Unità Didattica N°1

Le grandezze fisiche

1) Oggetto della fisica e metodo sperimentale..

2) Suddivisione della fisica..

3) Grandezze fisiche e loro misura..

4) Dimensioni di una grandezza fisica...

5) Misure dirette e misure indirette

6) Teoria degli errori

7) Errore semplice medio

8) Errore quadratico medio o scarto quadratico medio o deviazione standard

9) La propagazione degli errori

10) Le cifre significative

Oggetto della fisica e metodo sperimentale

La fisica, secondo il significato etimologico della parola, è la **scienza che studia i corpi ed i fenomeni che si svolgono nel mondo che ci circonda**, allo scopo di fornirci una visione della natura la più completa ed esatta possibile. Attualmente lo studio della natura è ripartito in diversi settori di ricerca nei quali rientrano la chimica, l'astronomia, la geologia, la biologia, ...

Questa suddivisione dello studio dei fenomeni naturali in più settori, dovuta al continuo estendersi delle nostre conoscenze, ha portato ad una restrizione del campo d'indagine della fisica. Semplificando al massimo possiamo affermare che la **fisica studia i fenomeni naturali dei corpi inorganici che non comportano una trasformazione sostanziale dei corpi stessi**. I fenomeni nei quali la materia interessata non subisce trasformazioni si chiamano fenomeni fisici, in contrapposizione a quelli, detti fenomeni chimici, in cui si verifica la trasformazione di una sostanza di una certa specie in un'altra di specie diversa. In ogni caso la <<fisica costituisce la base per tutte le altre scienze e le loro applicazioni>>. Il linguaggio della fisica è la matematica. Fisica è una parola che deriva dal greco ($\text{physis} = \text{natura}$). Infatti per i greci la fisica, detta anche filosofia della natura, (termine in uso fino all'inizio del $19°$ secolo) era intesa come la scienza dei fenomeni che avvengono in natura. Ribadiamo che dicesi fenomeno qualunque mutamento che avviene in natura. Un fenomeno si dice fisico se si ha un mutamento della posizione o della forma del corpo senza che avvenga alcuna alterazione della sostanza di cui il corpo è costituito. La fisica studia i fenomeni fisici. Un fenomeno si dice chimico se si ha un cambiamento della sostanza del corpo considerato.

La chimica studia i fenomeni chimici. Bisogna tenere presente che in natura non esistono distinzioni nette, cosi vi è un complesso di fenomeni il cui studio è oggetto della **chimico - fisica**. Nello studio dei fenomeni fisici ci chiediamo come e perché essi avvengono. Da Galileo abbiamo imparato che è importante chiedersi prima come e poi perché. Invertire quest'ordine è stato il limite mentale della filosofia greca e delle teologie: l'inversione significa costruirsi un modello mentale del mondo, uno schema aprioristico delle cose che ci condiziona nella ricerca delle relazioni che intervengono nei fenomeni della natura e spesso ci conduce ad erronee conclusioni.

Dire con precisione di che cosa si occupa la fisica è impossibile, soprattutto in questa fase iniziale. Qualcuno ha detto che la "**fisica si occupa di tutto**", altri hanno detto che la fisica ha come scopo la conoscenza del nostro Universo, dei suoi costituenti e del loro comportamento. Comunque vogliamo intendere la fisica un fatto è certo: dobbiamo partire dalla constatazione che gli enti fondamentali della fisica sono le grandezze fisiche tra le quali è possibile trovare delle relazioni quantitative espresse da leggi fisiche. Inoltre ciò che caratterizza la fisica è l'impiego in essa del metodo sperimentale la cui ideazione costituisce una delle glorie di Galileo. Esso si basa su tre premesse:

1) Premessa filosofica: i fenomeni naturali si ripetono in modo perfettamente regolare se vengono mantenute le stesse condizioni iniziali

2) Premessa tecnica: è possibile ripetere a nostra volontà i fenomeni naturali nelle condizioni più idonee alla osservazione

3) Premessa matematica: se una legge fisica è vera le conseguenze che si ricavano matematicamente da essa si debbono verificare nei fatti.

Se una di tali conseguenze non si ritrova verificata anche la legge deve ritenersi non vera.

Per una descrizione oggettiva dei fenomeni fisici il metodo galileiano segue 4 fasi:

1) osservazione qualitativa del fenomeno naturale (fase sperimentale)

2) schematizzazione del fenomeno, isolandone gli aspetti fondamentali da quelli accessori (fase mentale)

3) prova e riprova del fenomeno esaminato, anche in modo artificiale (fase sperimentale)

4) formulazione quantitativa della legge che governa il fenomeno (fase mentale)

Gli enti fondamentali della fisica sono le grandezze fisiche tra le quali è possibile trovare delle relazioni quantitative espresse da leggi fisiche. Ciò che caratterizza la fisica è l'impiego in essa del metodo sperimentale la cui ideazione costituisce una delle glorie di Galileo. Il metodo sperimentale consiste nella riproduzione, mediante una serie di esperimenti controllati, di un fenomeno osservato in natura, dopo che sono state individuate le grandezze fisiche fondamentali per la sua descrizione e sono state formulate ipotesi sulle relazioni tra queste grandezze. Il metodo sperimentale si realizza attraverso le seguenti fasi: (1) **Osservazione del fenomeno** (2) **Scelta delle grandezze fisiche** (3) **Formulazione di ipotesi** (4) **Serie di esperimenti ripetuti** (5) I risultati sono compatibili con le ipotesi formulate? Se la risposta è negativa si formulano altre ipotesi. Se la risposta è positiva l'ipotesi diventa legge. Il metodo sperimentale culmina nella formulazione di una legge fisica che viene espressa mediante una relazione matematica.

Suddivisione della fisica

La fisica può essere suddivisa in: 1) Fisica Classica 2) Meccanica quantistica non relativistica 3) Meccanica quantistica relativistica 4) Fisica della relatività ristretta 5) Fisica della relatività generale. Ognuna di esse ha un proprio campo di validità. La Fisica Classica è valida se applicata a corpi relativamente grandi (corpi macroscopici) dotati di velocità non elevate, cioè molto al di sotto della velocità della luce. Essa può essere a sua volta suddivisa in Meccanica, Acustica, Termologia, Ottica, Elettrologia. (1) La Meccanica: lo studio del moto dei corpi soggetti a forze (2) La Termologia: lo studio dei fenomeni legati al calore (3) l'Acustica: lo studio dei fenomeni riguardanti l'emissione e la propagazione del suono (4) l'Ottica: lo studio del comportamento e delle proprietà della luce (5) l'Elettromagnetismo: lo studio del comportamento di corpi elettrizzati che si trovano immerse in campi elettrici e magnetici.

