

Unità Didattica N°3

Le grandezze vettoriali nella cinematica del punto materiale

- 01) La nozione di segmento orientato
- 02) La nozione di vettore
- 03) Grandezze scalari e grandezze vettoriali
- 04) La somma di due o più vettori
- 05) La differenza di due vettori
- 06) Il prodotto di un numero reale per un vettore
- 07) Il rapporto di due vettori paralleli
- 08) La decomposizione di un vettore lungo due direzioni non orientate
- 09) Il Vettore posizione
- 10) Il vettore velocità
- 11) Il vettore accelerazione
- 12) Ulteriori considerazioni sui moti accelerati e ritardati
- 13) Moto verticale dei gravi nel vuoto
- 14) La misura degli angoli in radianti
- 15) Moti periodici
- 16) Moto circolare uniforme

La nozione di segmento orientato

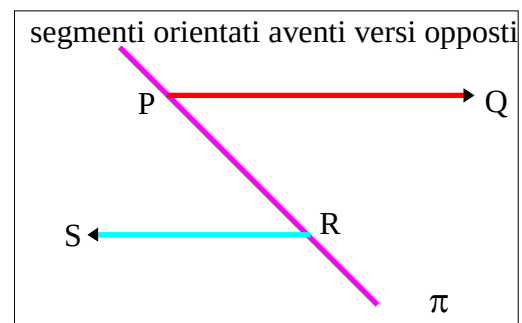
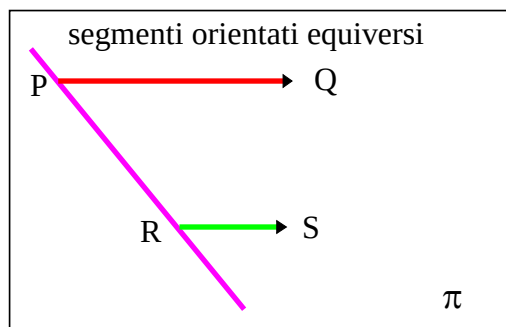
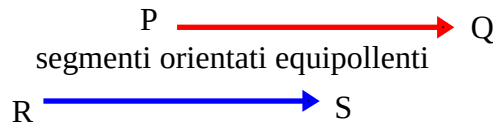
Dalla geometria euclidea sappiamo che il **segmento** è la parte finita di retta delimitata da due punti detti **estremi** del segmento. Definiamo **segmento orientato** un qualsiasi segmento sul quale è stato fissato un verso positivo.



Anche per il segmento orientato possiamo scegliere il verso positivo in due maniere diverse. Così il **segmento orientato** PQ è quel segmento che ha come **verso positivo** quello che va dal punto P (detto **primo estremo** o **origine**) al punto Q (detto **secondo estremo** o semplicemente **estremo**). Esso è indicato col simbolo $\overrightarrow{PQ}$ o anche col simbolo PQ se conveniamo di identificare il suo verso positivo con l'ordine secondo cui sono scritti i suoi estremi. La **rappresentazione grafica** del segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ si ottiene segnando con una freccia l'estremo Q, del segmento euclideo PQ. Ogni segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ è caratterizzato dalla **lunghezza** la cui misura (rispetto ad un prefissato segmento unitario **u**) è detta **modulo** (del segmento orientato), dalla **direzione** (retta PQ o una sua qualsiasi parallela), dal **verso** che è quello scelto arbitrariamente in uno dei due modi possibili. La retta che contiene il segmento orientato PQ dicesi il **sostegno** del segmento orientato. Il segmento $\overrightarrow{PQ}$ ha **verso opposto** al segmento orientato $\overrightarrow{QP}$, anzi i segmenti orientati PQ e QP si dicono **opposti** e si scrive $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$. I due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ hanno lo **stesso verso** (**versi opposti**) quando hanno la **stessa direzione** ed appartengono (non appartengono) allo stesso semipiano individuato sul piano euclideo π dalla retta PR.

Due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ si dicono **equipollenti** e si scrive $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$ quando hanno:

- 1) la **stessa lunghezza** 2) la **stessa direzione** 3) lo **stesso verso**



Se $P \equiv Q$ si ha il **segmento orientato nullo** il quale ha lunghezza nulla e direzione e verso indeterminati. Due o più segmenti orientati nulli si considerano **equipollenti**. Indicheremo con $\mathcal{J} = \{\mathbf{PQ}\}$ indifferentemente l'insieme di tutti i segmenti orientati della retta euclidea r , del piano euclideo π , dello spazio euclideo Ω . Un segmento orientato PQ , quale ente dello spazio, è dotato delle seguenti 4 proprietà elementari: 1) **direzione** 2) **verso** 3) **lunghezza** 4) **origine** o punto di applicazione. **Direzione** è sinonimo fascio di rette parallele.

La nozione di vettore

Consideriamo l'insieme $\mathcal{J}$ di tutti i segmenti orientati e sia $\overrightarrow{PQ}$ uno di essi. Il segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ o un qualsiasi altro segmento orientato ad esso equipollente individua un nuovo ente matematico detto **vettore**. Quindi vettore è l'ente matematico completamente individuato da una **direzione**, da una **lunghezza** e da un **verso**. Il vettore così definito può essere indicato ancora con $\overrightarrow{PQ}$ oppure,

secondo le vedute di **Hamilton-Grassmann**, con $Q - P$ (si legge Q meno P), cioè come differenza fra due punti, oppure con una lettera minuscola dell'alfabeto latino soprassegnata con una freccia ($\vec{a}, \vec{b} \dots$). Quindi risulta: $\vec{PQ} = Q - P = \vec{a}$ P si dice **origine** del vettore, Q **estremo**. Un vettore è ancora rappresentato da un segmento orientato il quale dà del vettore una **rappresentazione grafica** o un **modello**. Due segmenti orientati equipollenti rappresentano lo stesso vettore ma danno di esso due immagini diverse o due rappresentazioni grafiche diverse. Un qualsiasi **vettore** è caratterizzato: **1)** da una **direzione** **2)** da un **verso** **3)** da una **lunghezza** la cui misura è detta **modulo** che viene indicato con uno dei seguenti simboli: $|\vec{a}|$, a , $|\vec{a}|$, a , $|Q - P|$, $|\vec{PQ}|$, $\text{mod } \vec{a}$ **4)** dall'origine indeterminata.

Indichiamo con **J** l'insieme di tutti i vettori (della retta euclidea, del piano euclideo, dello spazio euclideo), cioè:

$$\mathbf{J} = \{\overrightarrow{PQ}\} = \{\vec{a}\}$$

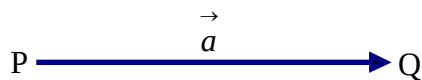
Ogni vettore di modulo unitario si dice **versore** o **vettore unitario**. Ogni versore definisce una **direzione orientata** e viceversa. Di solito, il **versore** viene indicato con uno dei seguenti simboli:

$$\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \quad \vec{e} \quad \vec{u}$$

Se $P \equiv Q$ il vettore $\vec{PQ}$ si dice **vettore nullo** e viene indicato col simbolo $\vec{o}$. Esso ha modulo nullo e verso e direzione indeterminati. Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si dicono uguali e si scrive $\vec{a} = \vec{b}$ quando hanno come modelli due segmenti orientati equipollenti (cioè quando rappresentano una stessa classe di segmenti orientati equipollenti, cioè quando hanno la stessa direzione, lo stesso verso, la stessa lunghezza). Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non uguali si dicono **diversi** e si scrive: $\vec{a} \neq \vec{b}$

Per i vettori non esiste una *relazione d'ordine* per cui non ha senso parlare di vettore maggiore o minore di un altro vettore. Si dice che **due vettori** sono

paralleli quando si possono rappresentare con segmenti orientati di una stessa retta o di rette parallele. Due **vettori** si dicono **opposti** se hanno la stessa **lunghezza**, la stessa **direzione** e **versi opposti**. L'opposto del vettore $\vec{a}$ è indicato col simbolo $-\vec{a}$. Tre vettori si dicono **complanari** se per essi è possibile una rappresentazione con segmenti orientati di uno stesso piano. Possiamo concludere affermando che gli elementi caratteristici di un vettore libero $\vec{a} = Q - P$ sono:



- 1) l'**origine** P e l'**estremo** Q 2) la **direzione** cioè la retta PQ (detta **sostegno** o **retta d'azione** del vettore libero $\vec{PQ}$) o una sua qualsiasi retta parallela.
- 3) il verso che va dall'**origine** P all'**estremo** Q
- 4) il **modulo** che è un numero reale assoluto che esprime la misura del segmento non orientato PQ (segmento euclideo rispetto ad una prefissata unità di misura)
- 5) l'**origine** P indeterminata

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Tutte le grandezze che studiamo in fisica sono di due tipi: **grandezze scalari** e **grandezze vettoriali**. Definiamo **scalare** una grandezza completamente individuata da un numero (**positivo o negativo**) che ne esprime la misura rispetto ad un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità di misura (**scala**). Sono esempi di **grandezze scalari** le temperature, le masse dei corpi, l'area di una superficie, il lavoro eseguito da una forza, etc....

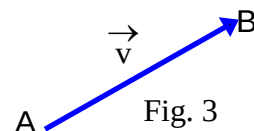
Definiamo **vettoriale** una grandezza completamente individuata da un numero positivo (**modulo**), da una direzione e da un verso. Il nome **vettoriale** attribuito ad una generica grandezza di questo secondo gruppo scaturisce dal fatto che ciascuna

di esse può essere rappresentata da un vettore. Sono **grandezze scalari** gli spostamenti, le velocità, le accelerazioni, le forze, l'intensità del campo elettrico, l'induzione magnetica, etc...

Somma di un punto e di un vettore

Definiamo somma del punto A e del vettore $\vec{v}$ e la indichiamo col simbolo $A + \vec{v}$ il punto B tale che sia: $B - A = \vec{v}$, cioè le due uguaglianze [1] $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \vec{v}$ e $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \vec{v}$ [2] esprimono, come nell'algebra ordinaria e con le stesse leggi per i segni, una medesima relazione.

