Onde elastiche

Il fenomeno del movimento ondulatorio si presenta in quasi tutti i campi della fisica. Di particolare importanza sono le onde elastiche e le onde elettromagnetiche. Le onde elastiche sono generate dallo spostamento di una porzione del mezzo elastico dalla posizione occupata in un certo istante, con successiva oscillazione attorno ad una posizione di equilibrio. A causa delle proprietà elastiche del mezzo, la perturbazione si trasmette da uno strato al successivo. L'onda è una perturbazione che si propaga ed è sempre originata da una vibrazione.

La propagazione di qualsiasi onda, qualunque sia la sua natura, non implica mai trasporto di materia ma implica soltanto trasporto di energia. Le onde elastiche, dette anche onde meccaniche, sono prodotte dalla vibrazione di un oggetto in un mezzo meccanico. Le onde elastiche sono caratterizzate dal trasporto di energia nel mezzo mediante il moto costante e regolare di una perturbazione che ha sede nel mezzo, senza alcuna corrispondente traslazione del mezzo stesso. E' necessario che ci sia della materia per la trasmissione delle onde elastiche. Non è necessario tale mezzo per la trasmissione delle onde elettromagnetiche. Le proprietà del mezzo che determinano la velocità di propagazione di un'onda elastica sono la sua inerzia e la sua elasticità. Tutti i mezzi materiali, per esempio aria, acqua, acciaio, sono dotati di queste proprietà e possono trasmettere onde elastiche. E' l'elasticità che genera in ogni punto del mezzo, spostato dalla sua posizione di equilibrio, le forze di richiamo; è l'‘inerzia che ci dice come questa parte del mezzo spostata risponderà alle forze di richiamo. Entrambi questi fattori determinano la velocità di propagazione dell'onda.

Le onde elettromagnetiche sono perturbazioni provocate non dalla vibrazione di un mezzo materiale, ma da un campo elettrico variabile nel tempo, che si propagano anche senza la presenza di un mezzo materiale. Le grandezze utilizzate per studiare la propagazione delle onde sono l'ampiezza dell'onda, la lunghezza dell'onda, la frequenza dell'onda.

Le onde si possono distinguere:

01) Rispetto alla natura: si possono avere le onde gravitazionali, le onde elastiche come le onde sonore, le onde elettromagnetiche come le onde luminose, le onde hertziane della radio.

O2) Rispetto alla forma: esse possono essere lineari, circolari, sferiche

03) Rispetto al modo di oscillare: esse possono essere longitudinali e trasversali. Nelle onde longitudinali le oscillazioni dei singoli punti avvengono lungo la direzione del raggio di propagazione, nelle onde trasversali invece risultano perpendicolari alla direzione di propagazione. La polarizzazione di un'onda: la polarizzazione di un'onda è una proprietà caratteristica delle onde trasversali che si realizza quando tutti i punti vibrano in un unico piano.

Produzione di un'onda elastica

Noi ci occupiamo di onde elastiche che per la loro propagazione necessitano di un mezzo elastico. Queste onde consistono nella propagazione di vibrazioni meccaniche del mezzo considerato e vengono chiamate onde meccaniche. Per generare un'onda meccanica è necessario produrre una perturbazione di natura fisica.

Ogni causa in grado di generare un'onda elastica rappresenta la sorgente dell'onda.

Consideriamo un mezzo elastico, omogeneo, isotropo, indefinito. Un punto **O** del mezzo sia costretto ad eseguire lungo una retta **s** oscillazioni che per semplicità supponiamo armoniche (cioè supponiamo che il punto O si muova di moto armonico lungo la retta s), cioè lo spostamento s dalla posizione di equilibrio è la funzione del tempo del tipo: $s = s_o \cdot \sin\omega t$ [1] dove:

s_o = ampiezza dell'oscillazione, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi f$ = pulsazione

T = periodo, $\nu = f$ = frequenza, $\varphi_o = 0$ = fase iniziale.

La forza che determina il moto armonico del punto materiale O è una forza elastica del tipo $\vec{F} = -k\vec{s}$ La legge fondamentale della dinamica vuole che sia: $\vec{F} = m\vec{a}$

Deduciamo che: $\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{s} = -\omega^2 \cdot \vec{s}$ con $\omega^2 = \frac{k}{m}$ k = costante elastica

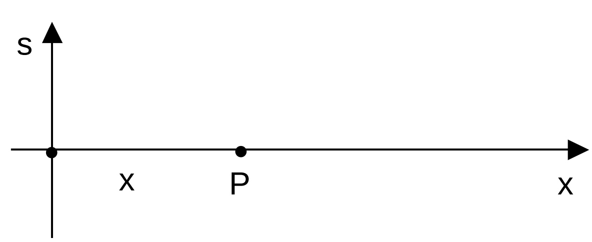
m = massa del punto materiale oscillante.

Il punto **O** oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio muovendosi di moto armonico semplice. Risulta:

$s = s_o \cdot \sin\omega t$ = legge oraria del moto

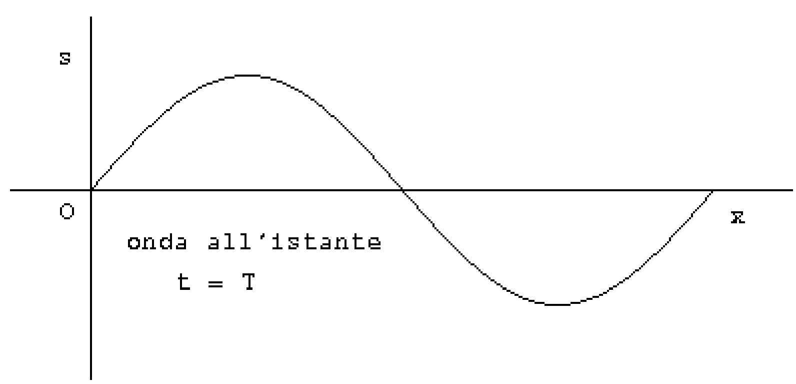
$v = s_o \cdot \omega \cdot \cos\omega t$ = velocità scalare del punto materiale O

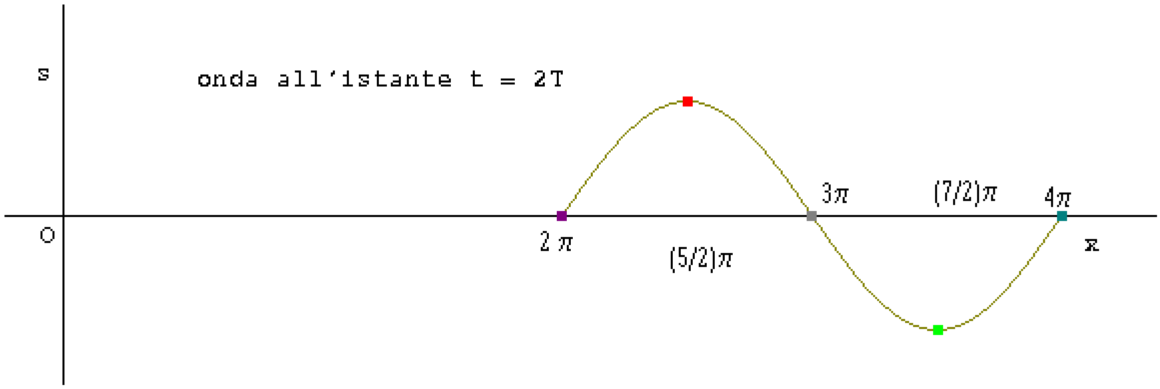
$a = -s_o \cdot \omega^2 \cdot \sin\omega t = -\omega^2 \cdot s$ = accelerazione scalare del punto materiale O



La perturbazione prodotta nel punto **O** (che consiste nel moto armonico semplice del punto **O** lungo la retta s) tende a trasmettersi a tutti i punti materiali del mezzo elastico. Ma dire che la perturbazione (**oscillazione**) si propaga significa affermare che ciascun punto P del mezzo elastico ripete il movimento del punto **O** con un ritardo di tempo **t** che è proporzionale alla distanza $OP = x$. Pertanto: **onda elastica (o onda meccanica) è una perturbazione (consistente in un moto oscillatorio) che ha origine in un punto di un mezzo materiale omogeneo, elastico, illimitato ed isotropo e che si trasmette a tutti i punti del mezzo con legge identica ma con un ritardo di tempo che dipende dalla loro distanza rispetto al punto dove ha avuto origine il moto oscillatorio**.

Il punto materiale dal quale ha origine l'onda viene detto centro di oscillazione o sorgente dell'onda. Ad ogni istante un'onda è costituita dal luogo geometrico delle posizioni occupate da tutti i punti materiali del mezzo in quell'istante. Essa può essere individuata se conosciamo gli spostamenti di tutti i punti dalle rispettive posizioni di equilibrio.

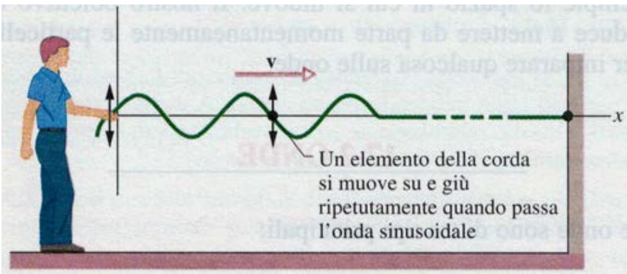




Naturalmente, al variare del tempo, tale luogo geometrico (**onda**) cambierà posizione muovendosi nel mezzo materiale con una velocità dipendente dalle caratteristiche elastiche e meccaniche del mezzo. Se **t** è il tempo necessario all'oscillazione di propagarsi dal punto O al punto P e se OP è la direzione di propagazione dell'onda si definisce velocità di propagazione dell'onda il seguente rapporto: $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}$ **[2]** ($\mathbf{v}$ è costante in ogni mezzo elastico)

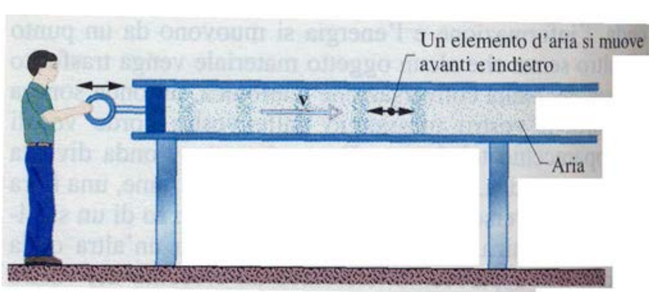
In un mezzo omogeneo la velocità di propagazione di un'onda elastica è costante. Essa dipende soltanto dalle caratteristiche fisiche del mezzo.

- Quando la sorgente **O** compie un'oscillazione completa impiega **T** secondi; l'onda ha percorso una distanza λ detta lunghezza d'onda. $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} = \mathbf{costante} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{\lambda}{\mathbf{T}} \Rightarrow$ $\lambda = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \Rightarrow \lambda \cdot \nu = \mathbf{v}$ $(\lambda \cdot \mathbf{f} = \mathbf{v})$ La lunghezza d'onda λ è una caratteristica del moto ondoso e dipende dal mezzo tramite la velocità v e dalla sorgente tramite il periodo T.
- l'onda dicesi trasversale se **O** vibra perpendicolarmente alla direzione di propagazione. In questo caso i movimenti trasmessi dall'onda alle particelle materiali sono dirette perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda stessa. Per esempio, quando una corda tesa orizzontalmente viene posta in oscillazione in su ed in giù ad un estremo, lungo la corda si propaga un'onda trasversale. La perturbazione si sposta lungo la corda, mentre le particelle della corda vibrano nelle direzione perpendicolare a quella di propagazione della perturbazione.



Invio di un'onda sinusoidale lungo la corda. Essendo le oscillazioni di un qualsiasi elemento della corda (rappresentato dal punto) perpendicolari alla direzione lungo la quale si muove l'onda, quest'ultima è un'onda trasversale.

- L'onda è longitudinale se **O** vibra nella stessa direzione di propagazione dell'onda. In questo caso il movimento trasmesso alle particelle dall'onda avviene per spostamenti in avanti ed indietro lungo la direzione di propagazione dell'onda. Per esempio, quando una molla tesa verticalmente viene posta in oscillazione verso l'alto e verso il basso ad un estremo, lungo la molla si propaga un'onda longitudinale; le spire della molla vibrano avanti e indietro lungo la direzione di propagazione dell'onda che in questo caso coincide con l'asse della molla. Nei **solidi** si possono avere sia onde trasversali che longitudinali. Nei **fluidi** si possono trasmettere solo onde longitudinali.



Un'onda sonora è generata da un pistone che oscilla in un tubo pieno d'aria. Poiché le oscillazione di un elemento d'aria (rappresentato dal punto nero) sono parallele alla direzione lungo la quale si muove l'onda, l'onda in questione è longitudinale.

La velocità di propagazione di un'onda non dipende dalla sua forma o dalla sua ampiezza, ma soltanto dal mezzo nel quale si propaga.