Tutta la fisica classica può essere suddivisa in Meccanica Classica (introdotta da Newton verso il 1670) della quale l'Acustica e la Termologia sono dei capitoli, ed in Elettromagnetismo (elaborazione teorica di Maxwell verso il 1870) di cui l'ottica può essere considerata un capitolo.

La Fisica Classica fornisce risultati in netto disaccordo con l'esperienza quando le velocità dei corpi in esame sono confrontabili con la velocità della luce. In questo caso si fa ricorso alla Fisica della relatività ristretta (Einstein 1905). Ma anche questa teoria non può essere applicata quando si ha a che fare con oggetti di massa molto grande o quando si tenta di interpretare certi fenomeni alle enormi distanze delle galassie (Einstein 1915–16).

Quando sono coinvolte dimensioni atomiche o nucleari, al posto della meccanica classica si usa la Meccanica quantistica non relativistica ($1925-26$: Heisemberg, Schrodinger, Born ed altri) e, quando si incontrano sia piccole distanze sia alte velocità, la Meccanica quantistica relativistica (Dirac 1927). Come si fa a sapere quando si deve applicare una particolare teoria? Purtroppo non c'è una risposta precisa a questa domanda.

Grandezze fisiche e loro misura

Abbiamo visto che lo scopo della fisica è la descrizione del mondo e dei suoi fenomeni fisici mediante leggi fisiche espresse, di solito, da formule matematiche nelle quali sono presenti quelle che noi chiamiamo grandezze fisiche. Ma cosa sono le grandezze fisiche, cioè cosa sono gli enti che intervengono nella descrizione dei fenomeni fisici? La definizione di grandezza fisica, nel senso corrente della parola, non ha alcun significato scientifico. Il punto di vista attualmente accettato dai fisici è che una grandezza fisica è definita solo quando sono stati stabiliti i procedimenti necessari per misurarla. In questo consiste la definizione operativa di una grandezza fisica. Quindi in fisica, per grandezza fisica G intendiamo un qualsiasi ente fisico utile per la descrizione dei fenomeni fisici suscettibile di misurazione.

Una grandezza fisica è misurabile se per essa:

1) vale il **criterio del confronto**, cioè se date due grandezze della stessa specie si può dire che una di esse è maggiore, minore o uguale dell'altra, ed il verificarsi di uno di questi tre casi esclude il verificarsi degli altri due. 2) si può definire la somma di due grandezze omogenee 3) si può definire l'unità di misura. Misurare una grandezza fisica G rispetto ad un'altra della stessa specie e conosciuta {G} significa

trovare un numero α per il quale risulta: $G=\alpha\cdot\{G\}$ dove G rappresenta la grandezza fisica considerata, $\{G\}$ rappresenta l'unità di misura della grandezza G, α rappresenta la misura (che è un numero puro) della grandezza G rispetto all'unità di misura $\{G\}$.

E' attraverso la misurazione che ogni ente fisico assume la natura di grandezza fisica. In altre parole, ogni grandezza fisica è definita in maniera operativa attraverso la precisazione delle modalità di una sua misurazione. Definizione operativa di una grandezza fisica: la definizione operativa di grandezza fisica consiste nella descrizione degli strumenti da usare e del procedimento da seguire per la sua misura. Nella misurazione di una grandezza fisica si distinguono tre metodi: 1) Misurazione diretta 2) Misurazione indiretta 3) Misurazione con apparecchi tarati.

Si ha la Misurazione diretta quando la grandezza da misurare si confronta con un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità di misura. Il metodo di misurazione diretta si chiama anche relativo perché l'unità di misura si può scegliere in maniera arbitraria e quindi il valore numerico della misurazione effettuata, cioè la misura, dipende dall'unità prescelta e varia al variare di essa. Supponiamo che la grandezza G dipenda, mediante una legge matematica ben definita, da altre grandezze G_1, G_2,.. che possono essere misurate direttamente. In questo caso la misura di G si può ottenere dalle misure dirette di G_1, G_2,... e diciamo che è stata effettuata una misura indiretta di G. La Misurazione con apparecchi tarati di una grandezza G consiste nella lettura della posizione assunta da opportuni indici su scale graduate.

Tutte le grandezze fisiche vengono suddivise in grandezze fondamentali e grandezze derivate. Una grandezza si considera fondamentale se essa non viene definita mediante altre grandezze fisiche. Una grandezza si considera

derivata se viene definita mediante altre grandezze fisiche alle quali è legata da una relazione (legge fisica espressa in forma matematica). Sul piano puramente teorico tutte le grandezze fisiche potrebbero essere considerate fondamentali. Nella pratica, però, soltanto alcune di esse sono assunte come fondamentali e tutte le altre sono derivate. Quante grandezze bisogna assumere come fondamentali? Il numero di grandezze da riguardarsi come fondamentali è il minimo numero necessario per fornire una descrizione completa e non ambigua di tutte le altre grandezze fisiche.
Le grandezze fisiche necessarie per la descrizione di tutti i fenomeni fisici sono più di un centinaio.

Nel **sistema internazionale** di unità di misure $S \cdot I \cdot$ o sistema $M\,K\,S\,A\,°K\,\mathrm{cd}\,\mathrm{mol}$ le grandezze fondamentali sono sette, tutte le altre sono derivate in quanto esprimibili mediante relazioni matematiche in funzione delle 7 grandezze fondamentali: Nel sistema $S \cdot I \cdot$. fungono da grandezze fondamentali:

1) la **lunghezza** (ℓ) 2) la **massa** (m) 3) il **tempo** (t) 4) l'**intensità di corrente** (i) 5) la **temperatura** (θ o T o Θ) 6) l'**intensità luminosa** ($\mathcal{J}$) 7) la **quantità di materia** a cui corrispondono altrettante **unità fondamentali**, precisamente:

1) il **metro** (m) 2) il **chilogrammo massa** (kg o kg_m) 3) il **secondo** (s o sec) 4) l'**ampere** (A) 5) il **grado kelvin** ($°K$) 6) la **candela** (cd) 7) la **mole** (mol).

Tutte le altre grandezze sono derivate e ad esse corrispondono altrettante unità derivate. Dalla meccanica sappiamo che la velocità scalare v di un punto materiale è espressa dalla seguente relazione $v = \frac{s}{t}$, cioè v è una grandezza derivata.

La sua unità di misura è **derivata** e si ricava in base alle seguenti considerazioni:

$$v = \frac{\{s\}}{\{t\}} = \frac{m}{s}$$

Se per caso abbiamo $v = 7\frac{m}{s}$ v è la grandezza fisica, $\frac{m}{s}$ è la sua unità di misura (coerente), 7 è la misura di v rispetto all'unità che è il $\frac{m}{s}$.

