .

Ad un certo istante considero il volume di liquido compreso tra le sezioni S_1 ed S_2 . Dopo Δt secondi lo stesso volume di liquido si è spostato occupando il volume compreso tra le sezioni $S_1' = S_1$ ed $S_2' = S_2$. A causa della ipotizzata incomprimibilità del liquido , quanto detto equivale ad affermare che la massa di liquido

$$m = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot S_1 \cdot \Delta x_1 = \rho \cdot V_2 = \rho \cdot S_2 \cdot \Delta x_2$$

è passata dalla quota h_1 dove ha velocità $\vec{v}_1$ ed energia potenziale $U_1 = mgh_1$ alla quota h_2 dove ha velocità $\vec{v}_2$ ed energia potenziale $U_2 = mgh_2$.

In S_1 agisce la forza di pressione $F_1 = p_1 S_1$ la quale è dovuta alla pressione p_1 del liquido che si trova alla sua sinistra e provoca il moto del liquido . In S_2 agisce la forza di pressione $F_2 = p_2 S_2$ che è dovuta alla pressione p_2 del liquido che si trova alla sua destra e crea una resistenza al moto del liquido . Applicando alla massa **m** il **teorema della variazione dell'energia cinetica** [20 c] possiamo scrivere : $L\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P}\right) = L\left(\vec{F}_1\right) + L\left(\vec{F}_2\right) + L\left(\vec{P}\right) = K_f - K_i$ **[D]**

Il lavoro compiuto dalla forza di pressione $F_1 = p_1 S_1$ agente in S_1 è :

$$L\left(\vec{F}_1\right) = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot S_1 \cdot \Delta x_1$$

ed è positivo in quanto compiuto sulla massa **m** da una forza $\vec{F}_1$ che ha lo stesso verso del moto . Il lavoro compiuto dalla forza di pressione $F_2 = p_2 S_2$ agente in S_2 è :

$L\left(\vec{F}_2\right) = -F_2 \cdot \Delta x_2 = - p_2 \cdot S_2 \cdot \Delta x_2$ ed è negativo in quanto tale lavoro è compiuto da una forza $\vec{F}_2$ che si oppone al movimento della massa di liquido ideale .

[20 c] Il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sulla massa m è uguale alla variazione della sua energia cinetica

Poiché la massa **m** passa dalla quota h_1 , dove ha energia potenziale $m g h_1$, alla quota h_2 , dove ha energia potenziale $m g h_2$, il suo peso compie il seguente lavoro :

$$L(\vec{P}) = U_1 - U_2 = m g h_1 - m g h_2 = m g (h_1 - h_2)$$

L'equazione [D] diventa : $L(\vec{F}_1) + L(\vec{F}_2) + L(\vec{P}) = K_f - K_i$

$$p_1 \cdot S_1 \cdot \Delta x_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot \Delta x_2 + m g h_1 - m g h_2 = K_2 - K_1 \qquad \textbf{[G]}$$

Ricordando che per un **fluido ideale in moto stazionario** vale l ' **equazione di continuità**

$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$ e tenendo presente che $v_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t}$, $v_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta t}$ possiamo scrivere :

$$S_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = S_2 \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \qquad S_1 \cdot \Delta x_1 = S_2 \cdot \Delta x_2 = V_1 = V_2 = \frac{m}{\rho} \quad (21)$$

Sostituendo nell'equazione [G] otteniamo :

$$p_1 \cdot \frac{m}{\rho} - p_2 \cdot \frac{m}{\rho} + mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad \frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

$$\boxed{p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2} \qquad \textbf{[M]}$$

Poiché gli indici **1** e **2** si riferiscono a due sezioni qualsiasi del **tubo di flusso** , possiamo eliminarli e scrivere semplicemente : $\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}}$ **[N]**

Questa è l ' **equazione di Bernoulli** per il moto stazionario di un fluido ideale . Tutti e tre i termini che vi figurano hanno le dimensioni di una **energia per unità di volume** .

Possiamo perciò considerarla come la formulazione del **principio di conservazione dell'energia** applicato al **moto stazionario** dei **fluidi ideali** . Essa stabilisce che nel moto lungo un tubo di flusso di un fluido ideale la **pressione** , la **velocità** e l ' **altezza** adattano i loro valori in modo da mantenere costante l'energia totale del fluido .

