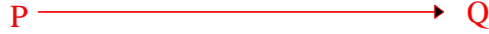


U.D. N° 3 Le grandezze vettoriali nella cinematica del punto materiale

- 01) La nozione di segmento orientato**
- 02) La nozione di vettore**
- 03) Grandezze scalari e grandezze vettoriali.**
- 04) La somma di due o più vettori**
- 05) La differenza di due vettori**
- 06) Il prodotto di un numero reale per un vettore**
- 07) Il rapporto di due vettori paralleli**
- 08) La decomposizione di un vettore lungo due direzioni non orientate**
- 09) Il Vettore posizione**
- 10) Il vettore velocità**
- 11) Il vettore accelerazione**
- 12) Ulteriori considerazioni sui moti accelerati e ritardati.**
- 13) Moto verticale dei gravi nel vuoto.**
- 14) La misura degli angoli in radianti**
- 15) Moti periodici**
- 16) Moto circolare uniforme**

La nozione di segmento orientato

Dalla geometria euclidea sappiamo che il **segmento** è la parte finita di retta delimitata da due punti detti **estremi** del segmento . Definiamo **segmento orientato** un qualsiasi segmento sul quale è stato fissato un verso positivo .



Anche per il segmento orientato possiamo scegliere il verso positivo in due maniere diverse .

Così il **segmento orientato** PQ è quel segmento che ha come **verso positivo** quello che va dal punto P (detto **primo estremo** o **origine**) al punto Q (detto **secondo estremo** o semplicemente **estremo**) .

Esso è indicato col simbolo \vec{PQ} o anche col simbolo PQ se conveniamo di identificare il suo verso positivo con l'ordine secondo cui sono scritti i suoi estremi .

La **rappresentazione grafica** del segmento orientato \vec{PQ} si ottiene segnando con una freccia l'estremo Q , del segmento euclideo PQ .

Ogni segmento orientato \vec{PQ} è caratterizzato dalla **lunghezza** la cui misura (rispetto ad un prefissato segmento unitario **u**) è detta **modulo** (del segmento orientato) , dalla **direzione** (retta PQ o una sua qualsiasi parallela) , dal **verso** che è quello scelto arbitrariamente in uno dei due modi possibili .

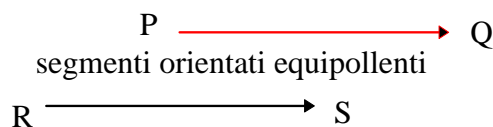
La retta che contiene il segmento orientato PQ dicesi il **sostegno** del segmento orientato .

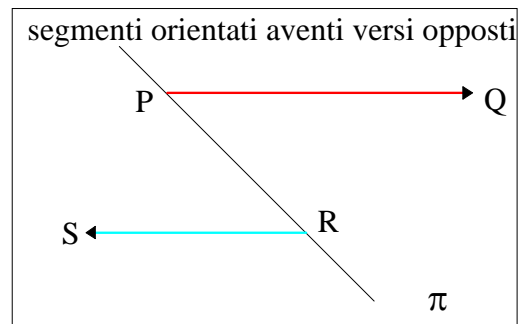
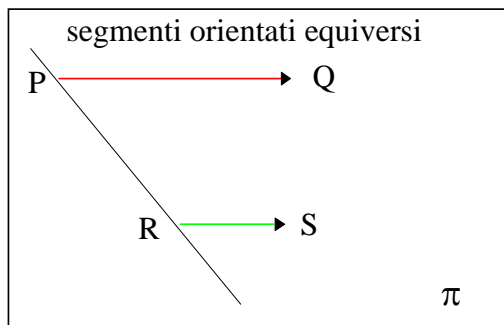
Il segmento \vec{PQ} ha **verso opposto** al segmento orientato \vec{QP} , anzi i segmenti orientati PQ e QP si dicono **opposti** e si scrive $\vec{PQ} = - \vec{QP}$

I due segmenti orientati \vec{PQ} ed \vec{RS} hanno lo **stesso verso** (versi opposti) quando hanno la **stessa direzione** ed appartengono (non appartengono) allo stesso semipiano individuato sul piano euclideo π dalla retta PR .

