Unità Didattica N°1

Le grandezze fisiche

Oggetto della fisica e metodo sperimentale

La fisica, secondo il significato etimologico della parola, è la **scienza che studia i corpi ed i fenomeni che si svolgono nel mondo che ci circonda**, allo scopo di fornirci una visione della natura la più completa ed esatta possibile. Attualmente lo studio della natura è ripartito in diversi settori di ricerca nei quali rientrano la chimica, l'astronomia, la geologia, la biologia, ...
Questa suddivisione dello studio dei **fenomeni naturali** in più settori, dovuta al continuo estendersi delle nostre conoscenze, ha portato ad una restrizione del campo d'indagine della fisica. Semplificando al massimo possiamo affermare che la **fisica studia i fenomeni naturali dei corpi inorganici che non comportano una trasformazione sostanziale dei corpi stessi**. I fenomeni nei quali la materia interessata non subisce trasformazioni si chiamano **fenomeni fisici**, in contrapposizione a quelli, detti **fenomeni chimici**, in cui si verifica la trasformazione di una sostanza di una certa specie in un'altra di specie diversa. In ogni caso la <<**fisica costituisce la base per tutte le altre scienze e le loro applicazioni**>>. Il linguaggio della fisica è la matematica. **Fisica** è una parola che deriva dal greco (physis = natura). Infatti per i greci la fisica, detta anche filosofia della natura, (termine in uso fino all'inizio del 19° secolo) era intesa come la **scienza dei fenomeni che avvengono in natura**. Ribadiamo che dicesi fenomeno qualunque mutamento che avviene in natura. Un **fenomeno** si dice **fisico** se si ha un mutamento della posizione o della forma del corpo senza che avvenga alcuna alterazione della sostanza di cui il corpo è costituito. La fisica studia i **fenomeni fisici**. Un **fenomeno** si dice **chimico** se si ha un cambiamento della sostanza del corpo considerato.

La chimica studia i fenomeni chimici. Bisogna tenere presente che in natura non esistono distinzioni nette, cosi vi è un complesso di fenomeni il cui studio è oggetto della **chimico - fisica**. Nello studio dei fenomeni fisici ci chiediamo **come e perché** essi avvengono. Da Galileo abbiamo imparato che è importante chiedersi prima **come** e poi **perché**. Invertire quest'ordine è stato il limite mentale della filosofia greca e delle teologie: l'inversione significa costruirsi un modello mentale del mondo, uno schema aprioristico delle cose che ci condiziona nella ricerca delle relazioni che intervengono nei fenomeni della natura e spesso ci conduce ad erronee conclusioni.

Dire con precisione di che cosa si occupa la fisica è impossibile, soprattutto in questa fase iniziale. Qualcuno ha detto che la "**fisica si occupa di tutto**", altri hanno detto che la fisica ha come scopo la conoscenza del nostro Universo, dei suoi costituenti e del loro comportamento. Comunque vogliamo intendere la fisica un fatto è certo: dobbiamo partire dalla constatazione che gli enti fondamentali della fisica sono le **grandezze fisiche** tra le quali è possibile trovare delle relazioni quantitative espresse da leggi fisiche. Inoltre ciò che caratterizza la fisica è l'impiego in essa del **metodo sperimentale** la cui ideazione costituisce una delle glorie di Galileo. Esso si basa su tre premesse:

1) Premessa filosofica: i fenomeni naturali si ripetono in modo perfettamente regolare se vengono mantenute le stesse condizioni iniziali

2) Premessa tecnica: è possibile ripetere a nostra volontà i fenomeni naturali nelle condizioni più idonee alla osservazione

3) Premessa matematica: se una legge fisica è vera le conseguenze che si ricavano matematicamente da essa si debbono verificare nei fatti.

Se una di tali conseguenze non si ritrova verificata anche la legge deve ritenersi non vera.

Per una descrizione oggettiva dei fenomeni fisici il **metodo galileiano** segue 4 fasi:

1) osservazione qualitativa del fenomeno naturale (**fase sperimentale**)

2) schematizzazione del fenomeno, isolandone gli aspetti fondamentali da quelli accessori (**fase mentale**)

3) prova e riprova del fenomeno esaminato, anche in modo artificiale (**fase sperimentale**)

4) formulazione quantitativa della legge che governa il fenomeno (**fase mentale**)

Gli enti fondamentali della fisica sono le **grandezze fisiche** tra le quali è possibile trovare delle relazioni quantitative espresse da leggi fisiche. Ciò che caratterizza la fisica è l'impiego in essa del **metodo sperimentale** la cui ideazione costituisce una delle glorie di Galileo. Il metodo sperimentale consiste nella riproduzione, mediante una serie di **esperimenti** controllati, di un fenomeno osservato in natura, dopo che sono state individuate le **grandezze fisiche** fondamentali per la sua descrizione e sono state formulate **ipotesi** sulle relazioni tra queste grandezze. Il **metodo sperimentale** si realizza attraverso le seguenti fasi: **(1)** *Osservazione del fenomeno* **(2)** *Scelta delle grandezze fisiche* **(3)** *Formulazione di ipotesi* **(4)** *Serie di esperimenti ripetuti* **(5)** I risultati sono compatibili con le ipotesi formulate? Se la risposta è negativa si formulano altre ipotesi. Se la risposta è positiva l'ipotesi diventa legge. Il **metodo sperimentale** culmina nella formulazione di una **legge fisica** che viene espressa mediante una relazione matematica.

Suddivisione della fisica

La fisica può essere suddivisa in: **1) Fisica Classica 2) Meccanica quantistica non relativistica 3) Meccanica quantistica relativistica 4) Fisica della relatività ristretta 5) Fisica della relatività generale**. Ognuna di esse ha un proprio campo di validità. La **Fisica Classica** è valida se applicata a corpi relativamente grandi (corpi macroscopici) dotati di velocità non elevate, cioè molto al di sotto della velocità della luce. Essa può essere a sua volta suddivisa in **Meccanica**, **Acustica**, **Termologia**, **Ottica**, **Elettrologia**. **(1)** La **Meccanica**: lo studio del moto dei corpi soggetti a forze **(2)** La **Termologia**: lo studio dei fenomeni legati al calore **(3)** l'**Acustica**: lo studio dei fenomeni riguardanti l'emissione e la propagazione del suono **(4)** l'**Ottica**: lo studio del comportamento e delle proprietà della luce **(5)** l'**Elettromagnetismo**: lo studio del comportamento di corpi elettrizzati che si trovano immerse in campi elettrici e magnetici.

Tutta la fisica classica può essere suddivisa in **Meccanica Classica** (introdotta da Newton verso il 1670) della quale l'**Acustica** e la **Termologia** sono dei capitoli, ed in **Elettromagnetismo** (elaborazione teorica di Maxwell verso il 1870) di cui l'ottica può essere considerata un capitolo.

La **Fisica Classica** fornisce risultati in netto disaccordo con l'esperienza quando le velocità dei corpi in esame sono confrontabili con la velocità della luce. In questo caso si fa ricorso alla **Fisica della relatività ristretta** (Einstein 1905). Ma anche questa teoria non può essere applicata quando si ha a che fare con oggetti di massa molto grande o quando si tenta di interpretare certi fenomeni alle enormi distanze delle galassie (Einstein 1915–16).

Quando sono coinvolte dimensioni atomiche o nucleari, al posto della meccanica classica si usa la **Meccanica quantistica non relativistica** ($1925-26$: **Heisemberg**, **Schrodinger**, **Born** ed altri) e, quando si incontrano sia piccole distanze sia alte velocità, la **Meccanica quantistica relativistica** (**Dirac** 1927). Come si fa a sapere quando si deve applicare una particolare teoria? Purtroppo non c'è una risposta precisa a questa domanda.

Grandezze fisiche e loro misura

Abbiamo visto che lo scopo della fisica è la descrizione del mondo e dei suoi fenomeni fisici mediante leggi fisiche espresse, di solito, da formule matematiche nelle quali sono presenti quelle che noi chiamiamo grandezze fisiche. Ma cosa sono le grandezze fisiche, cioè cosa sono gli enti che intervengono nella descrizione dei fenomeni fisici? La definizione di grandezza fisica, nel senso corrente della parola, non ha alcun significato scientifico. Il punto di vista attualmente accettato dai fisici è che una **grandezza fisica** è **definita** solo quando sono stati stabiliti i procedimenti necessari per misurarla. In questo consiste la definizione operativa di una grandezza fisica. Quindi in fisica, per **grandezza fisica G** intendiamo un qualsiasi ente fisico utile per la descrizione dei fenomeni fisici suscettibile di **misurazione**.

Una grandezza fisica è **misurabile** se per essa:

1) vale il **criterio del confronto**, cioè se date due grandezze della stessa specie si può dire che una di esse è maggiore, minore o uguale dell'altra, ed il verificarsi di uno di questi tre casi esclude il verificarsi degli altri due. **2)** si può definire la **somma** di due grandezze omogenee **3)** si può definire l'**unità di misura**. **Misurare** una grandezza fisica **G** rispetto ad un'altra della stessa specie e conosciuta {G} significa trovare un numero α per il quale risulta: $G=\alpha\cdot\{G\}$ dove **G** rappresenta la grandezza fisica considerata, $\{G\}$ rappresenta l'unità di misura della grandezza **G**, α rappresenta la misura (che è un numero puro) della grandezza **G** rispetto all'unità di misura $\{G\}$.

E' attraverso la misurazione che ogni ente fisico assume la natura di grandezza fisica. In altre parole, ogni grandezza fisica è definita in maniera operativa attraverso la precisazione delle modalità di una sua misurazione. **Definizione operativa di una grandezza fisica**: la **definizione operativa di grandezza fisica** consiste nella descrizione degli strumenti da usare e del procedimento da seguire per la sua misura. Nella misurazione di una grandezza fisica si distinguono tre metodi: **1) Misurazione diretta** **2) Misurazione indiretta** **3) Misurazione con apparecchi tarati**.

Si ha la **Misurazione diretta** quando la grandezza da misurare si confronta con un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità di misura. Il metodo di misurazione diretta si chiama anche relativo perché l'unità di misura si può scegliere in maniera arbitraria e quindi il valore numerico della misurazione effettuata, cioè la misura, dipende dall'unità prescelta e varia al variare di essa. Supponiamo che la grandezza **G** dipenda, mediante una legge matematica ben definita, da altre grandezze G_1, G_2,.. che possono essere misurate direttamente. In questo caso la misura di **G** si può ottenere dalle misure dirette di G_1, G_2,... e diciamo che è stata effettuata una misura indiretta di **G**. La **Misurazione con apparecchi tarati** di una grandezza **G** consiste nella lettura della posizione assunta da opportuni indici su scale graduate.

Tutte le grandezze fisiche vengono suddivise in **grandezze fondamentali** e **grandezze derivate**. Una **grandezza** si considera **fondamentale** se essa non viene definita mediante altre grandezze fisiche. Una **grandezza** si considera

derivata se viene definita mediante altre grandezze fisiche alle quali è legata da una relazione (legge fisica espressa in forma matematica). Sul piano puramente teorico tutte le grandezze fisiche potrebbero essere considerate fondamentali. Nella pratica, però, soltanto alcune di esse sono assunte come fondamentali e tutte le altre sono derivate. Quante grandezze bisogna assumere come fondamentali? Il numero di grandezze da riguardarsi come fondamentali è il minimo numero necessario per fornire una descrizione completa e non ambigua di tutte le altre grandezze fisiche.

Le grandezze fisiche necessarie per la descrizione di tutti i fenomeni fisici sono più di un centinaio.

Nel **sistema internazionale** di unità di misure $S \cdot I \cdot$ o sistema $M\,K\,S\,A\,°K\,\mathrm{cd}\,\mathrm{mol}$ le grandezze fondamentali sono sette, tutte le altre sono derivate in quanto esprimibili mediante relazioni matematiche in funzione delle 7 grandezze fondamentali: Nel sistema $S \cdot I \cdot$. fungono da grandezze fondamentali:

1) la **lunghezza** (ℓ) **2)** la **massa** (m) **3)** il **tempo** (t) **4)** l'**intensità di corrente** (i) **5)** la **temperatura** (θ o T o Θ) **6)** l'**intensità luminosa** ($\mathcal{J}$) **7)** la **quantità di materia** a cui corrispondono altrettante **unità fondamentali**, precisamente:

1) il **metro** (m) **2)** il **chilogrammo massa** (kg o kg_m) **3)** il **secondo** (s o sec) **4)** l'**ampere** (A) **5)** il **grado kelvin** ($°K$) **6)** la **candela** (cd) **7)** la **mole** (mol).

Tutte le altre grandezze sono derivate e ad esse corrispondono altrettante unità derivate. Dalla meccanica sappiamo che la velocità scalare v di un punto materiale è espressa dalla seguente relazione $v = \frac{s}{t}$, cioè v è una grandezza derivata.

La sua unità di misura è **derivata** e si ricava in base alle seguenti considerazioni:

$$v = \frac{\{s\}}{\{t\}} = \frac{m}{s}$$

Se per caso abbiamo $v = 7\frac{m}{s}$ v è la grandezza fisica, $\frac{m}{s}$ è la sua unità di misura (coerente), 7 è la misura di v rispetto all'unità che è il $\frac{m}{s}$.

Se avessi $v = 15\frac{km}{h}$, dovrei dire che il $\frac{km}{h}$ non è unità di misura coerente della velocità nel $S \cdot \mathcal{J} \cdot$ in quanto la velocità non è espressa mediante le unità del sistema $S \cdot \mathcal{J} \cdot$ delle grandezze fondamentali che la definiscono.

Osservazione N°1: **Legge fisica** è una relazione tra grandezze fisiche che si esprime mediante una equazione tra le grandezze stesse. Ad esempio l'equazione $s = \frac{1}{2} a t^2$ rappresenta la **legge fisica** che ci dice come varia la posizione di un punto su di una traiettoria prestabilita al variare del tempo.

Le **leggi della fisica**, che esprimono relazioni tra grandezze fisiche, mantengono inalterato il loro significato qualunque sia il sistema di unità di misura in cui esse vengono espresse.

Osservazione N°2: Una grandezza fisica esiste solo se di essa possiamo dare una **definizione operativa**, cioè se possiamo descrivere un procedimento che ci consente di misurarla. Questo procedimento consiste: **1°)** nel fissare il criterio del confronto **2°)** nell'introdurre l'operazione di somma **3°)** nel trovare un numero α ed una unità di misura contenuta α volte nella grandezza considerata.

Osservazione N°3: Una **grandezza** si dice **fondamentale** quando viene definita senza ricorrere ad altre grandezze fisiche. Un **grandezza fisica** si dice **derivata** quando per definirla ricorriamo ad altre grandezze fisiche. Questa suddivisione in grandezze fondamentali e derivate è solo una questione di opportunità in quanto, teoricamente, tutte le grandezze potrebbero essere considerate fondamentali. Una unità di misura fondamentale per essere considerata ottima deve possedere 4 **requisiti**: **(1)** la **precisione** **(2)** l'**accessibilità** **(3)** la

riproducibilità **(4)** l'**invariabilità**. Il secondo ed il quarto requisito sono spesso inconciliabili tra loro. In questo caso si cerca di trovare un conveniente compromesso tra i due.

Osservazione N°4: In meccanica le grandezze fondamentali sono tre (lunghezza, massa, tempo) cui corrispondono tre unità fondamentali (metro, chilogrammo, secondo). Il sistema $S.I.$ diventa sistema $M\,K\,S$.

Osservazione N°5: Tutte le grandezze della fisica possono essere suddivise in grandezze scalari e grandezze vettoriali. Si chiamano **grandezze scalari** quelle grandezze che sono completamente determinate quando se ne indica la specie, l'unità di misura e la misura. Sono grandezze scalari il tempo, la massa, la densità, la temperatura, l'energia. Le grandezze scalari vengono trattate con le regole dell'algebra ordinaria. Si chiamano **grandezze vettoriali** quelle grandezze che sono completamente individuate da un numero che ne esprime la misura rispetto ad una unità prestabilita, da una direzione e da un verso. Sono grandezze vettoriali lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza. Ciascuna grandezza vettoriale viene rappresentata mediante un vettore. Le grandezze vettoriali vengono trattate con le regole del calcolo vettoriale.

Osservazione N°6: Si ha la **misurazione indiretta** quando la misura della grandezza fisica considerata è calcolata mediante la misura diretta di altre grandezze fisiche. Si ha la **misurazione per mezzo di apparecchi tarati** quando la misura della grandezza fisica considerata si riduce alla lettura della posizione assunta dall'indice mobile dello strumento su una opportuna scala preventivamente graduata.

Osservazione N°7: Ricordiamo alcune regole ortografiche riguardanti le notazioni delle unità di misura del $S.I.$, secondo quanto raccomandato del CIPM (**Comitato internazionale pesi e misure**): **(a)** I nomi delle unità di misura scritti per esteso iniziano sempre con la lettera minuscola, anche se derivano da nomi propri. Inoltre non hanno accenti e non hanno il plurale. Per esempio metro, secondo, newton, hertz, ampere (e non ampère), 10 volt e non 10 volts. **(b)** Le abbreviazioni sono maiuscole quando derivano da nomi propri, minuscole negli altri casi. Per esempio N (newton), m (metro), kg 8chilogrammo), s (secondo). **(c)** Le abbreviazioni vengono usate soltanto se accompagnate da un numero, negli altri casi il nome va scritto per esteso. Per esempio $10\,N$ (o anche per esteso; $10\,\text{newton}$) ma: "la forza si misura in newton" (e non la forza si misura in N). Il numero deve precedere sempre l'unità di misura. Per esempio $3\,kg$ (e non $kg\,3$).

Osservazione N°8: Poiché la velocità della luce è una grandezza fondamentale il cui valore è lo stesso in tutti i sistemi inerziali, a partire dall'ottobre 1983 si è deciso di attribuire i valore fisso $\mathbf{c = 2{,}9979258 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$, anziché considerare questo come risultato di una misura. Questo comporta una ridefinizione dell'unità di misura delle lunghezze e del tempo. Mediante i laser, si possono realizzare campioni di tempo di eccezionale precisione (1 parte su 10^{11}), molto maggiore di quella con la quale si possono misurare le lunghezze. Si è convenuto, pertanto, di ridefinire il metro (che diventa **grandezza derivata**) come la distanza percorsa dalla luce in $\frac{1}{29979458}$ di secondo.

Dimensioni di una grandezza fisica

In generale una grandezza fisica **G** è legata dalla legge fisica che la definisce alle grandezze fondamentali ℓ, m, t, ϑ, i, I, cioè ogni grandezza derivata è esprimibile mediante un **monomio alle grandezze fondamentali**, cioè:

$$G = \ell^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot t^{\gamma} \cdot i^{\delta} \cdot \vartheta^{\sigma} \cdot I^{\nu}$$

Chiamiamo **dimensioni** di **G** nel S.I. i numeri α, β, γ, δ, σ, ν. Scriviamo:

$$[G] = \left[L^{\alpha} \cdot M^{\beta} . T^{\gamma} . \mathcal{J}^{\delta} . \Theta^{\delta} \cdot J^{\nu}\right] = \text{equazione dimensionale}$$

Quali sono le dimensioni della velocità v? $[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{[L]}{[T]} = [L \cdot T^{-1}]$

Le dimensioni di una velocità sono **1** rispetto alla lunghezza, **-1** rispetto al tempo, 0 rispetto alla massa. Si dice pure che le dimensioni di una velocità sono una lunghezza per un tempo alla meno uno.

Osservazione N°1: Controllo Dimensionale

L'equazione dimensionale è molto utile per verificare se abbiamo scritto correttamente una legge fisica. Una legge fisica è infatti una equazione tra grandezze fisiche, tale per cui il primo membro ed il secondo devono avere le stesse dimensioni fisiche.

Osservazione N°2

Le dimensioni di una grandezza fisica non sono caratteristiche intrinseche della grandezza, sono soltanto delle convenzioni che dipendono dalla particolare scelta delle grandezze fondamentali. Se mutano queste, mutano anche le dimensioni.

Misure dirette e misure indirette

La **misura** di una grandezza fisica può essere effettuata con metodo diretto, indiretto o mediante l'uso di uno strumento tarato. Si conoscono i seguenti metodi di misura:

01) Misura diretta o per confronto: consiste nel confronto diretto tra la grandezza **G** da misurare ed una grandezza della stessa specie presa come campione. La misura della **massa** di un corpo effettuata mediante una bilancia a bracci uguali è un esempio di misura diretta.

02) Misura indiretta (o **assoluta**): la grandezza **G** da misurare è funzione completamente nota di altre grandezze fisiche non della stessa specie di G ma misurabili direttamente. La misura della velocità di un corpo è un esempio di misura indiretta. Infatti sappiamo che:

$\text{velocità} = \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}$ La lunghezza si misura in direttamente in metri, la lunghezza si misura direttamente in secondi, la velocità si misura in $\frac{\text{metri}}{\text{secondo}}$.

03) Misura mediante apparecchi tarati: Viene effettuata mediante apparecchi dotati di scale e muniti di un indice la cui posizione sulla scala stessa ci fornisce la misura della grandezza considerata. Altri strumenti, detti digitali, permettono di leggere direttamente il valore della grandezza in esame mediante cifre luminose che appaiono su un quadrante (**display**). La misura della temperatura mediante il termometro clinico è un esempio di misura di una grandezza mediante un apparecchio tarato. Caratteristiche generali degli strumenti tarati sono:

a) la **sensibilità**, cioè la minima grandezza che lo strumento può apprezzare

b) la **portata** o **fondo scala**, il valore massimo della grandezza che lo strumento può misurare

c) la **precisione** che esprime un indice della qualità dello strumento. Uno strumento è preciso se misuriamo, nelle stesse condizioni, una grandezza diverse volte ed otteniamo misure che si discostano di poco tra loro.

d) la **prontezza** che rappresenta un indice della rapidità con la quale lo strumento risponde alle variazioni della grandezza da misurare.

Classificazione degli errori nella misura di una grandezza

Nella fisica sperimentale **non esistono misurazioni esatte** in quanto tutte sono affette da errori che è impossibile da eliminare. Gli errori possono essere classificati, a seconda della loro natura, in:

01) errori grossolani: sono dovuti alla scarsa abilità dell’operatore oppure alla inefficienza delle apparecchiature usate.

02) errori sistematici: Sono quelli che si ripetono sempre con lo stesso valore e lo stesso segno anche quando si ripete la misurazione della grandezza fisica y. Essi sono dovuti ad un errore nella forma della funzione che collega le letture $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con la grandezza **G** da misurare.

Sono dovuti a difetti nella strumentazione usata o a metodi errati di misura; essi agiscono sempre per eccesso o per difetto. Questi errori non si possono mai eliminare completamente ma, utilizzando opportuni accorgimenti, possono essere ridotti al minimo.