In termini più esplicativi l'equazione [N] può essere così formulata :

In un liquido ideale che scorre con moto stazionario , la somma dell'energia cinetica per unità di volume ($\frac{1}{2}\rho v^2$) , dell'energia potenziale per unità di volume ($\rho g h$) e della pressione p ha un valore costante per tutti i punti di un sottile tubo di flusso .

---

(21) Questa uguaglianza ci conferma l'intuizione che la quantità di liquido che nel tempo Δt entra nel condotto attraverso la sezione S_1 è uguale alla quantità di liquido che nello stesso tempo esce dal condotto attraverso la sezione S_2

Il termine $p_c = \frac{1}{2}\rho v^2$, che ha le dimensioni di una **pressione** , è detto **pressione di arresto** (o **pressione cinetica**) , dipende dalla velocità del liquido e rappresenta la **densità di energia cinetica** (energia cinetica per unità di volume) .

Il termine $p_g = \rho g h$, che ha le dimensioni di una pressione , è detto **pressione di gravità** (o **pressione idrostatica**) , dipende dall'altezza del liquido e rappresenta la **densità di energia potenziale** (energia potenziale per unità di volume) .

L ' **equazione di Bernoulli** può essere scritta così : $p + p_c + p_g = \text{costante}$

possiamo pertanto affermare che **in ogni punto di un fluido ideale che si muove in regime stazionario , è costante la somma della pressione esterna p , della pressione idrostatica** p_g **e della pressione di arresto** p_c **.**

Dividendo ambo i membri della [N] per ρg otteniamo : $\boxed{\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{costante}}$ **[Z]**

che rappresenta un altro modo di esprimere l'equazione di Bernoulle .

$\frac{v^2}{2g}$ = **altezza di arresto o altezza cinetica** = altezza da cui il liquido dovrebbe cadere nel vuoto per acquistare la velocità v

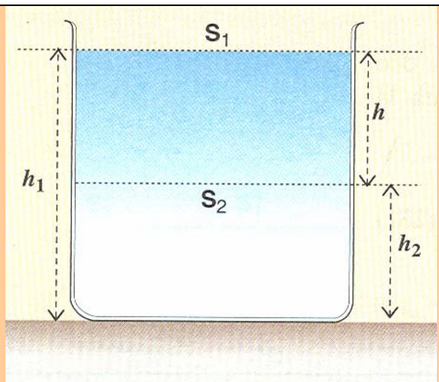
$\frac{p}{\rho g}$ = **altezza piezometrica** = altezza che dovrebbe avere una colonna del liquido considerato per esercitare la pressione **p**

h si chiama **altezza geodetica** o **altezza geometrica**

In un condotto percorso da un liquido perfetto si mantiene costante in tutti i punti la somma dell'altezza di arresto $\frac{v^2}{2g}$ **, dell'altezza piezometrica** $\frac{p}{\rho g}$ **e dell'altezza geometrica h .**

La legge di Stevino è un caso particolare dell'equazione di Bernoulli .

Infatti se il condotto è costituito da un recipiente contenente del liquido in equilibrio statico (e quindi anche in quiete , e questo ci consente di scrivere $v_1 = v_2$) , considerando la superficie libera come sezione S_1 ed una qualsiasi altra sezione S_2 , la [M] assume la seguente forma :



$p_2 + \rho g h_2 = p_1 + \rho g h_1$ ovvero : $p_2 = p_1 + \rho g (h_1 - h_2) = p_1 + \rho g h = p_{atm} + \rho g h$

in quanto la pressione p_1 coincide con la pressione atmosferica p_{atm} . Il termine $\rho g h$ rappresenta la **pressione idrostatica** che il liquido contenuto nel recipiente esercita sul fondo del recipiente .

Effetto Venturi

Come la statica delle particelle materiali è un caso particolare della dinamica delle particelle materiali , anche la statica dei fluidi è un caso particolare della dinamica dei fluidi . Non deve sorprendere che la legge di variazione della pressione con l'altezza (**legge di Stevino**) sia contenuta come caso particolare della dinamica dei fluidi . Consideriamo un fluido in quiete $v_1 = v_2 = 0$

$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 \quad p_2 = p_1 + \rho g (h_1 - h_2) \quad p_2 = p_1 + \rho g h$ **Legge di Stevino**

Dimostriamo l ' **effetto Venturi**

La pressione di una corrente fluida aumenta col diminuire della velocità . Tale legge è nota come **effetto Venturi** o **paradosso idrodinamico** , in quanto si potrebbe pensare che la pressione debba aumentare in corrispondenza delle strozzature dove la velocità aumenta .