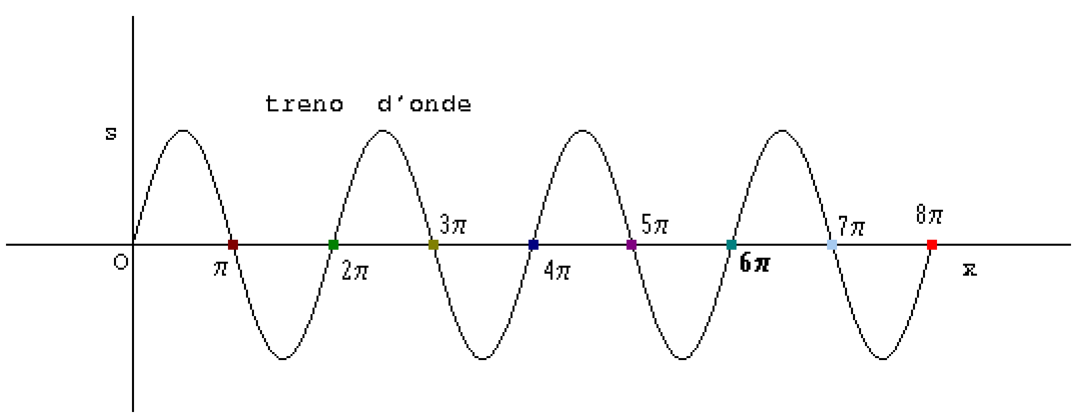
$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ = **velocità di propagazione di un'onda trasversale lungo una corda tesa**

T = tensione della corda **μ** = densità lineare della corda (rapporto tra la massa della corda e la sua lunghezza)

$v = \sqrt{\frac{k}{\delta}}$ = **velocità di propagazione di un'onda longitudinale in un fluido omogeneo**

δ = densità del fluido k = **coefficiente di compressione** elastica del fluido

- Le onde elastiche possono essere classificate non solo rispetto alla direzione di propagazione (onde trasversali e longitudinali) ma anche in base al comportamento nel tempo di una particella del mezzo che trasporta l'onda. Se **O** esegue una sola oscillazione completa e poi si ferma abbiamo quella che si chiama onda solitaria o onda singola. Per esempio noi possiamo produrre una singola onda che si propaga nella corda tesa, applicando un movimento trasversale completo alla sua estremità. Ciascuna particella rimane ferma fino a quando non è raggiunta dalla perturbazione, e si muove per il tempo necessario a compiere un'oscillazione completa e di nuovo torna ferma. Se **O** esegue più oscillazioni complete abbiamo un treno d'onde.

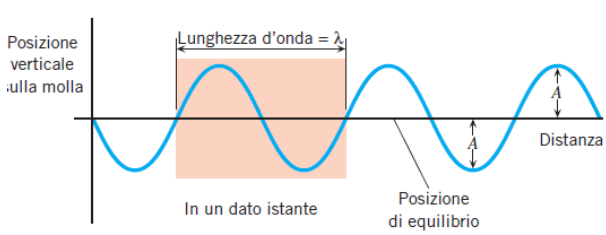


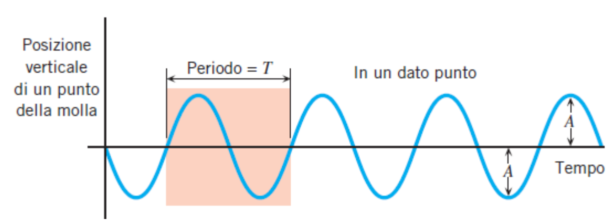
- Definiamo fronte d'onda l'insieme di tutti i punti che vibrano concordemente, nel senso che in essi lo spostamento dalla posizione di equilibrio, ad un certo istante, assume lo steso valore. Quindi il fronte d'onda è il luogo geometrico dei punti del mezzo in cui l'onda arriva nello stesso istante.

Se il fronte d'onda assume la forma di una superficie, si usa anche il termine di superficie d'onda. Se il mezzo è omogeneo ed isotropo, la direzione di propagazione dell'onda è sempre perpendicolare al fronte d'onda. Una retta normale ai fronti d'onda dà la direzione di propagazione delle onde e prende il nome di raggio.

- I fronti d'onda possono avere forme diverse. Se la perturbazione si propaga in un'unica direzione, le onde prendono il nome di onde piane. Tutti i punti di uno stesso piano perpendicolare alla direzione di propagazione ad un dato istante hanno le stesse proprietà. Le superfici d'onda sono piani ed i raggi sono rette parallele.

Un altro semplice caso è quello delle onde sferiche. Qui la perturbazione si propaga in tutte le direzioni partendo da un punto che è la sorgente delle onde. I fronti d'onda sono superfici sferiche ed i raggi sono rette uscenti dalla sorgente in tutte le direzioni. Lontano dalla sorgente i fronti d'onda sferici hanno piccola curvatura e su una loro ristretta zona possono essere considerati piani.

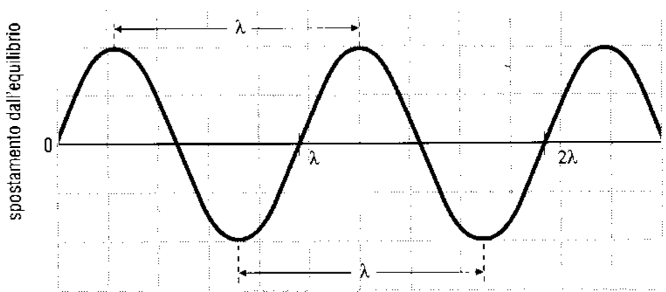




La parti evidenziate in colore rappresentano un ciclo d'onda. L'ampiezza dell'onda è indicata con la lettera **A** . Un ciclo d'onda è la parte colorata. La prima figura mostra la rappresentazione spaziale dell'onda e corrisponde ad una fotografia dell'onda in u dato istante. L'ampiezza **A** è lo spostamento massimo dalla posizione di equilibrio di un punto del mezzo in cui si propaga. La seconda figura è una rappresentazione temporale e mostra come varia la posizione di un dato punto del mezzo nel quale si propaga l'onda al variare del tempo.

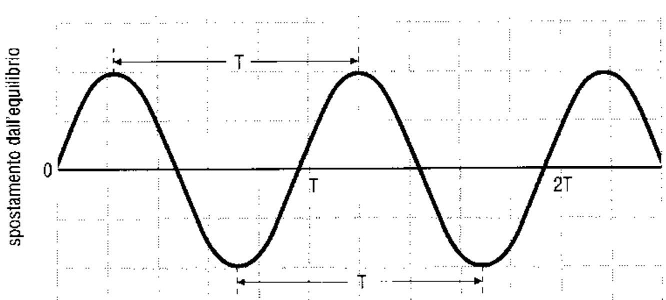
Grandezze caratteristiche delle onde

I sistemi oscillanti sono interessanti perché permettono di generare delle onde, cioè delle perturbazioni che si propagano trasportando energia ma non materia. Le onde più semplici sono quelle sinusoidali: esse sono generate da sorgenti che oscillano con moto armonico semplice. Possiamo rappresentare il moto di un'onda in funzione del tempo ed in funzione della sua posizione rispetto alla posizione di equilibrio.



Spostamento dalla posizione di equilibrio subito dai vari punti del mezzo materiale nello stesso istante, nel caso di un'onda sinusoidale. Il grafico equivale ad una fotografia istantanea del mezzo investito da un'onda sinusoidale.

I punti del mezzo che distano una (o più) lunghezze d'onda λ hanno lo stesso spostamento e si muovono nello stesso modo. In ascissa riportiamo la distanza x dalla sorgente dell'onda ed in ordinata lo spostamento s dalla posizione di equilibrio.



Spostamento dalla posizione di equilibrio di un determinato punto P del mezzo in funzione del tempo, nel caso di un'onda sinusoidale. In ogni intervallo di tempo uguale ad un periodo T il punto P va su e giù compiendo una oscillazione completa attorno alla posizione di equilibrio. In ascissa riportiamo il tempo t ed in ordinata lo spostamento s dalla posizione di equilibrio.

Le grandezze che caratterizzano un'onda sono:

- il periodo **T**: tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa
- la frequenza **f** (ν): numero di oscillazioni complete in un secondo
- la lunghezza d'onda λ: distanza percorsa dall'onda in un periodo
- l'ampiezza: rappresenta il massimo spostamento dalla posizione di equilibrio
- la velocità di propagazione **v**: rapporto tra lo spazio percorso dall'onda

nel tempo t ed il tempo t. Risulta: $\mathbf{v = \frac{x}{t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f}$

Equazione di un'onda elastica

Calcoliamo l'equazione di un'onda elastica che si propaga in un mezzo elastico. Cioè l'equazione che ci permette di determinare in ogni istante lo spostamento s dalla posizione di equilibrio di un qualsiasi punto del mezzo considerato. Per semplicità consideriamo il caso di un'onda unidimensionale, come quella che si ottiene facendo oscillare l'estremità di una corda fissata all'estremità opposta. La legge oraria di ogni punto P (della corda elastica lungo la quale è possibile la propagazione dell'onda unidimensionale) è una funzione a due incognite del tipo $\mathbf{s=s(t,x)}$ dove $\mathbf{s}$ è lo spostamento del generico punto $\mathbf{P(x)}$ dalla posizione di equilibrio all'istante $\mathbf{t}$.

Un treno di oscillazioni sinusoidali si propaghi lungo un'unica direzione Ox, a partire dalla sorgente O, il cui moto sia caratterizzato dall'equazione oraria:

$$\mathbf{s(t,0) = a \cdot \sin \omega t = a \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t}$$

($x = 0$ caratterizza il moto sinusoidale della sorgente **O**). Sia P un punto della corda elastica situato alla distanza x dalla sorgente **O**. Si vuole sapere quale sarà l'equazione oraria del moto del punto P, cioè l'equazione che fornisce ad ogni istante t lo spostamento s del punto P, distante x metri dalla sorgente O.

Si dimostra che la legge oraria (equazione dell'onda sinusoidale) del punto P, distante x metri dalla sorgente **O**, ci viene fornita dalla seguente equazione:

$$s(t,x) = a \cdot \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right) = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad [3]$$

Quando l'onda si propaga nel verso positivo delle x l'onda si dice progressiva e la sua equazione ci viene data dalla **[3]**. Quando si propaga nel verso negativo dell'asse x, l'onda si dice regressiva e la sua equazione assume la forma:

$$s(t,x) = a \cdot \sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v}\right) = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{vT}\right) = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \qquad [4]$$

Ricordando che $v=\frac{\lambda}{T}$ e quindi $\frac{1}{T}=\frac{v}{\lambda}$ la **[3]** può essere scritta così:

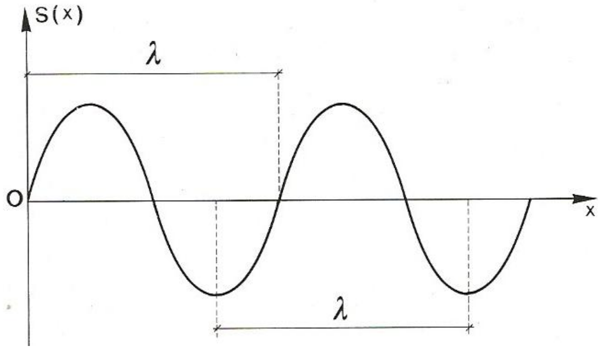
$$s(t,x)=a \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{v}{\lambda}\left(t-\frac{x}{v}\right)=a \cdot \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)=a \cdot \sin k(vt-x) \qquad [5]$$

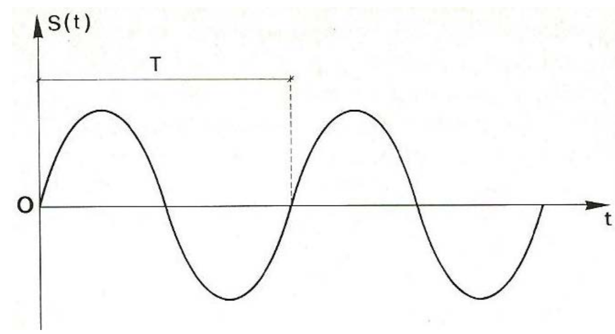
L'equazione **[5]**, se fissiamo il tempo t ci consente di ottenere la forma generale dell'onda in quell'istante. Se fissiamo la coordinata spaziale x la **[5]** ci fornisce la legge oraria del punto P distante x dalla sorgente, cioè ci dice qual è la posizione del punto P al variare del tempo. Introducendo la grandezza $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ detta numero d'onda (o vettore d'onda), ricordando che risulta: $\omega=\frac{2\pi}{T}$ $\quad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$ possiamo scrivere l'equazione dell'onda elastica nella seguente maniera:

$$s(t,x)= a \cdot \sin k\left(\frac{\omega}{k} \cdot t - x\right)=a \cdot \sin(\omega t - kx) \qquad [6]$$

Per un'onda trasversale la quantità s è perpendicolare all'asse x e viene, per questo motivo, generalmente indicata con lettera y, cioè si preferisce scrivere:

$$y(t,x)= a \cdot \sin k\left(\frac{\omega}{k} \cdot t - x\right)=a \cdot \sin(\omega t - kx)$$



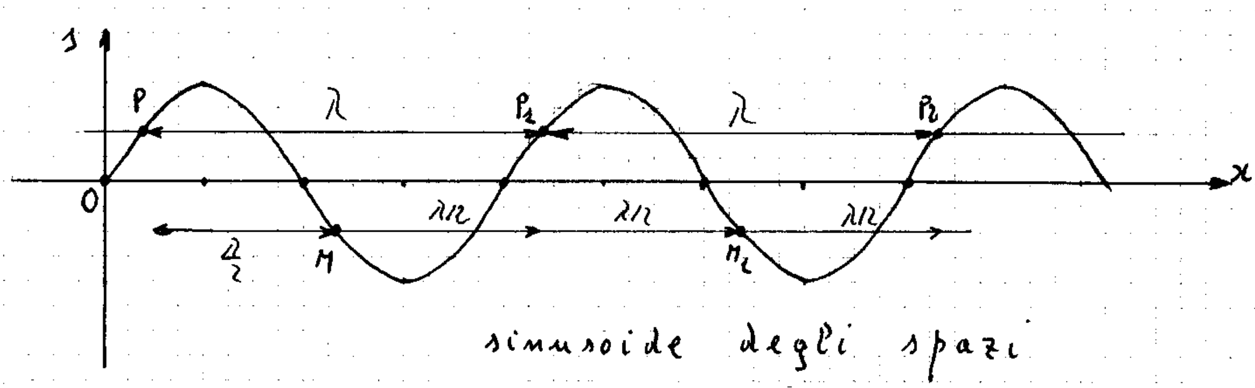


Il primo grafico ci fornisce l'andamento generale di un'onda in funzione di x in un certo istante t; Il secondo grafico ci fornisce l'andamento generale di un'onda in funzione del tempo t in un certo punto x.