Due segmenti orientati \vec{PQ} ed \vec{RS} si dicono equipollenti e si scrive $\vec{PQ} \sim \vec{RS}$ quando hanno :

- 1) la **stessa lunghezza**
- 2) la **stessa direzione**
- 3) lo **stesso verso**





Se $P \equiv Q$ si ha il **segmento orientato nullo** il quale ha lunghezza nulla e direzione e verso indeterminati. Due o più segmenti orientati nulli si considerano **equipollenti**.

Indicheremo con $I = \{PQ\}$ indifferentemente l'insieme di tutti i segmenti orientati della retta euclidea r , del piano euclideo π , dello spazio euclideo Ω .

Un segmento orientato PQ , quale ente dello spazio, è dotato delle seguenti 4 proprietà elementari:

1) **direzione** 2) **verso** 3) **lunghezza** 4) **origine** o punto di applicazione.

Direzione è sinonimo fascio di rette parallele.

La nozione di vettore

Consideriamo l'insieme I di tutti i segmenti orientati e sia \vec{PQ} uno di essi. Il segmento orientato \vec{PQ} o un qualsiasi altro segmento orientato ad esso equipollente individua un nuovo ente matematico detto **vettore**. Quindi vettore è l'ente matematico completamente individuato da una **direzione**, da una **lunghezza** e da un **verso**.

Il vettore così definito può essere indicato ancora con \vec{PQ} oppure, secondo le vedute di **Hamilton-Grassmann**, con $Q - P$ (si legge Q meno P), cioè come differenza fra due punti, oppure con una lettera minuscola dell'alfabeto latino soprascritta con una freccia (\vec{a}, \vec{b}).

Quindi risulta: $\vec{PQ} = Q - P = \vec{a}$ P si dice **origine** del vettore, Q **estremo**.

Un vettore è ancora rappresentato da un segmento orientato il quale dà del vettore una **rappresentazione grafica** o un **modello**.

Due segmenti orientati equipollenti rappresentano lo stesso vettore ma danno di esso due modelli diversi o due rappresentazioni grafiche diverse.

Un qualsiasi **vettore** è caratterizzato : 1) da una **direzione** 2) da un **verso** 3) da una **lunghezza** la cui misura è detta **modulo** che viene indicato con uno dei seguenti simboli : $|\vec{a}|$, a , $|Q - P|$, $\left| \overrightarrow{PQ} \right|$, $\text{mod } \vec{a}$ 4) dall' **origine** indeterminata . Indichiamo con **J** l'insieme di tutti i vettori (della retta euclidea , del piano euclideo , dello spazio euclideo) , cioè :

$$J = \left\{ \overrightarrow{PQ} \right\} = \{ \vec{a} \}$$

Ogni vettore di modulo unitario si dice **versore** o **vettore unitario** . Ogni versore definisce una **direzione orientata** e viceversa . Di solito , il **versore** viene indicato con uno dei seguenti simboli:

$$\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \quad \vec{e} \quad \vec{u}$$

. Se $P \equiv Q$ il vettore \overrightarrow{PQ} si dice **vettore nullo** e viene indicato col simbolo \vec{o} . Esso ha modulo nullo e verso e direzione indeterminati .

Due vettori \vec{a} e \vec{b} si dicono **uguali** e si scrive $\vec{a} = \vec{b}$ quando hanno come modelli due segmenti orientati equipollenti (cioè quando rappresentano una stessa classe di segmenti orientati equipollenti , cioè quando hanno la stessa direzione , lo stesso verso , la stessa lunghezza) .