Se avessi $v = 15\frac{km}{h}$, dovrei dire che il $\frac{km}{h}$ non è unità di misura coerente della velocità nel $S \cdot \mathcal{J} \cdot$ in quanto la velocità non è espressa mediante le unità del sistema $S \cdot \mathcal{J} \cdot$ delle grandezze fondamentali che la definiscono.

Osservazione N°1: Legge fisica è una relazione tra grandezze fisiche che si esprime mediante una equazione tra le grandezze stesse. Ad esempio l'equazione $s = \frac{1}{2}at^2$ rappresenta la legge fisica che ci dice come varia la posizione di un punto su di una traiettoria prestabilita al variare del tempo.

Le leggi della fisica, che esprimono relazioni tra grandezze fisiche, mantengono inalterato il loro significato qualunque sia il sistema di unità di misura in cui esse vengono espresse.

Osservazione N°2: Una grandezza fisica esiste solo se di essa possiamo dare una definizione operativa, cioè se possiamo descrivere un procedimento che ci consente di misurarla. Questo procedimento consiste: 1°) nel fissare il criterio del confronto 2°) nell'introdurre l'operazione di somma 3°) nel trovare un numero α ed una unità di misura contenuta α volte nella grandezza considerata.

Osservazione N°3: Una grandezza si dice fondamentale quando viene definita senza ricorrere ad altre grandezze fisiche. Un grandezza fisica si dice derivata quando per definirla ricorriamo ad altre grandezze fisiche. Questa suddivisione in grandezze fondamentali e derivate è solo una questione di opportunità in quanto, teoricamente, tutte le grandezze potrebbero essere considerate fondamentali. Una unità di misura fondamentale per essere considerata ottima deve possedere 4 requisiti: (1) la **precisione** (2) l'**accessibilità** (3) la riproducibilità (4) l'invariabilità. Il secondo ed il quarto requisito sono spesso inconciliabili tra loro. In questo caso si cerca di trovare un conveniente compromesso tra i due.

Osservazione N°4: In meccanica le grandezze fondamentali sono tre (lunghezza, massa, tempo) cui corrispondono tre unità fondamentali (metro, chilogrammo, secondo). Il sistema $S.I.$ diventa sistema MKS.

Osservazione N°5: Tutte le grandezze della fisica possono essere suddivise in grandezze scalari e grandezze vettoriali. Si chiamano grandezze scalari quelle grandezze che sono completamente determinate quando se ne indica la specie, l'unità di misura e la misura. Sono grandezze scalari il tempo, la massa, la densità, la temperatura, l'energia. Le grandezze scalari vengono trattate con le regole dell'algebra ordinaria. Si chiamano grandezze vettoriali quelle grandezze che sono completamente individuate da un numero che ne esprime la misura rispetto ad una unità prestabilita, da una direzione e da un verso. Sono grandezze vettoriali lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza. Ciascuna grandezza vettoriale viene rappresentata mediante un vettore. Le grandezze vettoriali vengono trattate con le regole del calcolo vettoriale.

Osservazione N°6: Si ha la misurazione indiretta quando la misura della grandezza fisica considerata è calcolata mediante la misura diretta di altre grandezze fisiche. Si ha la misurazione per mezzo di apparecchi tarati quando la misura della grandezza fisica considerata si riduce alla lettura della posizione assunta dall'indice mobile dello strumento su una opportuna scala preventivamente graduata.

Osservazione N°7: Ricordiamo alcune regole ortografiche riguardanti le notazioni delle unità di misura del $S.I.$, secondo quanto raccomandato del CIPM (**Comitato internazionale pesi e misure**): (a) I nomi delle unità di misura scritti per esteso iniziano sempre con la lettera minuscola, anche se derivano da nomi propri. Inoltre non hanno accenti e non hanno il plurale. Per esempio metro, secondo, newton, hertz, ampere (e non ampère), 10 volt e non 10 volts. (b) Le abbreviazioni sono maiuscole quando derivano da nomi propri, minuscole negli altri casi. Per esempio N (newton), m (metro), kg 8chilogrammo), s (secondo). (c) Le abbreviazioni vengono usate soltanto se accompagnate da un numero, negli altri casi il nome va scritto per esteso. Per esempio $10\,N$ (o anche per esteso; $10\,\text{newton}$) ma: "la forza si misura in newton" (e non la forza si misura in N). Il numero deve precedere sempre l'unità di misura. Per esempio $3\,kg$ (e non $kg\,3$).

Osservazione N°8: Poiché la velocità della luce è una grandezza fondamentale il cui valore è lo stesso in tutti i sistemi inerziali, a partire dall'ottobre 1983 si è deciso di attribuire i valore fisso $\mathbf{c = 2{,}9979258 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$, anziché considerare questo come risultato di una misura. Questo comporta una ridefinizione dell'unità di misura delle lunghezze e del tempo. Mediante i laser, si possono realizzare campioni di tempo di eccezionale precisione (1 parte su 10^{11}), molto maggiore di quella con la quale si possono misurare le lunghezze. Si è convenuto, pertanto, di ridefinire il metro (che diventa grandezza derivata) come la distanza percorsa dalla luce in $\frac{1}{29979458}$ di secondo.

Dimensioni di una grandezza fisica

In generale una grandezza fisica G è legata dalla legge fisica che la definisce alle grandezze fondamentali ℓ, m, t, ϑ, i, I, cioè ogni grandezza derivata è esprimibile mediante un monomio alle grandezze fondamentali, cioè:

$$G = \ell^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot t^{\gamma} \cdot i^{\delta} \cdot \vartheta^{\sigma} \cdot I^{\nu}$$

Chiamiamo dimensioni di G nel S.I. i numeri α, β, γ, δ, σ, ν. Scriviamo:

$$[G] = \left[L^{\alpha} \cdot M^{\beta} . T^{\gamma} . \mathcal{J}^{\delta} . \Theta^{\delta} \cdot J^{\nu} \right] = \text{equazione dimensionale}$$

Quali sono le dimensioni della velocità v? $[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{[L]}{[T]} = [L \cdot T^{-1}]$

Le dimensioni di una velocità sono **1** rispetto alla lunghezza, **-1** rispetto al tempo, 0 rispetto alla massa. Si dice pure che le dimensioni di una velocità sono una lunghezza per un tempo alla meno uno.

Osservazione N°1: Controllo Dimensionale

L'equazione dimensionale è molto utile per verificare se abbiamo scritto correttamente una legge fisica. Una legge fisica è infatti una equazione tra grandezze fisiche, tale per cui il primo membro ed il secondo devono avere le stesse dimensioni fisiche.

Osservazione N°2

Le dimensioni di una grandezza fisica non sono caratteristiche intrinseche della grandezza, sono soltanto delle convenzioni che dipendono dalla particolare scelta delle grandezze fondamentali. Se mutano queste, mutano anche le dimensioni.