03) errori accidentali o **casuali o statistici**: Sono dovuti a cause non completamente definibili e che si possono ripercuotere sul valore misurato sia in senso positivo, sia in senso negativo, cioè possono agire sia per difetto che per eccesso. In generale l'**errore casuale o accidentale o statistico** è prodotto da una molteplicità di cause non bene individuabili che possono agire sia per difetto che per eccesso. Gli errori accidentali sono dovuti al fatto che nella ripetizione della misura interviene un elemento casuale che può dipendere sia dallo strumento sia da chi effettua la misura.

Determinazione dell'errore nelle misure dirette

Sia **G** una grandezza da misurare. Sia inoltre: x il **valore esatto** della grandezza **G** da misurare ed x_M il valore misurato.

$\varepsilon = \varepsilon_a = x - x_M = \Delta x$ è l'**errore assoluto** $\Rightarrow$ $x = x_M \pm \varepsilon_a$

Questo significa che il valore esatto x della grandezza **G** è compreso tra i valori $x_M - \varepsilon$ ed $x_M + \varepsilon$ cioè vale la seguente relazione: $x_M - \varepsilon_a < x < x_M + \varepsilon_a$

La misura di una grandezza **G** può essere espressa correttamente nella seguente maniera:

valore x della grandezza = **risultato** x_M **della misura** $\pm$ **errore assoluto** ε_a

Se, dopo avere misurato la lunghezza di un'asta scrivo: $L = (60 \pm 0{,}5)\ mm$ vuole dire che il valore esatto della lunghezza dell'asta è compreso tra $59{,}5\,mm$ e $60{,}5\,mm$, cioè:

$60 - 0{,}5 < L < 60 + 0{,}5 \qquad 59{,}5\,mm < L < 60{,}5\,mm$.

$$errore\ relativo = \frac{errore\ assoluto}{valore\ della\ grandezza\ misurata} \qquad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{x_M} = \frac{x - x_M}{x_M} = \frac{\Delta x}{x_M}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_r \cdot 100 = \frac{\varepsilon_a}{x_M} \cdot 100 \quad = \textbf{errore percentuale}$$

L'errore relativo non è diverso dall'errore percentuale. Essi sono solo due modi diversi di descrivere la stessa cosa. Supponiamo che la misura di una lunghezza dà come risultato: $L = (69 \pm 1)\,mm$ Questo significa che: $(69-1)\,mm < L < (69+1)\,mm$

$68\,mm < L < 70\,mm \qquad \Delta x = 1\,mm \qquad x_M = 69\,mm \qquad \varepsilon_r = \dfrac{1\,mm}{69\,mm} = \dfrac{1}{69} = 0{,}014$

$\varepsilon_p = \varepsilon_r \cdot 100 = 0{,}014 \cdot 100 = 1{,}4\%$

E' chiaro che, essendo sconosciuto il valore esatto x della grandezza **G** da misurare, sono sconosciuti anche i valori di ε_a, ε_r, $100\varepsilon_r$. Allora quali valori bisogna attribuire ad ε_a, ε_r, $100\varepsilon_r$, x_M per calcolare il valore esatto **x** della grandezza **G**? Nella pratica si procede come segue. Supponiamo di misurare n volte la grandezza **G** e di trovare i seguenti risultati: $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$. Fra tutti questi valori trovati si cerca il valore più probabile che sarà considerato come il valore misurato x_M. Si tratta della **media aritmetica** dei valori trovati:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{n} = \bar{x}$$ che, come si può dimostrare, è il valore più probabile.

Infatti, se si eseguono **n** misure di una grandezza **x** e si ottengono i valori $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$ nessuno di questi può essere considerato il valore esatto della misura.

Allora assumiamo come valore esatto della grandezza **x** il valore più probabile delle misure effettuate $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$ che, di solito, coincide con la loro media aritmetica:

$$\mathbf{x_m = x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{n} = \overline{x}}$$

Poiché il valore esatto della grandezza **G** deve essere compreso tra il valore minimo e quello massimo, è lecito supporre che **l'errore assoluto** ε_a coincida con la **semidifferenza** tra il valore massimo misurato e quello minimo, cioè è ragionevole porre: $\boldsymbol{\varepsilon_a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = e_m}$ = semi dispersione massima

dove x_{max} ed x_{min} sono il **valore più grande** ed il **valore più piccolo** ottenuti nelle misure.

Naturalmente i valori estremi non debbono discostarsi troppo da quelli intermedi, altrimenti il valore della **semidispersione** potrebbe risultare inattendibile. Quanto detto è lecito perché il valore esatto deve cadere fra il massimo ed il minimo valore ottenuto nelle misure effettuate.

Nella pratica, dopo avere effettuato n misurazioni della grandezza **G**, scriviamo:

$$\mathbf{x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{n} \pm \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = x_m \pm \varepsilon_a = \overline{x} \pm e_m}$$

dove $\overline{x}$ è il valore più probabile, cioè la media aritmetica delle n misure trovate, Δx è l'errore (massimo) presumibile, cioè il massimo errore presumibilmente commesso attribuendo alla grandezza **G** il valore $\overline{x} = x_M$ al posto del valore esatto x.

Come **errore assoluto** ε_a possiamo considerare anche l'**errore semplice medio** δ, oppure la **deviazione standard** σ.

Esempio numerico

La misura di una lunghezza dà i seguenti risultati espressi in millimetri:

$$13,26 \; ; 13,25 \; ; 13,24 \; ; 13,24 \; ; 13,27 \; ; 13,28$$

$$x_M = \frac{13,26 + 13,25 + 13,24 + 13,24 + 13,27 + 13,28}{6} = 13,25\,mm$$

x_M è il valore più probabile ed è da noi assunto come il valore della grandezza misurata

$\varepsilon_a = x - x_M = \Delta x = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2} = \dfrac{13,28 - 13,24}{2} = 0,02$ = **errore presumibile** che per noi sarà l'**errore assoluto**.

Scriveremo: $x = \ell = (13,25 \pm 0,02)\,mm$ cioè: $13,23\,mm < x = \ell < 13,27\,mm$

Questo risultato ci consente di affermare che la prima cifra decimale (2) è esatta, mentre possiamo dire sulla correttezza della seconda cifra decimale (5).

$e_r = \varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon_a}{x_M} = \dfrac{x - x_M}{x_M} = \dfrac{\Delta x}{x_M} = \dfrac{\Delta x}{\overline{x}} = \dfrac{0,02}{13,25} = 0,0015$ = **errore relativo** $\mathbf{e_r = \varepsilon_r = \dfrac{\Delta x}{\overline{x}}}$

L'errore relativo $\mathbf{e_r = \varepsilon_r}$ è uguale al rapporto tra l'errore assoluto ed il valore medio.

$\varepsilon_p = 100 \cdot \varepsilon_r = 0,15\%$ = **errore percentuale**

Errore semplice medio

Supponiamo di avere effettuato n misure della grandezza **G** e di avere trovato i seguenti risultati: $x_1\ ,\ x_2\ ,\cdots\cdots,\ x_n$.

Le differenze $S_1 = x_1 - \overline{x}\ ;\ S_2 = x_2 - \overline{x}\ ;\cdots, S_n = x_n - \overline{x}$ tra le singole misure ed il valore medio $\overline{x}$ si chiamano **scarti semplici** della serie di misure dal valore medio $\overline{x}$.

L'**errore semplice medio** δ è definito come la **media aritmetica dei valori assoluti degli scarti:**

$$\boldsymbol{\delta = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}}$$

Se qualche misura si ripete e se essa si presenta f volte, allora la formula precedente diventa:

$$\boldsymbol{\delta = \frac{f_1 \cdot |x_1 - \overline{x}| + f_2 \cdot |x_2 - \overline{x}| + \cdots + f_n \cdot |x_n - \overline{x}|}{f_1 + \cdots\cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{f_1 + \cdots\cdots + f_n}}$$

In questo caso risulta: $x = \overline{x} \pm \delta$

i	x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
1	13,26	0	0,00
2	13,25	-0,01	0,01
3	13,24	-0,02	0,02
4	13,24	-0,02	0,02
5	13,27	0,01	0,01
6	13,28	0,02	0,02
	$\sum_{i=1}^{6} x_i =$ 79,54		0,08
	$\overline{x}$ = 13,26		δ = 0,01

Errore quadratico medio o scarto quadratico medio o deviazione standard

Dicesi **varianza** la media aritmetica σ^2 dei quadrati degli scarti delle singole misure dal valore medio $\overline{x}$. In formule abbiamo:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Se qualche misura si ripete, allora la precedente formula può essere scritta:

$$\sigma^2 = \frac{f_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + f_n \cdot (x_n - \overline{x})^2}{f_1 + \cdots\cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{f_1 + \cdots\cdots + f_n}$$

La radice quadrata della varianza prende il nome di **errore quadratico medio** o **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** della serie di misure $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$. In simboli abbiamo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Se qualche misura si ripete, allora la precedente formula può essere scritta:

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + f_n \cdot (x_n - \overline{x})^2}{f_1 + \cdots\cdots + f_n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{f_1 + \cdots\cdots L + f_n}}$$

Se assumiamo come errore la **deviazione standard** la misura della grandezza **G** è espressa, come al solito, con la scrittura: $x = \overline{x} \pm \sigma$

i	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	13,26	0	0,0000
2	13,25	-0,01	0,0001
3	13,24	-0,02	0,0004
4	13,24	-0,02	0,0004
5	13,27	0,01	0,0001
6	13,28	0,02	0,0002
	$\sum_{i=1}^{6} x_i =$ 79,54		$\sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x})^2 = 0,0012$
	$\overline{x} = 13,26$		$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x})^2}{6}} = \sqrt{0,0002} = 0,014 \approx 0,01$

$$x = 13,26 \pm 0,01 \quad \Rightarrow \quad 13,25 < x < 13,26$$

Calcolo dell’errore nelle misure indirette, ovvero la propagazione degli errori

Spesso in laboratorio si eseguono misure indirette, cioè misure di grandezze legate da relazioni matematiche ad altre grandezze che sono determinate con metodo diretto o con l’usa di strumenti tarati.

Per calcolare l’area **S** di un tavolo lungo a metri e largo b metri utilizziamo la formula: $S = a \cdot b$

La quale ci permette, dopo avere misurato a e b, di misurare S. Poiché le misure di a e b sono affette da errori, anche quella di **S** contiene un certo errore. Si dice che gli errori di misura su a e b si sono **propagati** su **S**. La relazione che esprime l’errore di misura su **S** in funzione degli errori di misura su a e b si chiama **legge di propagazione degli errori**.

1) Somma di due grandezze misurate **y = a + b**

$$\Delta y = \Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b \qquad \Delta y = \Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$$

<<**L'errore assoluto commesso sulla somma algebrica di due o più grandezze misurate è uguale alla somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure**>>

Esempio

$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ Per ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 abbiamo trovato:

$\ell_1 = (3{,}25 \pm 0{,}01)\,m$, $\ell_2 = (0{,}15 \pm 0{,}01)\,m$, $\ell_3 = (5{,}14 \pm 0{,}02)\,m$ $\quad \ell = (8{,}54 \pm 0.04)m$

- L'**errore relativo** (ed anche quello percentuale) commesso sulla grandezza y è compreso fra il maggiore ed il minore degli errori relativi delle grandezze a e b, cioè:

$$\varepsilon_r = \frac{a\varepsilon_{1r} + b\varepsilon_{2r}}{a + b}$$

Infatti: $\varepsilon_{1r} = \frac{\varepsilon_1}{a}$, $\varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_2}{b}$, $\varepsilon_1 = a\varepsilon_{1r}$, $\varepsilon_2 = b\varepsilon_{2r}$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = a\varepsilon_{1r} + b\varepsilon_{2r}$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{a\varepsilon_{1r} + b\varepsilon_{2r}}{a + b} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{1r} < \varepsilon < \varepsilon_{2r} \ \ oppure \ \ \varepsilon_{2r} < \varepsilon < \varepsilon_{1r}$$

2) Differenza di due grandezze misurate **y = a - b**

$$\Delta y = |\Delta a| + |\Delta b| \qquad \text{cioè :} \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

<<**L'errore assoluto commesso sulla differenza di due o più grandezze misurate è uguale alla somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure**>>

Risulta pure: $\varepsilon = \frac{a\varepsilon_{1r} + b\varepsilon_{2r}}{a - b}$ da cui si deduce che : $\begin{cases} \varepsilon > \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon > \varepsilon_{2r} \end{cases}$

L'errore sulla somma o differenza di due grandezze misurate è uguale alla somma dei corrispondenti errori.

3) Prodotto di due grandezze misurate $\quad y = a \cdot b$

$\Delta y = |b \Delta a| + |a \Delta b|$ cioè: $\varepsilon = b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2$

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \frac{|b\Delta a| + |a\Delta b|}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \qquad \boxed{\varepsilon = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}}$$

L'errore relativo (o percentuale) commesso nel prodotto di due o più grandezze misurate è la somma degli errori relativi (o percentuali) commessi sulle singole misure.

4) Rapporto di due grandezze misurate $\quad y = \frac{a}{b}$

$$\Delta y = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}$$

L'errore relativo (o percentuale) commesso sul rapporto di due o più grandezze misurate è la somma degli errori relativi (o percentuali) commessi sulle singole misure del numeratore e del denominatore.

5) Potenza di una grandezza misurata $\quad y = a^n$

$$\varepsilon = \Delta y = \left| n \cdot a^{n-1} \cdot \Delta a \right| = n \cdot a^{n-1} \cdot \varepsilon_1 \qquad \varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = n \cdot \frac{\Delta a}{a} = n \cdot \varepsilon_{1r}$$

L'errore relativo (o percentuale) di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per l'errore relativo (o percentuale) della base.

6) Radice ennesima di una grandezza misurata $\quad \boxed{y = \sqrt[n]{a}}$

$$\varepsilon = \Delta y = \frac{1}{n} \cdot a^{\frac{1-n}{n}} \cdot \Delta a = \frac{1}{n} \cdot a^{\frac{1-n}{n}} \cdot \varepsilon_1 \qquad \varepsilon = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta a}{a} = \frac{\varepsilon_{1r}}{n}$$

L'errore relativo (o percentuale) di una radice è uguale al quoziente tra l'errore relativo (o percentuale) del radicando e l'indice del radicale.

In una somma o in una differenza si sommano gli errori assoluti. In un prodotto o in un quoziente si sommano gli errori relativi (e quindi anche percentuali)

Le cifre significative

Definiamo cifre significative del risultato di un'operazione di misura le cifre note come certe più la prima cifra incerta. Infatti le **cifre significative** di una misura diretta sono le cifre note con certezza più la prima cifra incerta. Il **numero di cifre significative** si determina contando la cifra incerta e tutte quelle alla sua sinistra fino all'ultima cifra diversa da zero. Nella scrittura di un numero decimale, gli **zeri iniziali** a sinistra servono solo a indicare la posizione decimale della prima cifra e non debbono essere contati tra le cifre significative. Il numero $0,03$ ha una sola cifra significativa che è il 3. Sono, invece, cifre significative gli **zeri finali alla destra della virgola decimale**. Il numero $0,030$ ha due cifre significative che sono 3 e 0.

Arrotondamento di un numero

Arrotondare un numero significa sostituirlo con un altro che abbia meno cifre significative. L'ultima cifra considerata è aumentata di una unità (1) se è seguita da una cifra ≥ 5 (arrotondamento per eccesso), non è modificata se è seguita da una cifra minore di 5 (arrotondamento per difetto).

Arrotondare il numero $45,352$ $45,35$ (arrotondamento per difetto)

$45,4$ (arrotondamento per eccesso).

Cifre significative di una misura indiretta e dell'errore della misura

Quando usiamo la formula $\mathbf{x = x_m \pm \varepsilon_a = \overline{x} \pm e_m}$ dobbiamo seguire la seguente convenzione: • dobbiamo indicare l'errore $\varepsilon_a = e_m$ con una o al massimo due cifre significative • una misura non può avere cifre di posto superiore all'ultima cifra dell'errore, cioè il risultato della misura deve essere scritto in modo che la sua ultima cifra significativa sia nella stessa posizione decimale dell'errore.

Se, per esempio, abbiamo: $x_M = 18,26\,s$, $e_m = 0,2\,s$ allora dobbiamo scrivere: $x = (18,3 \pm 0,2)\,s$ avendo approssimato per eccesso il valore trovato $x_M = 18,26\,s$ ad una sola cifra decimale. Se l'errore presenta due cifre decimali anche la misura deve essere approssimata (per eccesso o per difetto) a due cifre decimali.

Calcolo dell'errore nelle misure indirette: legge di propagazione degli errori

01) Somma di due grandezze misurate $G = G_1 + G_2$

Per la grandezza **G** abbiamo: $x = x_M \pm \varepsilon_a$, per la grandezza G_1 abbiamo: $x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$, per la grandezza G_2 abbiamo : $x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$. $\mathbf{x = x_{1M} + x_{2M} \pm (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a})}$

Regola: L'errore assoluto commesso nella somma di due o più grandezze misurate è la somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure. $\varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$

Regola: L'errore relativo commesso nella somma di due o più grandezze misurate è compreso fra il maggiore ed il minore degli errori relativi delle grandezze misurate.

Nel caso della somma di due grandezze abbiamo: $\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{1r} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}}{x_{1M} + x_{2M}}$

02) Differenza di due grandezze misurate $G = G_1 - G_2$

Per la grandezza G abbiamo: $x = x_M \pm \varepsilon_a$, per la grandezza G_1 abbiamo: $x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$, per la grandezza G_2 abbiamo : $x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$. $\mathbf{x = x_{1M} - x_{2M} \pm (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a})}$

Regola: L'errore assoluto commesso nella differenza di due grandezze misurate è la somma degli errori assoluti commessi nelle singole misure. $\varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$

Regola: L'errore relativo commesso nella somma di due o più grandezze misurate è compreso fra il maggiore ed il minore degli errori relativi delle grandezze misurate.

Nel casso della somma di due grandezze abbiamo: $\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{1r} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}}{x_{1M} - x_{2M}}$

03) Prodotto di due grandezze misurate $G = G_1 \cdot G_2$

Per la grandezza G abbiamo: $x = x_M \pm \varepsilon_a$, per la grandezza G_1 abbiamo: $x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$, per la grandezza G_2 abbiamo : $x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$.

Regola: L'errore relativo (o percentuale) commesso nel prodotto di due grandezze misurate è la somma degli errori relativi (o percentuali) commessi sulle singole misure.

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_{1a}}{x_{1M}} + \frac{\varepsilon_{2a}}{x_{2M}}$$

Per il calcolo dell'errore assoluto bisogna applicare la seguente formula:

$$\varepsilon_a = x_{2M} \cdot \varepsilon_{1a} + x_{1M} \cdot \varepsilon_{2a} = x_{1M} \cdot x_{2M} \cdot \varepsilon_r \qquad x = x_{1M} \cdot x_{2M} \pm \left(x_{2M} \cdot \varepsilon_{1a} + x_{1M} \cdot \varepsilon_{2a} \right) = x_{1M} \cdot x_{2M} \pm x_{1M} \cdot x_{2M} \cdot \varepsilon_r$$

03) Rapporto di due grandezze misurate $G = \dfrac{G_1}{G_2}$

Per la grandezza G abbiamo: $x = x_M \pm \varepsilon_a$, per la grandezza G_1 abbiamo: $x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$, per la grandezza G_2 abbiamo : $x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$.