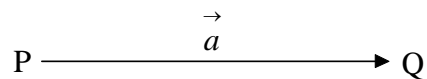
Due vettori \vec{a} e \vec{b} non uguali si dicono **diversi** e si scrive: $\vec{a} \neq \vec{b}$

Per i vettori non esiste una **relazione d'ordine** per cui non ha senso parlare di vettore maggiore o minore di un altro vettore . Si dice che due vettori sono **paralleli** quando si possono rappresentare con segmenti orientati di una stessa retta o di rette parallele.

Due **vettori** si dicono **opposti** se hanno la stessa **lunghezza** , la stessa **direzione** e **versi opposti** .

L'opposto del vettore \vec{a} è indicato col simbolo $-\vec{a}$. Tre vettori si dicono **complanari** se per essi è possibile una rappresentazione con segmenti orientati di uno stesso piano .

A conclusione possiamo dire che gli elementi caratteristici di un vettore libero $\vec{a} = Q - P$ sono :



- 1) l'**origine** **P** e l'**estremo** **Q** 2) la **direzione** cioè la retta PQ (detta **sostegno** o **retta d'azione** del vettore libero \overrightarrow{PQ}) o una sua qualsiasi retta parallela .
- 3) il **verso** che va dall' origine **P** all' estremo **Q**
- 4) il **modulo** che è un numero reale assoluto che esprime la misura del segmento non orientato PQ (segmento euclideo) rispetto ad una prefissata unità di misura
- 5) l'**origine** **P** indeterminata

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Tutte le grandezze che studiamo in fisica sono di due tipi : **grandezze scalari** e grandezze **vettoriali** . Definiamo **scalare** una grandezza completamente individuata da un numero (*positivo o negativo*) che ne esprime la misura rispetto ad un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità di misura (**scala**) . Sono esempi di *grandezze scalari* le temperature , le masse dei corpi , l'area di una superficie , il lavoro eseguito da una forza , etc....

Definiamo **vettoriale** una grandezza completamente individuata da un numero positivo (**modulo**) , da una direzione e da un verso . Il nome **vettoriale** attribuito ad una generica grandezza di questo secondo gruppo scaturisce dal fatto che ciascuna di esse può essere rappresentata da un vettore .

Sono **grandezze vettoriali** gli spostamenti , le velocità , le accelerazioni , le forze , l'intensità del campo elettrico , l'induzione magnetica , etc...

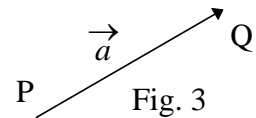
Somma di un punto e di un vettore

Definiamo **somma** del punto A e del vettore \vec{v} e la indichiamo col simbolo $A + \vec{v}$ il punto B

tale che sia : $B - A = \vec{v}$, cioè le due uguaglianze [1] $B = A + \vec{v}$ e [2] $B - A = \vec{v}$

esprimono , come nell'algebra ordinaria e con le stesse leggi per i segni , una medesima relazione .

Il vettore \vec{v} applicato al punto A lo sposta nel punto B . Da questa circostanza scaturisce il nome di **vettore** (dal latino **vehere** = **trasportare**) .



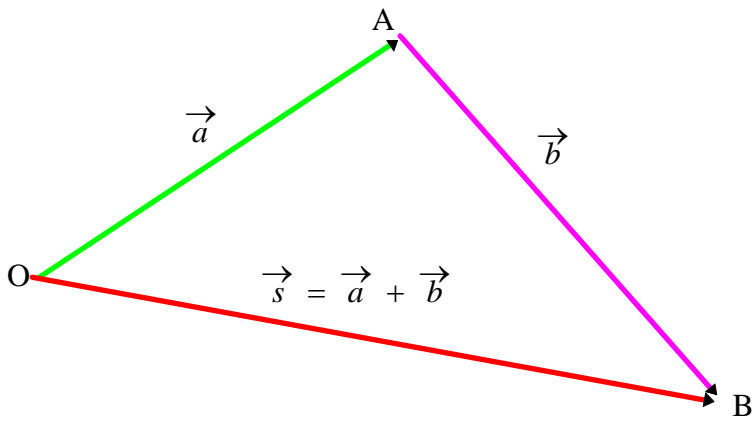
ADDIZIONE VETTORIALE

Introduciamo l'operazione di addizione tra due o più vettori . Si possono presentare i seguenti casi :