Misure dirette e misure indirette

La misura di una grandezza fisica può essere effettuata con metodo diretto, indiretto o mediante l'uso di uno strumento tarato. Si conoscono i seguenti metodi di misura:

01) Misura diretta o per confronto: consiste nel confronto diretto tra la grandezza G da misurare ed una grandezza della stessa specie presa come campione. La misura della massa di un corpo effettuata mediante una bilancia a bracci uguali è un esempio di misura diretta.

02) Misura indiretta (o **assoluta**): la grandezza G da misurare è funzione completamente nota di altre grandezze fisiche non della stessa specie di G ma misurabili direttamente. La misura della velocità di un corpo è un esempio di misura indiretta. Infatti sappiamo che:

$\text{velocità} = \dfrac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}$ La lunghezza si misura in direttamente in metri, la lunghezza si misura direttamente in secondi, la velocità si misura in $\dfrac{\text{metri}}{\text{secondo}}$.

03) Misura mediante apparecchi tarati: Viene effettuata mediante apparecchi dotati di scale e muniti di un indice la cui posizione sulla scala stessa ci fornisce la misura della grandezza considerata. Altri strumenti, detti digitali, permettono di leggere direttamente il valore della grandezza in esame mediante cifre luminose che appaiono su un quadrante (**display**). La misura della temperatura mediante il termometro clinico è un esempio di misura di una grandezza mediante un apparecchio tarato. Caratteristiche generali degli strumenti tarati sono:

a) la sensibilità, cioè la minima grandezza che lo strumento può apprezzare

b) la portata o fondo scala, il valore massimo della grandezza che lo strumento può misurare

c) la precisione che esprime un indice della qualità dello strumento. Uno strumento è preciso se misuriamo, nelle stesse condizioni, una grandezza diverse volte ed otteniamo misure che si discostano di poco tra loro.

d) la prontezza che rappresenta un indice della rapidità con la quale lo strumento risponde alle variazioni della grandezza da misurare.

Classificazione degli errori nella misura di una grandezza

Nella fisica sperimentale non esistono misurazioni esatte in quanto tutte sono affette da errori che è impossibile da eliminare. Gli errori possono essere classificati, a seconda della loro natura, in:

01) **errori grossolani**: sono dovuti alla scarsa abilità dell'operatore oppure alla inefficienza delle apparecchiature usate.

02) **errori sistematici**: Sono quelli che si ripetono sempre con lo stesso valore e lo stesso segno anche quando si ripete la misurazione della grandezza fisica y. Essi sono dovuti ad un errore nella forma della funzione che collega le letture $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con la grandezza G da misurare.

Sono dovuti a difetti nella strumentazione usata o a metodi errati di misura; essi agiscono sempre per eccesso o per difetto. Questi errori non si possono mai eliminare completamente ma, utilizzando opportuni accorgimenti, possono essere ridotti al minimo.

03) errori accidentali o casuali **o** statistici: Sono dovuti a cause non completamente definibili e che si possono ripercuotere sul valore misurato sia in senso positivo, sia in senso negativo, cioè possono agire sia per difetto che per eccesso. In generale l'**errore casuale o accidentale o statistico** è prodotto da una molteplicità di cause non bene individuabili che possono agire sia per difetto che per eccesso. Gli errori accidentali sono dovuti al fatto che nella ripetizione della misura interviene un elemento casuale che può dipendere sia dallo strumento sia da chi effettua la misura.

Determinazione dell'errore nelle misure dirette

Sia G una grandezza da misurare. Sia inoltre: $\mathbf{x}$ il **valore esatto** della grandezza G da misurare ed $\mathbf{x_M}$ il valore misurato.

$$\boldsymbol{\varepsilon = \varepsilon_a = x - x_M = \Delta x} \quad \text{è l'}\textbf{errore assoluto} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = x_M \pm \varepsilon_a}$$

Questo significa che il valore esatto $\mathbf{x}$ della grandezza G è compreso tra i valori $x_M - \varepsilon$ ed $x_M + \varepsilon$ cioè vale la seguente relazione: $\mathbf{x_M - \varepsilon_a < x < x_M + \varepsilon_a}$

La misura di una grandezza G può essere espressa correttamente nella seguente maniera:

valore x della grandezza = **risultato** x_M **della misura** $\pm$ **errore assoluto** ε_a

Se, dopo avere misurato la lunghezza di un'asta scrivo: $L = (60 \pm 0,5)\ mm$ vuole dire che il valore esatto della lunghezza dell'asta è compreso tra $59,5 mm$ e $60,5 mm$, cioè:

$60 - 0,5 < L < 60 + 0,5 \qquad 59,5 mm < L < 60,5 mm$.

$$errore\ relativo = \frac{errore\ assoluto}{valore\ della\ grandezza\ misurata} \qquad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{x_M} = \frac{x - x_M}{x_M} = \frac{\Delta x}{x_M}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_r \cdot 100 = \frac{\varepsilon_a}{x_M} \cdot 100 \quad = \text{errore percentuale}$$

L'errore relativo non è diverso dall'errore percentuale. Essi sono solo due modi diversi di descrivere la stessa cosa. Supponiamo che la misura di una lunghezza dà come risultato: $L = (69 \pm 1) mm$ Questo significa che: $(69 - 1) mm < L < (69 + 1) mm$

$68 mm < L < 70 mm \qquad \Delta x = 1 mm \qquad x_M = 69 mm \qquad \varepsilon_r = \frac{1mm}{69 mm} = \frac{1}{69} = 0,014$

$\varepsilon_p = \varepsilon_r \cdot 100 = 0,014 \cdot 100 = 1,4\%$

E' chiaro che, essendo sconosciuto il valore esatto x della grandezza G da misurare, sono sconosciuti anche i valori di ε_a, ε_r, $100\varepsilon_r$. Allora quali valori bisogna attribuire ad ε_a, ε_r, $100\varepsilon_r$, x_M per calcolare il valore esatto **x** della grandezza G? Nella pratica si procede come segue. Supponiamo di misurare n volte la grandezza G e di trovare i seguenti risultati: $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$. Fra tutti questi valori trovati si cerca il valore più probabile che sarà considerato come il valore misurato x_M. Si tratta della media aritmetica dei valori trovati:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{n} = \overline{x}$$

che, come si può dimostrare, è il valore più probabile.

Infatti, se si eseguono **n** misure di una grandezza **x** e si ottengono i valori $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$ nessuno di questi può essere considerato il valore esatto della misura.