Regola: L'errore relativo (o percentuale) commesso nel rapporto di due grandezze misurate è la somma degli errori relativi (o percentuali) commessi sulle singole misure. $\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} = \dfrac{\varepsilon_{1a}}{x_{1M}} + \dfrac{\varepsilon_{2a}}{x_{2M}}$

Per il calcolo dell'errore assoluto bisogna applicare la seguente formula:

$$\varepsilon_a = \frac{x_{2M} \cdot \varepsilon_{1a} + x_{1M} \cdot \varepsilon_{2a}}{x_{2M}^2} = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \left(\frac{\varepsilon_{1a}}{x_{1M}} + \frac{\varepsilon_{1a}}{x_{2M}} \right) = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \left(\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} \right) = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \cdot \varepsilon_r$$

$$x = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \pm \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \left(\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} \right) = \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \pm \frac{x_{1M}}{x_{2M}} \cdot \varepsilon_r$$

03) Potenza di una grandezza misurata: $G = G_1^n$

Regola: L'errore relativo (o percentuale) di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per l'errore relativo della base. $\varepsilon_r = n \cdot \varepsilon_{1r}$

04) Radice di una grandezza misurata: $G = \sqrt[n]{G_1}$

Regola: L'errore relativo (o percentuale) di una radice è uguale al quoziente dell'errore relativo del radicando con l'indice della radice: $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon_{1r}}{n}$

Valori delle grandezze derivate $G_1 : x_1 = x_{1M} \pm \varepsilon_{1a}$ $G_2 : x_2 = x_{2M} \pm \varepsilon_{2a}$

e corrispondenti **errori assoluti e relativi**

Grandezza G	Valore misurato x_M	Errore assoluto ε_a	Errore relativo ε_r
$G = G_1 + G_2$	$x_M = x_{1M} + x_{2M}$	$\varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$	$\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{1r} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}}{x_{1M} + x_{2M}}$
$G = G_1 - G_2$	$x_M = x_{1M} - x_{2M}$	$\varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$	$\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M} \cdot \varepsilon_{1r} + x_{2M} \cdot \varepsilon_{2r}}{x_{1M} - x_{2M}}$
$G = G_1 \cdot G_2$	$x_M = x_{1M} \cdot x_{2M}$	$x_{2M} \cdot \varepsilon_{1a} + x_{1M} \cdot \varepsilon_{2a} = \varepsilon_a = \varepsilon_r \cdot x_{1M} \cdot x_{2M}$	$\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}$
$G = \dfrac{G_1}{G_2}$	$x_M = \dfrac{x_{1M}}{x_{2M}}$	$\varepsilon_a = \dfrac{x_{1M}}{x_{2M}}\left(\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}\right) = \dfrac{x_{1M}}{x_{2M}} \cdot \varepsilon_r$	$\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}$
$G = G_1^n$	$x_M = x_{1M}^n$	$\varepsilon_a = x_M \cdot \varepsilon_r = x_M \cdot n \cdot \varepsilon_{1r}$	$\varepsilon_r = n \cdot \varepsilon_{1r}$
$G = \sqrt[n]{G_1}$	$x_M = \sqrt[n]{x_{1M}}$	$\varepsilon_a = x_M \cdot \varepsilon_r = x_M \cdot \dfrac{\varepsilon_{1r}}{n}$	$\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon_{1r}}{n}$

Esempio numerico

Siano G_1 e G_2 due grandezze omogenee. In un laboratorio di fisica si sono eseguite 5 misurazioni ottenendo i seguenti risultati:

G_1: 13,26 ; 13,25 ; 13,24 ; 13,24 ; 13,27 ; 13,28 G_2: 34,756 ; 34,755 ; 34,759 ; 34,753 ; 34,756

Dopo avere calcolato il **valore più probabile**, l'**errore assoluto** e l'**errore relativo** di G_1 e G_2 calcolare il **valore più probabile**, l'**errore assoluto** e l'**errore relativo** delle seguenti grandezze:

1) $G = G_1 + G_2$ **2)** $G = G_2 - G_1$ **3)** $G = G_1 \cdot G_2$ **4)** $G = \frac{G_1}{G_2}$ **5)** $G = G_1^3$ **6)** $G = \sqrt{G_1}$

Per la grandezza G_1 sappiamo che: $x_{1M} = 13,25$ è il valore più probabile ed è da noi assunto come il valore della grandezza misurata, $\varepsilon_{1a} = \frac{13,28 - 13,24}{2} = 0,02$ è l'errore assoluto. Scriveremo: $x_1 = (13,25 \pm 0,02)$ cioè: $13,23 < x < 13,27$

$\varepsilon_{1r} = \frac{\varepsilon_a}{x_M} = \frac{0,02}{13,25} = 0,0015$ = **errore relativo**

$\varepsilon_{1p} = 100 \cdot \varepsilon_r = 0,15\%$ = **errore percentuale**

Per la grandezza G_2 otteniamo i seguenti risultati:

$$x_{2M} = \frac{34,756+34,755+34,759+34,753+34,758}{5} = \frac{173,781}{5} = 34,756$$

$$\varepsilon_{2a} = \frac{34,759 - 34,753}{2} = \frac{0,006}{2} = 0,003$$

$$\varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_{2a}}{x_{2M}} = \frac{0,003}{34,756} = 0,000086 \qquad \varepsilon_{2p} = 100 \cdot \varepsilon_{2r} = 100 \cdot 0,000086 = 0,0086\%$$

$$x_2 = 34,756 \pm 0,003$$

1) $G = G_1 + G_2$

$$x = x_{1M} + x_{2M} \pm (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}) = 13,25 + 34,756 \pm (0,02 + 0,003) = 48,006 \pm 0,023$$

2) $G = G_2 - G_1$ $\quad x = x_{1M} - x_{2M} \pm (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}) = 34,756 - 13,25 \pm 0,023 = 21,506 \pm 0,023$

3) $G = G_1 \cdot G_2$ $\qquad \varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} = 0,0015 + 0,00086 = 0,001586$

$$\varepsilon_a = 0,001586 \cdot 34,756 \cdot 13,25 = 0,46 \qquad x = x_{1M} \cdot x_{2M} \pm x_{1M} \cdot x_{2M} \cdot \varepsilon_r = 460,517 \pm 0,46$$

4) $G = \frac{G_1}{G_2}$ $\qquad \varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r} = 0,0015 + 0,00086 = 0,001586$

$$\varepsilon_a = 0,001586 \cdot \frac{13,25}{34,756} = 0,001586 \cdot 0,38 = 0,0006 \qquad x = 0,38 \pm 0,0006$$

5) $G = G_1^3 \quad x_M = x_{1M}^3 = 2326,2 \quad \varepsilon_r = 3\cdot\varepsilon_{1r} = 3\cdot 0,0015 = 0,0045 \quad \varepsilon_a = 2326,2\cdot 0,0045 = 6$

$$x = 2326,2 \pm 6$$

6) $G = \sqrt{G_1} \quad x_M = \sqrt{x_{1M}} = \sqrt{13,25} = 3,64 \quad \varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon_{1r}}{2} = \dfrac{0,0015}{2} = 0,00075$

$$\varepsilon_a = x_M \cdot \varepsilon_r = 3,64\cdot 0,00075 = 0,00273$$

Altro modo di calcolare l'errore relativo

Sia $y = f(a,b)$ una funzione a due variabili. Dal calcolo differenziale sappiamo che risulta:

$$\frac{dy}{y} = d\ln y = d\ln f(a,b) = \frac{f_a'(a,b)\cdot da + f_b'(a,b)\cdot db}{f(a,b)}$$

Al posto dei differenziali da e db si sostituiscono gli errori assoluti $db \simeq b\cdot\varepsilon_{br} = x_{2M}\cdot\varepsilon_{2r}$ dove $a = x_{1M}$ rappresenta il valore più probabile della grandezza a e $\varepsilon_{ra} = \varepsilon_{1r}$ l'errore relativo della grandezza a; $b = x_{2M}$ rappresenta il valore più probabile della grandezza b e $\varepsilon_{br} = \varepsilon_{2r}$ l'errore relativo della grandezza b;

La relazione trovata, se applicata alla teoria degli errori, va scritta nella seguente maniera:

$$\mathbf{\frac{dy}{y} = d\ln y = d\ln f(a,b) = \frac{|f_a'(a,b)\cdot da| + |f_b'(a,b)\cdot db|}{f(a,b)}}$$

Esempi

$\mathbf{y = a + b}$ $\quad \dfrac{dy}{y} = d\ln(a+b) = \dfrac{1\cdot da + 1\cdot db}{a+b} = \dfrac{da+db}{a+b} = \dfrac{a\cdot\varepsilon_{ar} + b\cdot\varepsilon_{br}}{a+b} \quad \boldsymbol{\varepsilon_r = \dfrac{x_{1M}\cdot\varepsilon_{ar} + x_{2M}\cdot\varepsilon_{br}}{x_{1M} + x_{2M}}} \quad \Rightarrow$

$(x_{1M} + x_{2M})\cdot\varepsilon_r = x_{1M}\cdot\varepsilon_{ar} + x_{2M}\cdot\varepsilon_{br} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_a = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}$

$\mathbf{y = k_1\cdot a\cdot k_2\cdot b}$ $\quad \dfrac{dy}{y} = d\ln(k_1 a\cdot k_2 b) = d(\ln k_1 + \ln a + \ln k_2 + \ln b) = d(\ln a + \ln b) = \dfrac{da}{a} + \dfrac{db}{b}$

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{da}{a} + \dfrac{db}{b} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ cioè: $\varepsilon_r = \varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}$

$\mathbf{y=\sqrt{\dfrac{k_1\,a}{k_2\,b^5}}}$ $\qquad \ln y=\frac{1}{2}\ln k_1+\frac{1}{2}\ln a-\frac{1}{2}\ln k_2-\frac{5}{2}\ln b$ $\qquad \frac{d\,y}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d\,a}{a}+\frac{5}{2}\cdot\frac{d\,b}{b}$ $\qquad \frac{\Delta\,y}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\,a}{a}+\frac{5}{2}\cdot\frac{\Delta b}{b}$

$$\varepsilon_r=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{1r}+\frac{5}{2}\cdot\varepsilon_{2r}$$

$\mathbf{y=\dfrac{k_1\,a^2}{k_2\,b^3}}$ $\qquad \ln y=\ln k_1+2\ln a-\ln k_2-3\ln b$ $\qquad \varepsilon_r=\frac{\Delta\,y}{y}=2\frac{\Delta\,a}{a}+3\frac{\Delta b}{b}$ $\qquad \varepsilon_r=2\varepsilon_{1r}+3\varepsilon_{2r}$

Quindi, calcolato l’errore relativo massimo a priori, si può risalire subito al valore di quello assoluto moltiplicando il primo per y.

N.B. Il differenziale totale $d\,y$ è una grandezza infinitesima e non è lecito sostituire variazioni finite al posto dei differenziali delle variabili, nell’intento di calcolare le variazioni finite $\Delta\,y$ della funzione y. Tuttavia se la sostituzione viene fatta con variazioni $\Delta\cdots$ finite, ma piccole rispetto ai valori delle variabili indipendenti $a,b,\cdots$ l’operazione, anche se non rigorosa dal punto di vista matematico, è accettabile dal punto di vista della fisica.

Unità Didattica N°2

La cinematica del punto materiale

01) La meccanica e le sue parti

02) Moto e quiete di un corpo; sistemi di riferimento

03) Punto materiale, traiettoria, ascissa curvilinea, equazione oraria del moto

04) Velocità scalare media ed istantanea

05) Moti progressivi e moti retrogradi

06) Accelerazione scalare media ed istantanea

07) Moti accelerati e moti ritardati

08) Moto uniforme su traiettoria prestabilita

09) Moto uniformemente vario su traiettoria prestabilita

La meccanica e le sue parti

La **Meccanica** è quella parte della fisica che studia il movimento dei corpi. Suo scopo principale è quello di descrivere in maniera univoca e nella forma più semplice possibile tutti i movimenti che si osservano in natura. La **Meccanica classica** o **galileiana** o *newtoniana* comprende i casi in cui la velocità del corpo in esame è piccola rispetto a quella della luce (che è dell'ordine di $300000 \frac{km}{s}$) ad esempio inferiore a $30000 \frac{km}{s}$. Per velocità maggiori è necessario ricorrere alla **meccanica relativistica** elaborata da Einstein. Si parla di **Meccanica del punto materiale** se le dimensioni lineari del corpo in moto sono trascurabili rispetto alle dimensioni lineari dell'ambiente in cui si verifica il fenomeno, in caso contrario si parla di **Meccanica del corpo rigido.**

E' tradizione consolidata dividere la meccanica in **cinematica**, *dinamica*, **statica**. La **cinematica** (detta anche *geometria del moto*) studia il movimento dei corpi nel tempo e nello spazio indipendentemente dalle cause che lo determinano. Le grandezze fisiche che intervengono in cinematica sono la **posizione**, lo *spazio percorso* (inteso come arco di traiettoria), il **tempo**, la *VELOCITA'*, l'**accelerazione**.

La **dinamica** studia il movimento dei corpi in relazione alle cause che lo determinano o comunque lo modificano. In dinamica si introducono i concetti di **massa** (grandezza primitiva) **forza** (grandezza derivata), **lavoro**, **energia**,...

La statica studia le condizioni perché un corpo, soggetto all'azione di due o più forze, si trovi in equilibrio. La statica può essere considerata un capitolo particolare della dinamica.

Moto e quiete di un corpo

Le nozioni di moto e di quiete sono concetti relativi e di difficile comprensione concettuale. Un corpo P si dice in movimento (in quiete) rispetto ad un altro corpo O quando, al trascorrere del tempo, varia (non varia) la posizione di P rispetto ad O. Non ha significato parlare di moto o di quiete se non si specifica l'ente di riferimento. Pertanto per stabilire se un corpo è in moto occorre precisare innanzitutto *rispetto a che cosa* noi intendiamo riferire l'eventuale moto. Il **sistema di riferimento** è costituito da un oggetto (considerato per il momento arbitrariamente immobile) o più oggetti le cui reciproche distanze possano ritenersi immobili nel tempo. Vedremo in seguito che non tutti i **S.R.** sono fra loro equivalenti, ma ne esistono di due tipi e precisamente: i **sistemi di riferimento inerziali** ed i **sistemi di riferimenti accelerati**. Generalmente se il moto avviene lungo una linea (che può essere una retta o una curva qualsiasi del piano o dello spazio) il S.R. può essere identificato con un punto fisso appartenente a tale linea. In quel punto immaginiamo la presenza di una persona, chiamata **osservatore**, che segue con lo sguardo ciò che accade al corpo in movimento. Se il moto avviene in un piano, il **S.R.** generalmente è costituito da due rette perpendicolari orientate nel cui punto d'incontro si colloca l'osservatore. Se il moto avviene nello spazio il **S.R.** generalmente è costituito da tre rette orientate, ciascuna perpendicolare al piano individuato dalle altre due. L'osservatore è posto nel loro punto d'incontro. Un particolare **S.R.** ,ritenuto con buona approssimazione inerziale, è quello delle **stelle fisse**. Le rette che idealizzano gli assi cartesiani del sistema di riferimento sono linee che congiungono idealmente il centro del sole con alcune stelle di "posizione privilegiata" (come ad esempio la stella polare). Noi inizialmente rivolgeremo la nostra attenzione al **moto di un punto materiale su traiettoria prestabilita**.

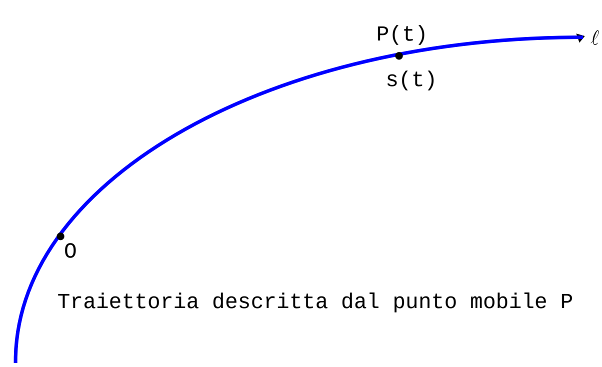
Punto materiale, Traiettoria, Ascissa curvilinea, Legge oraria del moto

Punto materiale è un qualsiasi corpo le cui dimensioni geometriche sono trascurabili rispetto alle dimensioni geometriche dello spazio in cui il moto si volge. Dunque punto materiale (o corpo puntiforme o particella elementare) è un oggetto piccolissimo in relazione alle distanze che percorre. Così per un astronomo sono spesso punti i pianeti nelle loro rivoluzioni attorno al Sole. Chiamiamo **Posizione** di un punto materiale il punto geometrico da esso occupato ad un certo istante. Matematicamente un **Punto materiale** viene concepito come un oggetto privo di dimensioni a cui non possiamo associare né moti rotazionali né moti vibrazionali ma a cui associamo una **massa** m. Spesso si parla di **mobile** intendendo con ciò un punto materiale di massa m in movimento. Il punto materiale P durante il suo moto descrive una linea ℓ detta **Traiettoria** del moto. Essa può essere rettilinea o curvilinea ed il moto dicesi **rettilineo** o **curvilineo**. Inizialmente affronteremo lo studio della **cinematica del punto materiale** supponendo di conoscere la traiettoria, cioè supporremo che il mobile percorra una traiettoria prestabilita, sulla quale introduciamo un sistema di ascisse curvilinee. Si dice che su una traiettoria prestabilita ℓ percorsa dal punto materiale P si è introdotto un **sistema di ascisse curvilinee** quando, fissato un punto O di riferimento (origine) sulla traiettoria, si stabilisce su di essa un verso positivo di percorrenza e si associa ad ogni punto di questa linea un numero s che esprime, nell'unità di misura fissata, la lunghezza dell'arco di traiettoria compreso fra quel punto e l'origine. Tale numero sarà positivo se il punto P segue l'origine O nel verso positivo di percorrenza, negativo se lo precede.

(**N.B.** Il verso positivo arbitrariamente scelto sulla traiettoria ℓ può coincidere oppure no col verso reale del moto del punto materiale P). La **posizione** del punto P sulla traiettoria ℓ varia al variare di t. Si dice che la posizione del punto P è funzione del tempo e si scrive $P(t)$. $P(t)$ = posizione occupata dal punto P all'istante t. Poiché ad ogni valore del tempo corrisponde un ben determinato valore dell'ascissa curvilinea s, diciamo che s è funzione del tempo e scriviamo: $\mathbf{s=s(t)}$ [1]

L'equazione [1], che mi dice come varia l'ascissa curvilinea s al variare del tempo dicesi **Equazione oraria del moto** o **legge oraria del moto**. La l**egge oraria** (o equazione) **del moto** esprime la relazione che intercorre tra l'ascissa curvilinea s (che individua la posizione del punto materiale al tempo t) ed il tempo t. Ad esempio $s = 2t^2 - 3t + 5$ rappresenta la legge oraria di un moto uniformemente vario. Se riferiamo il piano ad un sistema di assi cartesiani e riportiamo in ascissa il tempo ed in ordinata l'ascissa curvilinea s, allora l'equazione $\mathbf{s=s(t)}$ rappresenta una curva detta **diagramma orario** o curva oraria. Tale curva, dal punto di vista geometrico, non ha nulla a che vedere con la traiettoria ℓ descritta dal mobile.

L'ascissa curvilinea **s** rappresenta anche lo **spazio percorso** nel tempo t solo se la posizione iniziale del mobile coincide col riferimento O scelto sulla traiettoria ℓ.



Traiettoria descritta dal punto mobile P

Velocità scalare media ed istantanea

La traiettoria del punto materiale P sia una curva piana ℓ sulla quale fissiamo, in maniera conveniente ma arbitraria, una origine O, un verso positivo ed una unità di misura per le lunghezze. Per individuare il moto del punto P sulla traiettoria prestabilita ℓ basta conoscere come varia l'ascissa curvilinea s del punto P al variare del tempo, cioè basta conoscere la funzione s(t).

L'equazione **s = s(t)** [1] fissa la **legge oraria del moto** che dicesi anche **equazione oraria del moto**. L'istante $t_o = 0$ dicesi l'**istante iniziale** del moto perché fisicamente è l'istante in cui si comincia ad osservare il moto. Per $t < 0$ la [1] permette di calcolare le posizioni occupate dal punto P prima che se ne iniziasse l'osservazione, supposto che il punto materiale P obbedisse alla stessa legge del moto anche prima dell'istante iniziale.

Per $t_o = 0$ la [1] dà un valore speciale $s_o = s(0)$ di s. Questo speciale valore s_O individua una speciale posizione P_O di P (**posizione iniziale**) che solo in particolari casi è coincidente con O. Se poi risulta anche $P_o \equiv O$, allora l'arco di curva $\overset{\frown}{P_oP} = \overset{\frown}{OP}$ misurato da $s = s(t)$, rappresenta lo spazio s percorso dal punto P nel tempo t. Se invece risulta $P_o \neq O$ lo spazio percorso nel tempo t è: $\overset{\frown}{P_oP} = s(t) - s_o$. La legge del moto **s = s(t)** dà lo spazio percorso dal mobile solo nel caso particolare che l'origine O coincida con la posizione iniziale del mobile e che sia costante il verso del movimento. (Non bisogna confondere il verso della traiettoria ℓ col verso reale del moto. Essi possono coincidere oppure no).

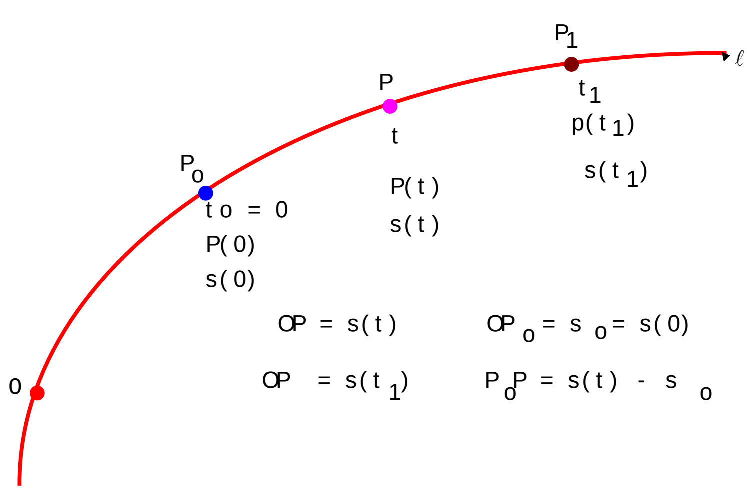
In un riferimento cartesiano riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi t in una scala opportuna e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori di s in una scala opportuna. La legge oraria del moto **s = s(t)** rappresenta l'equazione cartesiana di una curva γ

che dicesi **diagramma orario** del moto descritto dal punto P. (In generale risulta $\gamma \neq \ell$). Siano $P(t)$ e $P(t_1)$ le posizioni del mobile occupate rispettivamente agli istanti t e t_1 (> t). $\mathbf{PP_1 = \Delta s = s(t_1) - s(t) = s_1 - s}$ è lo spazio percorso dal mobile nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$.

Definiamo **velocità scalare media** del punto materiale P relativa all'intervallo di tempo Δt o relativa al tratto di curva PP_1 il seguente rapporto tra lo spazio percorso Δs ed il tempo impiegato a percorrerlo Δt:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} \quad [2]$$

Riferendosi al diagramma orario γ del moto possiamo dire che la velocità scalare media $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = tg\,\vartheta_1$ rappresenta il coefficiente angolare della retta PP_1 soltanto se l'unità di lunghezza (per noi il metro) sull'asse delle ordinate e l'unità di tempo (per noi il secondo) sull'asse delle ascisse sono rappresentati da segmenti uguali. Ciò in pratica non avviene mai per cui $tg\,\vartheta_1$ non dà una misura di v_m ma è soltanto proporzionale a v_m. <<**La velocità scalare media** $\mathbf{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$ **rappresenta la velocità costante di un mobile fittizio Q che, muovendosi con velocità costante** v_m**, percorre nello stesso tempo Δt lo stesso spazio Δs percorso da P**>>.



Se poi calcoliamo le velocità medie relative ad intervalli di tempo Δt sempre più piccoli otteniamo valori della velocità sempre più prossimi al valore della velocità del punto P all'istante t. Quindi possiamo immaginare un intervallo di tempo tanto piccolo che ogni sua ulteriore riduzione non alteri la velocità media. Questa velocità media limite è chiamata **velocità scalare istantanea** e viene indicata col simbolo $v(t)$.

$v(t)$ = velocità scalare media relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo (teoricamente infinitesimo). In termini matematici possiamo scrivere:

$$\mathbf{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)}$$

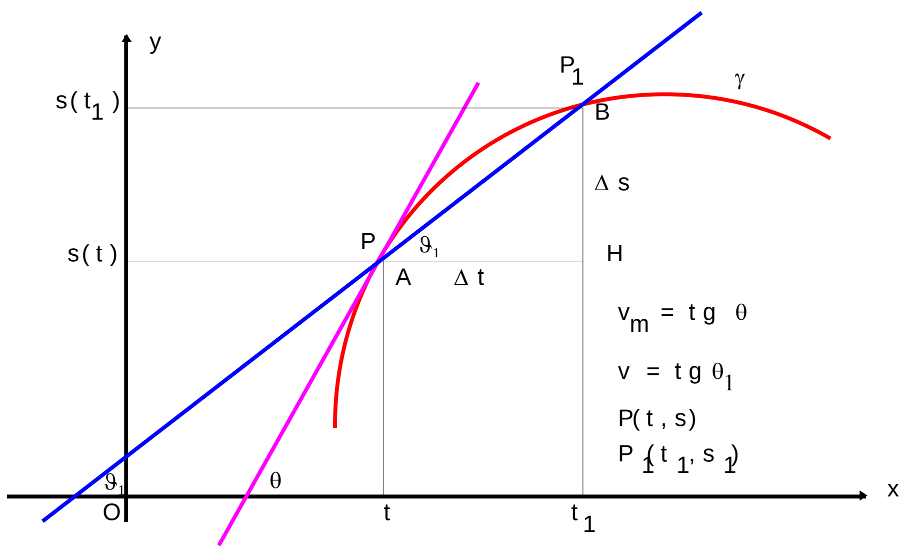


Diagramma orario

Qualitativamente la velocità può dirsi lo spazio riferito al tempo impiegato a percorrerlo. Ma quando $\Delta t \to 0$ $(t_1 \to t)$ il punto $P_1 \to P$ sicché, al limite la secante PP_1 diventa la tangente alla curva γ nel punto P. Pertanto la velocità del mobile all'istante t (**velocità scalare istantanea**) è uguale al coefficiente angolare ($\mathrm{tg}\,\vartheta$) della retta tangente nel punto P alla curva γ diagramma orario del moto.