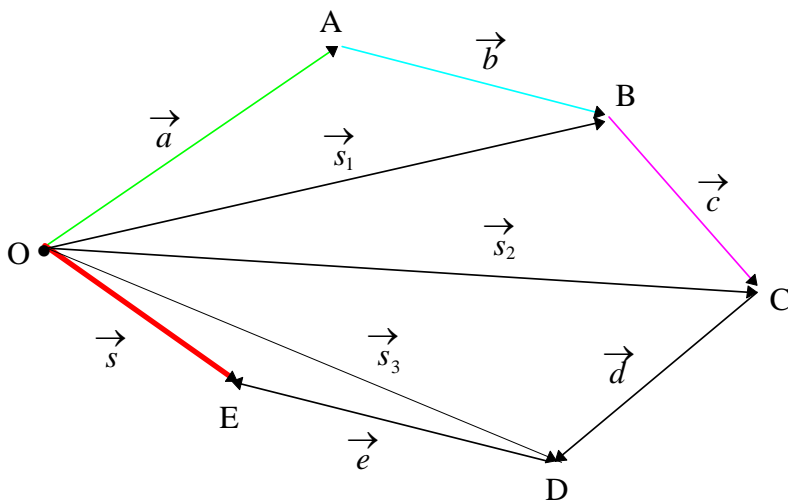
- **Somma di vettori rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi**

Supponiamo di volere eseguire la somma \vec{s} di due vettori \vec{a} e \vec{b} quando questi sono rappresentati da due segmenti orientati consecutivi . In questo caso possiamo scrivere

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (A - O) + (B - A) = (B - O) + (A - A) = (B - O) + \vec{o} = B - O$$



Il vettore $\vec{s} = B - O$ è detto **somma** (o **vettore risultante**) dei vettori \vec{a} e \vec{b} , cioè la somma dei vettori \vec{a} e \vec{b} rappresentati da segmenti orientati consecutivi è il vettore \vec{s} che ha come origine l'origine del vettore \vec{a} e come estremo l'estremo del vettore \vec{b} .



Consideriamo adesso n (nel nostro caso 5) vettori complanari rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi . La loro somma (detta **vettore risultante**) è il vettore \vec{s} così ottenuto :

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_1 + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_2 + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_3 + \vec{e} = E - O$$

Diversamente abbiamo :

$$\begin{aligned} \vec{s} &= (A - O) + (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) = \\ &= (E - O) + (A - A) + (B - B) + (C - C) + (D - D) = E - O \end{aligned}$$

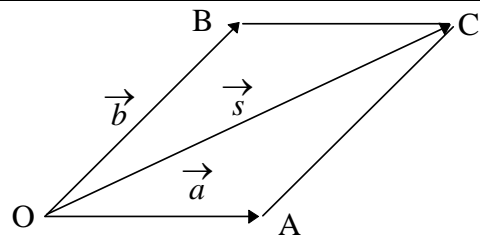
La somma di più vettori complanari rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi è il vettore \vec{s} (detto **vettore somma** o **vettore risultante**) che ha come origine l'origine del primo vettore e come estremo l'estremo dell' ultimo vettore .

Somma di due vettori aventi la stessa origine

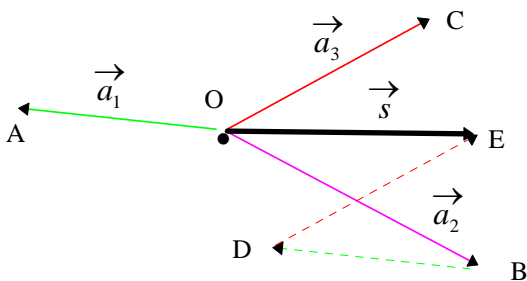
Siano \vec{a} e \vec{b} due vettori rappresentati da due segmenti orientati aventi la stessa origine O . La loro somma \vec{s} è data da: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (A - O) + (B - O) = (A - O) + (C - A) = C - O$

AC è la **diagonale** (avente un estremo coincidente con l'origine O dei due vettori) del parallelogramma avente come lati consecutivi i due vettori \vec{a} e \vec{b} .