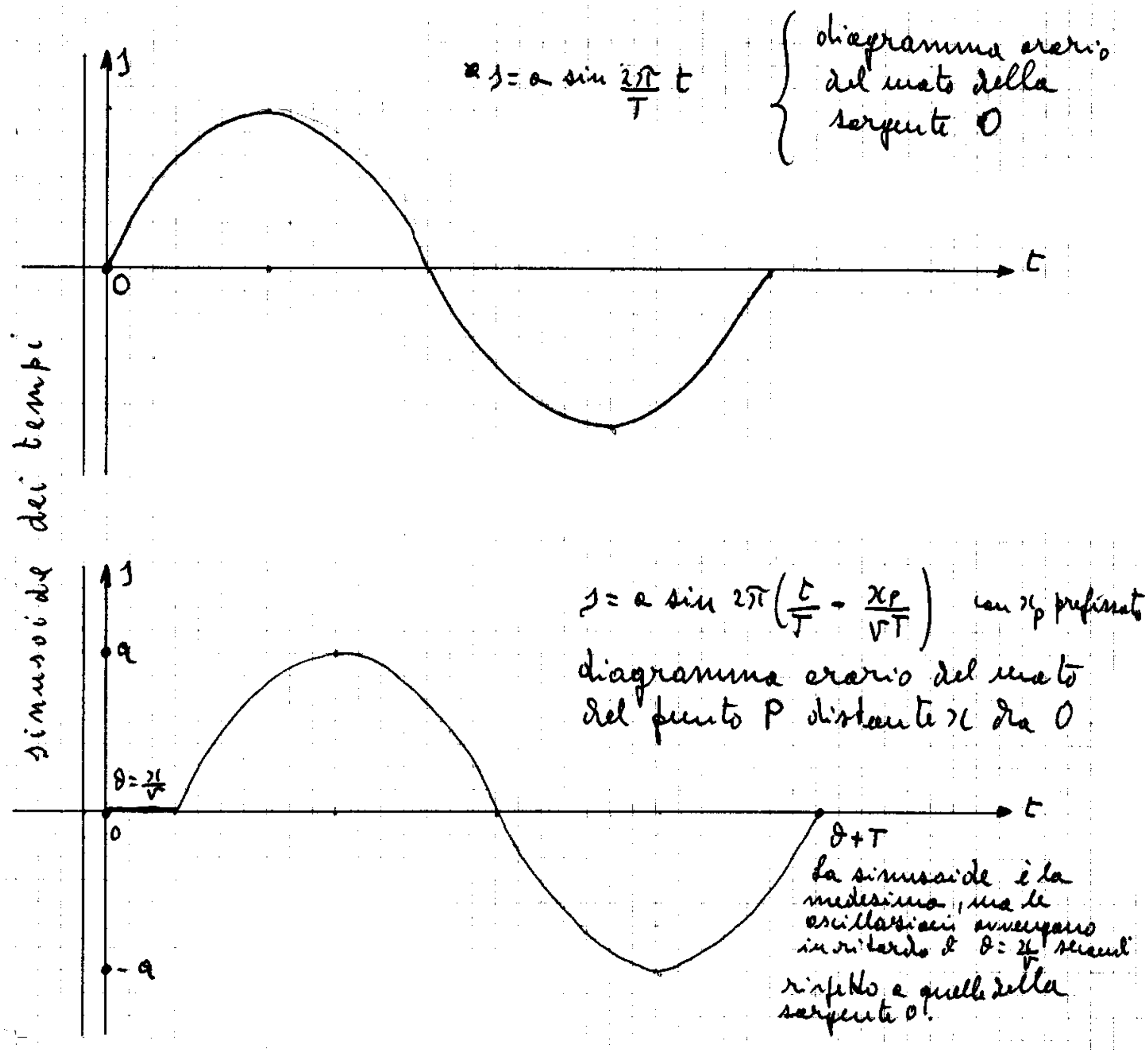
L'equazione dell'onda trasversale è identica a quella dell'onda longitudinale. L'equazione dell'onda esprime una doppia periodicità:

a) Per un prefissato punto P l'ascissa x è costante: allora lo spostamento s del punto P è funzione del solo tempo e la sua rappresentazione grafica viene detta **sinusoide dei tempi**.

b) Se invece si fissa l'istante t l'equazione mostra che lo spostamento di un generico punto del mezzo è funzione della sola x . In questo caso il diagramma della funzione è la **sinusoide degli spazi** e rappresenta l'immagine che si otterrebbe fotografando il mezzo (ad esempio la corda elastica) all'istante t.



I punti P, P1, P2 che distano fra loro per un multiplo intero di λ vibrano in concordanza di fase.
I punti P, M, P1, M1, P2 che distano fra loro per un multiplo dispari di $\frac{\lambda}{2}$ vibrano in opposizione di fase.



P vibra in concordanza di fase con la sorgente **O** [$s(O) = s(P)$, hanno cioè lo stesso valore di s] se: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\cdot t - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{T\,\mathrm{v}}\right) = 2k\pi$ $\boxed{x = kT\,\mathrm{v}}$ $k = 0,1,2,3,\cdots$

Per $k=1$ abbiamo: $x = T\,\mathrm{v} = \lambda$ = 1 lunghezza d'onda

La lunghezza d'onda rappresenta la distanza che intercorre tra la sorgente ed il punto più vicino che oscilla in concordanza di fase [$s(O) = s(P)$] e rappresenta pure lo spazio percorso dall'onda in un tempo T pari al periodo dell'onda.

Introducendo la frequenza $f = \nu$ abbiamo: $\lambda = T \cdot \mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}}{\nu} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{f}}$, $\mathrm{v} = \lambda \cdot f = \lambda \cdot \nu$

<<**I punti P del mezzo che vibrano in concordanza di fase con la sorgente O sono quelli che distano da O per una distanza x uguale ad un multiplo intero di λ** >> $s(O) = s(P) \Leftrightarrow x = k\lambda$

I punti P che vibrano in opposizione di fase con la sorgente O per ogni valore di t [$s(P) = -s(O)$] sono quelli in corrispondenza dei quali si ha:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = 2k\pi + \pi \qquad \mathbf{x = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}} \qquad \mathrm{k} = 0,1,2,3,\cdots$$

<<**I punti P che oscillano in opposizione di fase con la sorgente per ogni valore di t sono quelli che distano da O per una distanza x uguale ad un multiplo dispari di** $\frac{\lambda}{2}$>>

I punti P e P' del mezzo vibrano in concordanza di fase se:

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{T\,\mathrm{v}}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{T\,\mathrm{v}}\right) = 2k\pi \qquad \text{cioè se :} \quad \mathbf{x' - x = k\,T\,v = k\,\lambda}$$

vibrano in opposizione di fase se:

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{T\,\mathrm{v}}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{T\,\mathrm{v}}\right) = 2k\pi + \pi \qquad \text{cioè se :} \quad \mathbf{x' - x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}}$$

Raggio di propagazione di un'onda elastica

La propagazione per onde può essere schematizzata con la nozione di raggio associato all'onda elastica, o raggio di propagazione dell'onda elastica. Si definisce raggio di propagazione la semiretta uscente dalla sorgente perpendicolare alla superficie d'onda. Nel caso delle onde sferiche sono raggi di propagazione tutte le semirette uscenti dalla sorgente. Nel caso di un'onda piana i raggi di propagazione sono costituiti da un fascio di semirette fra loro parallele. Il concetto di **raggio di propagazione** è molto utile per studiare sotto il profilo geometrico la propagazione per onde.

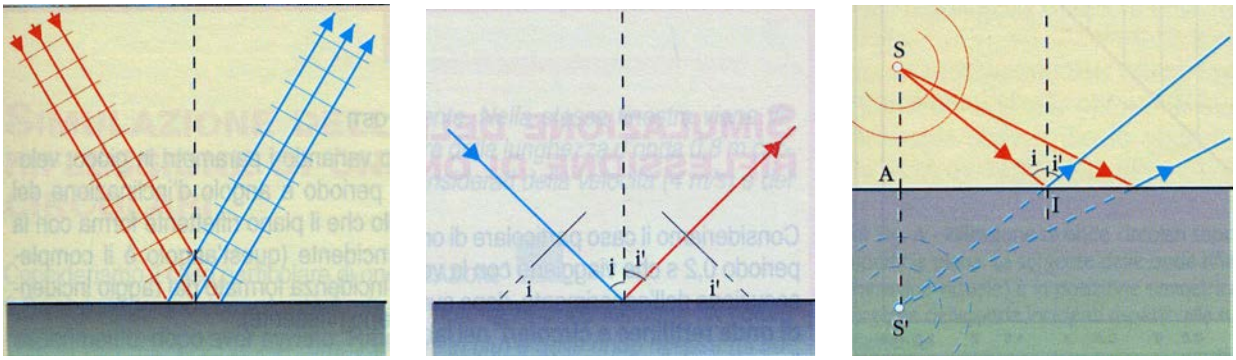
In questo caso è utile parlare anche di cammino percorso dal raggio di propagazione : si può infatti schematizzare la propagazione per onde come se l'energia ceduta dalla sorgente che oscilla al mezzo che lo circonda si propagasse lungo i raggi con una velocità che dipende dal mezzo nel quale avviene la propagazione .

Raggio di propagazione di un'onda elastica

La propagazione per onde può essere schematizzata con la nozione di raggio associato all'onda elastica, o raggio di propagazione dell'onda elastica. Si definisce raggio di propagazione la semiretta uscente dalla sorgente perpendicolare alla superficie d'onda. Nel caso delle onde sferiche sono raggi di propagazione tutte le semirette uscenti dalla sorgente. Nel caso di un'onda piana i raggi di propagazione sono costituiti da un fascio di semirette fra loro parallele. Il concetto di **raggio di propagazione** è molto utile per studiare sotto il profilo geometrico la propagazione per onde. In questo caso è utile parlare anche di cammino percorso dal raggio di propagazione: si può infatti schematizzare la propagazione per onde come se l'energia ceduta dalla sorgente che oscilla al mezzo che lo circonda si propagasse lungo i raggi con una velocità che dipende dal mezzo nel quale avviene la propagazione.

Riflessione di un'onda elastica

Quando un'onda elastica, che si propaga in un mezzo isotropo, incontra un ostacolo di grandi dimensioni rispetto alla sua lunghezza d'onda λ, si ha la riflessione dell'onda, cioè l'onda torna indietro continuando a muoversi nel mezzo di provenienza.



(a) **Riflessione di un treno d'onde piane rappresentate sia mediante le superfici d'onda, sia mediante i raggi di propagazione**

(b) **Riflessione di un'onda piana rappresentata convenzionalmente mediante un solo raggio di propagazione ed una sola superficie d'onda**

(c) **Ad un fascio di raggi uscenti da S corrisponde, dopo la riflessione, un fascio di raggi uscenti da S', simmetrico di S rispetto alla superficie riflettente**

Le leggi che regolano la riflessione delle onde elastiche

1ª legge: **il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale alla superficie di incidenza nel punto d'incidenza giacciono nello stesso piano**

2ª legge: **l'angolo di incidenza i è uguale all'angolo di riflessione r.**

Rifrazione di un'onda elastica

Quando un'onda elastica, che si propaga in un mezzo ① omogeneo ed isotropo con velocità v_1, incontra la superficie di separazione di un mezzo ② nel quale può propagarsi con velocità $v_2 \neq v_1$, vi penetra parzialmente (in quanto una parte viene riflessa). Il cambiamento di velocità che subisce nel passare dal mezzo ① al mezzo ② determina un cambiamento della direzione di propagazione dell'onda. E' questo il fenomeno della rifrazione che consiste, appunto, nel cambiamento della direzione di un'onda elastica quando passa da un mezzo ① ad un mezzo ② di natura diversa.