Esempio: **<<Calcolare la velocità scalare istantanea di un punto mobile la cui legge oraria è** $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ >>

$$\mathrm{v}(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{3t_1^2 - 5t_1 + 2 - 3t^2 + 5t - 2}{t - t} =$$

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{3(t_1 - t)(t_1 + t) - 5(t_1 - t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} (3t_1 + 3t - 5) = 3t + 3t - 5 = 6t - 5$$

$$\mathrm{v}(t) = 6t - 5$$

La grandezza fisica velocità è derivata dalle grandezze fondamentali lunghezza e tempo.

$$[\mathrm{v}] = \frac{[\mathrm{s}]}{[\mathrm{t}]} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]} = [\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}] \qquad \{\mathrm{v}\} = \frac{\{\mathrm{s}\}}{\{\mathrm{t}\}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 0{,}278\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{5}{18}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3{,}6\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{18}{5}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Un punto si muove con velocità unitaria se percorre un arco di curva lungo un metro in ogni secondo

OSSERVAZIONE La velocità definita in questo paragrafo è detta anche **velocità lineare** e rappresenta solo un aspetto della **velocità vettoriale**.

Moti progressivi e retrogradi

Supponiamo che un punto materiale P descriva la traiettoria ℓ, sulla quale fissiamo convenzionalmente un verso positivo di percorrenza.

Velocità positiva significa che il punto P si muove nel verso positivo fissato su ℓ.

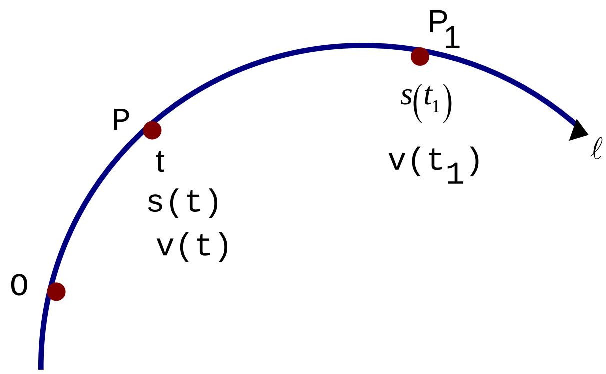
In questo caso il moto dicesi **progressivo**.

$\mathrm{v} > 0$ significa che il punto materiale P si muove nel verso positivo fissato sulla traiettoria ℓ; il moto viene detto **progressivo**.

$\mathrm{v} < 0$ significa che P si muove in verso opposto a quello fissato sulla traiettoria ℓ; il moto viene detto **retrogrado**.

Velocità scalare positiva (**negativa**) significa che il punto materiale P si muove realmente nello **stesso verso** (**in verso opposto**) di (a) quello fissato convenzionalmente sulla traiettoria ℓ descritta da P.

Accelerazione scalare media ed istantanea



Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la velocità scalare è una funzione del tempo t, cioè $v = v(t)$. Accanto a questa funzione che, istante per istante misura la variazione di posizione del mobile rispetto al tempo, ha importanza fondamentale in meccanica un'altra funzione del tempo che misura, sempre rispetto al tempo, la variazione della velocità scalare. Se al tempo t la velocità di P è v(t) ed al tempo t_1 (> t) è $v(t_1)$, definiamo **accelerazione scalare media** relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$ il seguente rapporto: $\bar{a} = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_1) - v(t)}{t_1 - t}$

L'accelerazione scalare media relativa ad un intervallo di tempo Δt piccolissimo (teoricamente infinitesimo) dicesi **accelerazione scalare istantanea**. In simboli abbiamo: $a = \lim_{t_1 \to t} \frac{v(t_1) - v(t)}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = s''(t)$

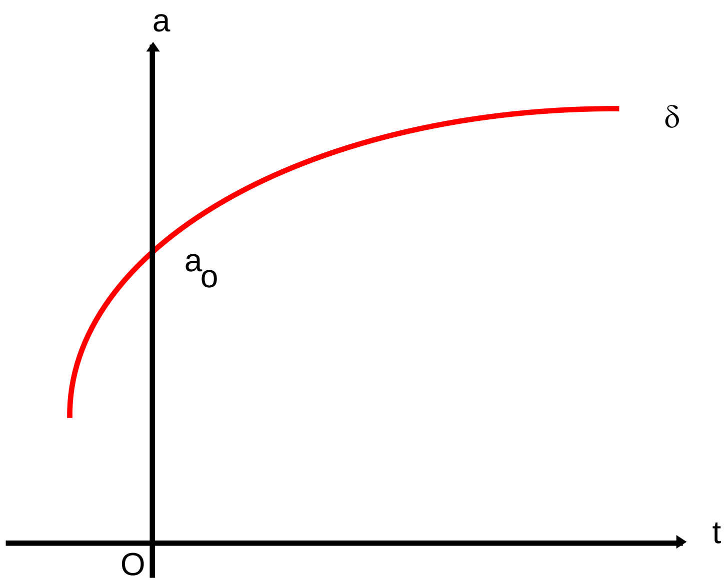


Diagramma delle accelerazioni

Anche l'accelerazione scalare istantanea è, in generale, funzione del tempo, cioè $a=a(t)$. Se riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate le accelerazioni a la curva δ, immagine geometrica dell'equazione $a = a(t)$ è detta **diagramma delle accelerazioni**.

Qualitativamente l'accelerazione esprime la rapidità di variazione della velocità rispetto al tempo.

L'accelerazione è una grandezza derivata.

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[L \bullet T^{-1}]}{[T]} = [L \bullet T^{-2}] \qquad \{a\} = \frac{\{v\}}{\{t\}} = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$$

Quindi nel S.I. l'unità di misura dell'accelerazione è il <<**metro al secondo quadrato**>> e corrisponde all'accelerazione di un punto materiale la cui velocità varia uniformemente di $1\frac{m}{s}$ in ogni secondo. L'accelerazione scalare, al pari della velocità scalare, può essere tanto positiva quanto negativa.

$$s(t) = 3t^2 - 5t + 2 \qquad v(t) = 6t - 5$$

$$a = \lim_{t_1 \to t} \frac{6t_1 - 5 - 6t + 5}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{6(t_1 - t)}{(t_1 - t)} = 6 \frac{m}{s^2}$$

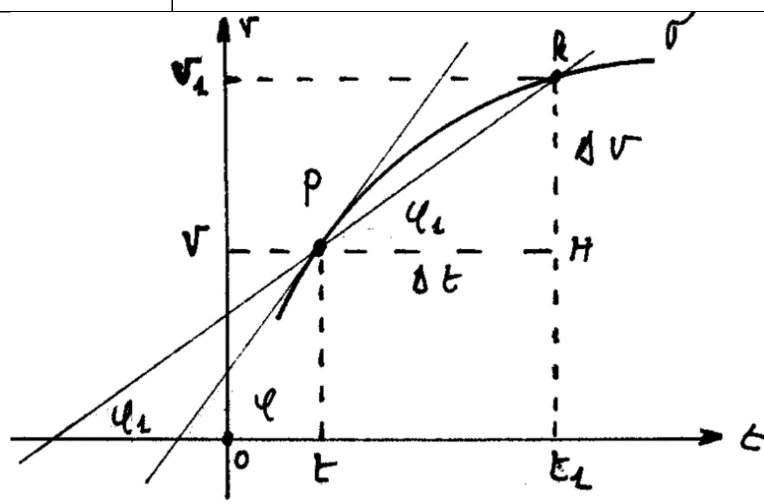
Accelerazione scalare positiva significa: *moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che aumenta*

Accelerazione scalare negativa significa: *moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che diminuisce.*

Velocità iniziale v_i	Velocità finale v_f	Accelerazione a
$10\frac{m}{s}$	$20\frac{m}{s}$	$a > 0$ **moto progressivo con velocità scalare che aumenta**
$-20\frac{m}{s}$	$-10\frac{m}{s}$	$a > 0$ **moto retrogrado con velocità scalare che aumenta**
$20\frac{m}{s}$	$10\frac{m}{s}$	$a < 0$ **moto progressivo con velocità scalare che diminuisce**
$-10\frac{m}{s}$	$-20\frac{m}{s}$	$a < 0$ **moto retrogrado con velocità scalare che diminuisce**

$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = tg\,\varphi_1 \qquad a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = tg\,\varphi \; =$

coefficiente angolare della retta tangente al diagramma della velocità



Moti accelerati e ritardati

Un moto si dice **accelerato** (**ritardato**) quando l'accelerazione scalare e la velocità scalare hanno segni concordi (discordi)

$$\left.\begin{array}{c} a \cdot v > 0 \\ + \; + \\ - \; - \end{array}\right\} \Rightarrow \text{moto accelerato} \qquad \left.\begin{array}{c} a \cdot v < 0 \\ + \; - \\ - \; + \end{array}\right\} \Rightarrow \text{moto decelerato}$$

Fisicamente parlando, moto accelerato significa:

1) moto progressivo ($v>0$) con velocità scalare che aumenta ($a>0$) oppure:

2) moto retrogrado ($v<0$) con velocità scalare che diminuisce in valore relativo ma aumenta in valore assoluto ($a<0$)

Moto accelerato significa:

1) moto **progressivo** $(v>0)$ con velocità scalare che aumenta $(a>0)$ oppure

2) moto **retrogrado** $(v<0)$ con velocità scalare che aumenta in valore relativo ma diminuisce in valore assoluto $[\, v(t_1)=-5\frac{m}{s} \quad v(t)=-8\frac{m}{s}\,]$

Sinteticamente possiamo affermare quanto segue:

Moto accelerato (**decelerato**) è un moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che aumenta (diminuisce) in valore assoluto.

Se risulta $v(t)=0$ allora esiste un istante t^* detto (istante di arresto) in cui il mobile si ferma. Ad esso corrisponde sulla traiettoria l una posizione di arresto. Nel moto accelerato (decelerato) non esiste (esiste) un istante di arresto.

Osservazione: **Moto decelerato significa che, se permangono le cause che hanno determinato il moto, il mobile è destinato a fermarsi. Sotto queste ipotesi, dopo l'istante di arresto, il moto diventa accelerato.**

Moto uniforme su traiettoria prestabilita

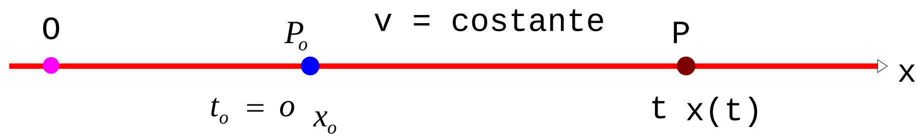
E' il moto di un punto che percorre una traiettoria prestabilita con **velocità scalare costante**. In questo caso la << *velocità scalare istantanea coincide con quella media* >>. Se la traiettoria ℓ è una curva qualsiasi il moto dicesi **curvilineo uniforme**, se è una retta (in questo caso diviene un asse cartesiano x) il moto dicesi **rettilineo uniforme**.

accelerazione scalare nulla $\Rightarrow$: $\quad a = 0 \qquad v = \frac{s(t)-s_o}{t}$

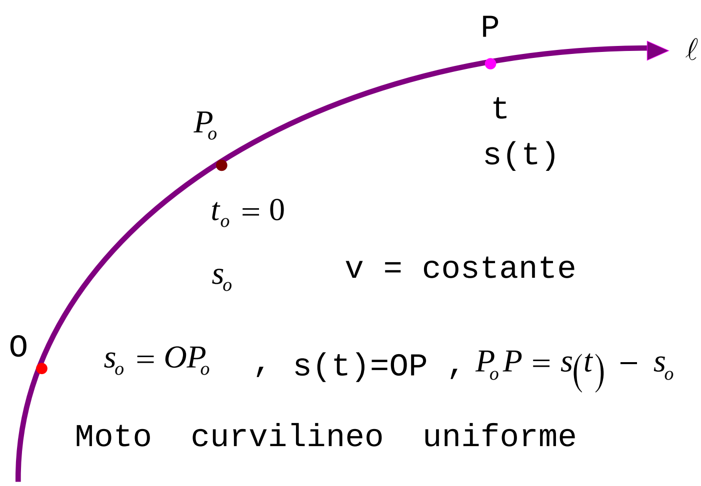
$s(t) = s_o + vt$ **legge oraria del moto** $\qquad v = \frac{x(t)-x_o}{t} \qquad x(t) = x_o + vt$

s_o (oppure x_o) è la *posizione iniziale* del moto.

Data la traiettoria ℓ e la velocità v di un moto uniforme, il moto stesso non è ancora completamente individuato; occorre conoscere anche la **posizione iniziale** s_o (x_o) del mobile.



Moto rettilineo uniforme



Moto curvilineo uniforme

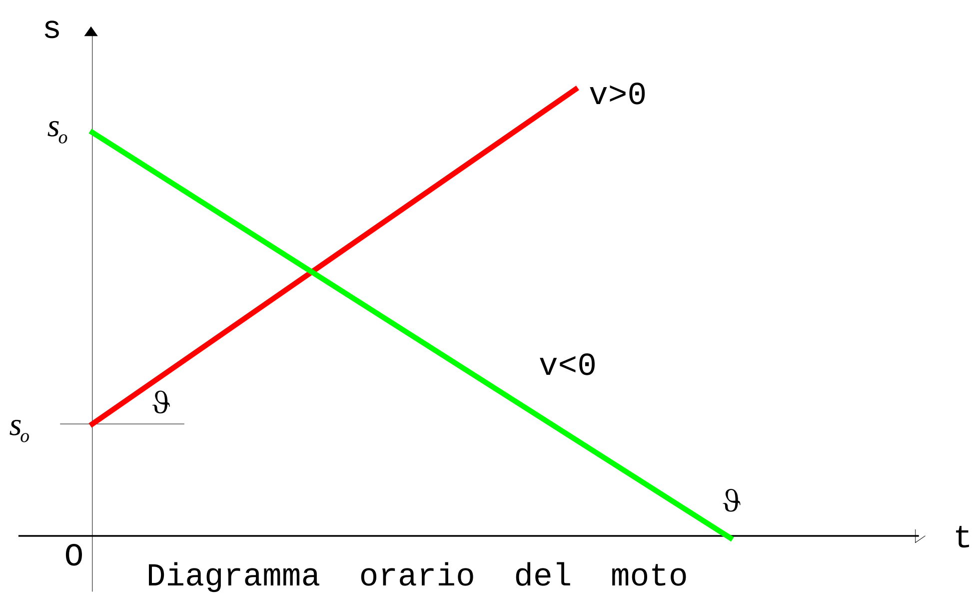


Diagramma orario del moto

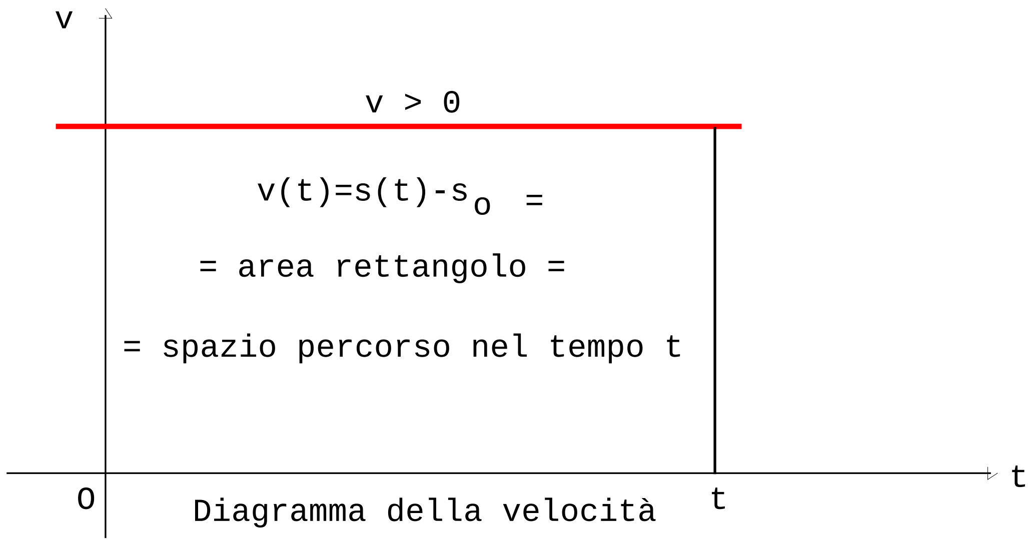


Diagramma della velocità

Osservazione N°1: $v = tg\,\vartheta$ se l'unità di misura per le lunghezze (il metro) e per il tempo (il secondo) sono rappresentati da segmenti uguali, altrimenti ne differisce per una costante di proporzionalità.

Osservazione N°2: Il moto rettilineo uniforme è fondamentale in fisica perché è il moto di un punto materiale al quale non è applicata nessuna forza, è il **moto per inerzia**.

Moto uniformemente vario su traiettoria prestabilita

E' il moto di un punto materiale che descrive una traiettoria prestabilita ℓ con accelerazione scalare costante. Se ℓ è una retta il moto dicesi **rettilineo uniformemente vario**, in caso contrario dicesi **moto curvilineo uniformemente vario**. In un moto uniformemente vario l'accelerazione scalare istantanea coincide con quella media , per cui possiamo scrivere:

$$a = \frac{v(t) - v_o}{t} \quad \text{e quindi:} \quad v(t) = v_o + at$$

v_o è la **velocità iniziale**, cioè la velocità del mobile all'istante $t=0$.

<< **Nel moto uniformemente vario la velocità è funzione lineare del tempo**>>.

Per calcolare la legge oraria del moto occorre il calcolo differenziale che noi, allo stato attuale, non conosciamo. La **velocità scalare media** relativa all'intervallo di tempo t vale per definizione: $v_m = \dfrac{s(t) - s_o}{t}$ e quindi: $s(t) = s_o + v_m \cdot t$ **[A]**

Per calcolare v_m ricorriamo al seguente **teorema** che si dimostra in analisi matematica: <<Se una grandezza è funzione lineare del tempo, allora il suo valore medio relativo all'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è uguale alla media aritmetica fra il suo valore all'istante t_1 e quello all'istante t_2>>.

Nel caso nostro abbiamo $t_1 = 0$ è $[v(t_1) = v_o]$ e $t_2 = t$ $[v(t_2) = v(t)]$ e quindi possiamo scrivere :

$$v_m = \frac{v_o + v(t)}{2} = \frac{v_o + v_o + at}{2} = v_o + \frac{1}{2}at$$

Sostituendo nella [A] otteniamo: $\mathbf{s(t) = s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2}$

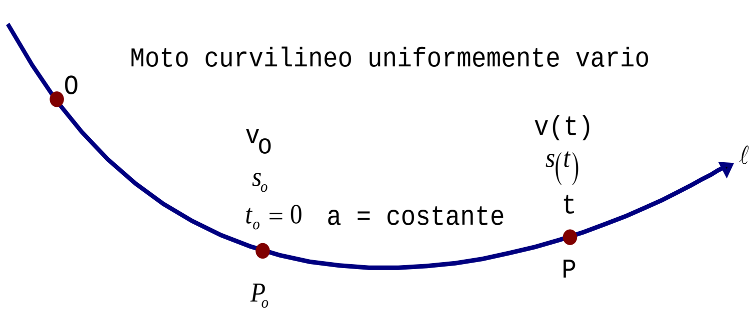
che esprime la << *legge oraria del moto uniformemente vario* >>

Se $P_o \equiv O$ abbiamo: $\mathbf{s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t}$

Se $P_o \equiv O$ e $v_o = 0$ abbiamo: $\mathbf{s(t) = \frac{1}{2}at^2}$

$\mathbf{s(t) - s_o = \frac{1}{2}at^2 + v_o t}$ = spazio percorso dal mobile nel tempo t o meglio in t secondi

Data l'accelerazione a costante, il moto non è ancora completamente individuato. Sono ancora indeterminati la **posizione iniziale** s_o e la ***velocità iniziale*** v_o.



Un moto uniformemente vario è completamente individuato quando conosciamo la traiettoria, l'accelerazione a costante, la velocità iniziale v_o e la posizione iniziale s_o.

E' possibile esprimere la velocità scalare in funzione dello spazio percorso.

$$\begin{cases} v(t) = v_o + at \\ s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o \end{cases} \qquad t = \frac{v(t) - v_o}{a} \qquad s(t) - s_o = \frac{1}{2}a\left[\frac{v(t) - v_o}{a}\right]^2 + v_o\left[\frac{v(t) - v_o}{a}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2(t) + v_o^2 - 2v_o \cdot v(t)}{a} + \frac{v_o \cdot v(t) - v_o^2}{a} = \frac{v^2(t) - v_o^2}{2a}$$

$$\mathbf{v^2(t) - v_o^2 = 2a[s(t) - s_o]} \qquad \mathbf{v(t) = \pm\sqrt{v_o^2 + 2a\left[s(t) - s_o\right]}}$$

$$s_o = 0 \Rightarrow \mathbf{v(t) = \pm\sqrt{v_o^2 + 2a \times s(t)}} \quad ; \quad s_o = 0 \,,\; v = 0 \Rightarrow \mathbf{v(t) = \pm\sqrt{2a \times s(t)}}$$

Si prende il segno + (-) se il moto è **progressivo** (*retrogrado*).

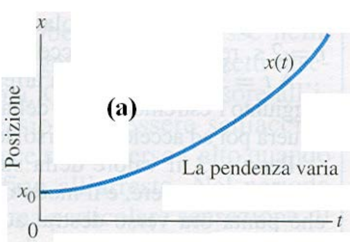
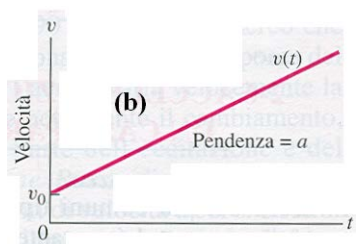


Diagramma orario del moto uniformemente vario. E' una parabola γ.