$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$ rappresenta l ' **equazione di Bernoulli**

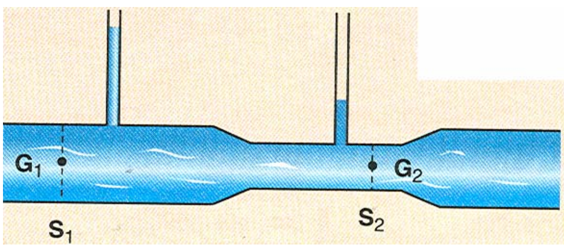
orizzontale dove la quota **h** è sempre la stessa . L'equazione di Bernoulle diventa :

$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}}$ in quanto è costante il termine $\rho g h$.

Questo ci consente di affermare che la pressione in un tubo di flusso diminuisce in quei punti nei quali la velocità aumenta (**sezione minore**) e viceversa . Infatti se **v** aumenta anche $\frac{1}{2}\rho v^2$ aumenta e quindi la quantità $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ rimane costante solo se **p** diminuisce .

Tubo di Venturi

I punti G_1 e G_2 si trovano alla stessa quota rispetto ad uno stesso piano orizzontale di riferimento ($h_1 = h_2$) .



$h_1 = h_2$ e $p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g h_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$ ci consentono di scrivere : $p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$ e

quindi $p + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 = \text{costante}$ come affermato in precedenza .

Teorema di Torricelli

Il **teorema di Bernoulli** trova una immediata applicazione nel calcolo della **velocità** con cui un liquido fuoriesce da un piccolo foro praticato in un recipiente .

Il liquido fluisce attraverso il piccolo foro di sezione S_2 con una velocità $v = v_2$ che vogliamo calcolare supponendo che il livello del liquido nel recipiente sia mantenuto ad un'altezza $h = h_1 - h_2$ rispetto al foro . Confermando l'ipotesi che il liquido sia non viscoso , incomprimibile ed in regime stazionario , possiamo applicare l'equazione di Bernoulle alle sezioni

S_1 e S_2 : $\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\mathrm{v}^2}{2g}+h_2=\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\mathrm{v}_1^2}{2g}+h_1$ $\frac{p_{atm}}{\rho g}+\frac{\mathrm{v}^2}{2g}=\frac{p_{atm}}{\rho g}+\frac{\mathrm{v}_1^2}{2g}+h_1-h_2$ **[$]**

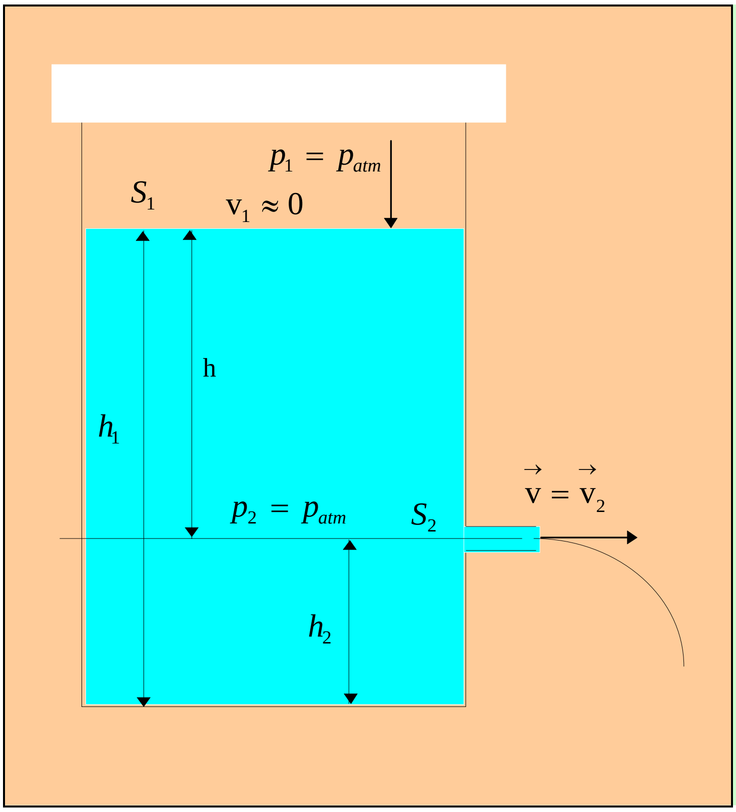
dove v_1 è la velocità con cui dovrebbe muoversi la superficie S_1 , $p_2 = p_1 = p_{atm}$ in quanto si ritiene trascurabile la pressione idrostatica $\rho g h$. $p_2=p_1+\rho g h = p_{atm}+\rho g h = p_{atm}$