Si esprime questa circostanza affermando che, in questo caso, i due vettori si sommano applicando la regola del parallelogramma. Il vettore \vec{s} è detto anche **vettore risultante**.



Somma di più vettori aventi la stessa origine



Si possono sommare i vettori a due a due fino ad ottenere il vettore somma \vec{s} , oppure da B si traccia il vettore **equipollente** ad \vec{a}_1 , da D il vettore equipollente ad \vec{a}_3 . $\boxed{E - O = \vec{s}}$ è il **vettore somma**.

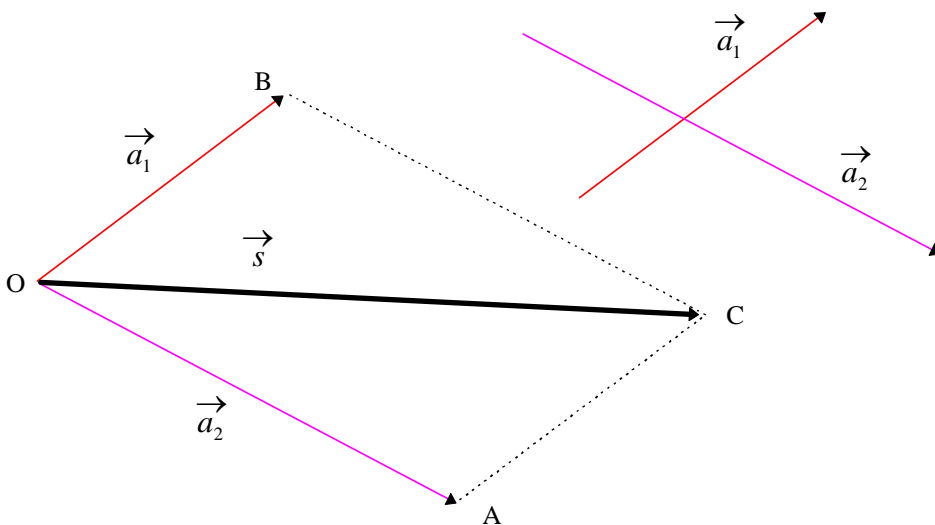
Infatti: $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (D - O) + \vec{a}_3 = E - O$

Somma di due vettori liberi complanari non consecutivi

Siano \vec{a}_1 ed \vec{a}_3 due vettori liberi complanari non aventi la stessa origine. Per calcolare la loro somma \vec{s} si sceglie un qualsiasi punto O del piano individuato dai vettori \vec{a}_1 ed \vec{a}_3 . Si

costruiscono i **vettori equipollenti** $A - O = \vec{a}_2$ $B - O = \vec{a}_1$

\vec{s} si ottiene applicando la **regola del parallelogramma**.