Il diagramma della velocità è una retta r. In ascissa riportiamo il tempo ed in ordinata la velocità scalare. $v(t)$ coincide, in segno e modulo, col coefficiente angolare della tangente a γ nel punto $P(x,t)$

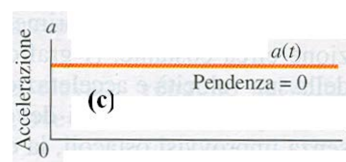


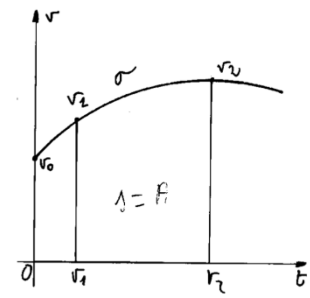
Diagramma dell'accelerazione. In ascissa riportiamo il tempo ed in ordinata l'accelerazione. L'accelerazione scalare coincide, in segno e modulo, col coefficiente angolare della retta r, diagramma della velocità.

Osservazione N°1

Se la legge oraria di un moto uniformemente vario è $\mathbf{s = \frac{1}{2}t^2 - 4t - 10}$ allora possiamo dire che: $a = 1\frac{m}{s^2}$, $v_o = -4\frac{m}{s}$, $s_o = -10\,m$, $v(t) = -4 + t$

Osservazione N°2

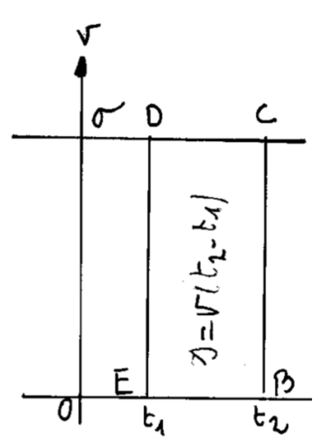
La velocità scalare istantanea di un punto che descrive una traiettoria prestabilita qualsiasi è una funzione del tempo, cioè: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{t})$ Se riferiamo il piano ad un sistema ortogonale di assi cartesiani e riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate i valori della velocità v, la curva σ immagine geometrica dell'equazione $v = v(t)$ è il **diagramma della velocità**.

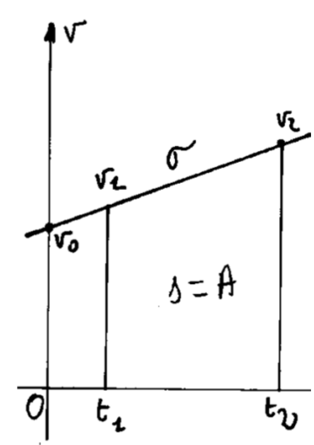


Lo spazio percorso $s = s_2 - s_1$ dal punto materiale O nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$, cioè quando passa dalla posizione P_1 alla posizione P_2, coincide numericamente con l'area A individuata dalla curva σ, dall'asse dei tempi, e dalle rette $t = t_1$ e $t = t_2$. Infatti:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt$$

Se la **velocità scalare è costante**, moto uniforme su traiettoria prestabilita, allora lo spazio percorso coincide numericamente con l'area del **rettangolo** $EBCD$ di base $t_2 - t_1$ ed altezza v. Se l'**accelerazione scalare è costante** allora lo spazio percorso coincide numericamente con l'area del trapezio indicato in figura.



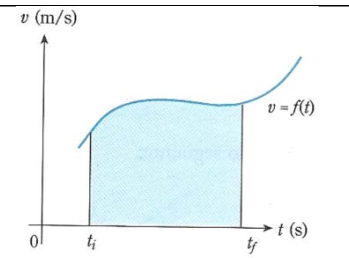
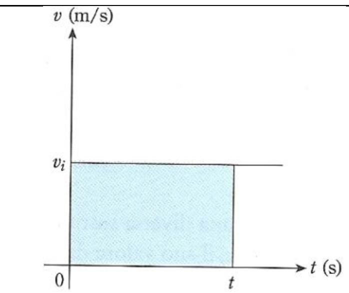
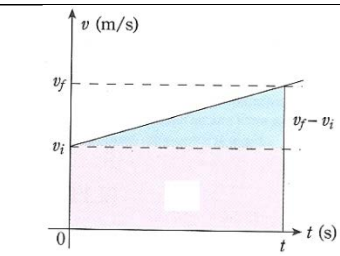


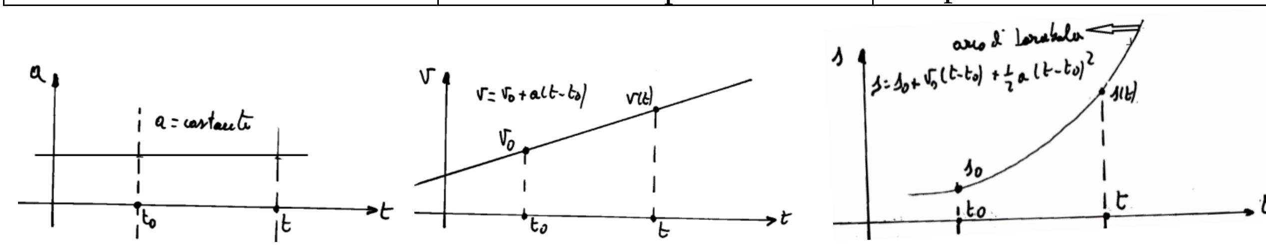
Infatti: $v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad ds = v \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_o + at) \cdot dt \quad \Rightarrow$

$[s]_{t_1}^{t_2} = \left[v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \right]_{t_1}^{t_2} \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = v_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2$ = spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1 \quad v_2 = a t_2 \quad v_1 = a t_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

$$s = s_2 - s_1 = v_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \frac{v_2 - v_1}{\cancel{t_2 - t_1}} (t_2 - t_1)^{\cancel{2}} = \left(v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2} \right)(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1) = \frac{(b+B)h}{2}$$

che è l'area del trapezio della figura dove $b = v_1$, $B = v_2$, $h = t_2 - t_1$

 Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto in cui $v = f(t)$. L'area colorata in azzurro è lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$	 Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto rettilineo uniforme con velocità v_i. L'area del rettangolo colorato è $v_i \cdot t$ e rappresenta lo spazio percorso dall'istante iniziale al tempo t.	 Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto uniformemente accelerato con velocità v_i. L'area del trapezio colorato rappresenta lo spazio percorso dall'istante iniziale al tempo t.



Diagrammi dell'**accelerazione**, della **velocità**, della **posizione** per un moto uniformemente accelerato su una traiettoria prestabilita quando io mobile passa dalla posizione P_0, individuato dall'ascissa curvilinea s_0, alla posizione **P** individuata dall'ascissa curvilinea **s**.

Vediamo come l'uso del calcolo integrale permetta di semplificare il procedimento per ricavare le equazioni del moto con accelerazione costante.

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad d\mathrm{v} = a \cdot dt$$

Integrando ambo i membri tra l'istante iniziale t_o (quando la velocità del punto materiale è v_o) e l'istante generico t [quando la velocità è $\mathrm{v}(t)$] abbiamo:

$$\int_{\mathrm{v}_o}^{\mathrm{v}(t)} d\mathrm{v} = \int_{t_o}^{t} a \cdot dt \quad [\mathrm{v}]_{\mathrm{v}_o}^{\mathrm{v}(t)} = a \cdot [t]_{t_o}^{t} \quad \mathrm{v}(t) - \mathrm{v}_o = a \cdot (t - t_o) \quad \mathbf{v(t) = v_o + a \cdot (t - t_o)}$$

per $t_o = 0$ abbiamo: $\mathbf{v(t) = v_o + a \cdot t}$

- $$\mathrm{v} = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad ds = \mathrm{v} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_{t_o}^{t} ds = \int_{t_o}^{t} \mathrm{v} \cdot dt = \int_{t_o}^{t} (\mathrm{v}_o + at) \cdot dt \quad \Rightarrow$$

$$[s]_{t_0}^{t} = \left[\mathrm{v}_o t + \frac{1}{2} a t^2 \right]_{t_o}^{t} \quad \Rightarrow \quad s(t) - s_o = \mathrm{v}_o (t - t_o) + \frac{1}{2} a (t - t_o)^2 \quad \mathbf{s(t) = s_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2} a (t - t_o)^2}$$

per $t_o = 0$ abbiamo: $\mathbf{s(t) = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2}$

Il **calcolo integrale**, inverso del calcolo differenziale, fornisce un mezzo potente e nello stesso tempo pratico per determinare la velocità e la posizione di un punto materiale mobile in funzione del tempo.

Utilizzando le proprietà algebriche dei differenziali è possibile ricavare un'espressione per l'accelerazione in funzione dell'ascissa curvilinea s che ci fornisce la posizione del punto materiale.

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\mathrm{v}}{ds} = \mathrm{v} \cdot \frac{d\mathrm{v}}{ds} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} \cdot d\mathrm{v} = a \cdot ds \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} \mathrm{v} \cdot d\mathrm{v} = \int_{s_o}^{s} a \cdot ds = a \cdot \int_{s_o}^{s} ds$$

$$\left[\frac{1}{2} \mathrm{v}^2 \right]_{\mathrm{v}_o}^{\mathrm{v}} = a \cdot [s]_{s_o}^{s} \quad \frac{1}{2}(\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}_o^2) = a[s - s_o] \quad \mathbf{v^2 = v_o^2 + 2a(s - s_o)}$$

Problema: Un corpo inizialmente in quiete parte dall'origine con una accelerazione data da $a = -3t^2 + 6t$. Determinare dopo quanto tempo il corpo passa nuovamente per l'origine e con quale velocità scalare vi giunge.

$t_o=0 \quad \mathrm{v}_o=0 \quad \mathrm{v}(t)=\int_0^t a(t)\cdot d\,t=\int_0^t\left(-3t^2+6t\right)\cdot d\,t=\left[-t^3+3t^2\right]_0^t=-t^3+3t^2$ $\quad \mathbf{v(t)=-t^3+3t^2}$

$s(t)=\int_0^t\left(-t^3+3t^2\right)\cdot d\,t=-\frac{1}{4}t^4+t^3$ $\quad \mathbf{s(t)=-\frac{1}{4}t^4+t^3}$ $\quad s_o=0$

$s(t)=s_o=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{4}t^4+t^3=0 \quad\Rightarrow\quad t^3\cdot\left(-\frac{1}{4}t+1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad t=0$ istante iniziale

$-\frac{1}{4}t+1=0 \quad\Rightarrow\quad t=4s \quad \mathrm{v}(t)=\mathrm{v}(4)=-4^3+3\cdot4^2=-16\frac{m}{s} \quad a(t)=a(4)=-3\cdot4^2+6\cdot4=-26\frac{m}{s^2}$

Dopo 4 secondi il moto è **accelerato** (a e v hanno lo stesso segno) **retrogrado** (v è negativa).

Unità Didattica N°3

Le grandezze vettoriali nella cinematica del punto materiale

La nozione di segmento orientato

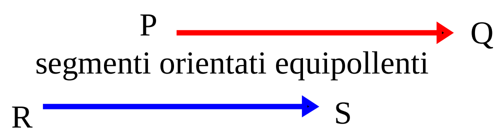
Dalla geometria euclidea sappiamo che il **segmento** è la parte finita di retta delimitata da due punti detti **estremi** del segmento. Definiamo **segmento orientato** un qualsiasi segmento sul quale è stato fissato un verso positivo.

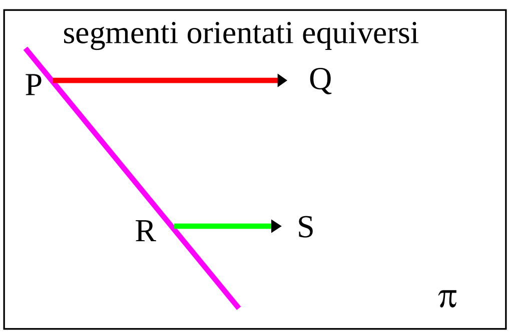
P $\longrightarrow$ **Q**

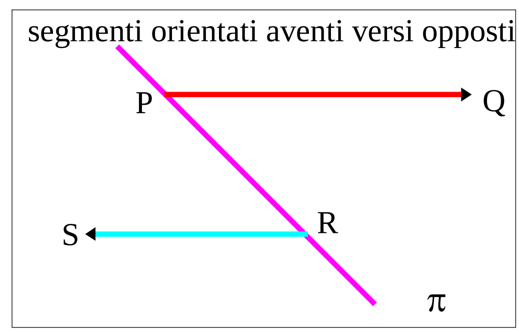
Anche per il segmento orientato possiamo scegliere il verso positivo in due maniere diverse. Cosi il **segmento orientato** PQ è quel segmento che ha come **verso positivo** quello che va dal punto P (detto **primo estremo** o **origine**) al punto Q (detto **secondo estremo** o semplicemente **estremo**). Esso è indicato col simbolo $\overrightarrow{PQ}$ o anche col simbolo PQ se conveniamo di identificare il suo verso positivo con l'ordine secondo cui sono scritti i suoi estremi. La **rappresentazione grafica** del segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ si ottiene segnando con una freccia l'estremo Q, del segmento euclideo PQ. Ogni segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ è caratterizzato dalla **lunghezza** la cui misura (rispetto ad un prefissato segmento unitario **u**) è detta **modulo** (del segmento orientato), dalla **direzione** (retta PQ o una sua qualsiasi parallela), dal **verso** che è quello scelto arbitrariamente in uno dei due modi possibili. La retta che contiene il segmento orientato PQ dicesi il **sostegno** del segmento orientato. Il segmento $\overrightarrow{PQ}$ ha **verso opposto** al segmento orientato $\overrightarrow{QP}$, anzi i segmenti orientati PQ e QP si dicono **opposti** e si scrive $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP}$. I due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ hanno lo **stesso verso** (**versi opposti**) quando hanno la **stessa direzione** ed appartengono (non appartengono) allo stesso semipiano individuato sul piano euclideo π dalla retta PR.

Due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ si dicono **equipollenti** e si scrive $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$ quando hanno:

1) la **stessa lunghezza** **2)** la **stessa direzione** **3)** lo **stesso verso**







Se $P \equiv Q$ si ha il **segmento orientato nullo** il quale ha lunghezza nulla e direzione e verso indeterminati. Due o più segmenti orientati nulli si considerano **equipollenti**. Indicheremo con $\mathcal{J} = \{\mathbf{PQ}\}$ indifferentemente l'insieme di tutti i segmenti orientati della retta euclidea r, del piano euclideo π, dello spazio euclideo Ω. Un segmento orientato PQ, quale ente dello spazio, è dotato delle seguenti 4 proprietà elementari: **1) direzione 2) verso 3) lunghezza 4) origine** o punto di applicazione. *Direzione* è sinonimo fascio di rette parallele.

La nozione di vettore

Consideriamo l'insieme $\mathcal{J}$ di tutti i segmenti orientati e sia $\overrightarrow{PQ}$ uno di essi. Il segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ o un qualsiasi altro segmento orientato ad esso equipollente individua un nuovo ente matematico detto **vettore**. Quindi vettore è l'ente matematico completamente individuato da una **direzione**, da una **lunghezza** e da un **verso**. Il vettore cosi definito può essere indicato ancora con $\overrightarrow{PQ}$ oppure, secondo le vedute di **Hamilton-Grassmann**, con $Q - P$ (si legge Q meno P), cioè come differenza fra due punti, oppure con una lettera minuscola dell'alfabeto latino soprassegnata con una freccia ($\vec{a}, \vec{b} \ldots$). Quindi risulta: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \vec{a}$ **P** si dice **origine** del vettore, Q **estremo**. Un vettore è ancora rappresentato da un segmento orientato il quale dà del vettore una **rappresentazione grafica** o un **modello**. Due segmenti orientati equipollenti rappresentano lo stesso vettore ma danno di esso due immagini diverse o due rappresentazioni grafiche diverse. Un qualsiasi **vettore** è caratterizzato: **1)** da una **direzione** **2)** da un **verso** **3)** da una **lunghezza** la cui misura è detta **modulo** che viene indicato con uno dei seguenti simboli: $|\vec{a}|$, a $|\vec{a}|$, a, $|Q - P|$, $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$, $\text{mod}\,\vec{a}$ **4)** dall'origine indeterminata.

Indichiamo con **J** l'insieme di tutti i vettori (della retta euclidea, del piano euclideo, dello spazio euclideo), cioè: $J = \left\{\overrightarrow{PQ}\right\} = \{\vec{a}\}$

Ogni vettore di modulo unitario si dice **versore** o **vettore unitario.** Ogni versore definisce una **direzione orientata** e viceversa. Di solito, il **versore** viene indicato con uno dei seguenti simboli: $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$ $\vec{e}$ $\vec{u}$

Se $P \equiv Q$ il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si dice **vettore nullo** e viene indicato col simbolo $\vec{o}$. Esso ha modulo nullo e verso e direzione indeterminati. Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si dicono uguali e si scrive $\vec{a} = \vec{b}$ quando hanno come modelli due segmenti orientati equipollenti (cioè quando rappresentano una stessa classe di segmenti orientati equipollenti, cioè quando hanno la stessa direzione, lo stesso verso, la stessa lunghezza). Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non uguali si dicono **diversi** e si scrive: $\vec{a} \neq \vec{b}$

Per i vettori non esiste una *relazione d'ordine* per cui non ha senso parlare di vettore maggiore o minore di un altro vettore. Si dice che **due vettori** sono

paralleli quando si possono rappresentare con segmenti orientati di una stessa retta o di rette parallele. Due **vettori** si dicono **opposti** se hanno la stessa **lunghezza**, la stessa **direzione** e **versi opposti**. L'opposto del vettore $\vec{a}$ è indicato col simbolo $-\vec{a}$. Tre vettori si dicono **complanari** se per essi è possibile una rappresentazione con segmenti orientati di uno stesso piano. Possiamo concludere affermando che gli elementi caratteristici di un vettore libero $\vec{a} = Q - P$ sono:

$$P \xrightarrow{\vec{a}} Q$$

1) l'**origine** P e l'**estremo** Q **2)** la **direzione** cioè la retta PQ (detta **sostegno** o **retta d'azione** del vettore libero $\overrightarrow{PQ}$) o una sua qualsiasi retta parallela.

3) il verso che va dall'origine **P** all'estremo **Q**

4) il **modulo** che è un numero reale assoluto che esprime la misura del segmento non orientato PQ (segmento euclideo rispetto ad una prefissata unità di misura

5) l'**origine** P indeterminata

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Tutte le grandezze che studiamo in fisica sono di due tipi: **grandezze scalari** e **grandezze vettoriali**. Definiamo **scalare** una grandezza completamente individuata da un numero (**positivo o negativo**) che ne esprime la misura rispetto ad un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità di misura (**scala**). Sono esempi di **grandezze scalari** le temperature, le masse dei corpi, l'area di una superficie, il lavoro eseguito da una forza, etc....

Definiamo **vettoriale** una grandezza completamente individuata da un numero positivo (**modulo**), da una direzione e da un verso. Il nome **vettoriale** attribuito ad una generica grandezza di questo secondo gruppo scaturisce dal fatto che ciascuna di esse può essere rappresentata da un vettore. Sono **grandezze scalari** gli spostamenti, le velocità, le accelerazioni, le forze, l'intensità del campo elettrico, l'induzione magnetica, etc...

Somma di un punto e di un vettore

Definiamo somma del punto **A** e del vettore $\vec{v}$ e la indichiamo col simbolo $A+\vec{v}$ il punto **B** tale che sia: $B-A=\vec{v}$, cioè le due uguaglianze [1] $\mathbf{B = A + \vec{v}}$ e $\mathbf{B - A = \vec{v}}$ [2] esprimono, come nell'algebra ordinaria e con le stesse leggi per i segni, una medesima relazione.

Il vettore $\vec{v}$ applicato al punto A lo sposta nel punto B. Da questa circostanza scaturisce il nome di **vettore** (dal latino **vehere** = **trasportare**).

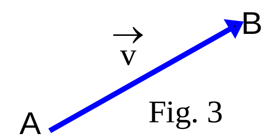


Fig. 3

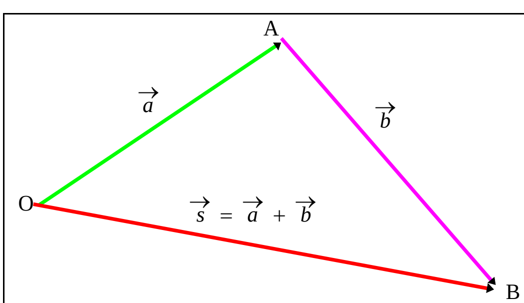
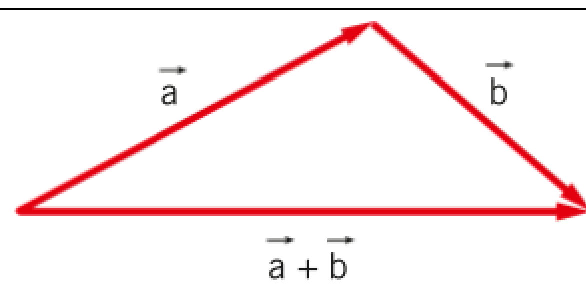
Addizione vettoriale

Introduciamo l'operazione di addizione tra due o più vettori. Si possono presentare i seguenti casi:

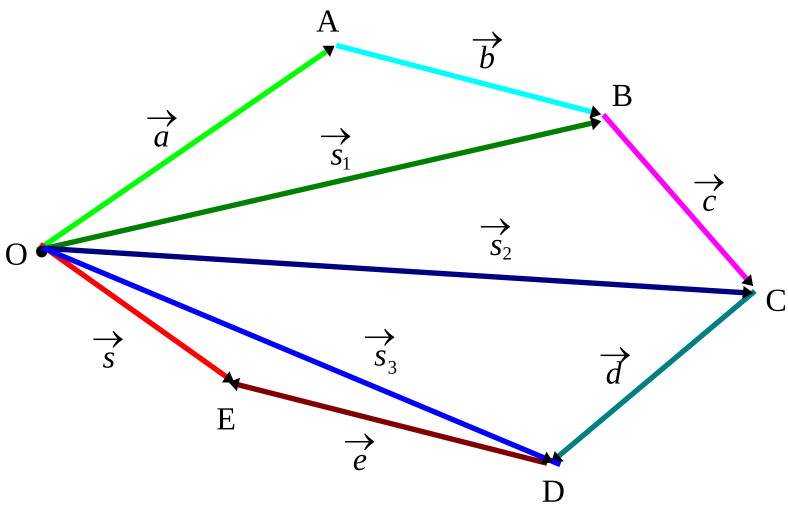
- **Somma di vettori rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi**

Supponiamo di volere eseguire la somma $\vec{s}$ di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ quando questi sono rappresentati da due segmenti orientati consecutivi. In questo caso possiamo scrivere

$$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}=(A-O)+(B-A)=(B-O)+(A-A)=(B-O)+\vec{o}=B-O$$

	
Il vettore somma è il vettore scorciatoia, cioè il vettore che congiunge l'origine del vettore $\vec{a}$ con l'estremo del vettore $\vec{b}$	Il vettore somma congiunge la coda del vettore $\vec{a}$ con la punta del vettore $\vec{b}$

Il vettore $\vec{s} = B - O$ è detto **somma** (o **vettore risultante**) dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cioè la somma dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ rappresentati da segmenti orientati consecutivi è il vettore $\vec{s}$ che ha come origine l'origine del vettore $\vec{a}$ e come estremo l'estremo del vettore $\vec{b}$.