Se la sezione S_1 del recipiente è molto maggiore della sezione S_2 del foro , la velocità v_1 con cui il livello superiore del liquido scende è trascurabile , come si deduce applicando l'equazione di continuità dei fluidi ideali . $\mathrm{v}_1 S_1=\mathrm{v}_2 S_2$ $\mathrm{v}_2=\mathrm{v}=\frac{S_1}{S_2}\cdot \mathrm{v}_1\approx 0$ se $S_1 >> S_2$

L'equazione [$] , sotto queste ipotesi , assume la forma : $\frac{\mathrm{v}^2}{2g}=h_1-h_2=h$

$$\boxed{\mathrm{v}=\sqrt{2gh}}$$

che esprime il **teorema di Torricelli** ,secondo il quale **la velocità di efflusso di un liquido da un piccolo foro è indipendente dalla sua massa volumica ed è la stessa di quella che acquista un grave in caduta libera dopo un percorso uguale alla distanza del foro dalla superficie libera del liquido .**



Legge di Torricelli [39]

Sotto questo nome va la relazione che lega la velocità di efflusso di un liquido da uno stretto foro praticato in un recipiente pieno di liquido , quando il liquido è soggetto all'azione del proprio peso .

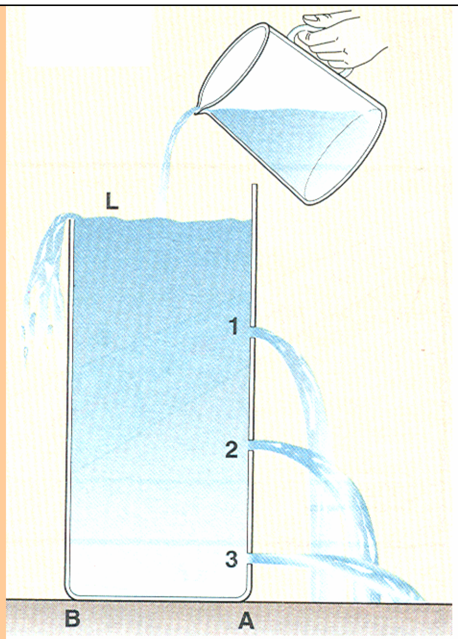
Tale relazione deriva , come caso particolare , dall'equazione di Bernoulli .

La **velocità di efflusso** è uguale a quella che si avrebbe se il liquido cadesse liberamente nel vuoto dall'altezza h .

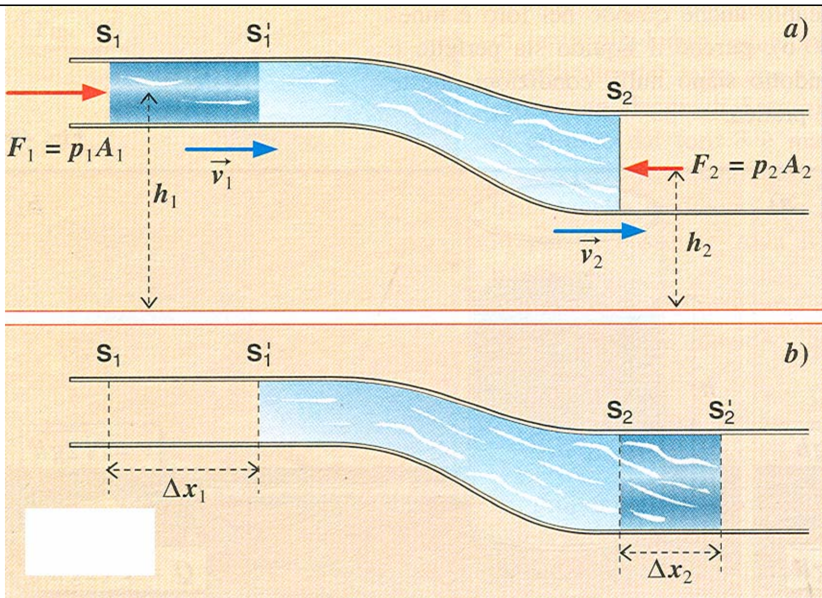
ρgh Trascurabile rispetto a p_{atm} $\Rightarrow$