Allora assumiamo come valore esatto della grandezza **x** il valore più probabile delle misure effettuate $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$ che, di solito, coincide con la loro media aritmetica:

$$\mathbf{x_m = x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{n} = \overline{x}}$$

Poiché il valore esatto della grandezza G deve essere compreso tra il valore minimo e quello massimo, è lecito supporre che **l'errore assoluto** ε_a coincida con la **semidifferenza** tra il valore massimo misurato e quello minimo, cioè è ragionevole porre: $\boldsymbol{\varepsilon_a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = e_m}$ = semi dispersione massima

dove x_{max} ed x_{min} sono il **valore più grande** ed il **valore più piccolo** ottenuti nelle misure.

Naturalmente i valori estremi non debbono discostarsi troppo da quelli intermedi, altrimenti il valore della semidispersione potrebbe risultare inattendibile. Quanto detto è lecito perché il valore esatto deve cadere fra il massimo ed il minimo valore ottenuto nelle misure effettuate.

Nella pratica, dopo avere effettuato n misurazioni della grandezza G, scriviamo:

$$\mathbf{x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{n} \pm \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = x_m \pm \varepsilon_a = \overline{x} \pm e_m}$$

dove $\overline{x}$ è il valore più probabile, cioè la media aritmetica delle n misure trovate, Δx è l'errore (massimo) presumibile, cioè il massimo errore presumibilmente commesso attribuendo alla grandezza G il valore $\overline{x} = x_M$ al posto del valore esatto x.

Come **errore assoluto** ε_a possiamo considerare anche l'errore semplice medio δ, oppure la deviazione standard σ.

Esempio numerico

La misura di una lunghezza dà i seguenti risultati espressi in millimetri:

13,26 ; 13,25 ; 13,24 ; 13,24 ; 13,27 ; 13,28

$$x_M = \frac{13,26 + 13,25 + 13,24 + 13,24 + 13,27 + 13,28}{6} = 13,25\,mm$$

x_M è il valore più probabile ed è da noi assunto come il valore della grandezza misurata

$\varepsilon_a = x - x_M = \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{13,28 - 13,24}{2} = 0,02$ = errore presumibile che per noi sarà l'errore assoluto.

Scriveremo: $x = \ell = (13,25 \pm 0,02)\,mm$ cioè: $13,23\,mm < x = \ell < 13,27\,mm$

Questo risultato ci consente di affermare che la prima cifra decimale (2) è esatta, mentre possiamo dire sulla correttezza della seconda cifra decimale (5).

$e_r = \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{x_M} = \frac{x - x_M}{x_M} = \frac{\Delta x}{x_M} = \frac{\Delta x}{\overline{x}} = \frac{0,02}{13,25} = 0,0015$ = **errore relativo** $\mathbf{e_r = \varepsilon_r = \frac{\Delta x}{\overline{x}}}$

L'errore relativo $\mathbf{e_r = \varepsilon_r}$ è uguale al rapporto tra l'errore assoluto ed il valore medio.

$\varepsilon_p = 100 \cdot \varepsilon_r = 0,15\%$ = **errore percentuale**

Errore semplice medio

Supponiamo di avere effettuato n misure della grandezza G e di avere trovato i seguenti risultati: $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$.

Le differenze $S_1 = x_1 - \overline{x}; S_2 = x_2 - \overline{x}; \cdots, S_n = x_n - \overline{x}$ tra le singole misure ed il valore medio $\overline{x}$ si chiamano scarti semplici della serie di misure dal valore medio $\overline{x}$.

L'errore semplice medio δ è definito come la **media aritmetica dei valori assoluti degli scarti:**

$$\boldsymbol{\delta = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}}$$

Se qualche misura si ripete e se essa si presenta f volte, allora la formula precedente diventa:

$$\boldsymbol{\delta = \frac{f_1 \cdot |x_1 - \overline{x}| + f_2 \cdot |x_2 - \overline{x}| + \cdots + f_n \cdot |x_n - \overline{x}|}{f_1 + \cdots\cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{f_1 + \cdots\cdots + f_n}}$$

In questo caso risulta: $x = \overline{x} \pm \delta$

i	x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
1	13,26	0	0,00
2	13,25	-0,01	0,01
3	13,24	-0,02	0,02
4	13,24	-0,02	0,02
5	13,27	0,01	0,01
6	13,28	0,02	0,02
	$\sum_{i=1}^{6} x_i =$ 79,54		0,08
	$\overline{x} =$ 13,26		$\delta =$ 0,01

Errore quadratico medio o scarto quadratico medio o deviazione standard

Dicesi **varianza** la media aritmetica σ^2 dei quadrati degli scarti delle singole misure dal valore medio $\overline{x}$. In formule abbiamo:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Se qualche misura si ripete, allora la precedente formula può essere scritta:

$$\sigma^2 = \frac{f_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + f_n \cdot (x_n - \overline{x})^2}{f_1 + \cdots\cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{f_1 + \cdots\cdots + f_n}$$

La radice quadrata della varianza prende il nome di **errore quadratico medio** o **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** della serie di misure $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$. In simboli abbiamo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Se qualche misura si ripete, allora la precedente formula può essere scritta:

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + f_n \cdot (x_n - \overline{x})^2}{f_1 + \cdots\cdots + f_n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{f_1 + \cdots\cdots L + f_n}}$$

Se assumiamo come errore la deviazione standard la misura della grandezza G è espressa, come al solito, con la scrittura: $x = \overline{x} \pm \sigma$

i	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	13,26	0	0,0000
2	13,25	-0,01	0,0001
3	13,24	-0,02	0,0004
4	13,24	-0,02	0,0004
5	13,27	0,01	0,0001
6	13,28	0,02	0,0002
	$\sum_{i=1}^{6} x_i =$ 79,54		$\sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x})^2 = 0{,}0012$
	$\overline{x} = 13{,}26$		$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x})^2}{6}} = \sqrt{0{,}0002} = 0{,}014 \approx 0{,}01$

$$x = 13{,}26 \pm 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad 13{,}25 < x < 13{,}26$$

Calcolo dell'errore nelle misure indirette, ovvero la propagazione degli errori

Spesso in laboratorio si eseguono misure indirette, cioè misure di grandezze legate da relazioni matematiche ad altre grandezze che sono determinate con metodo diretto o con l'usa di strumenti tarati.

Per calcolare l'area S di un tavolo lungo a metri e largo b metri utilizziamo la formula: $S = a \cdot b$

La quale ci permette, dopo avere misurato a e b, di misurare S. Poiché le misure di a e b sono affette da errori, anche quella di S contiene un certo errore. Si dice che gli errori di misura su a e b si sono **propagati** su S. La relazione che esprime l'errore di misura su S in funzione degli errori di misura su a e b si chiama legge di propagazione degli errori.