Il vettore $\vec{v}$ applicato al punto A lo sposta nel punto B . Da questa circostanza scaturisce il nome di **vettore** (dal latino **vehere** = trasportare).



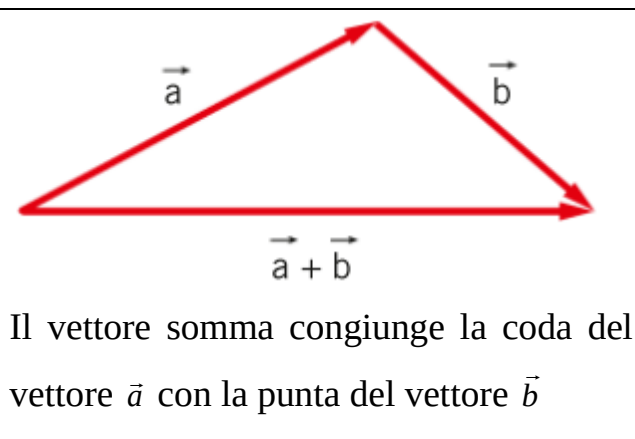
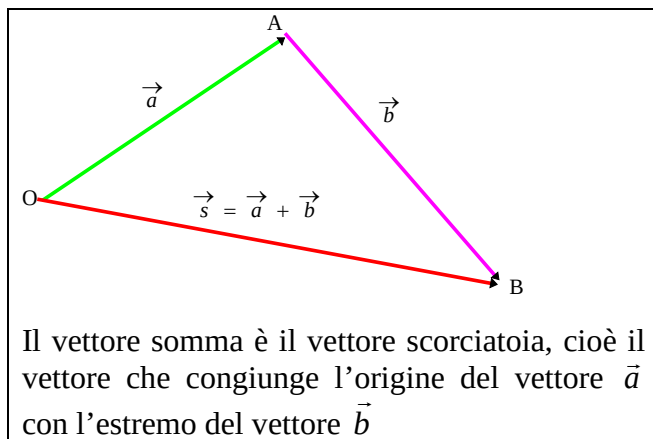
Addizione vettoriale

Introduciamo l'operazione di addizione tra due o più vettori. Si possono presentare i seguenti casi:

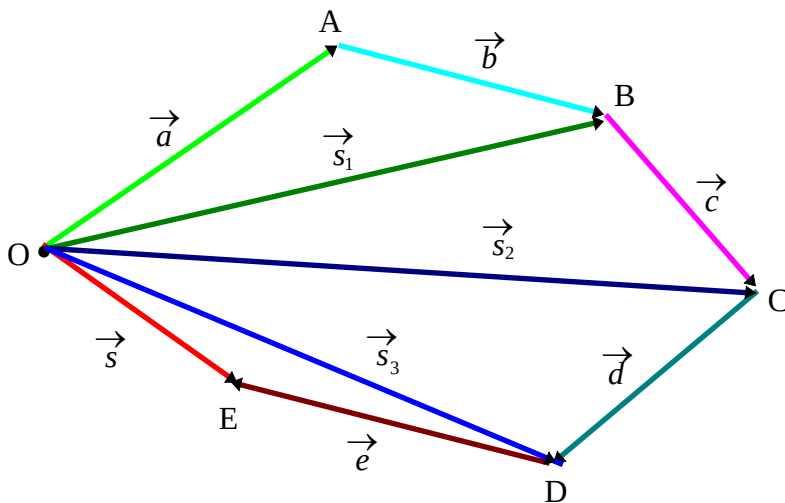
- **Somma di vettori rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi**

Supponiamo di volere eseguire la somma $\vec{s}$ di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ quando questi sono rappresentati da due segmenti orientati consecutivi. In questo caso possiamo scrivere

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (A - O) + (B - A) = (B - O) + (A - A) = (B - O) + \vec{o} = B - O$$



Il vettore $\vec{s} = B - O$ è detto **somma** (o **vettore risultante**) dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cioè la somma dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ rappresentati da segmenti orientati consecutivi è il vettore $\vec{s}$ che ha come origine l'origine del vettore $\vec{a}$ e come estremo l'estremo del vettore $\vec{b}$.



Consideriamo adesso n (nel nostro caso 5) vettori complanari rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi.

La loro somma (detta **vettore risultante**) è il vettore $\vec{s}$ così ottenuto:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_1 + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_2 + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_3 + \vec{e} = E - O$$

Diversamente abbiamo:

$$\vec{s} = (A - O) + (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) = (E - O) + (A - A) + (B - B) + (C - C) + (D - D) = E - O$$

La somma di più vettori complanari rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi è il vettore $\vec{s}$ (detto **vettore somma** o **vettore risultante**) che ha come origine l'origine del primo vettore e come estremo l'estremo dell'ultimo vettore.

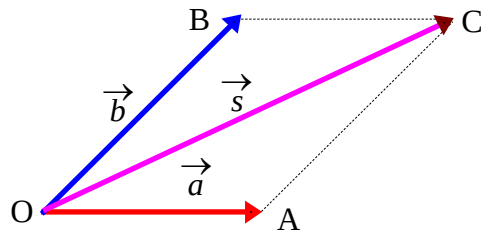
Somma di due vettori aventi la stessa origine

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori rappresentati da due segmenti orientati aventi la stessa origine **O**. La loro somma $\vec{s}$ è data da:

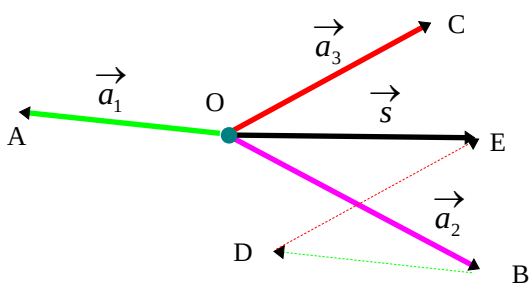
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (A - O) + (B - O) = (A - O) + (C - A) = C - O$$

AC è la **diagonale** (avente un estremo coincidente con l'origine **O** dei due vettori) del parallelogramma avente come lati consecutivi i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Si esprime questa circostanza affermando che, in questo caso, i due vettori si sommano applicando la regola del parallelogramma. Il vettore $\vec{s}$ è detto anche **vettore risultante**.



Somma di più vettori aventi la stessa origine



Si possono sommare i vettori a due a due fino ad ottenere il vettore somma $\vec{s}$, oppure da B si traccia il vettore **equipollente** ad $\vec{a}_1$, da D il vettore equipollente ad $\vec{a}_3$. $\vec{E} - \vec{O} = \vec{s}$ è il **vettore somma**.

Infatti :

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (\vec{D} - \vec{O}) + \vec{a}_3 = \vec{E} - \vec{O}$$

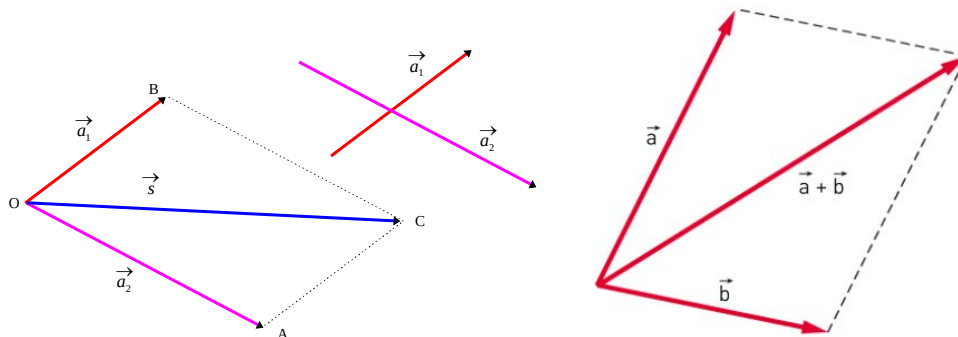
Somma di due vettori liberi complanari non consecutivi

Siano $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$ due vettori liberi complanari non aventi la stessa origine. Per calcolare la loro somma $\vec{s}$ si sceglie un qualsiasi punto **O** del piano individuato dai vettori $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$. Si costruiscono i **vettori equipollenti**

$$\vec{A} - \vec{O} = \vec{a}_2$$

$$\vec{B} - \vec{O} = \vec{a}_1$$

$\vec{s}$ si ottiene applicando la **regola del parallelogramma**.



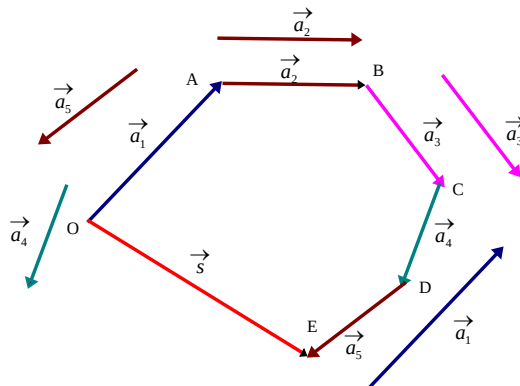
Somma di più vettori liberi non consecutivi

Si definisce **somma** di **n** (5) vettori liberi complanari il vettore $\vec{s}$ così ottenuto:

Si sceglie in maniera arbitraria il punto **O** appartenente al piano individuato dagli **n** vettori e **si costruiscono i seguenti vettori a due a due consecutivi**:

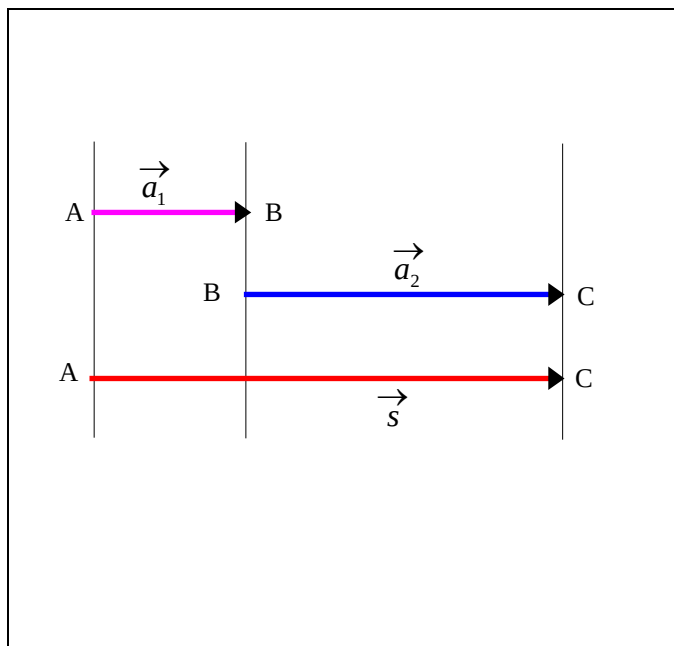
$$A - O = \vec{a}_1, B - A = \vec{a}_2, C - B = \vec{a}_3, D - C = \vec{a}_4, E - D = \vec{a}_5$$

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = E - O$$



Somma di vettori paralleli

1) Vettori equiversi

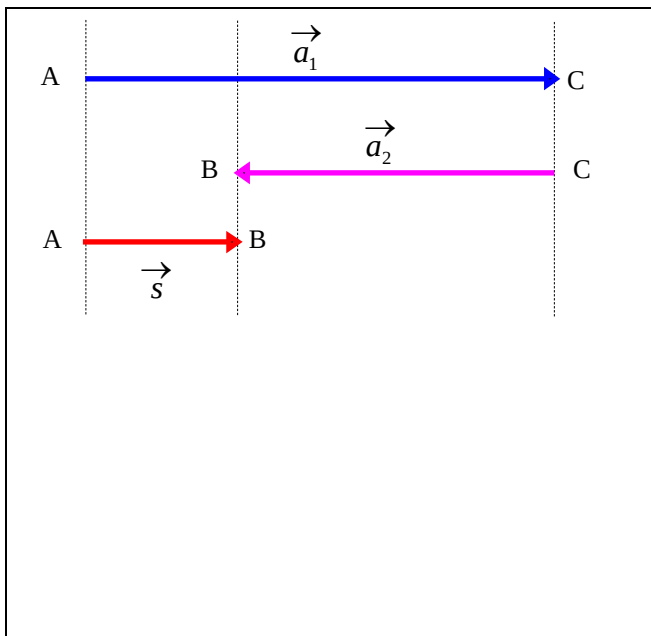


$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = C - A$$

Il vettore $\vec{s}$ ha:

- 1) la stessa direzione di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$
- 2) lo stesso verso di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$
- 3) come **modulo** la somma dei moduli dei vettori $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

2) Vettori aventi versi opposti



$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = B - A$$

Il vettore $\vec{s}$ ha:

- 1) la stessa direzione di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_2$
- 2) modulo uguale alla differenza tra il modulo maggiore ed il modulo minore
- 3) verso del vettore che ha modulo maggiore

3) Vettori opposti

La **somma di due vettori opposti** (vettori aventi la stessa direzione, lo stesso modulo e versi opposti) è il **vettore nullo**, cioè: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{0}$

L'**opposto** del vettore $\vec{a}$ si indica col simbolo $-\vec{a}$.

Sottrazione vettoriale

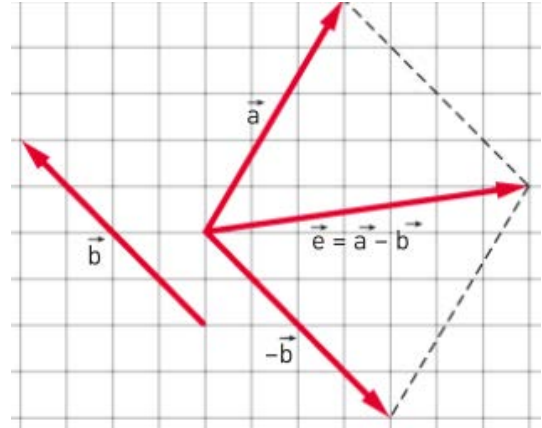
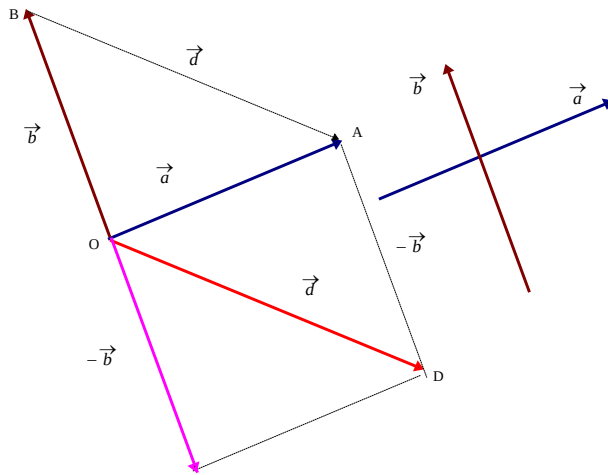
Si chiama **differenza** fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo $\vec{a} - \vec{b}$ il vettore $\vec{d}$ che si ottiene addizionando ad $\vec{a}$ l'opposto di $\vec{b}$, cioè:

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$$

$\vec{d}$ è un vettore che ha come **origine** l'estremo di $\vec{b}$ e come **estremo** l'estremo di $\vec{a}$.

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (A - O) + (D - O) = C - O = A - O$$

N.B. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non hanno lo stesso punto di applicazione allora da un generico punto **O** del piano individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si costruiscono i vettori equipollenti rispettivamente ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il problema è ricondotto a quello precedentemente trattato.



Prodotto di un numero reale per un vettore

Se k è un numero reale qualsiasi ed $\vec{a}$ un vettore, si definisce **prodotto** di k per $\vec{a}$ e si designa col simbolo $k\vec{a}$ il vettore $\vec{p}$ che ha:

- 1) la stessa direzione di $\vec{a}$
- 2) lo stesso verso di $\vec{a}$ se k è **positivo** e verso opposto ad $\vec{a}$ se k è **negativo**
- 3) come **modulo** il prodotto del modulo di $\vec{a}$ per il valore assoluto di k , cioè:

$$|\vec{p}| = |k| \cdot |\vec{a}| \quad \vec{p} = k\vec{a}$$

Rapporto di due vettori paralleli

Dati il numero reale k ed il vettore $\vec{a}$, abbiamo definito il vettore $\vec{p} = k\vec{a}$. Viceversa dati i vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ possiamo definire il numero reale relativo k come rapporto dei vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$, cioè:

$$k = \frac{\vec{p}}{\vec{a}}$$

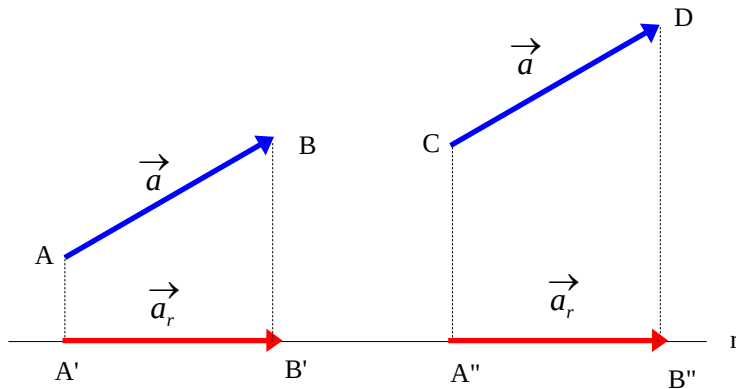
Risulta così giustificata la seguente definizione:

<< **Il rapporto di due vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ è il numero reale relativo k avente come modulo il rapporto dei moduli di $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ e per segno $+$ o $-$ a seconda che $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ siano equiversi oppure opposti**>>.

Possiamo scrivere: $\vec{p} = k\vec{a} \Leftrightarrow k = \frac{\vec{p}}{\vec{a}}$

La decomposizione di un vettore lungo due direzioni non orientate

Siano $\vec{a}$ un **vettore libero** rappresentato, ad esempio, dal segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ ed r una qualsiasi retta complanare con $\vec{a}$. Siano A' e B' rispettivamente le proiezioni ortogonali di A e B sulla retta r . Il vettore $\vec{B'} - \vec{A'} = \vec{a}_r$ dicesi il **componente** di $\vec{a}$ secondo la retta r .