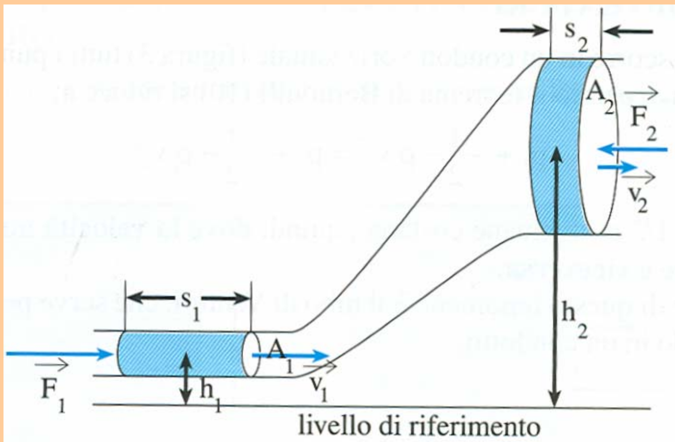
$$p_2 = p_1 = p_{atm}$$

Sulla parte A vengono fatti tre fori sottili uguali tra loro , a vari livelli . La parete B è un poco più bassa delle altre , in modo che , versando continuamente acqua nel vaso , il **livello L della superficie libera rimanga immutato** .Si osserva che la gittata del liquido è tanto più lunga , quanto più in basso si trova il foro .Ciò è giustificato dal fatto che la **pressione idrostatica** aumenta con la profondità h del foro (**legge di Stevino**) e quindi , la **velocità di efflusso dal foro 3 è maggiore di quella dal foro 1** .

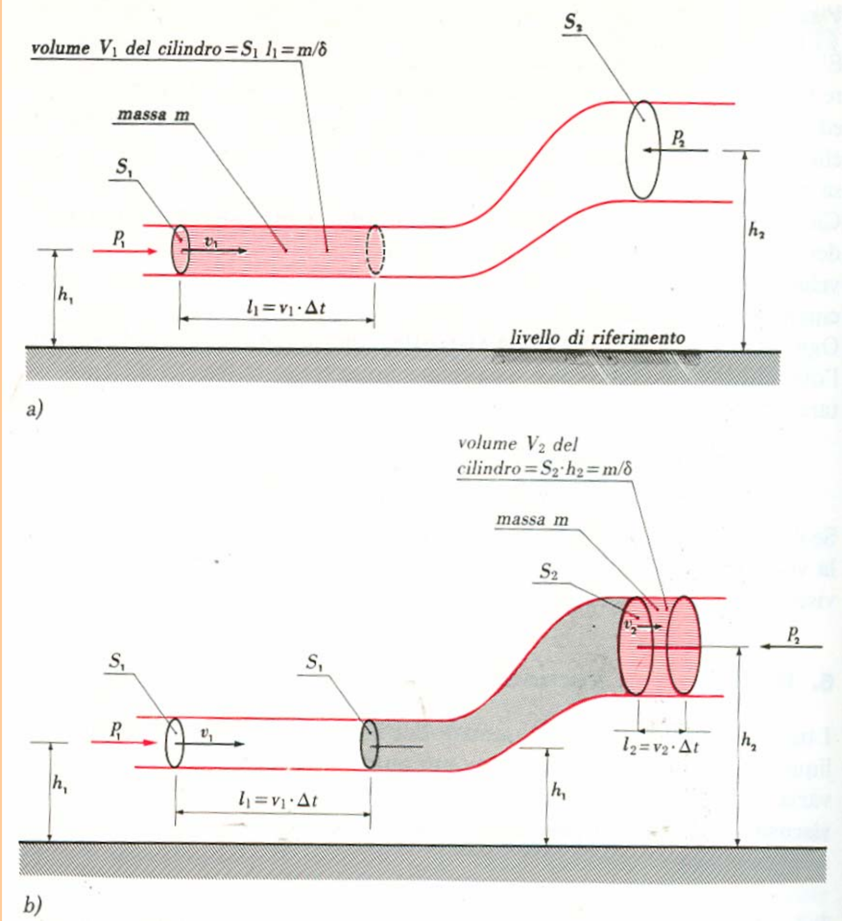


[39] Evangelista Torricelli (1608-1647) , nato a Faenza (Ravenna) , Matematico e Fisico , allievo di Galileo , sostenne la possibilità del vuoto in natura . Inventò (1644) il **barometro a mercurio** ; studiò la cicloide ed il moto dei proietti .

In un condotto a sezione variabile scorre , in regime stazionario , un liquido ideale di massa volumica ρ . La massa $m = \rho V$ di liquido compresa tra le sezioni S_1 ed S_2 avenza verso destra e , dopo un certo intervallo di tempo Δt , viene a trovarsi tra le sezioni S_1' ed S_2' .	