Consideriamo adesso n (nel nostro caso 5) vettori complanari rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi .

La loro somma (detta **vettore risultante**) è il vettore $\vec{s}$ cosi ottenuto:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_1 + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_2 + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_3 + \vec{e} = E - O$$

Diversamente abbiamo:

$$\vec{s} = (A-0)+(B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D) = (E-O)+(A-A)+(B-B)+(C-C)+(D-D) = E-O$$

La somma di più vettori complanari rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi è il vettore $\vec{s}$ (detto *vettore somma* o **vettore risultante**) che ha come origine l'origine del primo vettore e come estremo l'estremo dell' ultimo vettore.

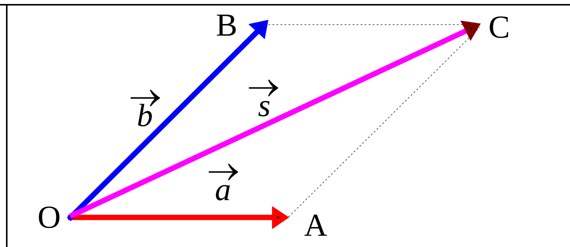
Somma di due vettori aventi la stessa origine

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori rappresentati da due segmenti orientati aventi la stessa origine **O**. La loro somma $\vec{s}$ è data da:

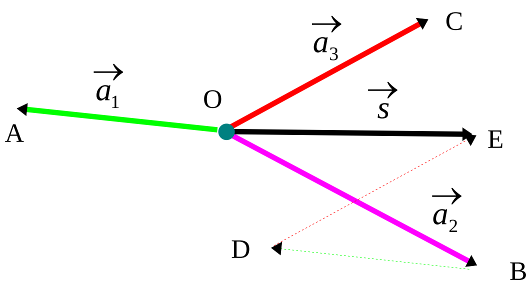
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (A - O) + (B - O) = (A - =) + (C - A) = C - A$$

AC è la **diagonale** (avente un estremo coincidente con l'origine **O** dei due vettori) del parallelogramma avente come lati consecutivi i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Si esprime questa circostanza affermando che, in questo caso, i due vettori si sommano applicando la regola del parallelogramma. Il vettore $\vec{s}$ è detto anche **vettore risultante**.



Somma di più vettori aventi la stessa origine



Si possono sommare i vettori a due a due fino ad ottenere il vettore somma $\vec{s}$, oppure da B si traccia il vettore **equipollente** ad $\vec{a}_1$, da D il vettore equipollente ad $\vec{a}_3$. **E - O = s** è il **vettore somma**.

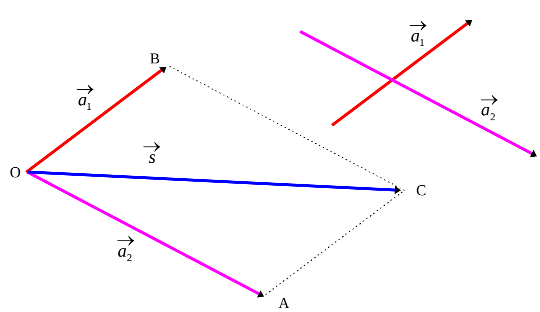
Infatti : $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (D - O) + \vec{a}_3 = E - O$

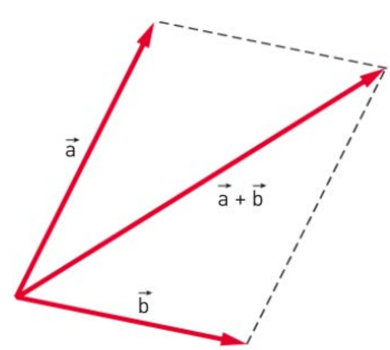
Somma di due vettori liberi complanari non consecutivi

Siano $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$ due vettori liberi complanari non aventi la stessa origine. Per calcolare la loro somma $\vec{s}$ si sceglie un qualsiasi punto **O** del piano individuato dai vettori $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$. Si costruiscono i **vettori equipollenti** $A - O = \vec{a}_2$

$B - O = \vec{a}_1$

$\vec{s}$ si ottiene applicando la **regola del parallelogramma**.





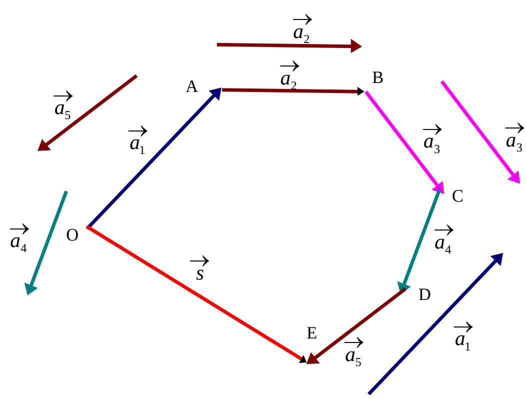
Somma di più vettori liberi non consecutivi

Si definisce **somma** di **n** (5) vettori liberi complanari il vettore $\vec{s}$ così ottenuto:

Si sceglie in maniera arbitraria il punto **O** appartenente al piano individuato dagli **n** vettori e **si costruiscono i seguenti vettori a due a due consecutivi**:

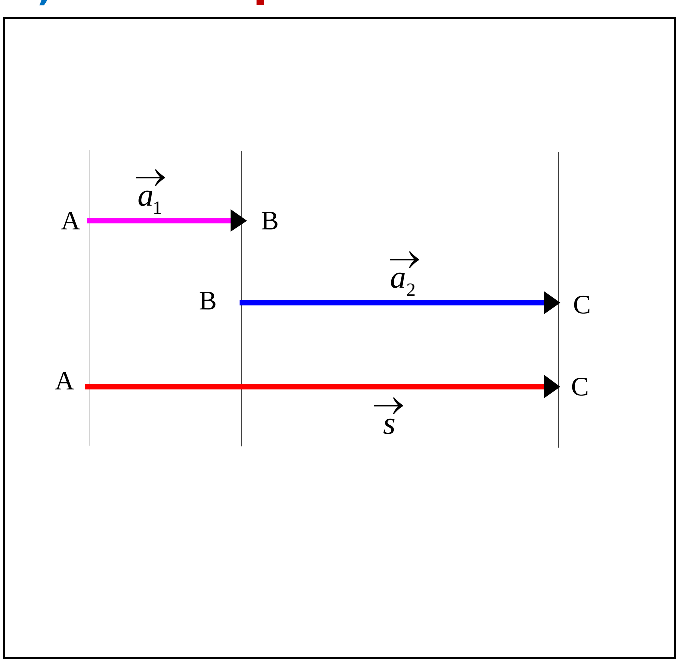
$A - O = \vec{a}_1 \ , \ B - A = \vec{a}_2 \ , \ C - B = \vec{a}_3 \ , \ D - C = \vec{a}_4 \ , \ E - D = \vec{a}_5$

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = E - O$$



Somma di vettori paralleli

1) Vettori equiversi



$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = C - A$$

Il vettore $\vec{s}$ ha:

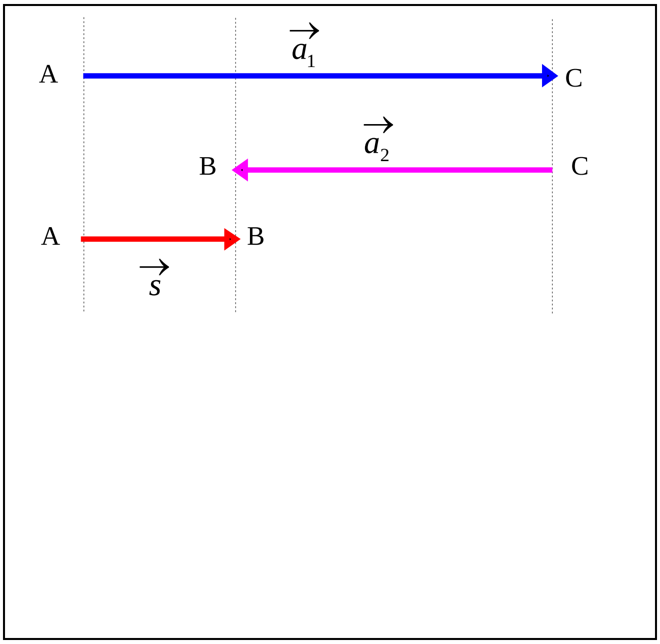
1) la stessa direzione di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

2) lo stesso verso di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

3) come **modulo** la somma dei moduli

dei vettori $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

2) Vettori aventi versi opposti



$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = B - A$

Il vettore $\vec{s}$ ha:

1) la stessa direzione di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

2) modulo uguale alla differenza tra il modulo maggiore ed il modulo minore

3) verso del vettore che ha modulo maggiore

3) Vettori opposti

La **somma di due vettori opposti** (vettori aventi la stessa direzione, lo stesso modulo e versi opposti) è il **vettore nullo**, cioè: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{o}$

L'**opposto** del vettore $\vec{a}$ si indica col simbolo $-\vec{a}$.

Sottrazione vettoriale

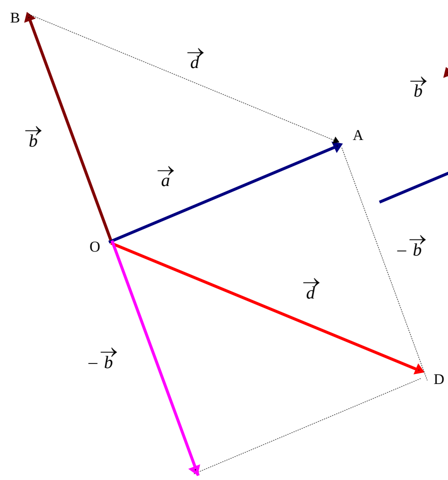
Si chiama **differenza** fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo $\vec{a} - \vec{b}$ il vettore $\vec{d}$ che si ottiene addizionando ad $\vec{a}$ l'opposto di $\vec{b}$, cioè:

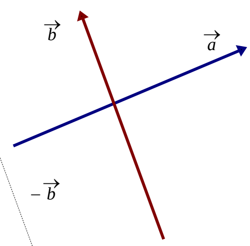
$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$$

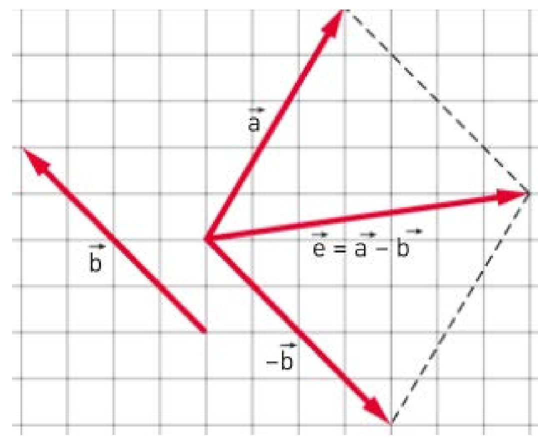
$\vec{d}$ è un vettore che ha come **origine** l'estremo di $\vec{b}$ e come **estremo** l'estremo di $\vec{a}$.

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (A - O) + (D - O) = C - O = A - O$$

N.B. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non hanno lo stesso punto di applicazione allora da un generico punto **O** del piano individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si costruiscono i vettori equipollenti rispettivamente ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il problema è ricondotto a quello precedentemente trattato.







Prodotto di un numero reale per un vettore

Se **k** è un numero reale qualsiasi ed $\vec{a}$ un vettore, si definisce **prodotto** di **k** per $\vec{a}$ e si designa col simbolo $k\vec{a}$ il vettore $\vec{p}$ che ha:

1) la stessa direzione di $\vec{a}$

2) lo stesso verso di $\vec{a}$ se **k** è **positivo** e verso opposto ad $\vec{a}$ se **k** è **negativo**

3) come **modulo** il prodotto del modulo di $\vec{a}$ per il valore assoluto di **k**, cioè: $|\vec{p}| = |k|\cdot|\vec{a}|$ $\vec{p} = k\vec{a}$

Rapporto di due vettori paralleli

Dati il numero reale **k** ed il vettore $\vec{a}$, abbiamo definito il vettore $\vec{p} = k\vec{a}$. Viceversa dati i vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ possiamo definire il numero reale relativo **k** come rapporto dei vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$, cioè: $k = \dfrac{\vec{p}}{\vec{a}}$

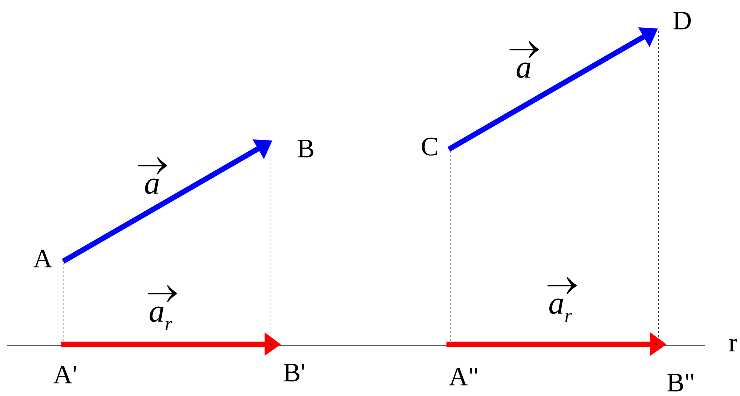
Risulta così giustificata la seguente definizione:

<< **Il rapporto di due vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ è il numero reale relativo k avente come modulo il rapporto dei moduli di $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ e per segno + o - a seconda che $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ siano equiversi oppure opposti**>>.

Possiamo scrivere: $\vec{p} = k\vec{a} \Leftrightarrow k = \dfrac{\vec{p}}{\vec{a}}$

La decomposizione di un vettore lungo due direzioni non orientate

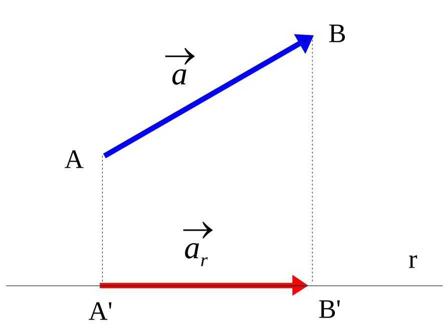
Siano $\vec{a}$ un **vettore libero** rappresentato, ad esempio, dal segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ ed **r** una qualsiasi retta complanare con $\vec{a}$. Siano A' e B' rispettivamente le proiezioni ortogonali di **A** e **B** sulla retta **r**. Il vettore $\mathbf{B' - A' = \vec{a}_r}$ dicesi **il componente** di $\vec{a}$ secondo la retta r.

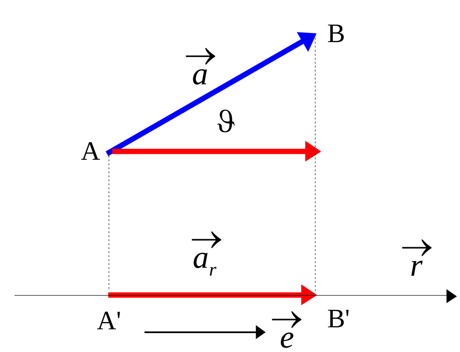


$\vec{a}_r$ è **il componente** del vettore libero $\vec{a}$ secondo la retta non orientata r

Noi sappiamo che il **versore** di una retta orientata è il vettore $\vec{e}$ avente modulo unitario e direzione e verso di $\vec{r}$. Consideriamo una retta orientata $\vec{r}$ di versore $\vec{e}$. La componente del **vettore libero** $\vec{a}$, non ortogonale ad $\vec{r}$, secondo la retta orientata $\vec{r}$ è il numero reale relativo a_r definito dal seguente rapporto: $\mathbf{a_r = \dfrac{\vec{a}_r}{\vec{e}}}$

Pertanto tra **il componente** $\vec{a}_r$ di un **vettore libero** $\vec{a}$ secondo la retta non orientata **r** e **la componente** a_r dello stesso vettore secondo la medesima retta orientata $\vec{r}$ (cioè di versore $\vec{e}$) sussiste la relazione: $\mathbf{\vec{a}_r = a_r \cdot \vec{e}}$

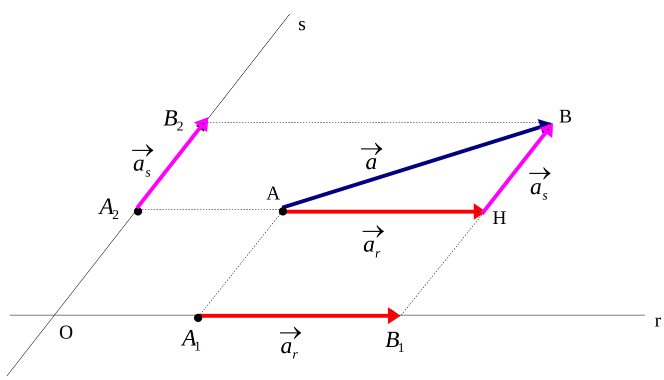


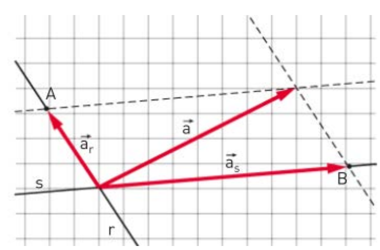


Siano **r** ed **s** due rette non orientate complanari. Sia **O** il loro punto d'intersezione . Sia $\vec{a}$ un vettore non nullo del piano rs , di tipo qualsivoglia, cioè libero o applicato in un punto o lungo la sua retta d'azione. $\overrightarrow{AB}$ sia un segmento orientato rappresentativo del vettore $\vec{a}$. Dai punti A e B tracciamo le rette parallele ad **r** ed **s** . Otteniamo i punti A_1, A_2, B_1, B_2 e la seguente relazione vettoriale:

$\vec{a} = B - A = (H - A) + (B - H) = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2)$ cioè: $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_s$

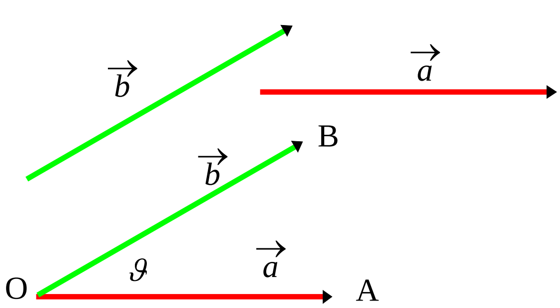
I vettori $\vec{a}_r$ ed $\vec{a}_s$ si dicono i **componenti** del vettore $\vec{a}$ secondo le due direzioni non orientate **r** ed **s**.





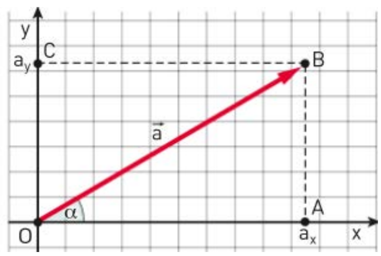
Angolo di due vettori complanari

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due qualsiasi vettori liberi del piano euclideo π. Per un qualsiasi punto **O** di π tracciamo due segmenti orientati, $A - O$ equipollente al segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{a}$, $B - O$ equipollente al segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{b}$. Risulta: $A - O = \vec{a}$, $B - O = \vec{b}$



L'angolo convesso $A\hat{O}B = \vartheta$ così ottenuto è l'angolo formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indica con uno dei seguenti simboli: $ang(\vec{a},\vec{b})$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$, $(\vec{a},\vec{b})$

L'espressione goniometrica delle componenti di un vettore riferito ad sistema di assi cartesiani ortogonali



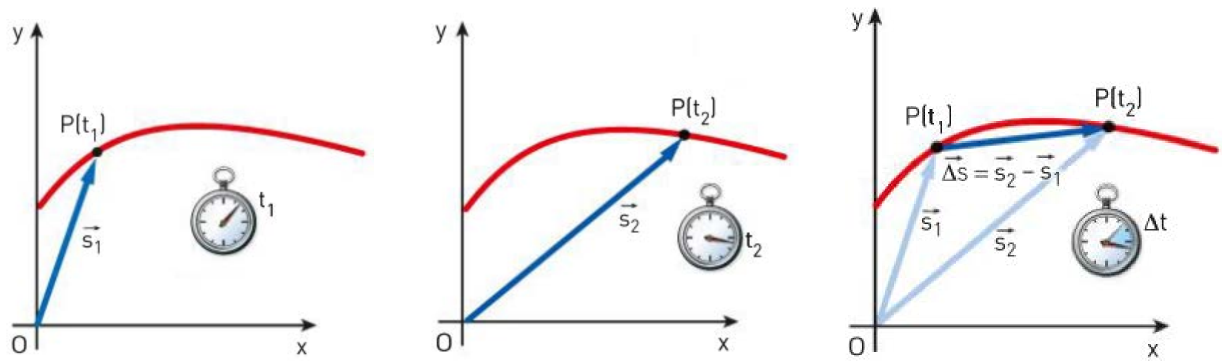
$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = (a_x; a_y)$$

vettore in componenti cartesiane

$$\begin{cases} a_x = a \cdot \cos\alpha \\ a_y = a \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

Vettore posizione

Dicesi **vettore posizione** all'istante t il vettore $\vec{r}(t)$ che ha come origine un punto fisso O (che potrebbe essere l'origine di un riferimento cartesiano) e come estremo la posizione $P(t)$ occupata dal mobile all'istante t. Dicesi **vettore spostamento** relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il vettore $P(t_1) - P(t)$ che ha come origine la posizione $P(t)$ occupata dal mobile all'istante t e come estremo la posizione $P(t_1)$ occupata dal mobile all'istante t_1 cioè la variazione del vettore posizione. Risulta: $\mathbf{P(t_1) - P(t) = \Delta \vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t) = \vec{r}_1 - \vec{r}}$



Velocità vettoriale media ed istantanea

La posizione di un punto materiale che percorre la traiettoria ℓ può essere individuata o dall'ascissa curvilinea **s** o dal vettore posizione $\vec{r} = \vec{r}(t) = P - O$. Il vettore posizione $\vec{r}$ varia al variare del tempo t; si dice che $\vec{r}$ è funzione del tempo e si scrive: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ Quando il punto mobile $P(t)$ passa dalla posizione $P(t)$ alla posizione $P(t_1)$ si dice che subisce nel tempo $\Delta t = t_1 - t$ lo spostamento:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{s} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t) = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

cioè $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{s}$ è il **vettore spostamento** relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$.