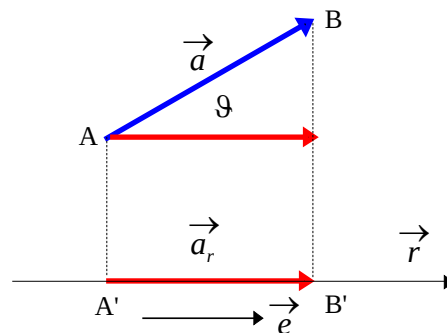
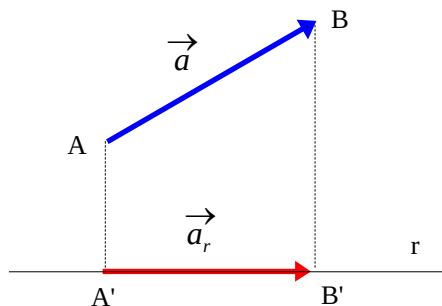
$\vec{a}_r$ è il **componente** del vettore libero $\vec{a}$ secondo la retta non orientata r

Noi sappiamo che il **versore** di una retta orientata è il vettore $\vec{e}$ avente modulo unitario e direzione e verso di $\vec{r}$. Consideriamo una retta orientata $\vec{r}$ di versore $\vec{e}$. La componente del **vettore libero** $\vec{a}$, non ortogonale ad $\vec{r}$, secondo la retta orientata $\vec{r}$ è il numero reale relativo a_r definito dal seguente rapporto:

$$a_r = \frac{\vec{a}_r}{\vec{e}}$$

Pertanto tra il **componente** $\vec{a}_r$ di un **vettore libero** $\vec{a}$ secondo la retta non orientata r e la **componente** a_r dello stesso vettore secondo la medesima retta orientata $\vec{r}$ (cioè di versore $\vec{e}$) sussiste la relazione:

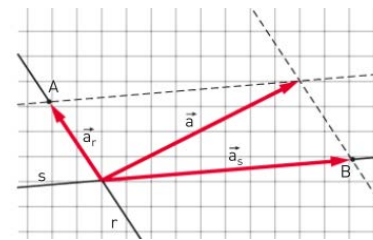
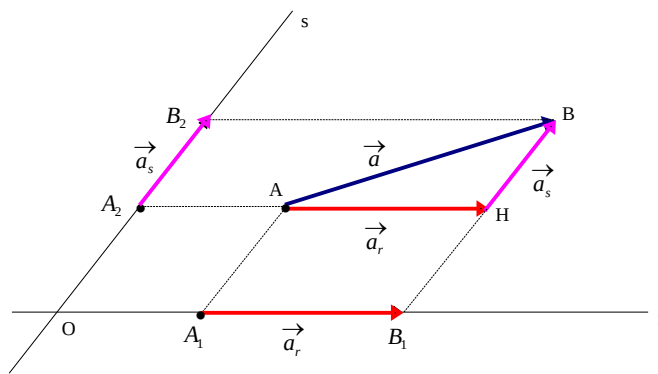
$$\vec{a}_r = a_r \cdot \vec{e}$$



Siano r ed s due rette non orientate complanari. Sia O il loro punto d'intersezione. Sia $\vec{a}$ un vettore non nullo del piano rs , di tipo qualsivoglia, cioè libero o applicato in un punto o lungo la sua retta d'azione. $\overrightarrow{AB}$ sia un segmento orientato rappresentativo del vettore $\vec{a}$. Dai punti A e B tracciamo le rette parallele ad r ed s . Otteniamo i punti A_1, A_2, B_1, B_2 e la seguente relazione vettoriale:

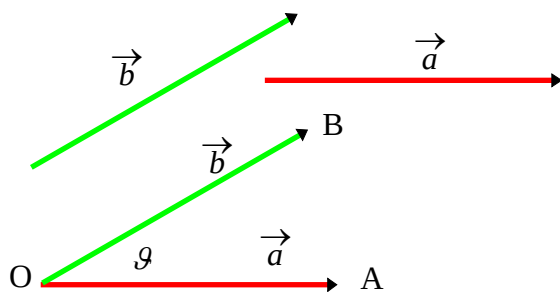
$$\vec{a} = B - A = (H - A) + (B - H) = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2) \quad \text{cioè:} \quad \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_s$$

I vettori $\vec{a}_r$ ed $\vec{a}_s$ si dicono i **componenti** del vettore $\vec{a}$ secondo le due direzioni non orientate r ed s .



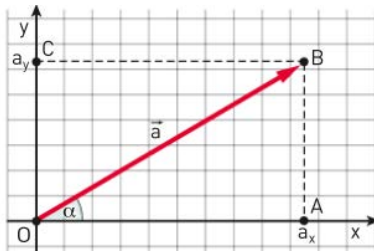
Angolo di due vettori complanari

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due qualsiasi vettori liberi del piano euclideo π . Per un qualsiasi punto O di π tracciamo due segmenti orientati, $A - O$ equipollente al segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{a}$, $B - O$ equipollente al segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{b}$. Risulta: $A - O = \vec{a}$, $B - O = \vec{b}$



L'angolo convesso $A\hat{O}B = g$ così ottenuto è l'angolo formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indica con uno dei seguenti simboli: $ang(\vec{a}, \vec{b})$, $\hat{\vec{a}\vec{b}}$, $(\vec{a}, \vec{b})$

L'espressione goniometrica delle componenti di un vettore riferito ad sistema di assi cartesiani ortogonali



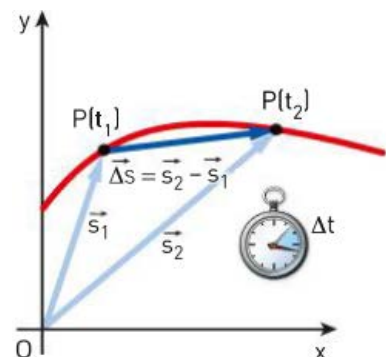
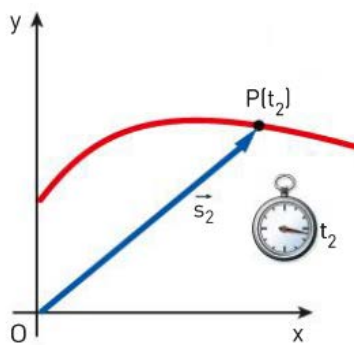
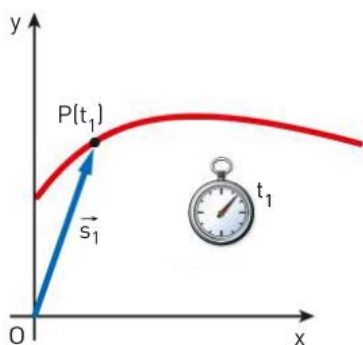
$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = (a_x; a_y)$$

vettore in componenti cartesiane

$$\begin{cases} a_x = a \cdot \cos \alpha \\ a_y = a \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Vettore posizione

Dicesi **vettore posizione** all'istante t il vettore $\vec{r}(t)$ che ha come origine un punto fisso O (che potrebbe essere l'origine di un riferimento cartesiano) e come estremo la posizione $P(t)$ occupata dal mobile all'istante t . Dicesi **vettore spostamento** relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il vettore $P(t_1) - P(t)$ che ha come origine la posizione $P(t)$ occupata dal mobile all'istante t e come estremo la posizione $P(t_1)$ occupata dal mobile all'istante t_1 cioè la variazione del vettore posizione. Risulta: $\mathbf{P}(t_1) - \mathbf{P}(t) = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$



Velocità vettoriale media ed istantanea

La posizione di un punto materiale che percorre la traiettoria ℓ può essere individuata

o dall'ascissa curvilinea $\mathbf{s}$ o dal vettore posizione $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{P} - \mathbf{O}$. Il vettore

posizione $\vec{\mathbf{r}}$ varia al variare del tempo t ; si dice che $\vec{\mathbf{r}}$ è funzione del tempo e si

scrive: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$ Quando il punto mobile $P(t)$ passa dalla posizione $P(t)$ alla posizione $P(t_1)$ si dice che subisce nel tempo $\Delta t = t_1 - t$ lo spostamento:

$$\Delta \vec{\mathbf{r}} = \Delta \vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{r}}(t_1) - \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}$$

cioè $\Delta \vec{\mathbf{r}} = \Delta \vec{\mathbf{s}}$ è il **vettore spostamento** relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$.

Definiamo *velocità vettoriale media* del punto materiale mobile relativa

all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$ il vettore $\vec{\mathbf{v}}_m$ definito dalla seguente relazione

$$\text{vettoriale: } \vec{\mathbf{v}}_m = \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_1) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{t_1 - t} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{s}}}{\Delta t}$$

La grandezza $\vec{\mathbf{v}}_m$ è una grandezza vettoriale perché ottenuta dal rapporto tra il vettore $\Delta \vec{\mathbf{r}} = \Delta \vec{\mathbf{s}}$ e lo scalare Δt . Essa è pertanto caratterizzata da un modulo, da una direzione e da un verso. La sua direzione ed il suo verso coincidono con quelli di

$\Delta \vec{\mathbf{r}} = \Delta \vec{\mathbf{s}}$, mentre il suo **modulo** è dato da:

$$\left| \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta \vec{\mathbf{s}}}{\Delta t} \right| \text{ e quindi, nel S.I., viene espresso in } \frac{m}{s}. \text{ Per un moto curvilineo risulta}$$

$$\text{sempre: } |\vec{\mathbf{v}}_m| = \left| \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \right| \neq \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ cioè per i } \textbf{moti curvilinei} \text{ il modulo della velocità}$$

vettoriale media non coincide col valore assoluto della velocità scalare.

La velocità vettoriale così definita viene detta **media** perché la misura dello spostamento netto e del tempo trascorso non ci dicono nulla sul moto effettuato fra $\mathbf{P}$

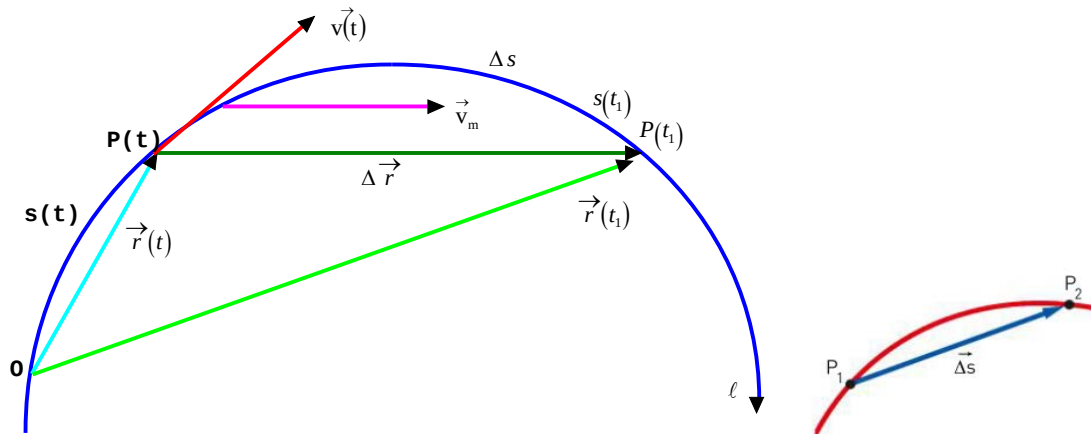
e $\mathbf{P}_1$: il moto può essere costante nel tempo o variabile e se non conoscessimo la traiettoria ℓ potremmo avere un moto rettilineo o curvilineo. La **velocità vettoriale media** implica soltanto lo spostamento totale ed il tempo totale trascorso. Essa viene introdotta come primo passo per la definizione della **velocità vettoriale istantanea**. Inoltre possiamo immaginare $\vec{v}_m$ applicata in un punto qualsiasi dell'arco di traiettoria $\widehat{PP_1}$. Se la velocità vettoriale del punto mobile varia istante per istante, occorre determinare la **velocità vettoriale istantanea** definita come la velocità vettoriale media relativa ad un intervallo di tempo Δt piccolissimo. Con parole diverse possiamo dire che la **velocità vettoriale istantanea** è il vettore $\vec{v}$, posizione limite del vettore $\vec{v}_m$, quando $t_1 \rightarrow t$ [$P_1 \rightarrow P$]. Servendoci dei simboli dell'analisi matematica possiamo scrivere:

$$\vec{v}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

La **velocità vettoriale istantanea** è il vettore $\vec{v}(t)$ che ha:

- 1)** come **origine** il punto $P(t)$
- 2)** come **direzione** la retta tangente alla traiettoria ℓ nel punto $\mathbf{P}$
- 3)** come **verso** quello del moto che può anche non coincidere col verso fissato arbitrariamente sulla traiettoria ℓ
- 4)** come **modulo** il valore assoluto della velocità scalare istantanea calcolata all'istante t

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$



ℓ = **traiettoria** descritta dal punto mobile

$P(t)$ = **posizione** del mobile all'istante t , $P(t_1)$ = **posizione** del mobile all'istante t_1

$\vec{r}(t_1)$ = vettore posizione all'istante t_1 , $\vec{r}(t)$ = vettore posizione all'istante t

$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_o$ = **vettore posizione** all'istante iniziale

$s(t)$ = **ascissa curvilinea** del mobile all'istante t

$s(t_1)$ = **ascissa curvilinea** del mobile all'istante t_1

Osservazioni

- La velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ può variare perché cambia la sua direzione o perché cambia il suo modulo o perché cambiano entrambi.

- La velocità vettoriale istantanea $\vec{v}$ e lo spostamento $d\vec{r}$ hanno sempre la stessa direzione e lo stesso verso che sono anche la direzione ed il verso del moto.

- **a)** Se il modulo del vettore $\vec{v}$ rimane costante mentre varia la sua direzione, allora il moto è **curvilineo uniforme**

- b)** Se la direzione di $\vec{v}$ è costante, allora il moto è **rettilineo**

- c)** Se $\vec{v}$ si mantiene costante in modulo, direzione e verso allora il moto è **rettilineo uniforme**

Accelerazione vettoriale media ed istantanea

Un punto materiale in movimento possiede **accelerazione vettoriale** quando la sua velocità vettoriale $\vec{v}$ muta in almeno uno dei tre elementi che la caratterizzano, cioè: in **modulo**, **direzione**, **verso**. Con parole diverse possiamo dire che la **accelerazione vettoriale** rappresenta la rapidità di variazione nel tempo del vettore $\vec{v}$ in modulo o in direzione o in verso. Supponiamo che all'istante t il punto materiale occupi la posizione $P(t)$ ed abbia velocità vettoriale $\vec{v}$ e che all'istante $t_1 > t$ sia nella posizione $P(t_1)$ con velocità vettoriale $\vec{v}(t_1)$.

Definiamo **accelerazione vettoriale media** del punto materiale relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$ il vettore $\vec{a}_m$ definito dalla seguente relazione vettoriale:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t)}{t_1 - t} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

La direzione ed il verso di $\vec{a}_m$ coincidono con quelli di $\Delta \vec{v}$, mentre il suo modulo coincide con $\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$ e, nel **S.I.**, si misura in $\frac{m}{s^2}$. $\vec{a}_m$ è un vettore che possiamo immaginare applicato in un punto qualsiasi dell'arco di traiettoria $\widehat{PP_1}$.

Il vettore $\vec{a}_m$ viene introdotto come primo passo per la definizione di **accelerazione vettoriale istantanea**. Definiamo **accelerazione vettoriale istantanea** l'accelerazione vettoriale media relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo. Con parole diverse possiamo dire che l'**accelerazione vettoriale istantanea** $\vec{a}(t)$ è la posizione limite del vettore $\vec{a}_m$ quando $t_1 \rightarrow t$, cioè quando l'intervallo di tempo Δt considerato è piccolissimo..

Servendoci dei simboli dell'analisi matematica possiamo scrivere:

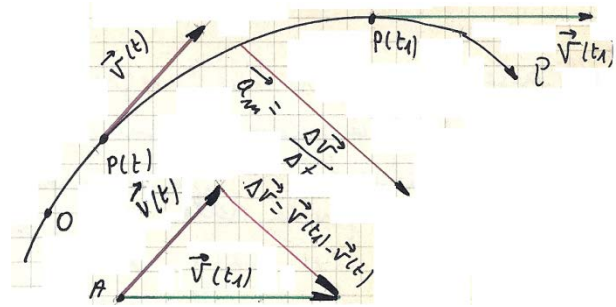
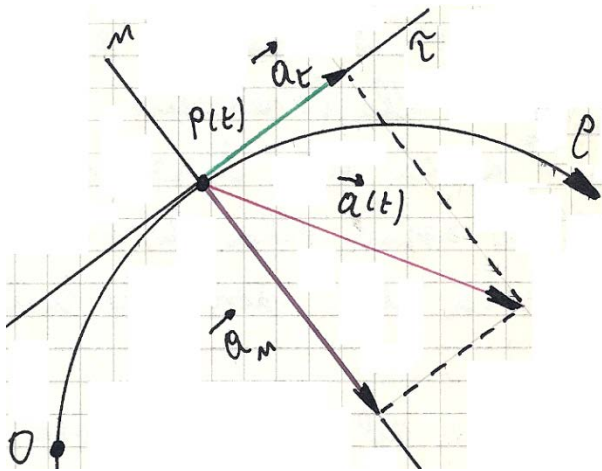
$$\vec{a}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Il vettore $\vec{a}(t)$ è rivolto sempre verso la **concavità** della traiettoria ℓ . In generale il vettore $\vec{a}(t)$ non risulta né tangente né ortogonale alla traiettoria ℓ , per cui è utile e conveniente decomporlo lungo la tangente t e la normale n alla traiettoria ℓ nel punto $P(t)$. Si ottiene:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Il componente di $\vec{a}$ lungo la tangente τ prende il nome di **accelerazione tangenziale** ed indica la rapidità della variazione del modulo della velocità vettoriale. Quindi $\vec{a}_t$ determina unicamente una **variazione nel modulo della velocità vettoriale**. Il modulo di $\vec{a}_t$ coincide col valore assoluto dell'accelerazione scalare istantanea. $|\vec{a}_t| = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

Inoltre $\vec{a}_t$ risulta parallelo a $\vec{v}$, rispetto al quale può avere verso concorde o discorde. Il componente $\vec{a}_n$ del vettore $\vec{a}$ lungo la normale n alla traiettoria ℓ prende il nome di **accelerazione normale** o **centripeta** o **radiale** ed indica la rapidità di variazione della direzione della velocità vettoriale. Quindi $\vec{a}_n$ determina unicamente una variazione nella direzione della velocità vettoriale $\vec{v}(t)$. Il vettore $\vec{a}_n$ è perpendicolare alla traiettoria ℓ ed è diretto verso il **centro di curvatura** della traiettoria stessa. Si dimostra che: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ dove v è la velocità scalare all'istante t , e ρ è il **raggio di curvatura** della traiettoria ℓ relativo al punto $P(t)$.



Se la traiettoria ℓ è una circonferenza di raggio r abbiamo: $\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{v}^2}{r}$ a_n si misura in $\frac{m}{s^2}$.

- Si chiama **raggio di curvatura** di una linea piana ℓ in un punto il raggio del relativo **cerchio osculatore**. Tra tutti i cerchi tangenti alla linea ℓ in quel punto, il **cerchio osculatore** è quello che si discosta meno dalla linea nell'immediato intorno del punto considerato.
- L'accelerazione vettoriale $\vec{a}(t)$ varia se muta almeno uno dei tre elementi (modulo, direzione, verso) che la caratterizzano.
- $\vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(t_1) = \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{v}(t)$ costante in modulo, direzione e verso.

Siamo in presenza del **moto rettilineo uniforme**.

- **Accelerazione vettoriale costante** significa che la variazione di velocità vettoriale riferita al tempo in cui si verifica è costante in modulo, direzione e verso. **Accelerazione vettoriale costante** significa che, mentre il punto materiale si muove, $\vec{a}(t)$ non varia né in modulo, né in direzione, né in verso, cioè $\vec{a}(t)$, istante per istante, è rappresentato da segmenti orientati equipollenti.
- Se $\vec{a}_n \neq \vec{0}$ allora la velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ muta la sua direzione. Questo vuole dire che, istante per istante, muta la tangente alla traiettoria ℓ e questo è possibile solo se ℓ è una curva.