Un condotto è attraversato da un fluido ideale in moto stazionario . A_1 e A_2 sono due sezioni verticali con i centri posti alle altezze h_1 , h_2 rispetto ad uno stesso piano orizzontale , v_1 e v_2 sono le velocità dei fluido quando passa , rispettivamente , per A_1 e A_2 , $p_1 = \frac{F_1}{A_1}$ e $p_2 = \frac{F_2}{A_2}$ sono le pressioni corrispondenti .	

Scrisse : **Trattato del moto** (1644) , **Lezioni accademiche** .Celebre il teorema di idrodinamica che porta il suo nome .

La configurazione di una **zona** di un **tubo di flusso** di un fluido in **moto stazionario** prima **[figura a)]** e dopo **[figura b)]** l'intervallo di tempo Δt . La differenza consiste nel fatto che **una stessa massa** $m = \rho V$ di acqua è passata dalla **quota** h_1 alla **quota** h_2 .	

Meccanica dei fluidi

$p = \frac{F}{S}$ $\quad 1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2}$

$\boxed{1\,atm = 1{,}01325 \cdot 10^5\,Pa}$ $\boxed{1\,bar = 10^5\,Pa}$

$\boxed{1\,Pa = 9{,}86923 \cdot 10^{-6}\,atm}$ $\boxed{1\,Pa = 10^{-5}\,bar}$

$\boxed{1\,atm = 1{,}033\,\frac{kg_p}{cm^2}}$ $\boxed{1\,torr = 1\,mm_{Hg} = 133{,}3223\,Pa = \frac{1}{760}\,atm}$

$\boxed{1\,Pa = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\,torr}$

$p_B = p_A + \rho g h = p_o + \gamma \cdot h$ { legge di Stevino

$\boxed{\rho g h = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} =}$ pressione idrostatica

$\boxed{P = m \cdot g = \gamma \cdot V = \rho \cdot g \cdot V =}$ peso di un corpo

$\rho g h = \gamma \cdot h = \delta h$ liquidi in vasi comunicanti

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$ Torchio idraulico

$S_a = \rho_\ell \cdot V \cdot g = m_\ell g = \gamma_\ell V$ = spinta di Archimede

$F = |P - S_A| = |(\rho_c - \rho_\ell) \cdot V g| = |(\gamma_c - \gamma_\ell) \cdot V|$ { Forza che agisce su un corpo immerso in un fluido

$\frac{\rho_c}{\rho_\ell} = \frac{\gamma_c}{\gamma_\ell} = \frac{x}{h}$ = corpo che galleggia

h = altezza del corpo immerso $\quad x$ = parte immersa

$S_a = \rho_\ell V_i \cdot g$ = spinta di Archimede $\quad V_i$ = volume immerso

$P = mg = \rho V g$ = peso del corpo che galleggia

$S_a = P$

$Q_v = \frac{V}{t} = \frac{m}{\rho \cdot t} = S \cdot v =$ portata di volume

$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot l = \rho \cdot S \cdot v \cdot t = \rho \cdot t \cdot Q_v =$

= massa di fluido che nel tempo t attraversa la sezione S del condotto con velocità v =

= massa contenuta nel volume $V = S \cdot l$ con

$v = \frac{l}{t}$

$Q = S \cdot v =$ costante $\Longleftrightarrow S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot S_2$ = equazione di continuità

$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 =$ costante

$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h =$ costante

equazione di Bernoulle

$\Updownarrow$

$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$

Per un condotto orizzontale abbiamo

$p + \frac{1}{2} \rho v^2 =$ costante $\Longleftrightarrow \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} =$ costante Effetto Venturi

$v = \sqrt{2gh}$ = teorema di Torricelli = velocità di efflusso da un piccolo foro profondo h metri

1 litro = 1 l = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3 = 0,001 m^3

$Q_m = \frac{m}{t} = \rho \cdot S \cdot v = \rho \cdot Q_v =$ portata di massa

Fluidi reali e legge di Poiseuille

Nel modello di fluido fin qui trattato abbiamo trascurato completamente la **viscosità** .

La **viscosità di un fluido** è la grandezza fisica che descrive il suo attrito interno . Infatti nei fluidi si manifestano delle forze di attrito che ostacolano lo scorrimento di uno strato sull'altro .