Definiamo *velocità vettoriale media* del punto materiale mobile relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$ il vettore $\vec{v}_m$ definito dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{v}_m = \dfrac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t} = \dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{t_1 - t} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$

La grandezza $\vec{v}_m$ è una grandezza vettoriale perché ottenuta dal rapporto tra il vettore $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{s}$ e lo scalare Δt. Essa è pertanto caratterizzata da un modulo, da una direzione e da un verso. La sua direzione ed il suo verso coincidono con quelli di $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{s}$, mentre il suo **modulo** è dato da:

$\left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}\right|$ e quindi, nel **S.I.**, viene espresso in $\dfrac{m}{s}$. Per un moto curvilineo risulta sempre: $|\vec{v}_m| = \left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| \neq \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ cioè per i **moti curvilinei** il modulo della velocità vettoriale media non coincide col valore assoluto della velocità scalare.

La velocità vettoriale così definita viene detta **media** perché la misura dello spostamento netto e del tempo trascorso non ci dicono nulla sul moto effettuato fra **P** e **P_1**: il moto può essere costante nel tempo o variabile e se non conoscessimo la traiettoria ℓ potremmo avere un moto rettilineo o curvilineo. La **velocità vettoriale media** implica soltanto lo spostamento totale ed il tempo totale trascorso. Essa viene introdotta come primo passo per la definizione della **velocità vettoriale istantanea**. Inoltre possiamo immaginare $\vec{v}_m$ applicata in un punto qualsiasi dell'arco di traiettoria $\overset{\frown}{PP_1}$. Se la velocità vettoriale del punto mobile varia istante per istante, occorre determinare la **velocità vettoriale istantanea** definita come la velocità vettoriale media relativa ad un intervallo di tempo Δt piccolissimo. Con parole diverse possiamo dire che la **velocità vettoriale istantanea** è il vettore $\vec{v}$, posizione limite del vettore $\vec{v}_m$, quando $t_1 \to t$ [$P_1 \to P$]

Servendoci dei simboli dell'analisi matematica possiamo scrivere:

$$\vec{v}(t) = \lim_{t \to t_1} \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t} = \lim_{t \to t_1} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

La velocità vettoriale istantanea è il vettore $\overrightarrow{v}(t)$ che ha:

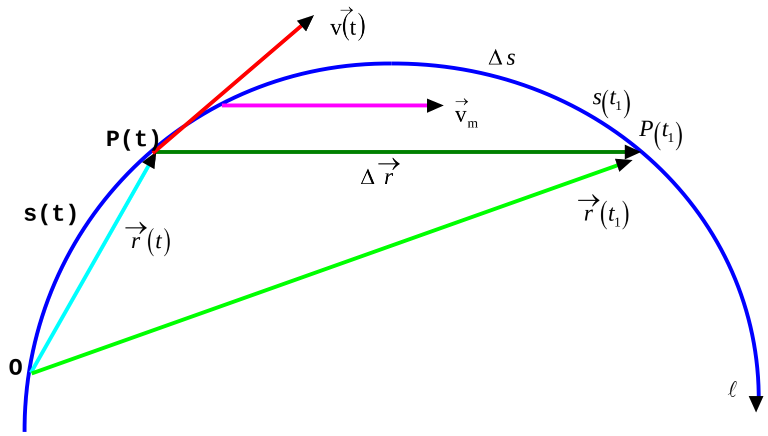
1) come **origine** il punto $P(t)$

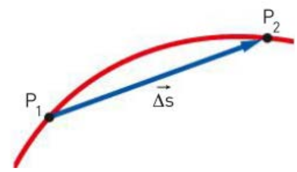
2) come **direzione** la retta tangente alla traiettoria ℓ nel punto **P**

3) come **verso** quello del moto che può anche non coincidere col verso fissato arbitrariamente sulla traiettoria ℓ

4) come **modulo** il valore assoluto della velocità scalare istantanea calcolata all'istante t

$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$





ℓ = **traiettoria** descritta dal punto mobile

$P(t)$ = **posizione** del mobile all'istante t , $P(t_1)$ = **posizione** del mobile all'istante t_1

$\vec{r}(t_1)$ = vettore posizione all' istante t_1 , $\vec{r}(t)$ = vettore posizione all' istante t

$\vec{r}(t_o) = \vec{r}_o$ = **vettore posizione** all'istante iniziale

$s(t)$ = **ascissa curvilinea** del mobile all'istante t

$s(t_1)$ = **ascissa curvilinea** del mobile all'istante t_1

Osservazioni

- La velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ può variare perché cambia la sua direzione o perché cambia il suo modulo o perché cambiano entrambi.

- La velocità vettoriale istantanea $\vec{v}$ e lo spostamento $d\vec{r}$ hanno sempre la stessa direzione e lo stesso verso che sono anche la direzione ed il verso del moto.

- **a)** Se il modulo del vettore $\vec{v}$ rimane costante mentre varia la sua direzione, allora il moto è **curvilineo uniforme**

  b) Se la direzione di $\vec{v}$ è costante, allora il moto è **rettilineo**

  c) Se $\vec{v}$ si mantiene costante in modulo, direzione e verso allora il moto è **rettilineo uniforme**

Accelerazione vettoriale media ed istantanea

Un punto materiale in movimento possiede **accelerazione vettoriale** quando la sua velocità vettoriale $\vec{v}$ muta in almeno uno dei tre elementi che la caratterizzano, cioè: in **modulo**, **direzione**, **verso**. Con parole diverse possiamo dire che la **accelerazione vettoriale** rappresenta la rapidità di variazione nel tempo del vettore $\vec{v}$ in modulo o in direzione o in verso. Supponiamo che all'istante **t** il punto materiale occupi la posizione $P(t)$ ed abbia velocità vettoriale $\vec{v}$ e che all'istante $t_1 > t$ sia nella posizione $P(t_1)$ con velocità vettoriale $\vec{v}(t_1)$.

Definiamo **accelerazione vettoriale media** del punto materiale relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$ il vettore $\vec{a}_m$ definito dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t)}{t_1 - t} = \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{t_1 - t} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

La direzione ed il verso di $\vec{a}_m$ coincidono con quelli di $\Delta\vec{v}$, mentre il suo modulo coincide con $\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$ e, nel **S.I.**, si misura in $\dfrac{m}{s^2}$. $\vec{a}_m$ è un vettore che possiamo immaginare applicato in un punto qualsiasi dell'arco di traiettoria $\overset{\frown}{PP_1}$.

Il vettore $\vec{a}_m$ viene introdotto come primo passo per la definizione di **accelerazione vettoriale istantanea**. Definiamo **accelerazione vettoriale istantanea** l'accelerazione vettoriale media relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo. Con parole diverse possiamo dire che l'**accelerazione vettoriale istantanea** $\vec{a}(t)$ è la posizione limite del vettore $\vec{a}_m$ quando $t_1 \to t$, cioè quando l'intervallo di tempo Δt considerato è piccolissimo..

Servendoci dei simboli dell'analisi matematica possiamo scrivere:

$$\vec{a}(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{t_1 - t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Il vettore $\overrightarrow{a}(t)$ è rivolto sempre verso la **concavità** della traiettoria ℓ . In generale il vettore $\vec{a}(t)$ non risulta né tangente né ortogonale alla traiettoria ℓ, per cui è utile e conveniente decomporlo lungo la tangente t e la normale n alla traiettoria ℓ nel punto $P(t)$. Si ottiene:

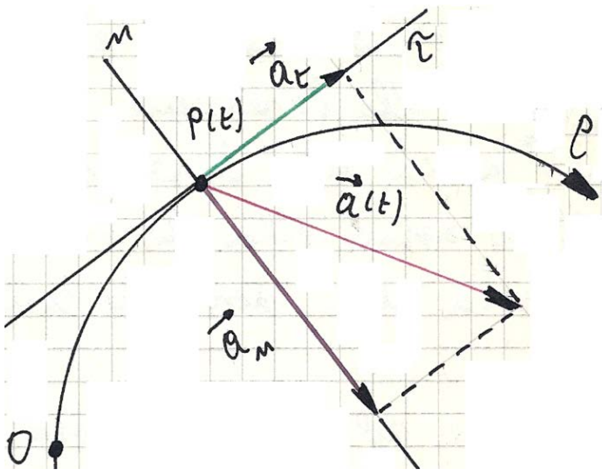
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

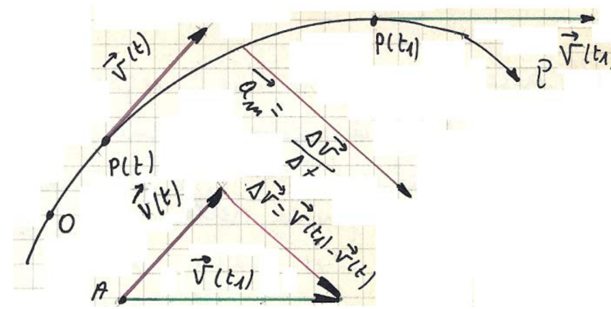
Il componente di $\vec{a}$ lungo la tangente τ prende il nome di **accelerazione tangenziale** ed indica la rapidità della variazione del modulo della velocità vettoriale. Quindi $\vec{a}_t$ determina unicamente una **variazione nel modulo della velocità vettoriale**. Il modulo di $\vec{a}_t$ coincide col valore assoluto dell'accelerazione scalare istantanea.

$$|\vec{a}_t| = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Inoltre $\vec{a}_t$ risulta parallelo a $\vec{v}$, rispetto al quale può avere verso concorde o discorde.

Il componente $\vec{a}_n$ del vettore $\vec{a}$ lungo la normale n alla traiettoria ℓ prende il nome di **accelerazione normale** o *centripeta* o **radiale** ed indica la rapidità di variazione della direzione della velocità vettoriale. Quindi $\vec{a}_n$ determina unicamente una variazione nella direzione della velocità vettoriale $\vec{v}(t)$. Il vettore $\vec{a}_n$ è perpendicolare alla traiettoria ℓ ed è diretto verso il **centro di curvatura** della traiettoria stessa. Si dimostra che: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ dove **v** è la velocità scalare all'istante t, e ρ è il **raggio di curvatura** della traiettoria ℓ relativo al punto $P(t)$.





Se la traiettoria ℓ è una circonferenza di raggio r abbiamo: $\mathbf{a_n} = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{r}}$ a_n si misura in $\frac{m}{s^2}$.

- Si chiama **raggio di curvatura** di una linea piana ℓ in un punto il raggio del relativo **cerchio osculatore**. Tra tutti i cerchi tangenti alla linea ℓ in quel punto, il **cerchio osculatore** è quello che si discosta meno dalla linea nell'immediato intorno del punto considerato.
- L'accelerazione vettoriale $\vec{a}(t)$ varia se muta almeno uno dei tre elementi (modulo, direzione, verso) che la caratterizzano.
- $\vec{a}_n = \vec{o} \Rightarrow \Delta\vec{v} = \vec{o} \Rightarrow \vec{v}(t_1) = \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{v}(t)$ costante in modulo, direzione e verso.

Siamo in presenza del **moto rettilineo uniforme**.

- **Accelerazione vettoriale costante** significa che la variazione di velocità vettoriale riferita al tempo in cui si verifica è costante in modulo, direzione e verso . **Accelerazione vettoriale costante** significa che , mentre il punto materiale si muove, $\overrightarrow{a}(t)$ non varia né in modulo, né in direzione , né in verso , cioè $\overrightarrow{a}(t)$, istante per istante , è rappresentato da segmenti orientati equipollenti.
- Se $\vec{a}_n \neq \vec{o}$ allora la velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ muta la sua direzione. Questo vuole dire che, istante per istante, muta la tangente alla traiettoria ℓ e questo è possibile solo se ℓ è una curva.

Quindi $\vec{a}_n \neq \vec{o} \Rightarrow$ un **moto curvilineo**

• Una accelerazione si dice **tangenziale** quando la sua direzione coincide con quella della velocità vettoriale, cioè dello spostamento, cioè con la direzione del moto, si dice **normale** o **radiale** o **centripeta** quando la sua direzione è perpendicolare alla direzione dello spostamento ossia alla direzione del moto, ossia alla traiettoria ℓ , ossia alla velocità vettoriale.

• Per **direzione del moto** all'istante t intendiamo la retta tangente alla traiettoria nel punto $P(t)$.

• I vari tipi di moto possono essere classificati in relazione ai componenti $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_n$.

	a_t	a_n	**tipo di moto**
1	$a_t = 0$	$a_n = 0$	**rettilineo uniforme**
2	$a_t = \cos t$	$a_n = 0$	**rettilineo uniformemente vario**
3	$a_t = f(t)$	$a_n = 0$	**rettilineo vario**
4	$a_t = 0$	$a_n = \cos t$	**circolare uniforme**
5	$a_t = 0$	$a_n = f(t)$	**curvilineo uniforme**
6	$a_t = \cos t$	$a_n \neq 0$	**curvilineo uniformemente vario**
7	$a_t = f(t)$	$a_n \neq 0$	**curvilineo vario**

$\vec{a}_n = \vec{o}$ il moto è **rettilineo** , $\vec{a}_n \neq \vec{o}$ il moto è **curvilineo**

• $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$ $\quad \vec{\tau}$ = **versore della tangente alla traiettoria**

$\vec{n}$ = **versore della normale alla traiettoria**

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}[\dot{s} \cdot \vec{\tau}] = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \dot{s} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \dot{s} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + (\dot{s})^2 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + (\dot{s})^2 \cdot \frac{\vec{n}}{\rho}$$

$\vec{a} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} = a_t \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}$ $\quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt} = \ddot{s}$ = accelerazione scalare istantanea

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ = **modulo dell'accelerazione centripeta** ρ = **raggio di curvatura**

Se la traiettoria è una circonferenza di raggio **r** allora in ogni punto abbiamo $\rho = r$.

Ulteriori considerazioni sui moti accelerati e sui moti ritardati

Da un punto di vista vettoriale possiamo dire che un moto è **accelerato** (**ritardato**) quando i vettori $\vec{a}$ e $\vec{v}$ formano un **angolo acuto** (**ottuso**), cioè:

$$(\vec{a}, \vec{v}) = \vartheta \quad \textbf{angolo acuto} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{moto accelerato}$$

$$(\vec{a}, \vec{v}) = \vartheta \quad \textbf{angolo ottuso} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{moto decelerato}$$

Con parole diverse possiamo dire che un moto è accelerato **(ritardato)** se i vettori $\vec{a}_t$ e $\vec{v}$ sono **equiversi (hanno versi opposti)**

Caduta dei gravi nel vuoto

La terra imprime ad un corpo libero una accelerazione $\vec{g}$ detta accelerazione di gravità. In prossimità della superficie terrestre il modulo di $\vec{g}$ può ritenersi costante ($g = 9{,}8\dfrac{m}{s^2}$) mentre il vettore $\vec{g}$ è diretto sempre verso il centro della terra. Un corpo soggetto all'azione della Terra prende il nome di **grave**. Consideriamo il moto di un grave che, partendo dalla quiete, cade liberamente verso il centro della Terra.

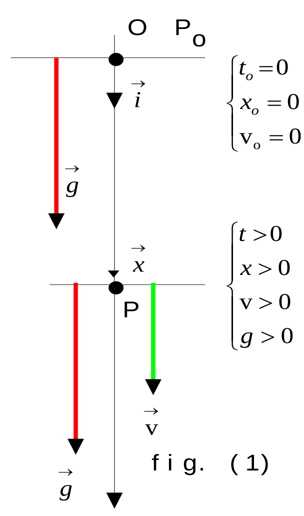


fig. (1)

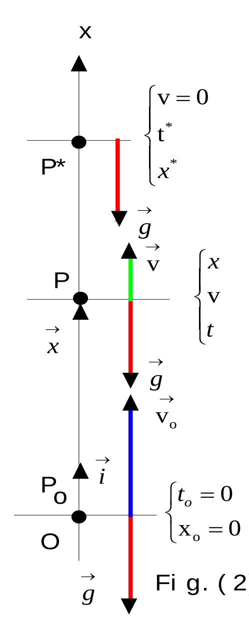


Fig. (2)

Se la traiettoria è orientata come nella fig. (1) valgono le seguenti relazioni scalari:

$$\begin{cases} v = gt \\ x = \frac{1}{2} g t^2 \\ v = \sqrt{2gx} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_o = 0 \\ v_o = 0 \end{cases}$$

In questo caso risultano positivi i valori delle grandezze scalari x, v, g.

Consideriamo adesso il moto di un grave lanciato verso l'alto con una velocità iniziale $\vec{v}_o \neq \vec{o}$.

Se la traiettoria è orientata come nella figura (2), se con g indichiamo l'accelerazione scalare gravitazionale, che può essere positiva (negativa) se il vettore $\vec{g}$ ha (non ha) lo stesso orientamento della traiettoria, allora valgono le seguenti relazioni scalari:

$$\begin{cases} v = v_o + gt \\ x = v_o t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_o^2 + 2gx \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 , v > 0 \\ g < 0 , v_o > 0 \\ g = - 9{,}8 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Se invece supponiamo che $g = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$ sia il modulo del vettore accelerazione di gravità $\vec{g}$ allora le precedenti relazioni diventano:

$$\begin{cases} v = v_o - gt \\ x = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_o^2 - 2gx \end{cases}$$

Osservazione: Il lancio verticale verso l'alto di un grave è un moto rettilineo con accelerazione vettoriale $\vec{a} = \vec{g}$ costante. Valgono le due seguenti equazioni vettoriali:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g} \cdot t \qquad \vec{x} = \vec{x}_o + \vec{v}_o \cdot t + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2$$

Da queste equazioni vettoriali possiamo dedurre, operando con le regole del calcolo vettoriale, le relazioni scalari precedentemente illustrate.

L'**ascissa** x, la **velocità scalare** v e l'**accelerazione scalare** a assumono **valori positivi** (**negativi**) a seconda che i vettori $\vec{x}$, $\vec{v}$, $\vec{g}$ hanno **versi concordi** (**discordi**).

v_0 e v sono rispettivamente le velocità scalari all'istante $t_o = 0$ e t. x è l'ascissa del punto P all'istante t, mentre x_o è l'ascissa del grave quando inizia il moto.

Problema: Calcolare il tempo t^* di arresto, il tempo $\bar{t}$ necessario perché il grave torni nella posizione iniziale, e la velocità con la quale vi arriva.

Risoluzione: Per la risoluzione di questo problema teniamo presente la figura (2)

$v = 0 \;\Rightarrow\; v_o - g t = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{t^* = \frac{v_o}{t}}$ (tempo di salita = istante di arresto)

$x = 0 \;\Rightarrow\; v_o t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = 0$ (istante di lancio del grave)

$\mathbf{\bar{t} = 2 \cdot \frac{v_o}{g} = 2 \cdot t^*}$ = tempo di salita e di discesa del grave

Il tempo di salita è uguale a quello della discesa. $\mathbf{v(\bar{t}) = v_o - g \cdot 2 \cdot \frac{v_o}{g} = -v_o}$

La velocità con la quale il grave ritorna nella posizione O di partenza è uguale e contraria a quella con la quale era stato lanciato verticalmente verso l'alto dalla posizione O.

Dopo l'istante di arresto il moto diventa naturalmente accelerato.

$\mathbf{x(t^*)} = v_o t^* - \frac{1}{2} g (t^*)^2 = v_o \cdot \frac{v_o}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_o^2}{g^2} = \mathbf{\frac{v_o^2}{2g}}$ = **altezza di arresto** = altezza massima raggiunta dal grave

$t = 0$ è il momento del lancio del grave e ad esso corrisponde $x = 0$ che è la posizione iniziale del grave.

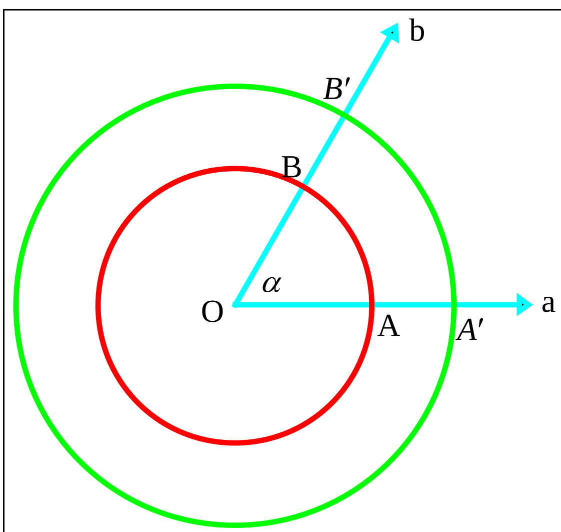
La misura degli angoli in radianti

Un angolo $\alpha = a\hat{o}b$ lo possiamo considerare sempre come angolo al centro di due (o più) circonferenze concentriche di raggi arbitrari OA ed OA'. Detti $\overset{\frown}{AB}$ ed $\overset{\frown}{A'B'}$ gli archi corrispondenti, per un noto teorema di geometria euclidea, possiamo scrivere:

$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{A'B'} = OA : OA'$ ed anche : $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{OA} = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{OA'} = \alpha^R$

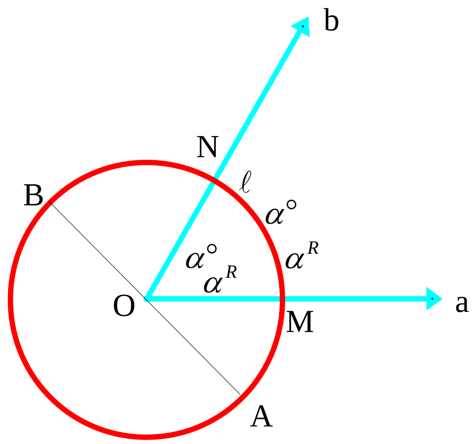
cioè il rapporto tra l'arco (individuato su una circonferenza qualsiasi di centro O) ed il rispettivo raggio dipende esclusivamente dall'angolo e non dalla circonferenza considerata. Tale rapporto (indicato col simbolo α^R) si assume come misura dell'angolo in radianti. L'angolo $a\hat{o}b$ individua su una circonferenza di centro **O** e raggio **r** un arco MN di lunghezza ℓ. Il rapporto $\alpha^R = \dfrac{\ell}{r}$ **[1]**, misura in radianti dell'angolo $a\hat{o}b$, dicesi anche misura in radianti dell'arco $MN = \ell$.