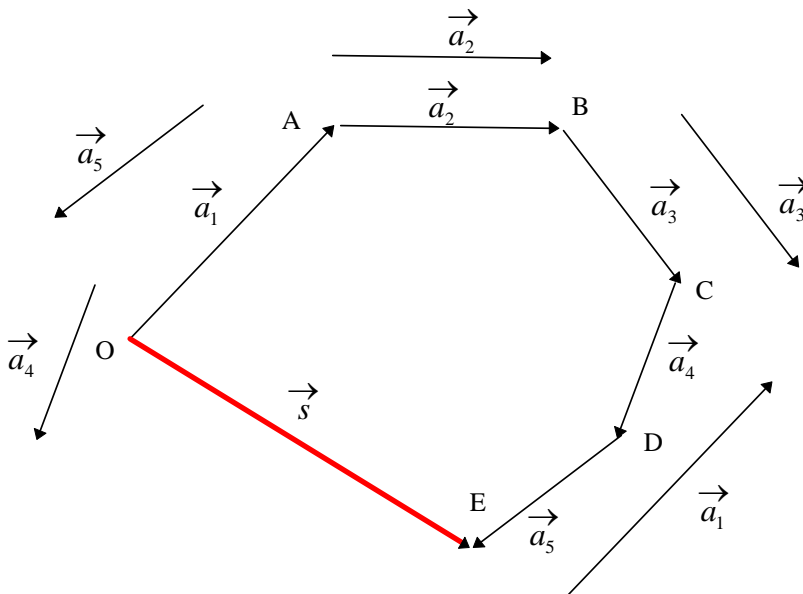
Somma di più vettori liberi non consecutivi

Si definisce **somma** di n (5) vettori liberi complanari il vettore \vec{s} così ottenuto :

Si sceglie in maniera arbitraria il punto **O** appartenente al piano individuato dagli n vettori e **si costruiscono i seguenti vettori a due a due consecutivi** :

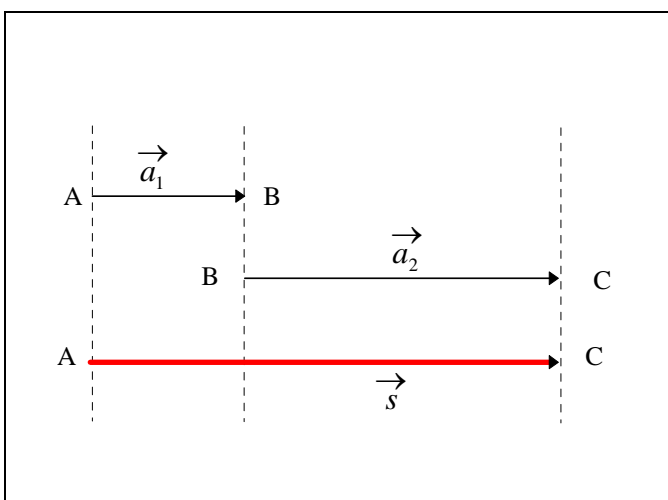
$$A - O = \vec{a}_1, B - A = \vec{a}_2, C - B = \vec{a}_3, D - C = \vec{a}_4, E - D = \vec{a}_5$$

$$\boxed{\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = E - O}$$



Somma di vettori paralleli

1) Vettori equiversi

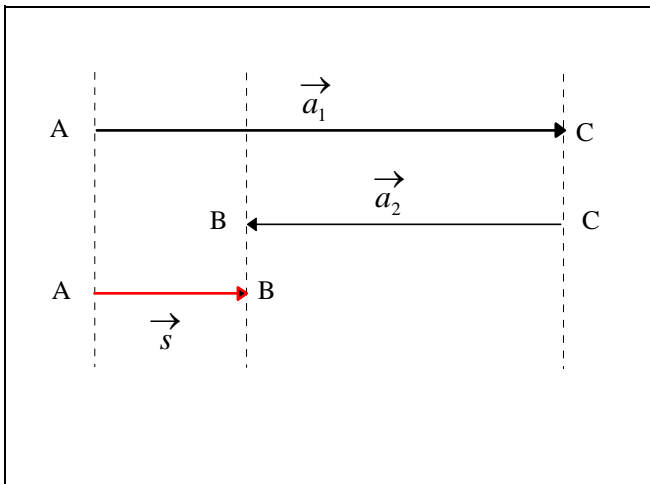


$$\boxed{\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = C - A}$$

Il vettore \vec{s} ha :