Per mantenere il moto con velocità costante , in un condotto orizzontale , di un fluido perfetto non è necessaria alcuna forza né , quindi , alcuna differenza di pressione agli estremi del condotto . Se , nella legge di Bernoulli poniamo $h_A = h_B$, $v_A = v_B$ otteniamo : $p_A = p_B$.

E' questa una conseguenza delle leggi della dinamica e della ipotesi di assenza di viscosità nel fluido . Si tratta di una schematizzazione analoga a quella introdotta nel moto di un corpo in assenza di attrito . Con un fluido reale , a causa degli attriti interni , si ha sempre una graduale diminuzione nel verso del moto della pressione , denominata **perdita di carico** . Una prima conseguenza dell'esistenza della perdita di carico e che per mantenere un liquido in moto in un condotto è necessaria una differenza di pressione tra le due estremità del condotto .

Nel 1884 Poiseuille fece le prime determinazioni accurate del moto stazionario di un liquido in un tubo , e ricavò la legge che regola la **portata in volume** . Egli trovò che è ragionevole affermare che la **portata di volume** Q_V dipende : **1)** dal **coefficiente di viscosità** η del liquido **2)** dal **raggio** r del condotto **3)** dalla **differenza di pressione** esistente tra le estremità del condotto **4)** dalla **lunghezza** ℓ del condotto .

Se il condotto è un cilindro orizzontale di raggio r e lunghezza ℓ ed il moto del liquido è piuttosto lento , la legge di Poiseuille è espressa dalla seguente formula :

$$\boxed{Q_V = \frac{V}{t} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta \ell}}$$

Dove η rappresenta il **coefficiente di viscosità** del liquido .

<< **In regime di moto stazionario in un condotto sottile , la portata in volume di un liquido è inversamente proporzionale alla lunghezza ℓ del condotto ed al coefficiente di viscosità η del liquido ed è direttamente proporzionale alla quarta potenza del raggio r del condotto ed alla differenza di pressione esistente agli estremi del condotto .** >>

Nel tempo t , il volume del liquido che fluisce ci viene fornito dalla seguente formula :

$$\boxed{V = Q_V \cdot t = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta \ell} \cdot t}$$

mentre la massa del volume di liquido fuoruscito ci viene fornita dalla formula :

$$\boxed{m = \rho V = \rho \cdot Q_V \cdot t = \rho \cdot \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta \ell} \cdot t}$$

Moto stazionario

E' il moto di un fluido le cui proprietà non mutano col trascorrere del tempo , nel senso che le particelle del fluido quando passano per un determinato punto P hanno sempre la stessa velocità vettoriale , anche se variabile da punto a punto .

Quindi il moto di un fluido avviene in regime di **flusso stazionario** quando tutte le particelle del fluido che passano per una stessa posizione P seguono la stessa traiettoria (**linea di corrente**) con la stessa velocità vettoriale .

Definizione generale di moto stazionario di un fluido

In ogni punto di un liquido in movimento in un condotto e ad ogni istante t possiamo associare la velocità vettoriale $\vec{v}(x, y, z, t)$ che dipende dalla posizione P occupata dalla particella e dal tempo t .

Questo significa che abbiamo definito il campo vettoriale $\vec{v}(x, y, z, t)$.

Si dice che il moto del liquido è stazionario se tale campo vettoriale delle velocità non varia nel tempo .

Ciò significa che misure di velocità , eseguite in tempi diversi nello stesso punto danno sempre lo stesso risultato . Questo non implica che una determinata particella di liquido , nel suo moto debba avere sempre la stessa velocità . In generale la sua velocità varierà da punto a punto della sua traiettoria . In un moto stazionario accade soltanto che tutte le diverse particelle di liquido , che successivamente passano per lo stesso punto P hanno sempre la stessa velocità vettoriale in P .

Caduta di un corpo sferico in un mezzo viscoso : formula di Stokes

Un corpo di forma sferica e raggio r che si muove lentamente in un liquido di viscosità η e velocità $\vec{v}$ è soggetto ad una forza $\vec{R}$, detta **resistenza del mezzo** , che ha : 1) la direzione della velocità $\vec{v}$ 2) verso opposto a $\vec{v}$ 3) modulo dato da $R = 6\pi\eta r \mathrm{v}$.

Tale relazione è nota come **legge di Stokes**.

Vogliamo studiare il moto di un corpo sferico di raggio r e densità δ_c e massa m che cade verticalmente in un fluido di viscosità η e densità δ_f .