Le leggi che regolano la rifrazione delle onde elastiche

- **ogni onda elastica, passando da un mezzo ad un altro avente densità diversa, cambia direzione di propagazione**
- **il raggio incidente, la normale alla superficie di separazione dei due mezzi nel punto d'incidenza ed il raggio rifratto giacciono nello stesso piano.**
- **il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza i ed il seno dell'angolo di rifrazione r è costante al variare dell'angolo di incidenza, cioè:**

$$\frac{\sin\hat{i}}{\sin\hat{r}} = n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \qquad v \cdot T = \lambda$$

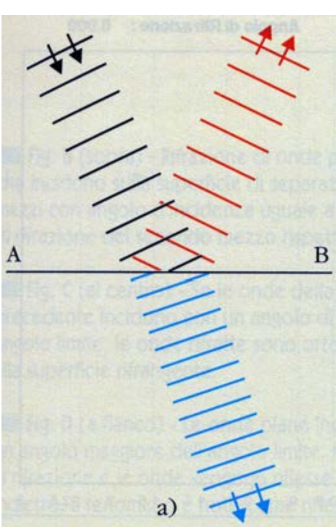
n_{12} = indice di rifrazione del mezzo ② rispetto al mezzo ①

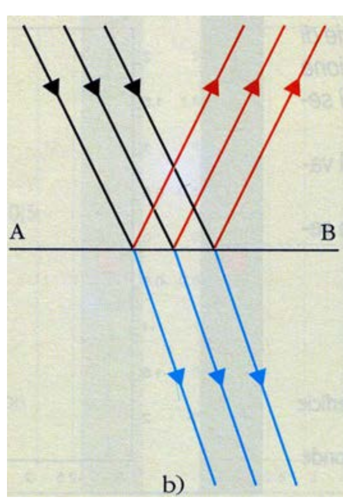
λ_1 = lunghezza d'onda dell'onda incidente

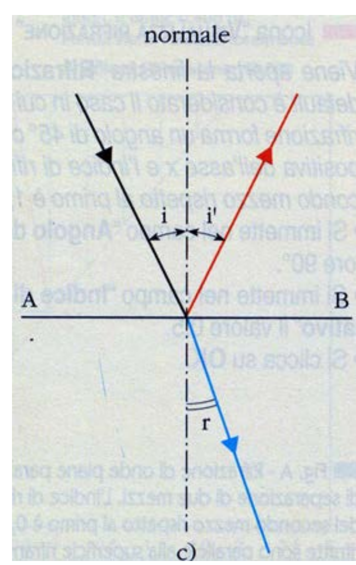
λ_2 = lunghezza d'onda dell'onda rifratta

v_1 = velocità di propagazione dell'onda elastica nel mezzo ①

v_2 = velocità di propagazione dell'onda elastica nel mezzo ②







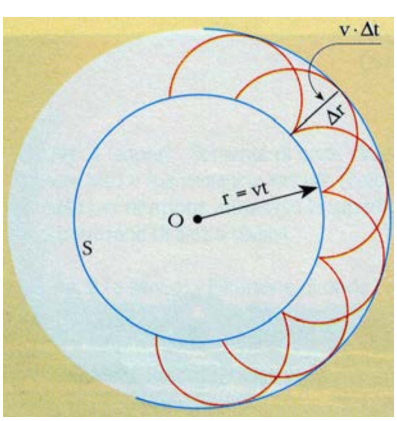
(a) un fascio di onde piane incide sulla superficie AB di separazione di due mezzi trasparenti e viene in parte riflesso ed in parte rifratto

(b) il fascio di onde è rappresentato mediante raggi normali ai rispettivi fronti d'onda

(c) **per semplicità si considera un solo raggio incidente, riflesso, rifratto**

Principio di Huygens-Fresnel

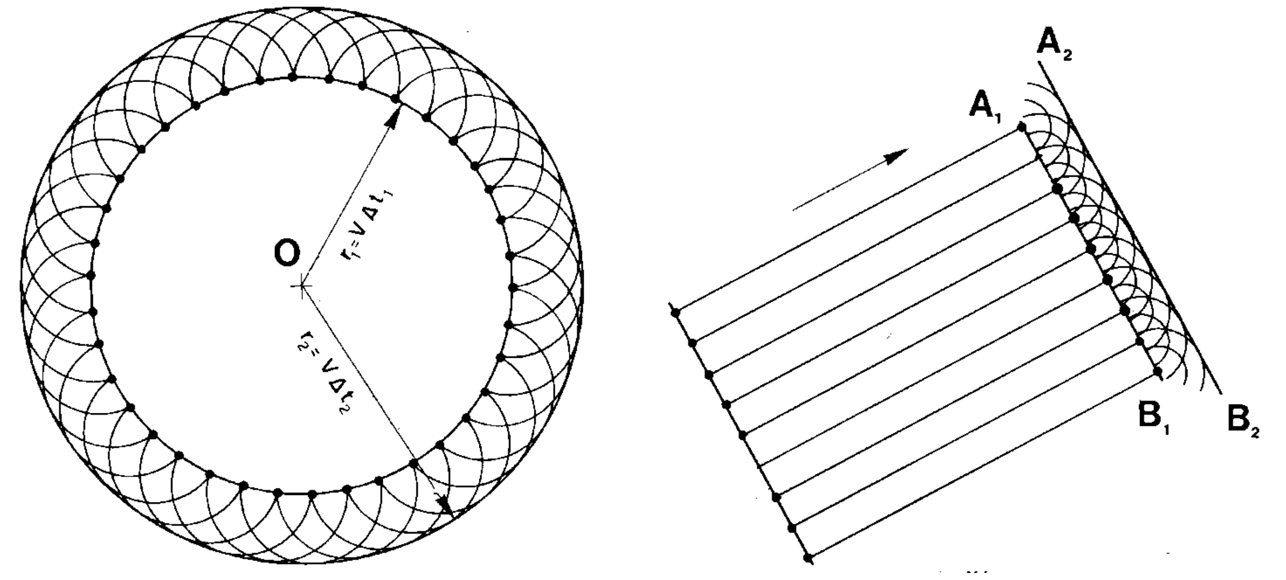
Il principio di Huygens-Fresnel è un metodo geometrico per determinare la forma del fronte d'onda S' in un certo istante quando conosciamo la forma S in un istante precedente. Il principio asserisce che ogni punto di un fronte d'onda deve considerarsi come sorgente di piccole onde secondarie che si propagano in tutte le direzioni (cioè ogni punto diventa sorgente di onde sferiche) con un velocità uguale alla velocità di propagazione dell'onda e possiedono tutte in ogni istante la stessa fase. Il fronte d'onda S' successivo ad S è costituito dall'inviluppo delle onde elementari emesse dai vari punti di S. (L'inviluppo è una superficie tangente, in un solo punto per ognuna, contemporaneamente a tutte le superfici sferiche elementari) (1)



Ogni punto del fronte d'onda S può essere considerato come una sorgente secondaria che origina un'onda elementare, rappresentata in figura mediante una semicirconferenza, La curva che inviluppa

(1) **Si definisce superficie o curva inviluppo di una famiglia di superfici o di curve la superficie o curva tangente in un solo punto ad ogni superficie o curva della famiglia**

la famiglia delle semicirconferenze fornisce il nuovo fronte d'onda.



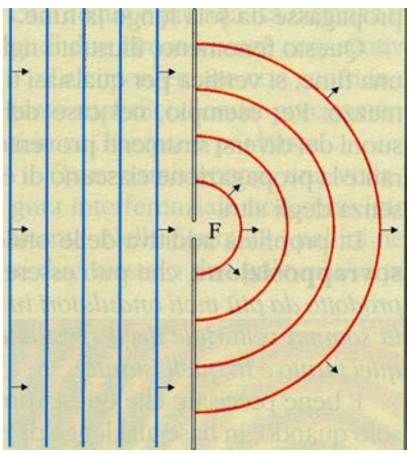
Sia nel caso di un'onda sferica, che in quello di un'onda piana, il principio di Huygens-Fresnel afferma che ogni punto dello spazio, raggiunto da una perturbazione ondosa, diventa esso stesso sorgente di onde elementari.

Diffrazione

Un'onda che propagandosi incontra un ostacolo non dovrebbe propagarsi dietro di essa, cioè l'ostacolo dovrebbe "fare ombra". In alcuni casi' però, l'onda riesce a superare l'ostacolo: **si ha la diffrazione dell'onda**. Il fenomeno della diffrazione, caratteristico dei moti ondulatori, si presenta sempre quando le onde, qualunque sia la loro natura, incontrano durante la loro propagazione degli ostacoli o delle fenditure le cui dimensioni sono comparabili con la lunghezza λ dell'onda incidente.

La diffrazione è un fenomeno tipicamente ondulatorio che consiste nella capacità delle onde che si propagano in linea retta di aggirare gli ostacoli se questi sono sufficientemente piccoli o di attraversare fenditure sottili se le dimensioni di quest'ultime sono dell'ordine della lunghezza d'onda λ.

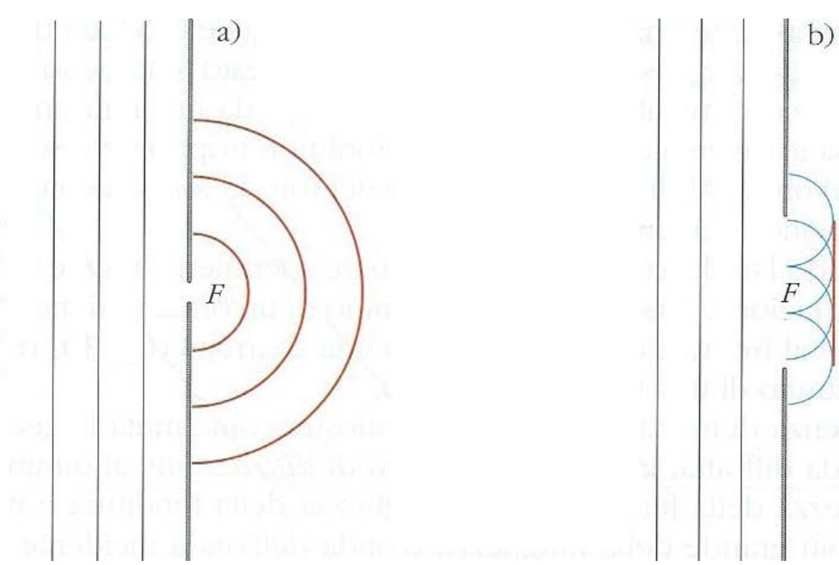
Questo avviene perché tutti i punti di un mezzo raggiunti da una perturbazione ondulatoria, entrando in oscillazione, si comportano come sorgenti secondarie, capaci di trasmettere la stessa perturbazione in tutte le direzioni (principio di Huygens-Fresnel.)



Diffrazione di un treno di onde piane attraverso un foro di diametro piccolo rispetto alla lunghezza d'onda. Un treno di onde piane colpisce un ostacolo nel quale è praticato un foro con diametro dell'ordine della lunghezza d'onda: il foro diviene sorgente di onde circolari.

Se, invece, la larghezza della fenditura è grande rispetto alla lunghezza λ dell'onda incidente, il fronte d'onda oltre lo schermo è quasi piano ed il fenomeno della diffrazione diventa praticamente trascurabile. Diciamo che l'onda attraversa la fenditura dello schermo e continua il suo cammino.

Diffrazione di un'onda piana attraverso un foro (a) di larghezza piccola rispetto alla lunghezza d'onda e (b) di larghezza grande rispetto alla lunghezza d'onda.



Principio di sovrapposizione delle onde elastiche

Per le onde elastiche vale il **principio di sovrapposizione** in base al quale ogni onda si propaga indipendentemente dalle altre, come se queste non fossero presenti. Il suo enunciato è il seguente: <<**Lo spostamento subito in un dato istante da una particella del mezzo colpita da più onde è pari alla somma vettoriale degli spostamenti che le singole onde, ciascuna indipendentemente dalle altre, le hanno impresso**>>

Due onde, aventi la stessa lunghezza d'onda λ, si dicono in **concordanza di fase** se per esse è uguale l'argomento $2\pi\left(t-\frac{x}{\mathrm{v}}\right)$ (2) delle rispettive equazioni d'onda, oppure se la loro differenza è $2k\pi$. In particolare entrambe le onde presentano una cresta o un ventre nello steso punto. Due onde, aventi la stessa lunghezza d'onda λ, si dicono in **opposizione di fase** se la differenza dei suddetti argomenti è un multiplo dispari di una mezza lunghezza d'onde, cioè se vale $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$

Abbiamo detto che per **interferenza** di due onde intendiamo il risultato della sovrapposizione di due onde che si propagano nello stesso mezzo.

Vogliamo studiare il fenomeno dell' interferenza delle onde elastiche limitandoci al caso dell'interferenza ottenuta da due treni d'onda che si propagano nello stesso mezzo ed originate da due sorgenti S_1 ed S_2 le cui oscillazioni siano sinusoidali, sincrone (aventi uguale periodo T), coerenti (aventi uguale differenza di fase) e della stessa ampiezza a. Ci interessa sapere cosa succede in un generico punto P situato alle distanze x_1 ed x_2 dalle due sorgenti.

Se la sorgente S_1 agisce da sola abbiamo: $y_1 = a \cdot \sin k(vt - x_1)$

Similmente, se S_2 agisce da sola abbiamo : $y_2 = a \cdot \sin k(vt - x_2)$

Se le due sorgenti agiscono simultaneamente il punto P del mezzo materiale dove si propagano le onde è soggetto al moto risultante:

$$y = y_1 + y_2 = a \cdot \sin k(vt - x_1) + a \cdot \sin k(vt - x_2) = a \cdot \left[\sin k(vt - x_1) + \sin k(vt - x_2)\right]$$

(2) **fase dell'onda**

Ricordando la formula di prostaferesi $\sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2} \cdot \sin\frac{p+q}{2}$ possiamo

scrivere: $$\mathbf{y = 2a \cdot \cos\frac{k(x_2 - x_1)}{2} \cdot \sin k\left(vt - \frac{x_2 + x_1}{2}\right)}$$

(**Legge oraria** del moto risultante di un punto P sottoposto all'azione di due moti sinusoidali, sincroni e coerenti)

L'onda risultante è ancora sinusoidale, ha la stessa frequenza delle onde componenti e la sua ampiezza $A = 2a \cdot \cos\frac{k(x_2 - x_1)}{2}$ dipende dai parametri delle onde componenti (ampiezza d'onda **a** e lunghezza d'onda λ) e dalle distanze x_1 ed x_2 del punto P dalle sorgenti S_1 ed S_2.