Quindi $\vec{a}_n \neq \vec{0} \Rightarrow$ un **moto curvilineo**

- Una accelerazione si dice **tangenziale** quando la sua direzione coincide con quella della velocità vettoriale, cioè dello spostamento, cioè con la direzione del moto, si dice **normale o radiale o centripeta** quando la sua direzione è perpendicolare alla direzione dello spostamento ossia alla direzione del moto, ossia alla traiettoria ℓ , ossia alla velocità vettoriale.
- Per **direzione del moto** all'istante t intendiamo la retta tangente alla traiettoria nel punto $P(t)$.
- I vari tipi di moto possono essere classificati in relazione ai componenti $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_n$.

	a_t	a_n	tipo di moto
1	$a_t = 0$	$a_n = 0$	rettilineo uniforme
2	$a_t = \text{cost}$	$a_n = 0$	rettilineo uniformemente vario
3	$a_t = f(t)$	$a_n = 0$	rettilineo vario
4	$a_t = 0$	$a_n = \text{cost}$	circolare uniforme
5	$a_t = 0$	$a_n = f(t)$	curvilineo uniforme
6	$a_t = \text{cost}$	$a_n \neq 0$	curvilineo uniformemente vario
7	$a_t = f(t)$	$a_n \neq 0$	curvilineo vario

$\vec{a}_n = \vec{0}$ il moto è **rettilineo**, $\vec{a}_n \neq \vec{0}$ il moto è **curvilineo**

- $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{\tau} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}$ $\vec{\tau}$ = versore della tangente alla traiettoria

$\vec{n}$ = versore della normale alla traiettoria

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} [\dot{s} \cdot \vec{\tau}] = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \dot{s} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \dot{s} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + (\dot{s})^2 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + (\dot{s})^2 \cdot \frac{\vec{n}}{\rho}$$

$$\vec{a} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} = a_t \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n} \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = \text{accelerazione scalare istantanea}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \text{modulo dell'accelerazione centripeta} \quad \rho = \text{raggio di curvatura}$$

Se la traiettoria è una circonferenza di raggio r allora in ogni punto abbiamo $\rho = r$.

Ulteriori considerazioni sui moti accelerati e sui moti ritardati

Da un punto di vista vettoriale possiamo dire che un moto è **accelerato (ritardato)** quando i vettori $\vec{a}$ e $\vec{v}$ formano un **angolo acuto (ottuso)**, cioè:

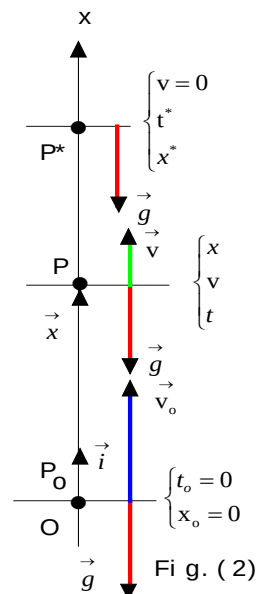
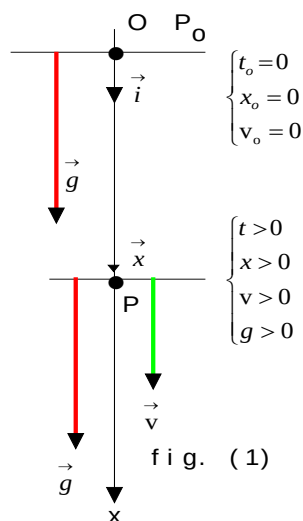
$$(\vec{a}, \vec{v}) = \vartheta \quad \text{angolo acuto} \Leftrightarrow \text{moto accelerato}$$

$$(\vec{a}, \vec{v}) = \vartheta \quad \text{angolo ottuso} \Leftrightarrow \text{moto decelerato}$$

Con parole diverse possiamo dire che un moto è accelerato (ritardato) se i vettori $\vec{a}_t$ e $\vec{v}$ sono **equiversi (hanno versi opposti)**

Caduta dei gravi nel vuoto

La terra imprime ad un corpo libero una accelerazione $\vec{g}$ detta accelerazione di gravità. In prossimità della superficie terrestre il modulo di $\vec{g}$ può ritenersi costante ($g = 9,8 \frac{m}{s^2}$) mentre il vettore $\vec{g}$ è diretto sempre verso il centro della terra. Un corpo soggetto all'azione della Terra prende il nome di **grave**. Consideriamo il moto di un grave che, partendo dalla quiete, cade liberamente verso il centro della Terra.



Se la traiettoria è orientata come nella fig. (1) valgono le seguenti relazioni scalari:

$$\begin{cases} v = gt \\ x = \frac{1}{2}gt^2 \\ v = \sqrt{2gx} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

In questo caso risultano positivi i valori delle grandezze scalari x , v , g .

Consideriamo adesso il moto di un grave lanciato verso l'alto con una velocità iniziale $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$.

Se la traiettoria è orientata come nella figura (2), se con g indichiamo l'accelerazione scalare gravitazionale, che può essere positiva (negativa) se il vettore $\vec{g}$ ha (non ha) lo stesso orientamento della traiettoria, allora valgono le seguenti relazioni scalari:

$$\begin{cases} v = v_0 + gt \\ x = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2gx \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, v > 0 \\ g < 0, v_0 > 0 \\ g = -9,8 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Se invece supponiamo che $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ sia il modulo del vettore accelerazione di gravità

$\vec{g}$ allora le precedenti relazioni diventano:

$$\begin{cases} v = v_0 - gt \\ x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v^2 = v_0^2 - 2gx \end{cases}$$

Osservazione: Il lancio verticale verso l'alto di un grave è un moto rettilineo con accelerazione vettoriale $\vec{a} = \vec{g}$ costante. Valgono le due seguenti equazioni vettoriali:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{g} \cdot t^2$$

Da queste equazioni vettoriali possiamo dedurre, operando con le regole del calcolo vettoriale, le relazioni scalari precedentemente illustrate.

L'ascissa x , la velocità scalare v e l'accelerazione scalare a assumono valori positivi (negativi) a seconda che i vettori $\vec{x}$, $\vec{v}$, $\vec{g}$ hanno versi concordi (discordi).

v_0 e v sono rispettivamente le velocità scalari all'istante $t_0=0$ e t . x è l'ascissa del punto P all'istante t , mentre x_0 è l'ascissa del grave quando inizia il moto.

Problema: Calcolare il tempo t^* di arresto, il tempo $\bar{t}$ necessario perché il grave torni nella posizione iniziale, e la velocità con la quale vi arriva.

Risoluzione: Per la risoluzione di questo problema teniamo presente la figura (2)

$$v=0 \Rightarrow v_0 - gt=0 \Rightarrow t^* = \frac{v_0}{g} \text{ (tempo di salita = istante di arresto)}$$

$$x=0 \Rightarrow v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t=0 \text{ (istante di lancio del grave)}$$

$$\bar{t} = 2 \cdot \frac{v_0}{g} = 2 \cdot t^* = \text{tempo di salita e di discesa del grave}$$

Il tempo di salita è uguale a quello della discesa. $v(\bar{t}) = v_0 - g \cdot 2 \cdot \frac{v_0}{g} = -v_0$

La velocità con la quale il grave ritorna nella posizione O di partenza è uguale e contraria a quella con la quale era stato lanciato verticalmente verso l'alto dalla posizione O.

Dopo l'istante di arresto il moto diventa naturalmente accelerato.

$$x(t^*) = v_0 t^* - \frac{1}{2} g (t^*)^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g} = \text{altezza di arresto} = \text{altezza}$$

massima raggiunta dal grave

$t=0$ è il momento del lancio del grave e ad esso corrisponde $x=0$ che è la posizione iniziale del grave.

La misura degli angoli in radianti

Un angolo $\alpha = a\hat{O}b$ lo possiamo considerare sempre come angolo al centro di due (o più) circonferenze concentriche di raggi arbitrari OA ed OA' . Detti $\widehat{AB}$ ed $\widehat{A'B'}$ gli archi corrispondenti, per un noto teorema di geometria euclidea, possiamo scrivere:

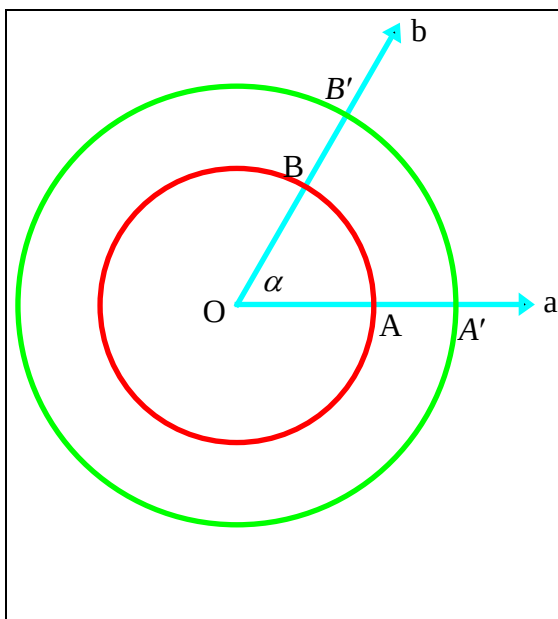
$$\widehat{AB}:\widehat{A'B'} = OA:OA' \quad \text{ed anche :} \quad \frac{\widehat{AB}}{OA} = \frac{\widehat{A'B'}}{OA'} = \alpha^R$$

cioè il rapporto tra l'arco (individuato su una circonferenza qualsiasi di centro O) ed il rispettivo raggio dipende esclusivamente dall'angolo e non dalla circonferenza considerata. Tale rapporto (indicato col simbolo α^R) si assume come misura dell'angolo in radianti. L'angolo $a\hat{O}b$ individua su una circonferenza di centro O e raggio r un arco MN di lunghezza ℓ . Il rapporto $\alpha^R = \frac{\ell}{r}$ [1], misura in radianti dell'angolo $a\hat{O}b$, dicesi anche misura in radianti dell'arco $MN = \ell$.