La sfera di massa m , raggio r e densità δ_c immersa in un fluido di viscosità η è soggetta all'azione di tre forze :

1) il suo peso $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ diretto verso il basso 2) la spinta di Archimede $\vec{S}_A$ diretta verso l'alto 3) la resistenza del mezzo $\vec{R}$ diretta verso il basso .

La legge fondamentale della dinamica ci consente di scrivere la seguente relazione vettoriale : $\boxed{\vec{F} = \vec{P} + \vec{S}_A + \vec{R}}$ dove $\vec{F}$ è il risultante di tutte le forze che agiscono sulla sfera .

Passando dalla relazione vettoriale a quella scalare possiamo scrivere : $F = P - S_A - R$

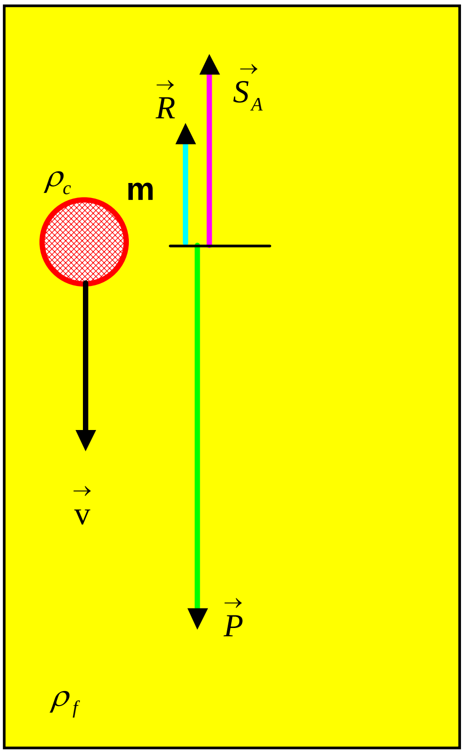
Il peso della sfera e la spinta di Archimede hanno moduli costanti , mentre il modulo R della resistenza del mezzo cresce con la velocità v della sfera .

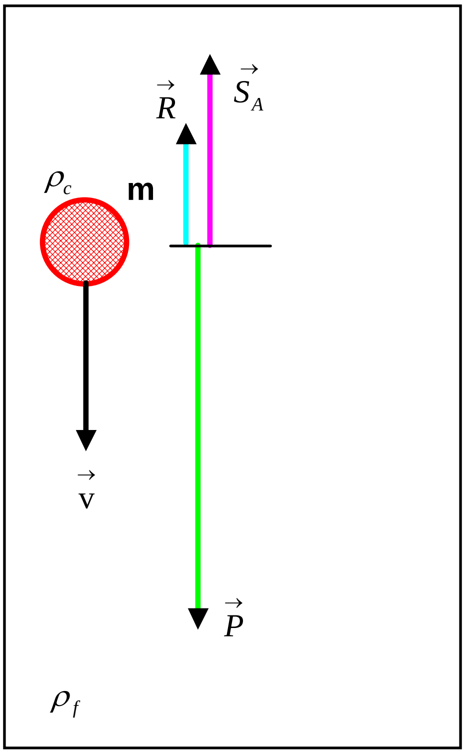
Inizialmente il moto della sfera è naturalmente accelerato . Tuttavia dopo un tempo relativamente breve , quando risulta $P = R + S_A$, sulla sfera non agisce alcuna forza e la sfera prosegue il suo cammino muovendosi di moto rettilineo uniforme . Si dice anche che la sfera ha raggiunto la sua **velocità di regime** . Calcoliamo il valore di questa velocità .

Ricordando che il volume di una sfera vale $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e che risulta $F = 0$ quando la sfera raggiunge la velocità di regime possiamo scrivere : $R = P - S_A$, $6\pi\eta r \mathrm{v} = V \cdot \rho_c \cdot g - V \cdot \rho_f \cdot g$

$$6\pi\eta r \mathrm{v} = V \cdot g\left(\rho_c - \rho_f\right) \qquad 6\pi\eta r \mathrm{v} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g\left(\rho_c - \rho_f\right) \qquad 3\eta \mathrm{v} = \frac{2}{3} r^2 \cdot g\left(\rho_c - \rho_f\right)$$

$$\boxed{\mathrm{v} = \frac{2}{9}\frac{r^2}{\eta} \cdot g\left(\rho_c - \rho_f\right)}$$


$\vec{S}_A$
$\vec{R}$
ρ_c
m
$\vec{v}$
$\vec{P}$
ρ_f


$\vec{S}_A$
$\vec{R}$
ρ_c
m
$\vec{v}$
$\vec{P}$
ρ_f