Punti P aventi ampiezza massima: interferenza costruttiva

Deve essere: $\cos\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = \pm 1$, $\cos\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = \pm 1$, $\frac{\pi|x_2 - x_1|}{\lambda} = n \cdot \pi$, $\mathbf{|x_2 - x_1| = n \cdot \lambda}$ $n \in Z$

$A = 2a$ = ampiezza dell'onda risultante dovuta ad una interferenza costruttiva

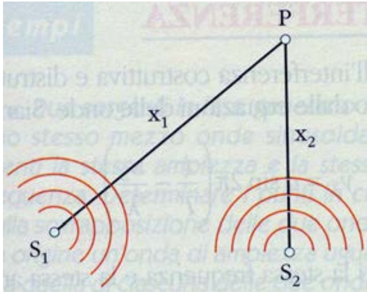
<< **I punti P di ampiezza massima sono quelli per i quali la differenza di cammino $|x_2 - x_1|$ è nulla o uguale ad un numero intero di lunghezze d'onda.**>>

Punti P aventi ampiezza nulla: interferenza distruttiva

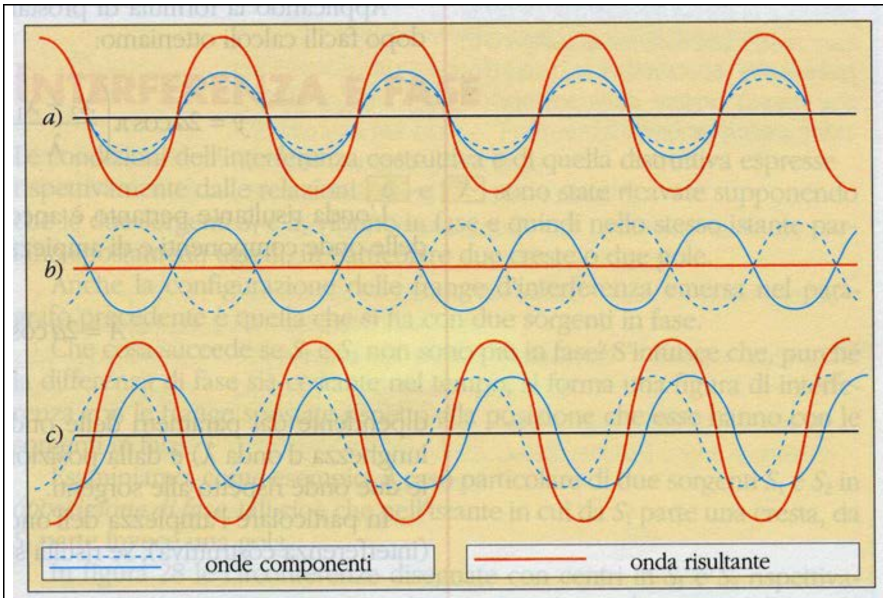
Deve essere : $\cos\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = 0$, $\cos\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = 0$, $\frac{\pi|x_2 - x_1|}{\lambda} = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\mathbf{|x_2 - x_1| = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}} \quad n \in Z$$

<<**I punti aventi ampiezza nulla sono quelli in corrispondenza dei quali la differenza di cammino $|x_2 - x_1|$ è un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda.**>>



S_1 ed S_2 sono due sorgenti di onde che giungono nel punto P dopo avere percorso le distanze x_1 ed x_2 rispettivamente. In P si ha **interferenza costruttiva** se è $|x_2 - x_1| = n \cdot \lambda$, mentre si **interferenza distruttiva** se è $|x_2 - x_1| = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

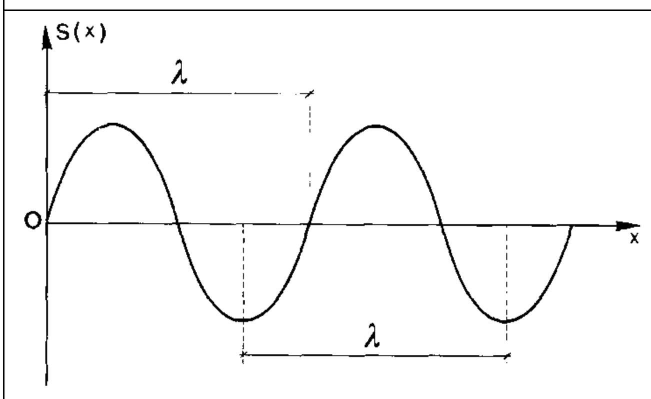


Sovrapposizione di due onde aventi la stessa frequenza che si propagano nella stessa direzione:

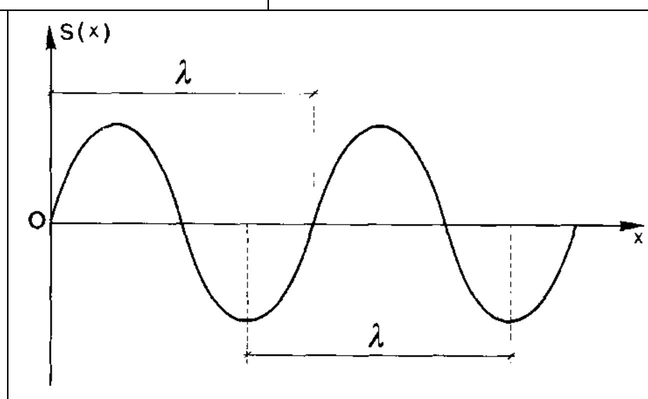
a) **onde in fase**

b) **onde in opposizione di fase**

c) **differenza di fase generica**



Andamento generale di un'onda, in funzione di x, in un certo istante t



Andamento generale di un'onda, in funzione di del tempo t, in un certo punto x

Onde stazionarie

Onde stazionarie sono quelle prodotte dalla **interferenza** fra due onde aventi la stessa ampiezza **a**, la stessa **frequenza** **f** e che si propagano in **direzioni opposte** con la **stessa velocità** **v** .

Le equazioni delle due onde, considerate singolarmente, sono date dalle due seguenti equazioni: $\mathbf{y_1(x,t) = A \cdot sin(\omega t - kx)}$ $\mathbf{y_2(x,t) = A \cdot sin(\omega t + kx)}$

L'equazione dell'onda stazionaria risultante è:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \qquad y(x,t) = A[sin(\omega t - kx) + sin(\omega t + kx)]$$

$$y(x,t) = 2A \cdot \cos\frac{\omega t + kx - \omega t + kx}{2} \cdot sin\frac{\omega t + kx + \omega t - kx}{2}$$

$$\mathbf{y(x,t) = 2A \cdot coskx \cdot sin\omega\, t} \qquad \mathbf{[11]} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \textbf{numero d'onda}$$

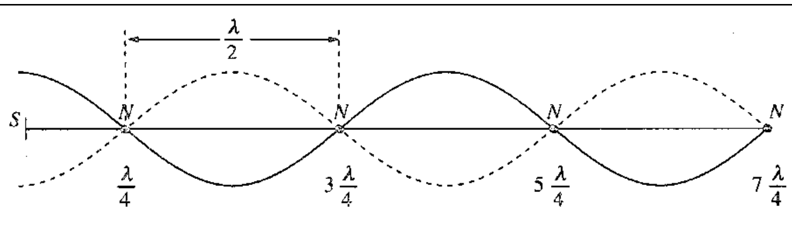
$\mathbf{y(x,t) = a(x) \cdot sin\,\omega\, t = a(x) \cdot sin\frac{2\pi}{\lambda}t}$ = **equazione dell'onda stazionaria [12]**

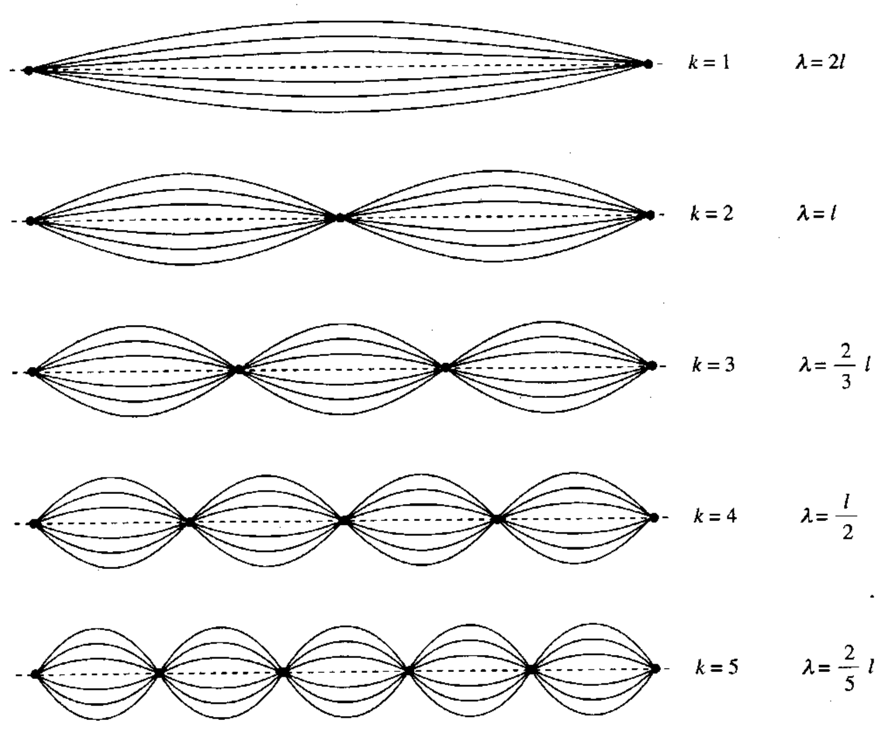
$\mathbf{a(x) = 2A \cdot cos\,kx = 2A \cdot cos\frac{2\pi}{\lambda}x}$ = **ampiezza di oscillazione della particella della corda posta alla distanza x dalla sorgente [13]**

Vediamo quali sono i punti della corda distanti x dalla sorgente ed aventi **ampiezza nulla**. $a(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos kx = 0 \quad \Rightarrow \quad k\,x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (\ n \in N\ ) \quad \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{\lambda}x = (2n+1)\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}} \qquad \mathbf{[14]}$$

Questo significa che sono sempre fermi ($y(x,t) = 0$) i punti distanti dalla sorgente un numero dispari di $\frac{\lambda}{4}$. I punti della corda che hanno ampiezza nulla prendono il nome di nodi.

	Posizione dei **nodi** in un'onda stazionaria

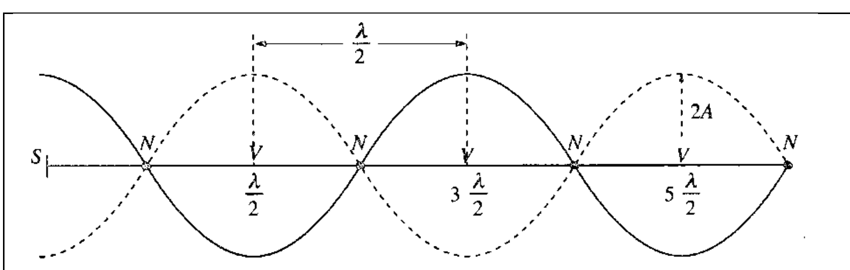


Alcune delle possibili onde stazionarie in una corda

Gli altri punti della corda oscillano con varia ampiezza essendo $a(x) = 2A \cdot \cos kx = 2A \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$

Vediamo quali sono i punti della corda distanti x dalla sorgente ed aventi ampiezza di oscillazione massima.

$$\cos kx = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad a_{\max}(x) = 2A \qquad \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = n \cdot \frac{\lambda}{2}} \qquad \textbf{[15]}$$



Posizione dei **ventri** in un'onda stazionaria

Questi punti si chiamano ventri; come mostra la figura, si trovano a metà tra due nodi e sono anch'essi distanziati gli uni dagli altri di mezza lunghezza d'onda.

Cambiamento di fase nella riflessione di un'onda elastica

● La riflessione di un'onda elastica ad un estremo fisso provoca un cambiamento di fase di π radianti; la riflessione di un'onda elastica ad un estremo libero non provoca alcun cambiamento di fase.

Corda elastica fissata alle due estremità

Consideriamo ora un caso particolarmente interessante, quello di una fune di lunghezza L avente entrambi gli estremi vincolati, e generiamo su questa una perturbazione ondosa di tipo sinusoidale. Consideriamo una corda elastica tesa fissata per i due estremi. Se sollecitiamo per un istante la corda in un suo punto e poi la lasciamo libera, lungo la corda si stabiliscono dei particolari moti che le possono fare assumere una delle configurazioni rappresentate in figura. La presenza di estremi fissi nella corda, che necessariamente si comporteranno come **due nodi**, fa sì che sulla corda elastica siano presenti onde stazionarie.

Poiché in un'onda stazionaria la distanza tra due nodi è pari a $\frac{\lambda}{2}$, in una corda di lunghezza L si possono generare onde stazionarie la cui lunghezza d'onda λ deve verificare la relazione: $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ ovvero $\boldsymbol{\lambda = \frac{2L}{n}}$ **[16]** con $n = 1, 2, 3, 4, 4 \cdots$

Dalla relazione [16] deduciamo che le lunghezze d'onda consentite per una corda di lunghezza L sono: $\lambda_1 = 2L$ $\lambda_2 = L$ $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$ $\lambda_4 = \frac{L}{2}$ ……. **[17]**

E cosi di seguito, per i valori crescenti del numero naturale n.