Se l'arco MN rettificato è lungo quanto il raggio della circonferenza cui appartiene abbiamo $\ell = r$ e quindi:

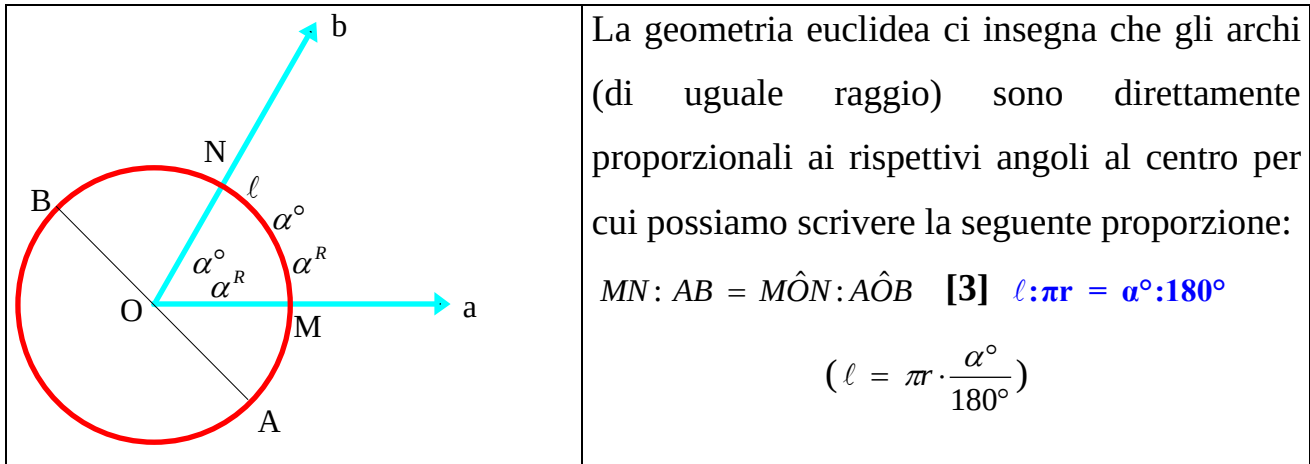
$$\alpha^R = \frac{r}{r} = 1 \text{ radiante} = 1^R \quad \text{cioè l'arco radiante è}$$

quell'arco lungo quanto il raggio della circonferenza che lo contiene. Di conseguenza l'angolo radiante è quell'angolo che, posto col vertice nel centro di una qualsiasi circonferenza, sottende un arco lungo quanto il raggio.



La misura (α^R) in radianti di un angolo o di un arco è un numero puro in quanto rapporto di due grandezze (**lunghezze**) omogenee. La misura di un angolo (arco) in **radianti** è detta **misura ciclotrica** dell'angolo (arco). La **misura ciclotrica** di un arco coincide con la **misura ciclotrica** del corrispondente angolo al centro. Dalla [1] ricaviamo: $\ell = \alpha^R \cdot r$ [2]

cioè moltiplicando il raggio per la misura in radianti dell'arco si ottiene la lunghezza dell'arco stesso. Vediamo adesso come si fa a passare dalla misura di un angolo in gradi a quella in radianti e viceversa.



Ma : $\ell = \alpha^R \cdot r$ per cui abbiamo : $\alpha^R \cdot r : \pi r = \alpha^o : 180^o$ $\alpha^R : \pi = \alpha^o : 180^o$ cioè :

$$[4] \quad \alpha^R = \frac{\alpha^o}{180^o} \cdot \pi \qquad \alpha^o = \frac{\alpha^R}{\pi} \cdot 180^o \quad [5]$$

La misura in radianti di un angolo la cui misura in gradi è **1** la si ottiene ponendo nella [4] 1^o al posto di α^o , cioè:

$$1^o = \frac{\pi}{180} = 0,01745 \dots \text{radianti}$$

la misura in gradi di un angolo la cui misura in radianti è **1** la si ottiene ponendo nella [5] 1^R al posto di α^R , cioè :

$$1^R = \frac{180^o}{\pi} = 57^o 17' 44'', 806 \dots$$

Moti periodici

- Un punto materiale si muove di **moto periodico** quando, ad ogni intervallo costante di tempo **T**, riassume le medesime caratteristiche cinematiche, cioè passa per lo stesso punto con la stessa **velocità vettoriale** e la stessa **accelerazione vettoriale**.

- Il tempo **T** è detto **periodo** e rappresenta il tempo necessario perché il mobile passi due volte di seguito per uno stesso punto con le medesime caratteristiche cinematiche.

- Nei moti periodici ha importanza una grandezza fisica detta **frequenza** definita come il rapporto costante fra il numero **n** di **eventi periodici** che si verificano nel tempo **t** ed il tempo **t**, cioè:

$$f = \nu = \frac{n}{t} = \frac{\text{numero di eventi periodici che si verificano nel tempo } t}{t}$$

La frequenza di un moto periodico è unitaria, cioè di un **hertz (Hz)** se l'evento periodico si verifica in un secondo.

$$\bullet \quad n = 1 \Rightarrow t = T \Rightarrow \quad f = \nu = \frac{1}{T} \quad f \cdot T = 1 \quad \nu \cdot T = 1$$

<<**In ogni moto periodico la frequenza è l'inverso del periodo**>>

- Nel **moto circolare uniforme** l'evento periodico consiste nel descrivere una intera circonferenza; pertanto la frequenza di **1 Hz** significa che il punto materiale P descrive una intera circonferenza in un secondo.

$$f = \nu = \frac{\text{numero di circonferenze descritte nel tempo } t}{t}$$

$\nu = 25 \text{ Hz}$ significa che il punto P percorre in un secondo 25 volte la circonferenza

- Nel **moto armonico semplice** l'evento periodico consiste nel descrivere una oscillazione completa (o ciclo) e quindi la frequenza di **1 Hz** significa che il punto P descrive una oscillazione completa in un secondo. $[f] = \frac{1}{[t]} = [T^{-1}]$

Moto circolare uniforme

- E' il moto di un punto che descrive una circonferenza con accelerazione tangenziale nulla e quindi con velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ avente modulo costante e direzione variabile istante per istante. In un moto circolare uniforme la **velocità scalare** (detta anche **velocità periferica** o **velocità lineare**) si mantiene costante.
- In un qualsiasi moto circolare uniforme sono valide le seguenti relazioni:

$$a_t = 0, \quad v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu = \omega r, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

- Supponiamo che all'istante iniziale $t_o = 0$ il punto materiale si trovi nella posizione A e dopo t secondi si trovi nella posizione P.

$$v = \text{costante} \Rightarrow v = v_m = \frac{AP}{t} = \frac{s}{t} \Rightarrow s = vt \quad (\text{equazione oraria del moto})$$

- Il **moto circolare uniforme** è un **moto periodico** in quanto dopo T secondi ritorna in A con la stessa velocità vettoriale e con la stessa accelerazione vettoriale che aveva all'istante iniziale.

Quindi: **periodo** = tempo impiegato dal mobile a percorrere una intera circonferenza = tempo necessario perché si riproducano le condizioni iniziali (stessa posizione, stessa velocità vettoriale, stessa accelerazione vettoriale)

$$f = \nu = \frac{1}{T} = \text{frequenza} = \text{numero di giri compiuti dal mobile in un secondo}$$

$$t = T \Rightarrow s = 2\pi r \quad \text{e quindi:} \quad v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu = \omega r$$

- Il vettore $P - O = \overrightarrow{OP} = \vec{r}$ è detto **raggio vettore** (o **vettore posizione**). Esso nel tempo t descrive l'angolo ϑ . Definiamo **velocità angolare media** del punto P o del raggio vettore $P - O = \overrightarrow{OP} = \vec{r}$ la grandezza fisica definita dal seguente rapporto: $\omega_m = \frac{\vartheta}{t}$

cioè l'angolo ϑ descritto dal raggio vettore $\vec{r}(t)$ nel tempo t riferito al tempo stesso.

La velocità angolare riferita ad un tempo piccolissimo viene assunta come **velocità**

angolare istantanea, cioè: $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t}$

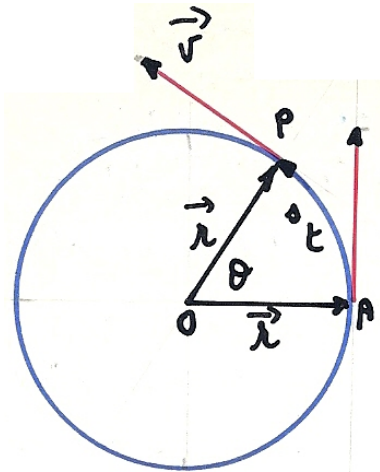
Nel nostro caso **la velocità angolare è costante** e quindi coincide con quella media, per cui possiamo scrivere:

$$\omega = \frac{\vartheta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu = 2\pi f$$

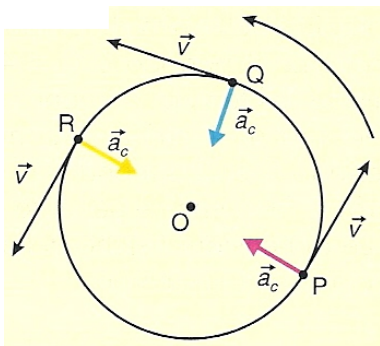
in quanto nel tempo T il raggio vettore $\vec{r}(t)$ descrive l'angolo 2π .

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu = \omega r$$

l'accelerazione $\vec{a}_n$ è costante in quanto, pur avendo sempre modulo costante, la sua direzione varia istante per istante ed è diretta sempre verso il centro O.

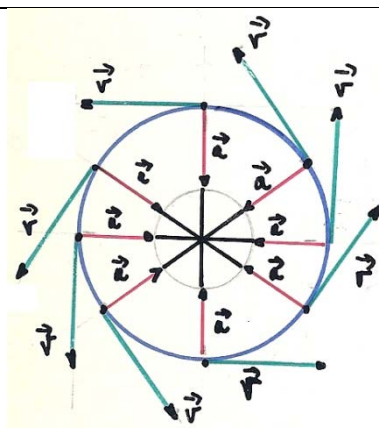
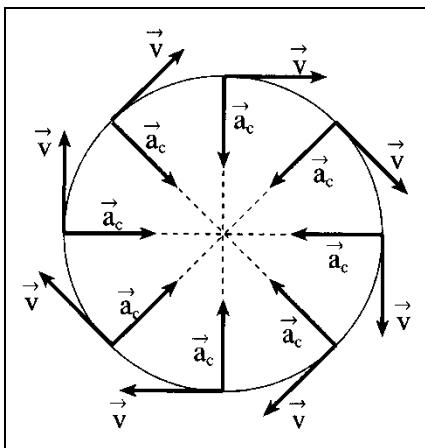


Moto circolare uniforme: mentre il punto materiale P ruota sulla circonferenza di centro O e raggio r, il raggio vettore $\vec{r}(t)$ ruota attorno al centro O. Misureremo gli archi a partire dal punto A e gli angoli a partire dal raggio vettore $\overline{OA}$.