1) Somma di due grandezze misurate **y = a + b**

$$\Delta y = \Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b \qquad \Delta y = \Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$$

<<**L'errore assoluto commesso sulla somma algebrica di due o più grandezze misurate è uguale alla somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure**>>

Esempio

$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ Per ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 abbiamo trovato:

$\ell_1 = (3{,}25 \pm 0{,}01)\,m$, $\ell_2 = (0{,}15 \pm 0{,}01)\,m$, $\ell_3 = (5{,}14 \pm 0{,}02)\,m$ **ℓ = (8,54 ± 0.04)m**

● L'errore relativo (ed anche quello percentuale) commesso sulla grandezza y è compreso fra il maggiore ed il minore degli errori relativi delle grandezze a e b, cioè:

$$\varepsilon_r = \frac{a\varepsilon_{1r} + b\varepsilon_{2r}}{a + b}$$

Infatti: $\varepsilon_{1r} = \dfrac{\varepsilon_1}{a}$, $\varepsilon_{2r} = \dfrac{\varepsilon_2}{b}$, $\varepsilon_1 = a\varepsilon_{1r}$, $\varepsilon_2 = b\varepsilon_{2r}$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = a\varepsilon_{1r} + b\varepsilon_{2r}$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{a\varepsilon_{1r} + b\varepsilon_{2r}}{a + b} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{1r} < \varepsilon < \varepsilon_{2r} \;\; oppure \;\; \varepsilon_{2r} < \varepsilon < \varepsilon_{1r}$$

2) Differenza di due grandezze misurate **y = a - b**

$$\Delta y = |\Delta a| + |\Delta b| \qquad \text{cioè :} \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

<<**L'errore assoluto commesso sulla differenza di due o più grandezze misurate è uguale alla somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure**>>

Risulta pure: $\boxed{\varepsilon = \dfrac{a\varepsilon_{1r} + b\varepsilon_{2r}}{a - b}}$ da cui si deduce che : $\begin{cases} \varepsilon > \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon > \varepsilon_{2r} \end{cases}$

L'errore sulla somma o differenza di due grandezze misurate è uguale alla somma dei corrispondenti errori.

3) Prodotto di due grandezze misurate $\quad y = a \cdot b$

$\Delta y = |b \Delta a| + |a \Delta b|$ cioè: $\varepsilon = b \varepsilon_1 + a \varepsilon_2$

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \frac{|b\Delta a| + |a\Delta b|}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \qquad \boxed{\varepsilon = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}}$$

L'errore relativo (o percentuale) commesso nel prodotto di due o più grandezze misurate è la somma degli errori relativi (o percentuali) commessi sulle singole misure.

4) Rapporto di due grandezze misurate $\quad y = \frac{a}{b}$

$$\Delta y = \frac{b\Delta a + a \Delta b}{b^2} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}$$

L'errore relativo (o percentuale) commesso sul rapporto di due o più grandezze misurate è la somma degli errori relativi (o percentuali) commessi sulle singole misure del numeratore e del denominatore.

5) Potenza di una grandezza misurata $\quad y = a^n$

$$\varepsilon = \Delta y = \left| n \cdot a^{n-1} \cdot \Delta a \right| = n \cdot a^{n-1} \cdot \varepsilon_1 \qquad \varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = n \cdot \frac{\Delta a}{a} = n \cdot \varepsilon_{1r}$$

L'errore relativo (o percentuale) di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per l'errore relativo (o percentuale) della base.

6) Radice ennesima di una grandezza misurata $\quad \boxed{y = \sqrt[n]{a}}$

$$\varepsilon = \Delta y = \frac{1}{n} \cdot a^{\frac{1-n}{n}} \cdot \Delta a = \frac{1}{n} \cdot a^{\frac{1-n}{n}} \cdot \varepsilon_1 \qquad \varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta a}{a} = \frac{\varepsilon_{1r}}{n}$$

L'errore relativo (o percentuale) di una radice è uguale al quoziente tra l'errore relativo (o percentuale) del radicando e l'indice del radicale.

In una somma o in una differenza si sommano gli errori assoluti. In un prodotto o in un quoziente si sommano gli errori relativi (e quindi anche percentuali)

Le cifre significative

Definiamo cifre significative del risultato di un'operazione di misura le cifre note come certe più la prima cifra incerta. Infatti le cifre significative di una misura diretta sono le cifre note con certezza più la prima cifra incerta. Il numero di cifre significative si determina contando la cifra incerta e tutte quelle alla sua sinistra fino all'ultima cifra diversa da zero. Nella scrittura di un numero decimale, gli zeri iniziali a sinistra servono solo a indicare la posizione decimale della prima cifra e non debbono essere contati tra le cifre significative. Il numero $\mathbf{0,03}$ ha una sola cifra significativa che è il $\mathbf{3}$· Sono, invece, cifre significative gli **zeri finali alla destra della virgola decimale**. Il numero $\mathbf{0,030}$ ha due cifre significative che sono $\mathbf{3}$ e $\mathbf{0}$.

Arrotondamento di un numero

Arrotondare un numero significa sostituirlo con un altro che abbia meno cifre significative. L'ultima cifra considerata è aumentata di una unità (1) se è seguita da una cifra ≥ 5 (arrotondamento per eccesso), non è modificata se è seguita da una cifra minore di 5 (arrotondamento per difetto).

Arrotondare il numero $\mathbf{45,352}$ $\mathbf{45,35}$ (arrotondamento per difetto)

$\mathbf{45,4}$ (arrotondamento per eccesso).

Cifre significative di una misura indiretta e dell'errore della misura

Quando usiamo la formula $\mathbf{x = x_m \pm \varepsilon_a = \overline{x} \pm e_m}$ dobbiamo seguire la seguente convenzione: • dobbiamo indicare l'errore $\mathbf{\varepsilon_a = e_m}$ con una o al massimo due cifre significative • una misura non può avere cifre di posto superiore all'ultima cifra dell'errore, cioè il risultato della misura deve essere scritto in modo che la sua ultima cifra significativa sia nella stessa posizione decimale dell'errore.

Se, per esempio, abbiamo: $x_M = 18,26\,s$, $e_m = 0,2\,s$ allora dobbiamo scrivere:

$x = (18,3 \pm 0,2)\,s$ avendo approssimato per eccesso il valore trovato $x_M = 18,26\,s$ ad una sola cifra decimale. Se l'errore presenta due cifre decimali anche la misura deve essere approssimata (per eccesso o per difetto) a due cifre decimali.

Calcolo dell'errore nelle misure indirette: legge di propagazione degli errori

01) Somma di due grandezze misurate $G = G_1 + G_2$

Per la grandezza G abbiamo: $x = x_M \pm \varepsilon_a$, per la grandezza G_1 abbiamo: $x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$, per la grandezza G_2 abbiamo : $x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$. $\mathbf{x = x_{1M} + x_{2M} \pm (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a})}$

Regola: L'errore assoluto commesso nella somma di due o più grandezze misurate è la somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure. $\mathbf{\varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}}$

Regola: L'errore relativo commesso nella somma di due o più grandezze misurate è compreso fra il maggiore ed il minore degli errori relativi delle grandezze misurate.