La relazione esistente tra la lunghezza d'onda λ, la frequenza f e la velocità v di propagazione dell'onda elastica ($v = \lambda f$), rimane ancora valida. La velocità di propagazione, nel caso di una fune, è $\mathbf{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$ dove F è la forza elastica di richiamo e μ **è** la densità lineare della corda (rapporto tra la massa della corda e la sua lunghezza)

Pertanto le frequenze di vibrazione possibili, per una corda lunga L, sono:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \cdot \frac{v}{2L} = n \cdot \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\eta}} = n \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{mL}}$$

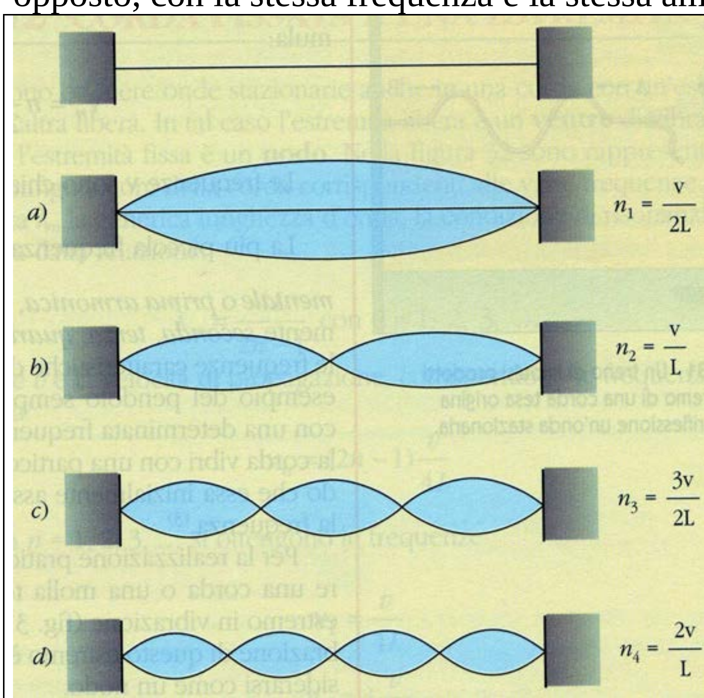
Le frequenze **f** sono chiamate frequenze di risonanza. La più piccola frequenza, cioè $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{mL}}$, è chiamata frequenza fondamentale o **p**rima armonica, mentre le successive sono chiamate rispettivamente seconda**,** terza**,** quarta**,....**armonica.

Le [17] assumono la forma: $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{mL}}$, $f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2 \cdot f_1$,

$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3v}{2L} = 3 \cdot f_1$, $f_4 = \frac{v}{\lambda_4} = \frac{2v}{L} = 4 \cdot f_1$ $\quad \mu = \frac{m}{\ell} = \text{densità lineare}$

$\delta = \frac{m}{v} = \textit{densità volumica} = \frac{m}{S \cdot \ell} = \frac{\mu}{S}$ $\quad \mu = \delta \cdot S$ $\quad$ S = area di una sezione del filo

Le onde stazionarie si originano in conseguenza del fatto che per ogni onda che si propaga lungo la corda si ha, dopo la riflessione da parte dell'estremo fisso, di un'onda riflessa ancora armonica che si propaga, sfasata di π radianti, in verso opposto, con la stessa frequenza e la stessa ampiezza dell'onda incidente.



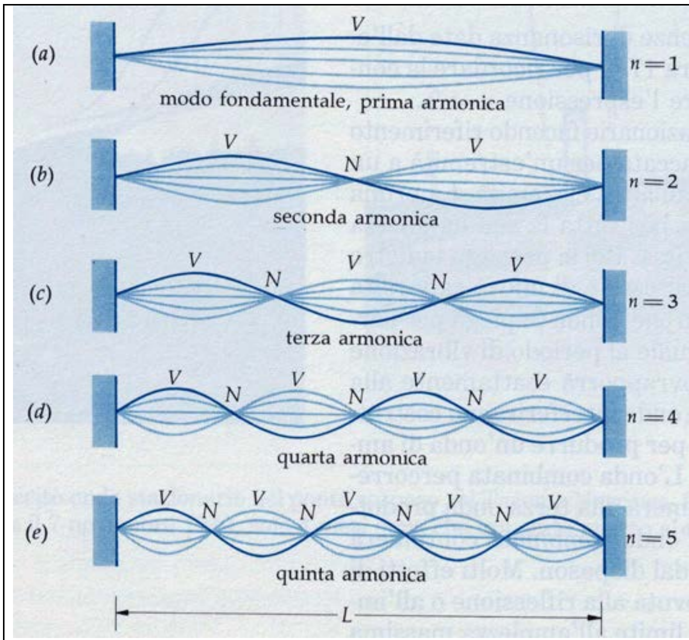
Sono rappresentate le onde stazionarie che si possono ottenere in una corda con gli estremi fissi.

$f_1 = \frac{v}{2L}$, $f_2 = \frac{v}{L}$,

$f_3 = \frac{3v}{2L}$, $f_4 = \frac{2v}{L}$

$\lambda_1 = 2L \quad \lambda_2 = L$

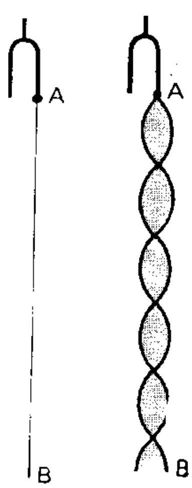
$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$, $\lambda_4 = \frac{L}{2}$



Onde stazionarie in una corda fissata ad entrambe le estremità. I punti contrassegnati con V sono **ventri** e quelli contrassegnati con N sono **nodi**.

Corda elastica fissata ad una sola estremità

Si possono produrre onde stazionarie anche in una corda elastica con una estremità fissa e l'altra libera. In tal caso l'estremità libera è un ventre di vibrazione, mentre l'estremità fissa è un nodo.



Le suddette onde stazionarie si possono ottenere utilizzando un diapason che vibra con frequenza **f** e disposto come indicato in figura. Il diapason trasmette le sue vibrazioni ad un filo **AB** nel quale l'estremità **B** è libera. Per una determinata lunghezza L del filo si notano i caratteristici **fusi** delle onde stazionarie, dovuti all'onda incidente ed a quella riflessa. La sorgente vibrante **A** è sempre un nodo, l'estremo libero **B** è un ventre. Essendo la distanza fra un ventre ed un nodo $\frac{\lambda}{4}$, la condizione per avere un'onda stazionaria, se n è il numero di fusi osservati (un fuso corrisponde a mezza lunghezza d'onda), sarà data da:

$$\mathbf{L = n \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}} \quad \text{con} \quad n = 0,1,2,3,4,4\cdots \quad \text{oppure:}$$

$$\mathbf{L = (2n - 1) \cdot \frac{\lambda}{4}} \quad \text{con} \quad n = 1,2,3,4,4\cdots \ .$$

Conclusione

Detta λ_n la generica lunghezza d'onda, la condizione di risonanza è espressa dalla relazione: $\lambda_{2n-1} = \dfrac{4L}{2n - 1}$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5 \cdots$

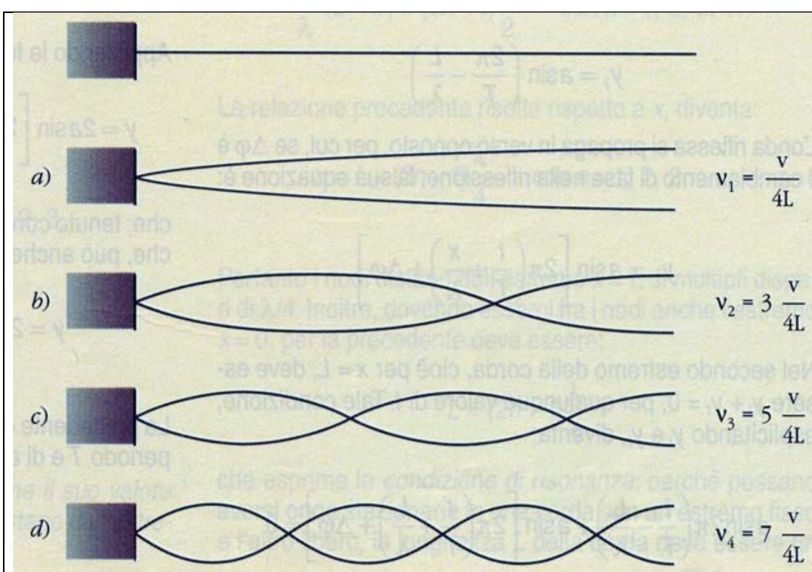
A queste lunghezze d'onda corrispondono le frequenze di risonanza:

$$f_{2n-1} = \frac{v}{\lambda_{2n-1}} = (2n - 1) \cdot \frac{v}{4L}$$

Con $n = 1, 2, 3, 4, 5 \cdots$ otteniamo le frequenze $f_1 = \dfrac{v}{4L}$, $f_3 = 3 \cdot \dfrac{v}{4L}$, $f_5 = 5 \cdot \dfrac{v}{4L}$.......

Le quali, crescendo nel rapporto di $1:3:5:\cdots$, si chiamano anche prima, terza, quinta .... armonica.

Nel caso considerato le onde stazionarie hanno origine dalla sovrapposizione di un'onda che viaggia verso l'estremità libera e dell'onda riflessa senza ribaltamento all'estremità libera.



Onde stazionarie prodotte in una corda elastica con un'estremità fissa e l'altra libera.
A fianco sono indicate le frequenze $f_n = (2n - 1)\dfrac{v}{4L}$

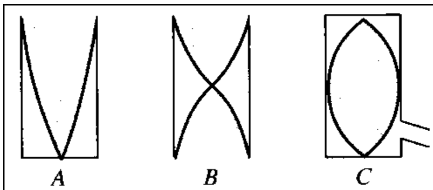
Con $n = 1, 2, 3, 4, 5 \cdots$

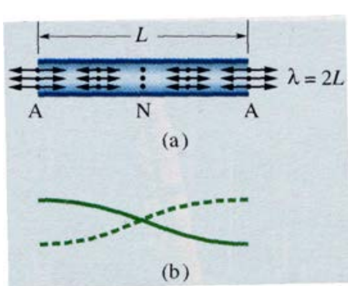
Onde stazionarie nei tubi sonori (canne)

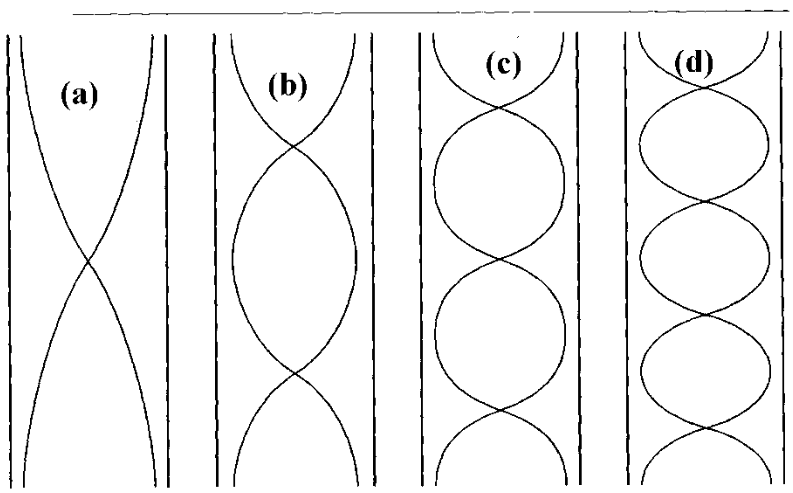
Supponiamo che l'aria contenuta in un tubo sia messa in vibrazione. La vibrazione produce un'onda longitudinale che si propaga lungo il tubo ed è riflessa all'altro estremo. Poiché l'onda incidente e quella riflessa hanno le stesse velocità, ampiezza e frequenza , nel tubo si stabilisce un'onda stazionaria.

I tubi sonori possono presentare: (a) una estremità aperta e l'altra chiusa (Figura A)

(b) due estremità aperte (Figura B) due estremità chiuse (Figura C).

	Ventri e nodi in tubi sonori con un'estremità aperta e l'altra chiusa (A), con due estremità aperte (B), con le due estremità chiuse (C)

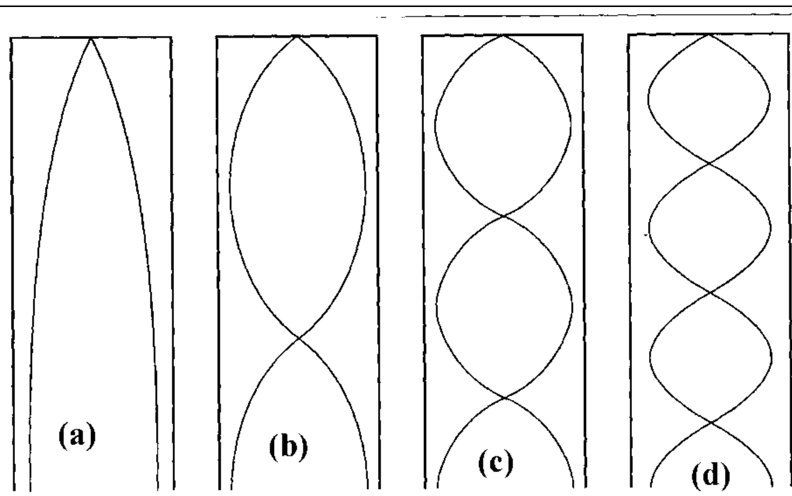
	(a) La più semplice onda sonora stazionaria (longitudinale) in uno strumento a fiato con entrambe le estremità aperte ha un ventre di spostamento (A) ad ogni estremità ed un nodo di spostamento (N) nel centro. (Gli spostamenti rappresentati dalle doppie frecce sono molto esagerati) (b) La corrispondente onda stazionaria in una corda (trasversale).