Vettore accelerazione nel moto circolare uniforme:

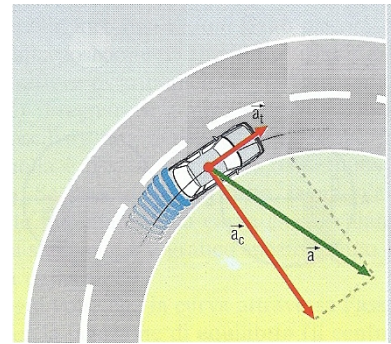
il **vettore accelerazione centripeta** $\vec{a}_c$ risulta in ogni punto perpendicolare al **vettore velocità** $\vec{v}(t)$. Inoltre $\vec{a}_c$ risulta rivolto sempre verso il centro O della circonferenza. Il modulo di $\vec{a}_c$ è costante.



Moto circolare uniforme

velocità vettoriale ed
accelerazione centripeta
in diversi punti.

Un'automobile percorre un tratto di curva circolare verso destra mentre aumenta il modulo della velocità. La sua accelerazione ha quindi un componente centripeto $\vec{a}_c$ che ne incurva la traiettoria, ed uno tangenziale $\vec{a}_t$ che modifica il valore del modulo. Di conseguenza il vettore $\vec{a}$ pur essendo diretto all'interno della curva, non punta verso il centro della circonferenza che approssima la curva. Se a_t è **costante** (**variabile**) l'auto si muove di moto **circolare uniformemente vario** (**vario**).

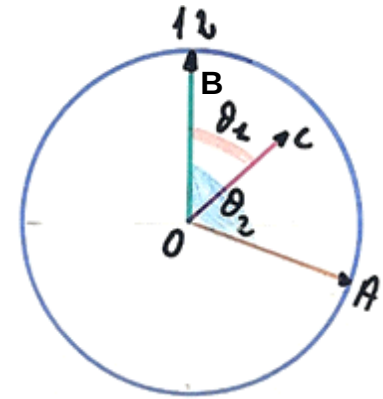


Problema: Determinare l'ora in cui, per la prima volta dopo mezzogiorno, le due lancette di un orologio tornano a sovrapporsi.

OC : lancetta delle ore OA : lancetta dei minuti primi

$$\widehat{BOA} = \vartheta_2 \quad \widehat{BOC} = \vartheta_1 \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega_2 = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} \quad \omega_1 = \frac{2\pi \text{ rad}}{12 \cdot 60 \text{ s}}$$

Risoluzione: La lancetta dei **minuti** (la cui velocità angolare è ad esempio ω_2) e quella delle **ore** (la cui velocità angolare è ad esempio ω_1) si muovono di moto circolare uniforme.



Nel tempo t la prima descrive l'angolo $\vartheta_2 = \omega_2 \cdot t$, la seconda l'angolo $\vartheta_1 = \omega_1 \cdot t$. Le due lancette si sovrappongono quando: $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\pi$, cioè quando $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 2\pi \Rightarrow$

$$\omega_2 \cdot t - \omega_1 \cdot t = 2\pi \quad t \cdot (\omega_2 - \omega_1) = 2\pi \quad t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{12 \cdot 60}} = \frac{1}{\frac{1}{60} - \frac{1}{12 \cdot 60}} = \frac{1}{\frac{12-1}{12 \cdot 60}} = \left(\frac{12 \cdot 60}{11} \right)'$$

$$t = \left(\frac{12 \cdot 60}{11} \right)' = \left(\frac{720}{11} \right)' = (65,45)' = 1^h 5' 27'' \quad \text{in quanto:} \quad \left(\frac{45}{100} \right)' = \left(\frac{45}{100} \cdot 60 \right)'' = 27''$$

Moto armonico semplice

E' il moto che si ottiene proiettando su un diametro le posizioni di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme.

Mentre il punto P si muove di moto circolare uniforme sulla circonferenza di centro O e raggio r, il punto Q si muove di **moto armonico semplice** sul diametro AB.

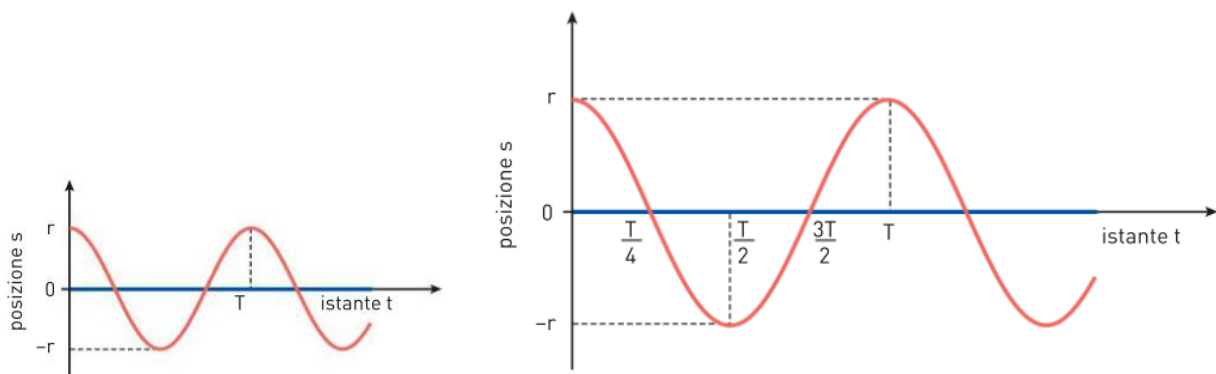
Mentre P si muove sulla circonferenza, Q si muove avanti e indietro lungo il diametro. Se il punto P compie un moto circolare uniforme, il punto Q compie un **moto armonico semplice**.

La legge oraria del moto armonico semplice è:

$$s = r \cos \omega t = r \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$ è la pulsazione del moto armonico che coincide con la velocità angolare del punto P. **T** è il periodo $f = \frac{1}{T}$ è la frequenza

Diagramma orario del moto armonico semplice



$$v = -\omega r \sin \omega t = -\frac{2\pi}{T} r \sin \frac{2\pi}{T} t = \text{velocità scalare istantanea}$$

$$v_{\max} = \omega r = \frac{2\pi}{T} r = \text{velocità scalare massima}$$

In ogni istante la velocità vettoriale del punto Q è la proiezione ortogonale della velocità $\vec{v}_0$ del punto P lungo il diametro AB.

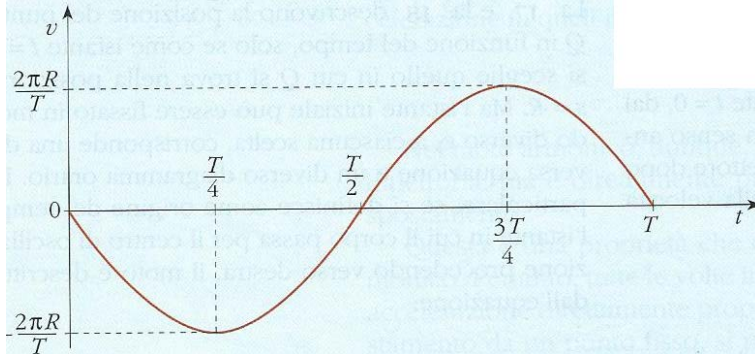
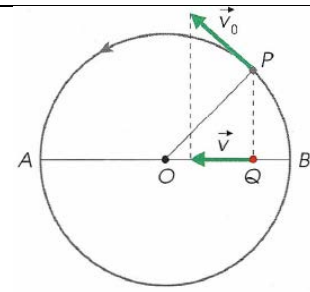


Diagramma velocità-tempo di un **moto armonico semplice** in un periodo

T

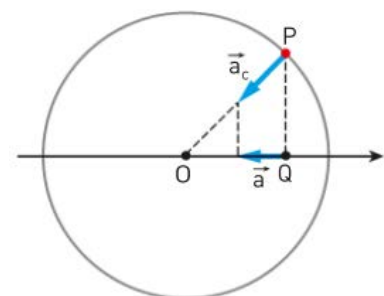


Il grafico velocità-tempo del moto armonico semplice a confronto col grafico spazio-tempo dello stesso moto armonico semplice.

$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{s}$ = vettore accelerazione

$a = -\omega^2 \cdot s = -\omega^2 \cdot r \cos \omega t = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T} t$ = accelerazione scalare istantanea

Il vettore accelerazione $\vec{a}$ del punto Q è la proiezione ortogonale dell'accelerazione centripeta $\vec{a}_c$ del punto P che si muove di moto circolare uniforme. Il punto Q si muove di moto armonico semplice.



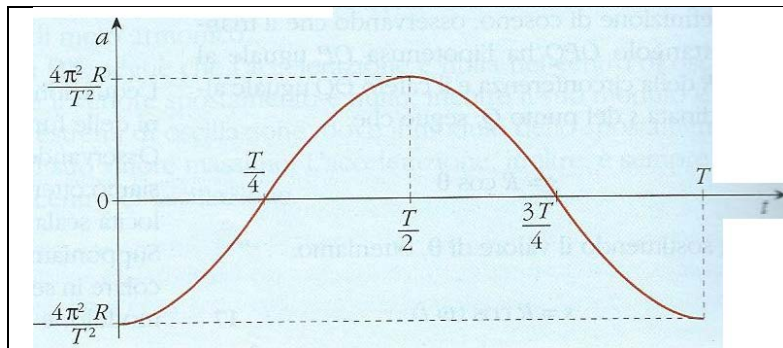


Diagramma accelerazione-tempo di un moto armonico semplice in un periodo **T**

Il grafico accelerazione-tempo del **moto armonico semplice** a confronto col grafico spazio-tempo dello stesso moto armonico semplice.