Nel caso della somma di due grandezze abbiamo: $\mathbf{\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{1r} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}}{x_{1M} + x_{2M}}}$

02) Differenza di due grandezze misurate $G = G_1 - G_2$

Per la grandezza G abbiamo: $x = x_M \pm \varepsilon_a$, per la grandezza G_1 abbiamo: $x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$, per la grandezza G_2 abbiamo : $x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$. $\mathbf{x = x_{1M} - x_{2M} \pm (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a})}$

Regola: L'errore assoluto commesso nella differenza di due grandezze misurate è la somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure. $\varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$

Regola: L'errore relativo commesso nella somma di due o più grandezze misurate è compreso fra il maggiore ed il minore degli errori relativi delle grandezze misurate.

Nel casso della somma di due grandezze abbiamo: $\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{1r} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}}{x_{1M} - x_{2M}}$

03) Prodotto di due grandezze misurate $G = G_1 \cdot G_2$

Per la grandezza G abbiamo: $x = x_M \pm \varepsilon_a$, per la grandezza G_1 abbiamo: $x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$, per la grandezza G_2 abbiamo : $x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$.

Regola: L'errore relativo (o percentuale) commesso nel prodotto di due grandezze misurate è la somma degli errori relativi (o percentuali) commessi sulle singole misure.

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_{1a}}{x_{1M}} + \frac{\varepsilon_{2a}}{x_{2M}}$$

Per il calcolo dell'errore assoluto bisogna applicare la seguente formula:

$\varepsilon_a = x_{2M} \cdot \varepsilon_{1a} + x_{1M} \cdot \varepsilon_{2a} = x_{1M} \cdot x_{2M} \cdot \varepsilon_r$ $\qquad x = x_{1M} \cdot x_{2M} \pm \left(x_{2M} \cdot \varepsilon_{1a} + x_{1M} \cdot \varepsilon_{2a} \right) = x_{1M} \cdot x_{2M} \pm x_{1M} \cdot x_{2M} \cdot \varepsilon_r$

03) Rapporto di due grandezze misurate $G = \dfrac{G_1}{G_2}$

Per la grandezza G abbiamo: $x = x_M \pm \varepsilon_a$, per la grandezza G_1 abbiamo: $x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$, per la grandezza G_2 abbiamo : $x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$.

Regola: L'errore relativo (o percentuale) commesso nel rapporto di due grandezze misurate è la somma degli errori relativi (o percentuali) commessi sulle singole misure. $\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} = \dfrac{\varepsilon_{1a}}{x_{1M}} + \dfrac{\varepsilon_{2a}}{x_{2M}}$

Per il calcolo dell'errore assoluto bisogna applicare la seguente formula:

$$\varepsilon_a = \frac{x_{2M} \cdot \varepsilon_{1a} + x_{1M} \cdot \varepsilon_{2a}}{x_{2M}^2} = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \left(\frac{\varepsilon_{1a}}{x_{1M}} + \frac{\varepsilon_{1a}}{x_{2M}} \right) = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \left(\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} \right) = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \cdot \varepsilon_r$$

$$x = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \pm \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \left(\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} \right) = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \pm \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \cdot \varepsilon_r$$

03) Potenza di una grandezza misurata: $G = G_1^n$

Regola: L'errore relativo (o percentuale) di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per l'errore relativo della base. $\varepsilon_r = n \cdot \varepsilon_{1r}$

04) Radice di una grandezza misurata: $G = \sqrt[n]{G_1}$

Regola: L'errore relativo (o percentuale) di una radice è uguale al quoziente dell'errore relativo del radicando con l'indice della radice: $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon_{1r}}{n}$

Valori delle grandezze derivate $G_1 : x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$ $G_2 : x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$ e corrispondenti **errori assoluti e relativi**

Grandezza G	Valore misurato x_M	Errore assoluto ε_a	Errore relativo ε_r
$G = G_1 + G_2$	$x_M = x_{1M} + x_{2M}$	$\varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$	$\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{1r} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}}{x_{1M} + x_{2M}}$
$G = G_1 - G_2$	$x_M = x_{1M} - x_{2M}$	$\varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$	$\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{1r} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}}{x_{1M} - x_{2M}}$
$G = G_1 \cdot G_2$	$x_M = x_{1M} \cdot x_{2M}$	$x_{2M} \cdot \varepsilon_{1a} + x_{1M} \cdot \varepsilon_{2a} = \varepsilon_a = \varepsilon_r \cdot x_{1M} \cdot x_{2M}$	$\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}$
$G = \dfrac{G_1}{G_2}$	$x_M = \dfrac{x_{1M}}{x_{2M}}$	$\varepsilon_a = \dfrac{x_{1M}}{x_{2M}} \left(\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} \right) = \dfrac{x_{1M}}{x_{2M}} \cdot \varepsilon_r$	$\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}$
$G = G_1^n$	$x_M = x_{1M}^n$	$\varepsilon_a = x_M \cdot \varepsilon_r = x_M \cdot n \cdot \varepsilon_{1r}$	$\varepsilon_r = n \cdot \varepsilon_{1r}$
$G = \sqrt[n]{G_1}$	$x_M = \sqrt[n]{x_{1M}}$	$\varepsilon_a = x_M \cdot \varepsilon_r = x_M \cdot \dfrac{\varepsilon_{1r}}{n}$	$\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon_{1r}}{n}$

Esempio numerico

Siano G_1 e G_2 due grandezze omogenee. In un laboratorio di fisica si sono eseguite 5 misurazioni ottenendo i seguenti risultati:

G_1: 13,26 ; 13,25 ; 13,24 ; 13,24 ; 13,27 ; 13,28 G_2: 34,756 ; 34,755 ; 34,759 ; 34,753 ; 34,756

Dopo avere calcolato il **valore più probabile**, l'**errore assoluto** e l'**errore relativo** di G_1 e G_2 calcolare il **valore più probabile**, l'**errore assoluto** e l'**errore relativo** delle seguenti grandezze:

1) $G = G_1 + G_2$ **2)** $G = G_2 - G_1$ **3)** $G = G_1 \cdot G_2$ **4)** $G = \frac{G_1}{G_2}$ **5)** $G = G_1^3$ **6)** $G = \sqrt{G_1}$