- 1) la stessa direzione di \vec{a}_1 ed \vec{a}_3
- 2) lo stesso verso di \vec{a}_1 ed \vec{a}_3
- 3) come **modulo** la somma dei moduli dei vettori \vec{a}_1 ed \vec{a}_3

2) Vettori aventi versi opposti



$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = B - A$$

Il vettore \vec{s} ha :

- 1) la stessa direzione di \vec{a}_1 ed \vec{a}_2
- 2) modulo uguale alla differenza tra il modulo maggiore ed il modulo minore
- 3) verso del vettore che ha modulo maggiore

3) Vettori opposti

La **somma di due vettori opposti** (vettori aventi la stessa direzione , lo stesso modulo e versi opposti) è il **vettore nullo** , cioè :

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{o}$$

L' **opposto** del vettore \vec{a} si indica col simbolo $-\vec{a}$.

Sottrazione vettoriale

Si chiama **differenza** fra due vettori \vec{a} e \vec{b} , e si indica col simbolo $\vec{a} - \vec{b}$ il vettore \vec{d} che si ottiene addizionando ad \vec{a} l'opposto di \vec{b} , cioè :

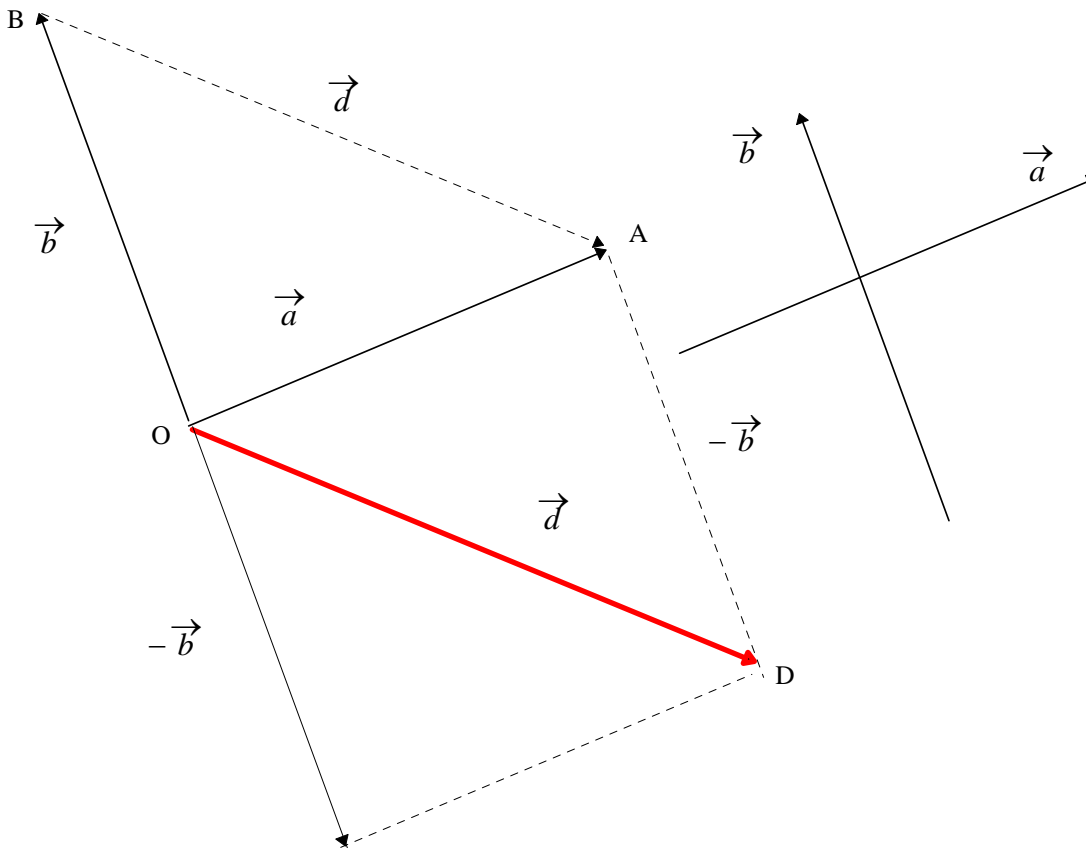
$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$$

\vec{d} è un vettore che ha come **origine** l'estremo di \vec{b} e come **estremo** l'estremo di \vec{a} .