Se l'arco MN rettificato è lungo quanto il raggio della circonferenza cui appartiene abbiamo $\ell = r$ e quindi: $\alpha^R = \dfrac{r}{r} = 1 radiante = 1^R$ cioè l'**arco radiante** è quell'arco lungo quanto il raggio della circonferenza che lo contiene. Di conseguenza l'**angolo radiante** è quell'angolo che, posto col vertice nel centro di una qualsiasi circonferenza, sottende un arco lungo quanto il raggio.



La misura (α^R) in radianti di un angolo o di un arco è un numero puro in quanto rapporto di due grandezze (**lunghezze**) omogenee. La misura di un angolo (arco) in **radianti** è detta **misura ciclometrica** dell'angolo (arco). La **misura ciclometrica** di un arco coincide con la **misura ciclometrica** del corrispondente angolo al centro. Dalla [1] ricaviamo: $\ell = \alpha^R \cdot r$ [2]

cioè moltiplicando il raggio per la misura in radianti dell'arco si ottiene la lunghezza dell'arco stesso. Vediamo adesso come si fa a passare dalla misura di un angolo in gradi a quella in radianti e viceversa.



La geometria euclidea ci insegna che gli archi (di uguale raggio) sono direttamente proporzionali ai rispettivi angoli al centro per cui possiamo scrivere la seguente proporzione:

$MN : AB = M\hat{O}N : A\hat{O}B$ **[3]** $\ell : \pi r = \alpha° : 180°$

$$\left(\ell = \pi r \cdot \frac{\alpha°}{180°}\right)$$

Ma : $\ell = \alpha^R \cdot r$ per cui abbiamo : $\alpha^R \cdot r : \pi r = \alpha° : 180°$ $\alpha^R : \pi = \alpha° : 180°$ cioè :

[4] $$\alpha^R = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi$$ $$\alpha° = \frac{\alpha^R}{\pi} \cdot 180°$$ **[5]**

La misura in radianti di un angolo la cui misura in gradi è **1** la si ottiene ponendo nella [4] $1°$ al posto di $\alpha°$, cioè: $1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745\cdots radianti$

la misura in gradi di un angolo la cui misura in radianti è **1** la si ottiene ponendo nella [5] 1^R al posto di α^R, cioè : $1^R = \frac{180°}{\pi} = 57°17'44'',806\cdots$

Moti periodici

- Un punto materiale si muove di **moto periodico** quando, ad ogni intervallo costante di tempo **T**, riassume le medesime caratteristiche cinematiche, cioè passa per lo stesso punto con la stessa **velocità vettoriale** e la stessa **accelerazione vettoriale**.

- Il tempo **T** è detto **periodo** e rappresenta il tempo necessario perché il mobile passi due volte di seguito per uso stesso punto con le medesime caratteristiche cinematiche.

• Nei moti periodici ha importanza una grandezza fisica detta **frequenza** definita come il rapporto cotante fra il numero **n** di **eventi periodici** che si verificano nel tempo **t** ed il tempo t, cioè:

$$\mathbf{f = \nu = \frac{n}{t} = \frac{numero\ di\ eventi\ periodici\ che\ si\ verificano\ nel\ tempo\ t}{t}}$$

La frequenza di un moto periodico è unitaria, cioè di un **hertz** (**Hz**) se l'evento periodico si verifica in un secondo.

• $n = 1 \Rightarrow t = T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f = \nu = \frac{1}{T}} \qquad \mathbf{f \cdot T = 1} \qquad \mathbf{\nu \cdot T = 1}$

<<**In ogni moto periodico la frequenza è l'inverso del periodo**>>

• Nel **moto circolare uniforme** l'evento periodico consiste nel descrivere una intera circonferenza; pertanto la frequenza di **1 Hz** significa che il punto materiale P descrive una intera circonferenza in un secondo.

$$f = \nu = \frac{\text{numero di circonferenze descritte nel tempo t}}{\text{t}}$$

$\nu = 25\ Hz$ significa che il punto P percorre in un secondo 25 volte la circonferenza

• Nel **moto armonico semplice** l'evento periodico consiste nel descrivere una oscillazione completa (o ciclo) e quindi la frequenza di **1 Hz** significa che il punto P descrive una oscillazione completa in un secondo. $[f] = \frac{1}{[t]} = \left[T^{-1}\right]$

Moto circolare uniforme

• E' il moto di un punto che descrive una circonferenza con accelerazione tangenziale nulla e quindi con velocità vettoriale $\vec{\mathrm{v}}(t)$ avente modulo costante e direzione variabile istante per istante. In un moto circolare uniforme la **velocità scalare** (detta anche **velocità periferica** o **velocità lineare**) si mantiene costante. • In un qualsiasi moto circolare uniforme sono valide le seguenti relazioni:

$$a_t = 0 \ , \quad \mathrm{v} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu = \omega r \ , \quad a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \omega^2 r \ , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

- Supponiamo che all'istante iniziale $t_o = 0$ il punto materiale si trovi nella posizione A e dopo t secondi si trovi nella posizione P.

$$\mathrm{v} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = \mathrm{v}_m = \frac{AP}{t} = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad s = \mathrm{v}t \quad \text{(equazione oraria del moto)}$$

- Il **moto circolare uniforme** è un **moto periodico** in quanto dopo **T** secondi ritorna in A con la stessa velocità vettoriale e con la stessa accelerazione vettoriale che aveva all'istante iniziale.

Quindi: **periodo** = tempo impiegato dal mobile a percorrere una intera circonferenza = tempo necessario perché si riproducano le condizioni iniziali (stessa posizione, stessa velocità vettoriale, stessa accelerazione vettoriale)

$\mathbf{f = \nu = \frac{1}{T}}$ = **frequenza** = numero di giri compiuti dal mobile in un secondo

$t = T \Rightarrow s = 2\pi r$ e quindi : $\mathbf{v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu = \omega r}$

- Il vettore $P - O = \overrightarrow{OP} = \vec{r}$ è detto **raggio vettore** (o **vettore posizione**). Esso nel tempo **t** descrive l'angolo ϑ. Definiamo **velocità angolare media** del punto P o del raggio vettore $P - O = \overrightarrow{OP} = \vec{r}$ la grandezza fisica definita dal seguente rapporto: $\omega_m = \frac{\vartheta}{t}$

cioè l'angolo ϑ descritto dal raggio vettore $\vec{r}(t)$ nel tempo t riferito al tempo stesso.

La velocità angolare riferita ad un tempo piccolissimo viene assunta come **velocità angolare istantanea**, cioè: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$

Nel nostro caso **la velocità angolare è costante** e quindi coincide con quella media, per cui possiamo scrivere: $\boldsymbol{\omega = \frac{\vartheta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi f}$

in quanto nel tempo **T** il raggio vettore $\vec{r}(t)$ descrive l'angolo 2π.

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu = \omega r$$

- Poiché il modulo di $\vec{\mathrm{v}}(t)$ è costante, il punto **P** non possiede accelerazione tangenziale ma soltanto accelerazione centripeta $\vec{a}_n$ della quale vogliamo calcolare il modulo: $\vec{a}_n = \lim_{t\to 0} \frac{\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{v}}_o}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{t}$ $\quad a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \omega^2 r$

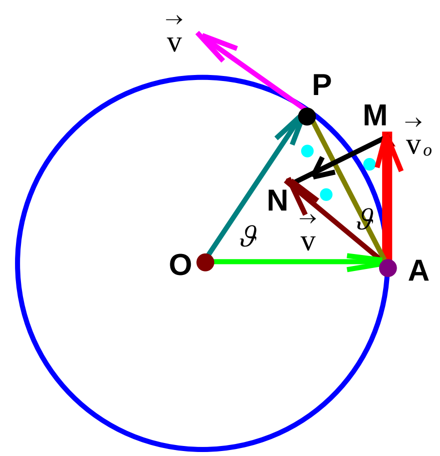
Dimostrazione

$\overrightarrow{MN} = N - M = \vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{v}}_o = \Delta\vec{\mathrm{v}} \qquad \overset{\frown}{AP} = s$

$\left.\begin{matrix} AN \perp OP \\ AM \perp OA \end{matrix}\right\} \Rightarrow N\hat{A}M = \vartheta$ perché angoli formati da lati a due a due perpendicolari sono uguali

I triangoli AOP ed MAN sono simili in quanto entrambi isosceli e con gli angoli al vertice uguali.

Ai lati omologhi posso applicare la seguente proporzione: $\frac{MN}{AM} = \frac{AP}{AO}$, $\frac{\Delta \mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \frac{AP}{r}$



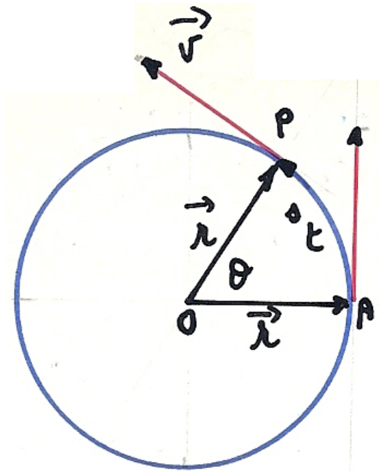
Ma per un tempo t sufficientemente piccolo ($t \to 0$) risulta:

$$\overline{AP} \approx \overset{\frown}{AP} = s = \mathrm{v}t$$

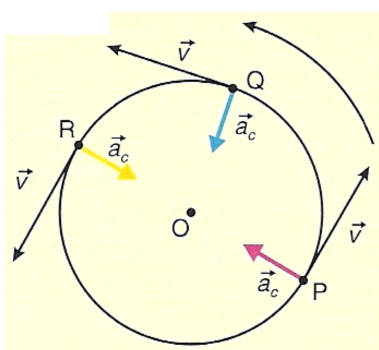
per cui possiamo scrivere: $\frac{\Delta \mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{v}t}{r}$ cioè : $\frac{\Delta \mathrm{v}}{t} = \frac{\mathrm{v}^2}{r}$ e quindi per $t \to 0$ abbiamo:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \omega^2 r$$

Il modulo dell'accelerazione centripeta $\vec{a}_n$ è costante. La direzione di $\vec{a}_n$ risulta, istante per istante, perpendicolare alla velocità vettoriale $\vec{\mathrm{v}}(t)$. Infatti MN è perpendicolare ad AP e se $t \to 0$ anche $\vartheta \to 0$ e quindi i lati AN, AP, AM si sovrappongono tutti alla tangente, cioè $\vec{a}_n \perp \vec{\mathrm{v}}_o$. In ogni caso non possiamo dire che l'accelerazione $\vec{a}_n$ è costante in quanto , pur avendo sempre modulo costante , la sua direzione varia istante per istante ed è dirette sempre verso il centro O.

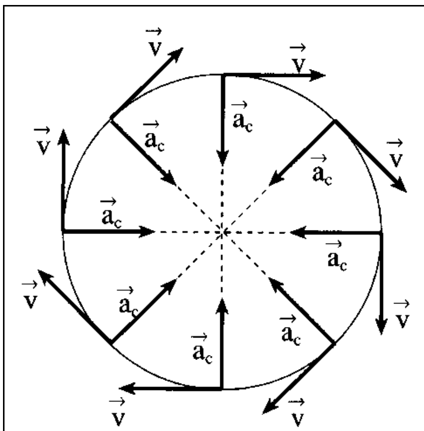


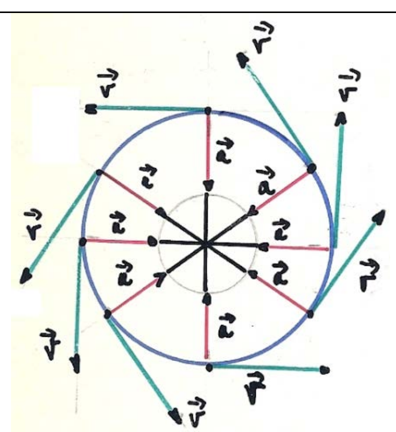
Moto circolare uniforme: mentre il punto materiale P ruota sulla circonferenza di centro O e raggio r, il raggio vettore $\vec{r}(t)$ ruota attorno al centro O. Misureremo gli archi a partire dal punto A e gli angoli a partire dal raggio vettore $\overrightarrow{OA}$.



Vettore accelerazione nel moto circolare uniforme:

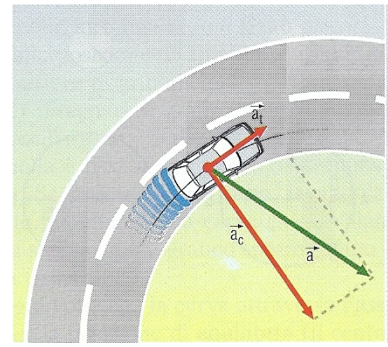
il **vettore accelerazione centripeta** $\vec{a}_c$ risulta in ogni punto perpendicolare al **vettore velocità** $\vec{v}(t)$. Inoltre $\vec{a}_c$ risulta rivolto sempre verso il centro O della circonferenza. Il modula di $\vec{a}_c$ è costante.





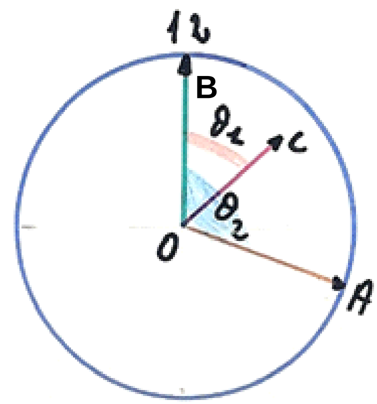
Moto circolare uniforme

velocità vettoriale ed **accelerazione centripeta** in diversi punti.



Un'automobile percorre un tratto di curva circolare verso destra mentre aumenta il modulo della velocità. La sua accelerazione ha quindi un componente centripeto $\vec{a}_c$ che ne incurva la traiettoria, ed uno tangenziale $\vec{a}_t$ che modifica il valore del modulo. Di conseguenza il vettore $\vec{a}$ pur essendo diretto all'interno della curva, non punta verso il centro della circonferenza che approssima la curva. Se a_t è **costante** (**variabile**) l'auto si muove di moto **circolare uniformemente vario** (**vario**).

Problema: Determinare l'ora in cui, per la prima volta dopo mezzogiorno, le due lancette di un orologio tornano a sovrapporsi.



OC : lancetta delle ore OA : lancetta dei minuti primi

$B\hat{O}A = \vartheta_2$ $B\hat{O}C = \vartheta_1$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\omega_2 = \frac{2\pi}{60}\frac{rad}{s}$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{12\cdot 60}\frac{rad}{s}$

Risoluzione: La lancetta dei **minuti** (la cui velocità angolare è ad esempio ω_2) e quella delle **ore** (la cui velocità angolare è ad esempio ω_1) si muovono di moto circolare uniforme.

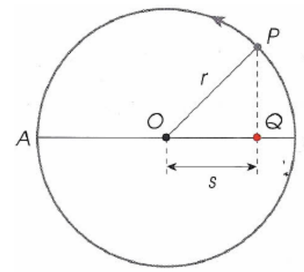
Nel tempo t la prima descrive l'angolo $\vartheta_2 = \omega_2 \cdot t$, la seconda l'angolo $\vartheta_1 = \omega_1 \cdot t$. Le due lancette si sovrappongono quando: $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\pi$, cioè quando $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 2\pi \Rightarrow$

$$\omega_2 \cdot t - \omega_1 \cdot t = 2\pi \quad t\cdot(\omega_2 - \omega_1) = 2\pi \quad t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{12\cdot 60}} = \frac{1}{\frac{1}{60} - \frac{1}{12\cdot 60}} = \frac{1}{\frac{12-1}{12\cdot 60}} = \left(\frac{12\cdot 60}{11}\right)'$$

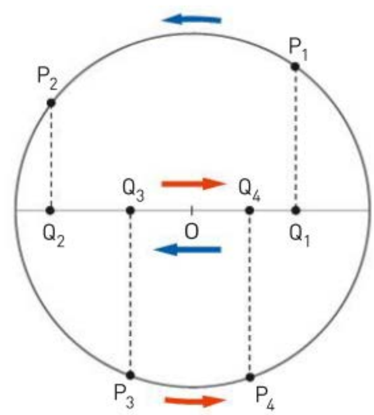
$$t = \left(\frac{12\cdot 60}{11}\right)' = \left(\frac{720}{11}\right)' = (65{,}45)' = 1^h\,5'\,27'' \quad \text{in quanto: } \left(\frac{45}{100}\right)' = \left(\frac{45}{100}\cdot 60\right)'' = 27''$$

Moto armonico semplice

E' il moto che si ottiene proiettando su un diametro le posizioni di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme.



Mentre il punto P si muove di moto circolare uniforme sulla circonferenza di centro O e raggio r, il punto Q si muove di **moto armonico semplice** sul diametro AB.



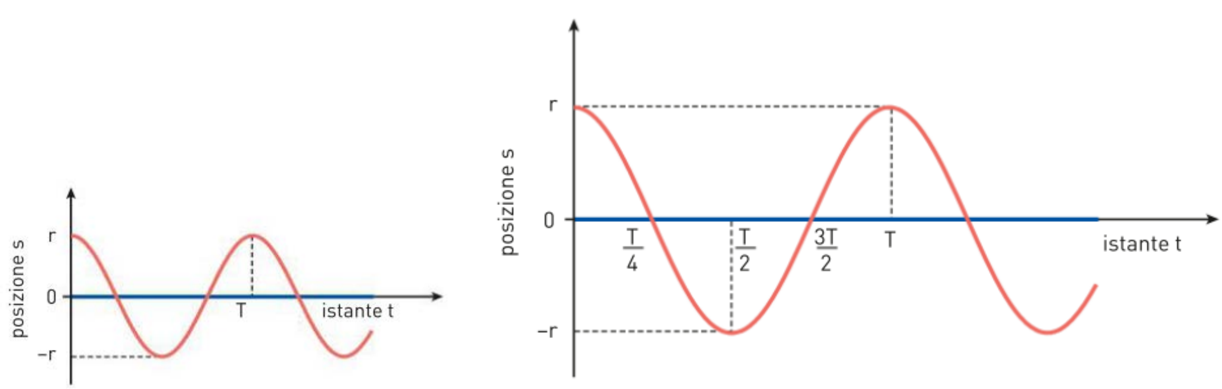
Mentre P si muove sulla circonferenza, Q si muove avanti e indietro lungo il diametro. Se il punto P compie un moto circolare uniforme, il punto Q compie un **moto armonico semplice**.

La legge oraria del moto armonico semplice è:

$$s = r\cos\omega t = r\cos\frac{2\pi t}{T}$$

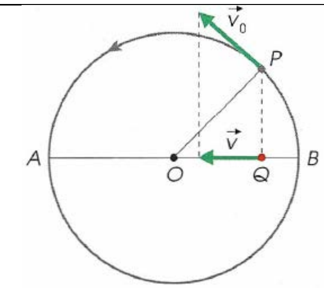
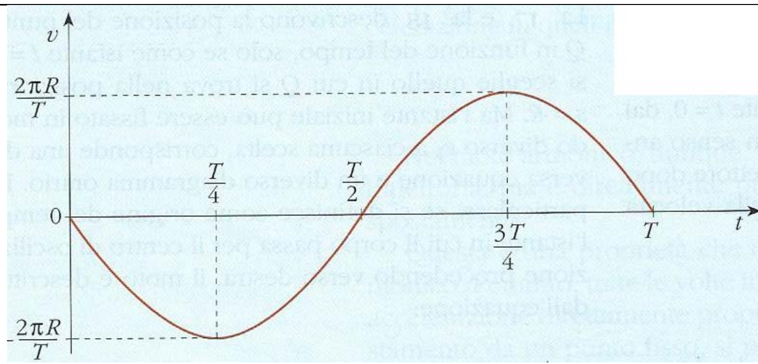
$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$ è la pulsazione del moto armonico che coincide con la velocità angolare del punto P. T è il periodo $f = \frac{1}{T}$ è la frequenza

Diagramma orario del moto armonico semplice



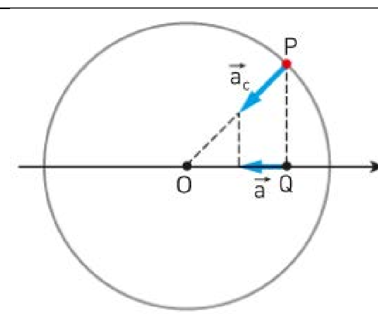
$v = -\omega r\sin\omega t = -\frac{2\pi}{T} r\sin\frac{2\pi}{T}t$ = velocità scalare istantanea

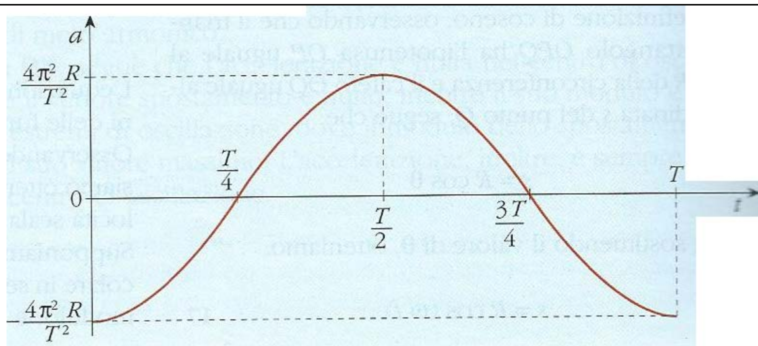
$v_{max} = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$ = velocità scalare massima

In ogni istante la velocità vettoriale del punto Q è la proiezione ortogonale della velocità $\vec{v}_o$ del punto P lungo il diametro AB.	
	Diagramma velocità-tempo di un **moto armonico semplice** in un periodo **T**
	Il grafico velocità-tempo del moto amonico semplice a confronto col grafico spazio-tempo dello stesso moto armonico semplice.

$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{s}$ = vettore accelerazione

$a = -\omega^2 \cdot s = -\omega^2 \cdot r \cos \omega t = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cos \frac{2\pi}{t} t$ = accelerazione scalare istantanea

Il vettore accelerazione $\vec{a}$ del punto Q è la proiezione ortogonale dell'accelerazione centripeta $\vec{a}_c$ del punto P che si muove di moto circolare uniforme. Il punto Q si muove di moto armonico semplice.	

	Diagramma accelerazione-tempo di un moto armonico semplice in un periodo **T**

Il grafico accelerazione-tempo del **moto armonico semplice** a confronto col grafico spazio-tempo dello stesso moto armonico semplice.