Sono rappresentati i primi 4 modi di vibrare dell'aria in un tubo con entrambe le estremità aperte. Agli estremi c'è sempre un ventre e quindi si hanno tutte le armoniche.

(a) $L = \frac{\lambda}{2}$ (b) $L = 2 \cdot \frac{\lambda}{2}$

(c) $L = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$ (d) $L = 4 \cdot \frac{\lambda}{2}$



(a) $L = \frac{\lambda}{4}$ (b) $L = 3 \cdot \frac{\lambda}{4}$ (c) $L = 5 \cdot \frac{\lambda}{4}$ (d) $L = 7 \cdot \frac{\lambda}{4}$

Sono rappresentati i primi 4 modi di vibrare dell'aria in un tubo con un'estremità aperta e l'altra chiusa. All'estremo chiuso c'è sempre un nodo ed all'estremo aperto c'è sempre un ventre e quindi si hanno solo le armoniche dispari.

Tubo sonoro con un estremo chiuso e l'altro APERTO

L'estremo chiuso rappresenta un nodo, quello aperto un ventre. Ricordando che la distanza tra due nodi successivi è $\frac{\lambda}{2}$ e che la distanza tra un nodo ed il ventre successivo è $\frac{\lambda}{4}$, possiamo scrivere:

$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ con $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ oppure $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$ con $n = 1, 2, 3, \cdots$

oppure $L = n\frac{\lambda}{4}$ con $n = 1, 3, 5, \cdots$

$$\lambda_{2n-1} = \frac{4L}{2n-1} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \quad \lambda_1 = 4L \quad , \quad \lambda_3 = \frac{4}{3}L = \frac{\lambda_1}{3} \quad , \quad \lambda_5 = \frac{4}{5}L = \frac{\lambda_1}{5}$$

Indicando con v la velocità di propagazione del suono all'interno del tubo abbiamo:

$\mathbf{f_{2n-1} = \frac{v}{\lambda_{2n-1}}} = \mathbf{\frac{2n-1}{4L} \cdot v}$ frequenza di risonanza

$\mathbf{f_1 = \frac{v}{4L}}$ prima armonica $\quad \mathbf{f_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{v}{L} = 3f_1} =$ terza armonica

$\mathbf{f_5 = \frac{5}{4} \cdot \frac{v}{L} = 5f_1} =$ quinta armonica

In un tubo con un estremo chiuso si hanno solo armoniche dispari.

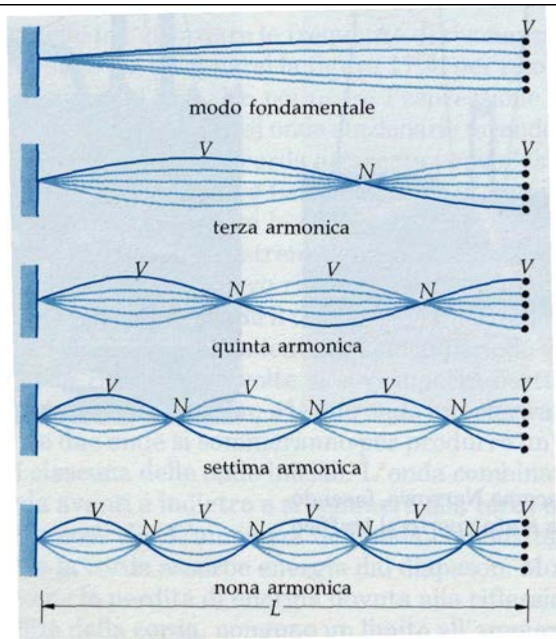
b) **Tubo sonoro aperto (chiuso) alle due estremità**

I due estremi liberi (chiusi) sono ventri (nodi). In entrambi i casi si ha la risonanza se:

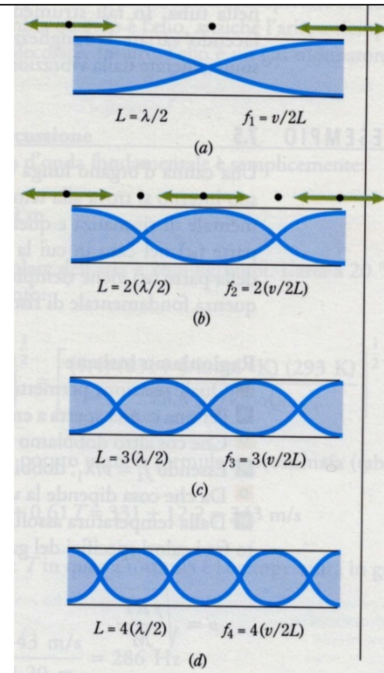
$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \lambda_1 = 2L \quad \lambda_2 = L = \frac{\lambda_1}{2} \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}L = \frac{\lambda_1}{3} \quad ,\ldots.$$

$\mathbf{f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n\,v}{2L}}$ = **frequenza di risonanza** $\quad f_1 = \frac{v}{2L} \quad f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1 \quad f_3 = \frac{3}{2}\frac{v}{L} = 3f_1$

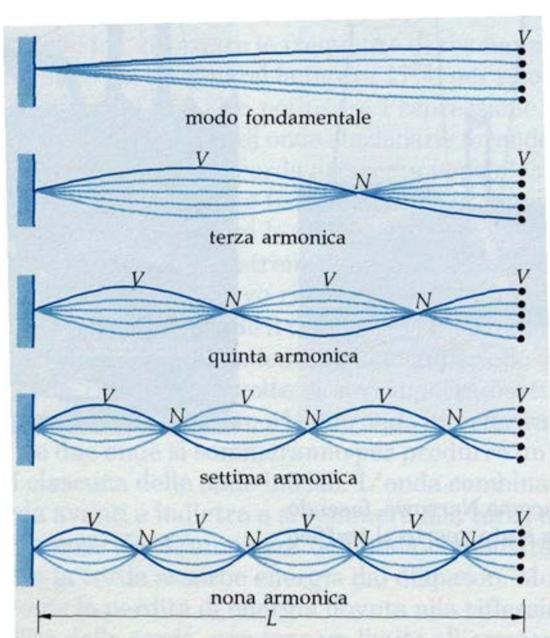
In un tubo aperto o chiuso agli estremi si hanno tutte le armoniche.



Semplici modi di vibrazione per un tubo di risonanza chiuso ad una sola estremità.



Semplici modi di vibrazione per un tubo di risonanza aperto ad entrambe le estremità .



Onde stazionarie in una corda elastica fissata ad una sola estremità. L'estremità libera è un **ventre**. Sono rappresentate la **prima armonica o frequenza principale, la terza armonica, la quinta armonica, la settima armonica, la nona armonica**.

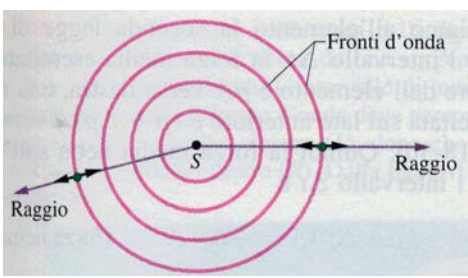
$$f_1 = \frac{v}{4L}$$ prima armonica

$$f_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{v}{L} = 3f_1 =$$ terza armonica

$$f_5 = \frac{5}{4} \cdot \frac{v}{L} = 5f_1 =$$ quinta armonica

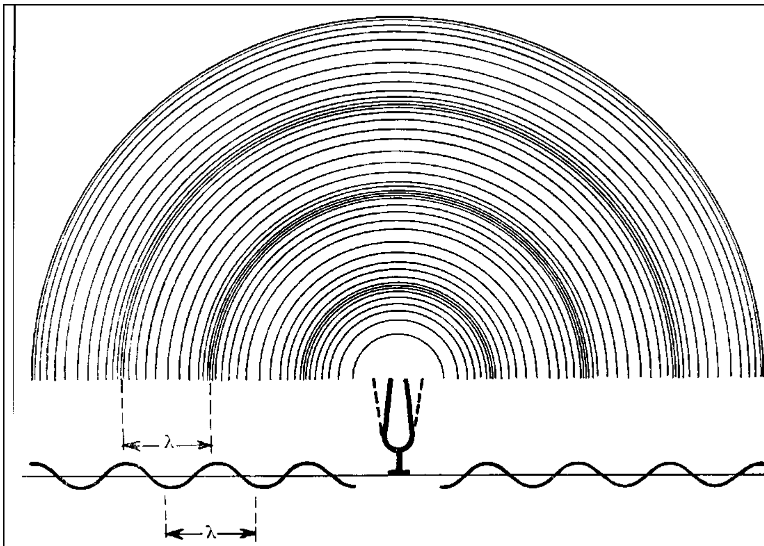
Onde acustiche

Abbiamo visto che le onde elastiche possono essere trasversali, se comportano oscillazioni perpendicolari alla direzione di propagazione, e longitudinali se comportano oscillazioni parallele alla direzione di propagazione dell'onda. **Le onde acustiche sono onde elastiche longitudinali che possono propagarsi attraverso solidi, liquidi e gas.** Le onde acustiche sono onde che richiedono un mezzo materiale per esistere. Il suono si trasmette meglio nei liquidi e nei solidi che nei gas.



Un'onda acustica emessa da una sorgente puntiforme S si propaga in tre dimensioni. I fronti d'onda disegnano sfere concentriche con centro in S ed i raggi si dipartono radialmente da S. Le due freccette contrapposte indicano che gli elementi del mezzo di propagazione oscillano parallelamente ai raggi.

Man mano che i fronti d'onda si allontanano ed i loro raggi diventano sempre più grandi, la loro curvatura diminuisce e, giunti molto lontano dalla sorgente, si possono approssimare a delle linee rette: in questa situazione le onde sono chiamate piane.



Le vibrazioni sonore di un diapason generano onde sferiche di compressione e di rarefazione

$v = \sqrt{\frac{k}{\delta}}$ = **velocità di propagazione di un'onda sonora in un fluido omogeneo**

δ = **densità del fluido** $k = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$ = **coefficiente di compressione** elastica del fluido

Δp = variazione della pressione nel fluido $\frac{\Delta V}{V}$ = variazione relativa di volume prodotta dalla variazione di pressione Δp.

- L'orecchio umano percepisce i suoni che hanno frequenza compresa fra $20\,Hz$ e $20 \cdot 000\,Hz$. Si chiamano ultrasuoni quei suoni che hanno frequenza superiore a $20 \cdot 000\,Hz$. Se la frequenza è inferiore a $20\,Hz$ si hanno i cosiddetti infrasuoni.
- Lo spostamento longitudinale **s di un elemento di massa in un mezzo elastico, dovuto ad un'onda sonora, è:** $s = s_m \cdot \cos(kx - \omega t)$ dove s_m è l'ampiezza dello spostamento (spostamento massimo) dalla posizione di equilibrio, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$, λ e **f** sono rispettivamente la lunghezza d'onda e la frequenza dell'onda acustica.

• Dicesi intensità I di un'onda acustica la quantità di energia E che in un secondo attraversa una superficie di area unitaria, disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda.

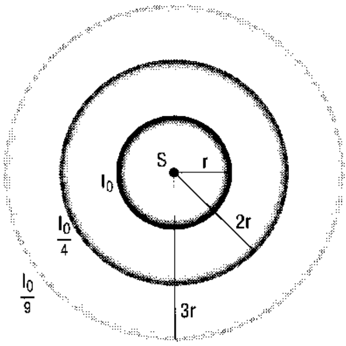
Ricordando che il rapporto tra una energia ed un tempo è una potenza (energia riferita al tempo) possiamo scrivere: $\mathcal{J} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{S} \cdot \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{S}}$ Nel S.I la sua unità di misura è il watt al metro quadrato ($\frac{W}{m^2}$)

Talvolta l'intensità $\mathcal{J}$ viene chiamata flusso di energia ed è indicata col simbolo Φ. Poiché l'intensità è inversamente proporzionale all'area, maggiore è l'ara sulla quale si distribuisce l'energia, minore è l'intensità dell'onda. Consideriamo una sorgente puntiforme di potenza **W**. Poiché l'onda si propaga nello spazio in tutte le direzioni, l'energia si distribuisce su una sfera con il centro nella sorgente. L'area della superficie di una sfera di raggio r è $4\pi r^2$, pertanto l'intensità dell'onda sonora vale: $\mathcal{J} = \frac{\mathbf{W}}{4\pi \mathbf{r}^2}$. Per due superfici sferiche generate dalla stessa sorgente puntiforme abbiamo:

$$\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \frac{\mathbf{r}_2^2}{\mathbf{r}_1^2}$$

L'intensità (energetica) I di un'onda sonora è legata all'ampiezza A dell'onda dalla relazione:

$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\delta\omega^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2 = 2\pi^2 \mathbf{f}^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2$ con v = velocità dell'onda δ = densità del mezzo dove si propaga l'onda f = frequenza dell'onda A = ampiezza di oscillazione



L'intensità dell'onda diminuisce col quadrato della distanza dalla sorgente: raddoppiando la distanza l'intensità diventa $\frac{1}{4}$, triplicando la distanza l'intensità diventa $\frac{1}{9}$….Le circonferenze potrebbero, per esempio, rappresentare le creste delle onde che si creano nell'acqua dopo avervi gettato un sasso (sorgente della perturbazione)

- L'intensità di un suono è legata all'energia associata all'onda (intensità dell'onda) ed alla frequenza dell'onda (che influenza la percezione dell'onda acustica). Si definisce livello di intensità di un suono, il logaritmo del rapporto tra l'intensità $\mathcal{J}$ del suono in questione e l'intensità $\mathcal{J}_o$ del suono al limite di udibilità ($I_o = 10^{-13} \frac{W}{m^2}$) $\mathbf{L = \log_{10} \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_o}}$ L si misura in **bel**, ma più usato è il suo sottomultiplo ($10^{-1}\, bel$) **decibel** (**db**). Usando quest'ultima unità, il livello di intensità è dato da:

$$\mathbf{L = 10 \cdot \log_{10} \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_o}}$$

Effetto Doppler

Se una sorgente di onde sonore emette un suono di una certa frequenza , un osservatore fermo riceve un suono con la stessa frequenza . Quando una sorgente sonora emette un'onda e nello stesso tempo si muove rispetto a chi percepisce l'onda , la frequenza percepita è diversa dalla frequenza emessa : questo fenomeno prende il nome di **effetto Doppler**.