Per la grandezza G_1 sappiamo che: $x_{1M} = 13,25$ è il valore più probabile ed è da noi assunto come il valore della grandezza misurata, $\varepsilon_{1a} = \frac{13,28 - 13,24}{2} = 0,02$ è l'errore assoluto. Scriveremo: $x_1 = (13,25 \pm 0,02)$ cioè: $13,23 < x < 13,27$

$\varepsilon_{1r} = \frac{\varepsilon_a}{x_M} = \frac{0,02}{13,25} = 0,0015$ = **errore relativo**

$\varepsilon_{1p} = 100 \cdot \varepsilon_r = 0,15\%$ = **errore percentuale**

Per la grandezza G_2 otteniamo i seguenti risultati:

$$x_{2M} = \frac{34,756+34,755+34,759+34,753+34,758}{5} = \frac{173,781}{5} = 34,756$$

$$\varepsilon_{2a} = \frac{34,759 - 34,753}{2} = \frac{0,006}{2} = 0,003$$

$$\varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_{2a}}{x_{2M}} = \frac{0,003}{34,756} = 0,000086 \qquad \varepsilon_{2p} = 100 \cdot \varepsilon_{2r} = 100 \cdot 0,000086 = 0,0086\%$$

$$x_2 = 34,756 \pm 0,003$$

1) $G = G_1 + G_2$

$$x = x_{1M} + x_{2M} \pm (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}) = 13,25 + 34,756 \pm (0,02 + 0,003) = 48,006 \pm 0,023$$

2) $G = G_2 - G_1$ $\quad x = x_{1M} - x_{2M} \pm (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}) = 34,756 - 13,25 \pm 0,023 = 21,506 \pm 0,023$

3) $G = G_1 \cdot G_2$ $\qquad \varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} = 0,0015 + 0,00086 = 0,001586$

$$\varepsilon_a = 0,001586 \cdot 34,756 \cdot 13,25 = 0,46 \qquad x = x_{1M} \cdot x_{2M} \pm x_{1M} \cdot x_{2M} \cdot \varepsilon_r = 460,517 \pm 0,46$$

4) $G = \frac{G_1}{G_2}$ $\qquad \varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} = 0,0015 + 0,00086 = 0,001586$

$$\varepsilon_a = 0,001586 \cdot \frac{13,25}{34,756} = 0,001586 \cdot 0,38 = 0,0006 \qquad x = 0,38 \pm 0,0006$$

5) $G = G_1^3 \quad x_M = x_{1M}^3 = 2326,2 \quad \varepsilon_r = 3 \cdot \varepsilon_{1r} = 3 \cdot 0,0015 = 0,0045 \quad \varepsilon_a = 2326,2 \cdot 0,0045 = 6$

$$x = 2326,2 \pm 6$$

6) $G = \sqrt{G_1} \quad x_M = \sqrt{x_{1M}} = \sqrt{13,25} = 3,64 \quad \varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon_{1r}}{2} = \dfrac{0,0015}{2} = 0,00075$

$$\varepsilon_a = x_M \cdot \varepsilon_r = 3,64 \cdot 0,00075 = 0,00273$$

Altro modo di calcolare l'errore relativo

Sia $y = f(a,b)$ una funzione a due variabili. Dal calcolo differenziale sappiamo che risulta:

$$\frac{dy}{y} = d\ln y = d\ln f(a,b) = \frac{f'_a(a,b) \cdot da + f'_b(a,b) \cdot db}{f(a,b)}$$

Al posto dei differenziali da e db si sostituiscono gli errori assoluti $db \simeq b \cdot \varepsilon_{br} = x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}$ dove $a = x_{1M}$ rappresenta il valore più probabile della grandezza a e $\varepsilon_{ra} = \varepsilon_{1r}$ l'errore relativo della grandezza a; $b = x_{2M}$ rappresenta il valore più probabile della grandezza b e $\varepsilon_{br} = \varepsilon_{2r}$ l'errore relativo della grandezza b;

La relazione trovata, se applicata alla teoria degli errori, va scritta nella seguente maniera:

$$\mathbf{\frac{dy}{y} = d\ln y = d\ln f(a,b) = \frac{|f'_a(a,b) \cdot da| + |f'_b(a,b) \cdot db|}{f(a,b)}}$$

Esempi

$\mathbf{y = a + b} \quad \dfrac{dy}{y} = d\ln(a+b) = \dfrac{1 \cdot da + 1 \cdot db}{a + b} = \dfrac{da + db}{a + b} = \dfrac{a \cdot \varepsilon_{ar} + b \cdot \varepsilon_{br}}{a + b} \quad \boldsymbol{\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{ar} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{br}}{x_{1M} + x_{2M}}} \quad \Rightarrow$

$(x_{1M} + x_{2M}) \cdot \varepsilon_r = x_{1M} \cdot \varepsilon_{ar} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{br} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$

$\mathbf{y = k_1 \cdot a \cdot k_2 \cdot b} \quad \dfrac{dy}{y} = d\ln(k_1 a \cdot k_2 b) = d(\ln k_1 + \ln a + \ln k_2 + \ln b) = d(\ln a + \ln b) = \dfrac{da}{a} + \dfrac{db}{b}$

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{da}{a} + \dfrac{db}{b} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ cioè: $\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}$

$\mathbf{y=\sqrt{\frac{k_1\,a}{k_2\,b^5}}}$ $\qquad \ln y = \frac{1}{2}\ln k_1 + \frac{1}{2}\ln a - \frac{1}{2}\ln k_2 - \frac{5}{2}\ln b \qquad \frac{d\,y}{y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d\,a}{a} + \frac{5}{2}\cdot\frac{d\,b}{b} \qquad \frac{\Delta\,y}{y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\,a}{a} + \frac{5}{2}\cdot\frac{\Delta b}{b}$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{1r} + \frac{5}{2}\cdot\varepsilon_{2r}$$

$\mathbf{y=\frac{k_1\,a^2}{k_2\,b^3}}$ $\qquad \ln y = \ln k_1 + 2\ln a - \ln k_2 - 3\ln b \qquad \varepsilon_r = \frac{\Delta\,y}{y} = 2\frac{\Delta\,a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b} \qquad \varepsilon_r = 2\varepsilon_{1r} + 3\varepsilon_{2r}$

Quindi, calcolato l'errore relativo massimo a priori, si può risalire subito al valore di quello assoluto moltiplicando il primo per y.

N.B. Il differenziale totale $d\,y$ è una grandezza infinitesima e non è lecito sostituire variazioni finite al posto dei differenziali delle variabili, nell'intento di calcolare le variazioni finite $\Delta\,y$ della funzione y. Tuttavia se la sostituzione viene fatta con variazioni $\Delta\cdots$ finite, ma piccole rispetto ai valori delle variabili indipendenti $a, b, \cdots$ l'operazione, anche se non rigorosa dal punto di vista matematico, è accettabile dal punto di vista della fisica.