Indicando con f_s la frequenza emessa dalla sorgente e con f_0 la frequenza percepita dall'osservatore valgono le due seguenti formule:

$f_o = f_s \cdot \frac{v}{v - v_s}$ sorgente in movimento che si avvicina all'osservatore fermo; osservatore fermo, sorgente in movimento

$f_o = f_s \cdot \frac{v}{v + v_s}$ sorgente in movimento che si allontana dall'osservatore fermo; osservatore fermo, sorgente in movimento

v_s è la velocità della sorgente di onde sonore , v è la velocità di propagazione del suono

L'**effetto Doppler** si ha anche quando l'osservatore si muove rispetto alla sorgente ferma. Indicando con v_o la velocità dell'osservatore , la frequenza **f** che egli percepisce è data da:

$f_o = f_s \cdot \frac{1 + v_o}{v}$ **osservatore in movimento che si avvicina alla sorgente ferma**

$f_o = f_s \cdot \frac{1 - v_o}{v}$ **osservatore in movimento che si allontana dalla sorgente ferma**

In generale, l'**effetto Doppler** si ha quando vi è un movimento relativo fra la sorgente sonora e l'osservatore.

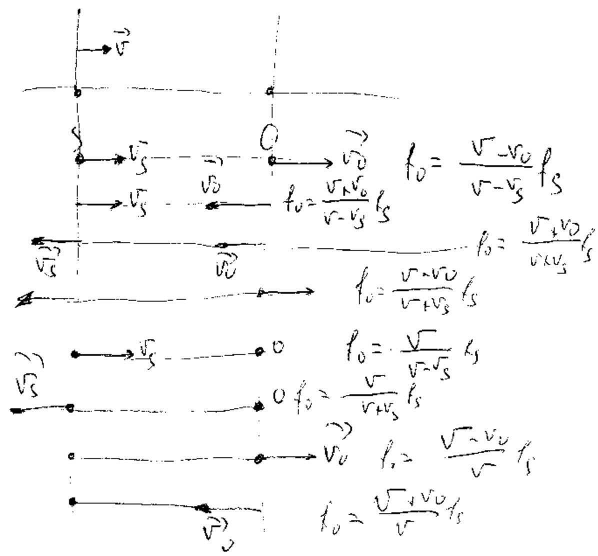
Caso generale

F_0 = frequenza percepita dall'osservatore f_s = frequenza emessa dalla sorgente
v_s = velocità della sorgente rispetto al mezzo nel quale si propaga il suono
v_o = velocità dell'osservatore rispetto al mezzo nel quale si propaga l'onda sonora

v = velocità di propagazione del suono. Nell'aria abbiamo: $v = 340\frac{m}{s}$

Vale la seguente relazione generale $f_o = \frac{v + v_o}{v - v_s} \cdot f_s$ con la seguente convenzione per i segni delle singole velocità:

1) v_o è **positiva** quando $\vec{v}_O$ è diretta verso la sorgente , è **negativa** in caso contrario
2) v_s è **positiva** quando $\vec{v}_S$ è diretta verso l'osservatore , è **negativa** in caso contrario



Battimenti

L’interferenza di due onde acustiche aventi la stessa ampiezza e frequenze quasi uguali produce un enomeno interessante noto col nome di **battimenti** .

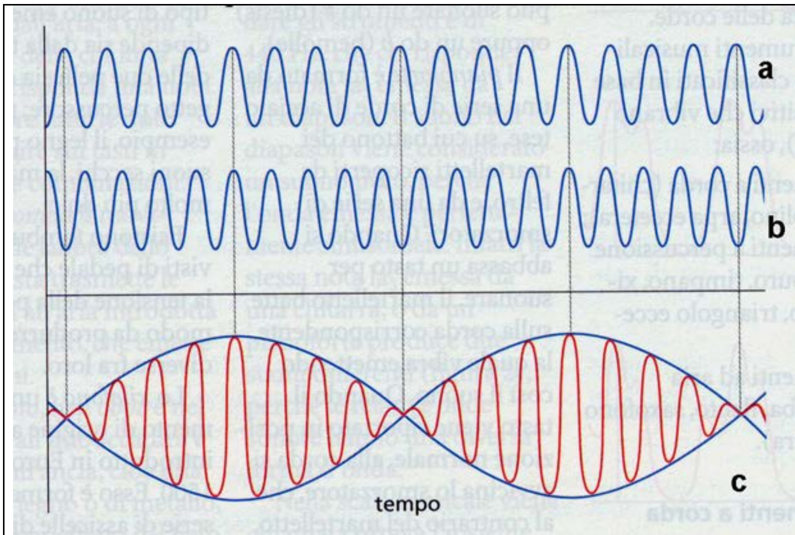
Le onde con frequenza maggiore cambiano fase più rapidamente delle altre . Per questo motivo , in una stessa posizione nel mezzo elastico considerato , le onde vengono a trovarsi alternativamente in **concordanza di fase** ed in **opposizione di fase** .

In un punto qualsiasi del mezzo elastico dove avviene la propagazione l’interferenza delle due onde acustiche aventi la spessa ampiezza e frequenze che differiscono di poco , il valore assoluto dell’ampiezza dell’onda risultante varia da un **massimo** (quando le onde sono in **fase**) , ad un **minimo** (quando le onde sono in **opposizione di fase**) .

Si compie un **ciclo** quando l’ampiezza dell’onda risultante , in valore assoluto , riacquista il **valore massimo** . Si dimostra che questo si verifica con una frequenza uguale alla differenza (in valore assoluto) delle frequenze f_1 ed f_2 delle onde interferenti .

Per **battimento** intendiamo un **massimo di intensità sonora** cioè un **massimo di ampiezza** dell’onda sonora risultante . I picchi sonori , chiamati **battimenti** , sono tanto più numerosi quando maggiore è la differenza delle frequenze delle due onde che interferiscono .

La **frequenza di battimento** che coincide col numero di battimenti al secondo è uguale alla differenza (in valore assoluto) fra le frequenze delle due sorgenti .



a) Onda di frequenza f_1

b) Onda di frequenza f_2

c) Onda risultante con 2 battimenti in quanto sono presenti 2 picchi sonori .

Il fenomeno dei battimenti si verifica quando 2 sorgenti sonore vibrano con la stessa ampiezza ma hanno frequenze leggermente diverse .

La curva in azzurro mostra la **variazione in ampiezza** che risulta dall'interferenza delle 2 frequenze .E' questa variazione di ampiezza che viene percepita come **battimenti**

$f = |f_1 - f_1|$ = **frequenza di battimento** In tal caso l'ampiezza dell'onda è massima e vale $2A$

$\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ = **pulsazione di battimento**

Equazione di un battimento

$y_1 = A\sin\omega_1 t$ = equazione della prima onda sonora

$s_2 = A\sin\omega_2 t$ = equazione della seconda onda sonora $\qquad \omega_1 \approx \omega_2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$s = 2A\cdot\cos\left[\pi\left(f_1 - f_2\right)t\right]\cdot\sin\left[\pi\left(f_1 + f_2\right)t\right]$ = **equazione del battimento**

L'equazione di un **battimento** è quella di un'onda periodica del tipo $s = A\cdot\sin\omega t$ che ha per **frequenza** la **media aritmetica** delle frequenze : $f_{ris} = \frac{f_1 + f_2}{2}$, di **pulsazione** $\omega = \pi\left(f_1 + f_2\right)$

ed **ampiezza** $A_{ris} = 2A\cdot\cos\left[\pi\left(f_1 - f_2\right)t\right]$. L'ampiezza varia con frequenza $\frac{\| f_1 - f_2 \|}{2}$ e , poiché sia hanno due battimenti per ogni periodo , si ha :

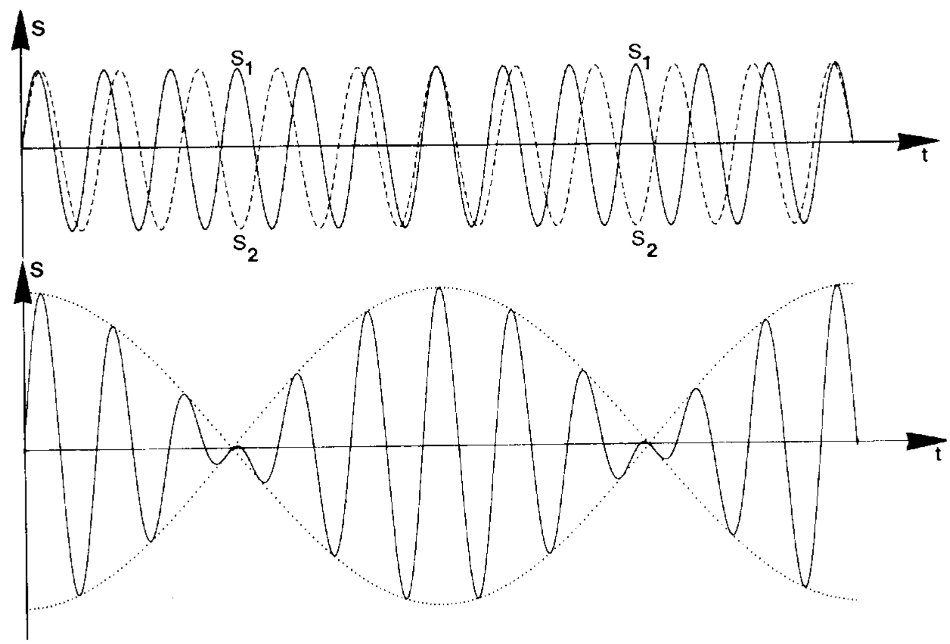
$f = |f_1 - f_1|$ = **frequenza di battimento** In tal caso l'ampiezza dell'onda è massima e vale $2A$

$\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ = **pulsazione di battimento**

Battimenti

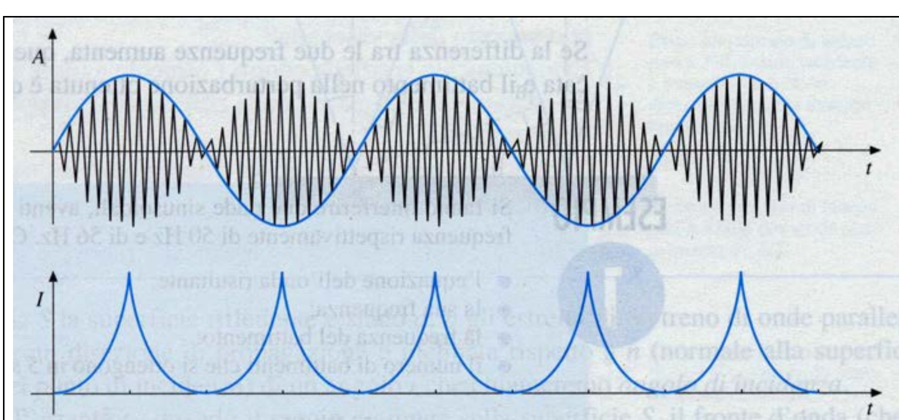
L'interferenza di due onde acustiche aventi la stessa ampiezza e frequenze quasi uguali produce un fenomeno interessante noto col nome di **battimenti** .

Il risultato è un'onda di ampiezza variabile , da 0 alla somma delle ampiezze massime delle componenti , per un susseguirsi di interferenze costruttive e distruttive .



L'interferenza tra due onde aventi frequenze leggermente diverse dà luogo al fenomeni dei **battimenti . Nella figura sono presenti 3** battimenti **in quanto sono presenti 3 picchi sonori**

L'onda sonora risultante ha una sua frequenza ed una sua ampiezza ; anche il battimento ha una sua frequenza cosi definita : << **frequenza del battimento è il numero di volte al secondo in cui la perturbazione raggiunge la massima intensità** >>



- Ampiezza di oscillazione A in un battimento
- Intensità I dell'onda risultante .
- nella figura sono presenti 5 battimenti , in quanto sono presenti 5 picchi sonori