\vec{d}

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (A - O) + (D - O) = C - O = A - O$$

N.B. Se \vec{a} e \vec{b} non hanno lo stesso punto di applicazione allora da un generico punto **O** del piano individuato dai vettori \vec{a} e \vec{b} si costruiscono i vettori equipollenti rispettivamente ad \vec{a} e \vec{b} . Il problema è ricondotto a quello precedentemente trattato .



Prodotto di un numero reale per un vettore

Se k è un numero reale qualsiasi ed \vec{a} un vettore, si definisce **prodotto** di k per \vec{a} e si designa col simbolo $k\vec{a}$ il vettore \vec{p} che ha :

- 1) la stessa direzione di \vec{a}
- 2) lo stesso verso di \vec{a} se k è **positivo** e verso opposto ad \vec{a} se k è **negativo**
- 3) come **modulo** il prodotto del modulo di \vec{a} per il valore assoluto di k , cioè : $|\vec{p}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

$$\vec{p} = k\vec{a}$$

Rapporto di due vettori paralleli

dati il numero reale k ed il vettore \vec{a} , abbiamo definito il vettore $\vec{p} = k\vec{a}$. Viceversa dati i vettori paralleli \vec{p} ed \vec{a} possiamo definire il numero reale relativo k come rapporto dei vettori paralleli \vec{p}

ed \vec{a} , cioè :

$$k = \frac{\vec{p}}{\vec{a}}$$

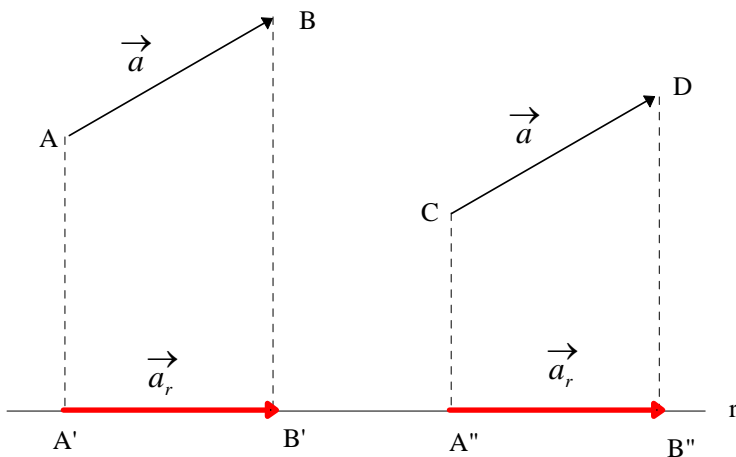
Risulta così giustificata la seguente definizione :

<< **Il rapporto di due vettori paralleli \vec{p} ed \vec{a} è il numero reale relativo k avente come modulo il rapporto dei moduli di \vec{p} ed \vec{a} e per segno + o - a seconda che \vec{p} ed \vec{a} siano equiversi oppure opposti** >> . Possiamo scrivere :

$$\vec{p} = k\vec{a} \Leftrightarrow k = \frac{\vec{p}}{\vec{a}}$$

La decomposizione di un vettore lungo due direzioni non orientate

Siano \vec{a} un **vettore libero** rappresentato , ad esempio , dal segmento orientato \overrightarrow{AB} ed r una qualsiasi retta complanare con \vec{a} . Siano A' e B' rispettivamente le proiezioni ortogonali di A e B sulla retta r . Il vettore $\boxed{B' - A' = \vec{a}_r}$ dicesi **il componente** di \vec{a} secondo la retta r .



\vec{a}_r è il **componente** del vettore libero \vec{a} secondo la retta non orientata r

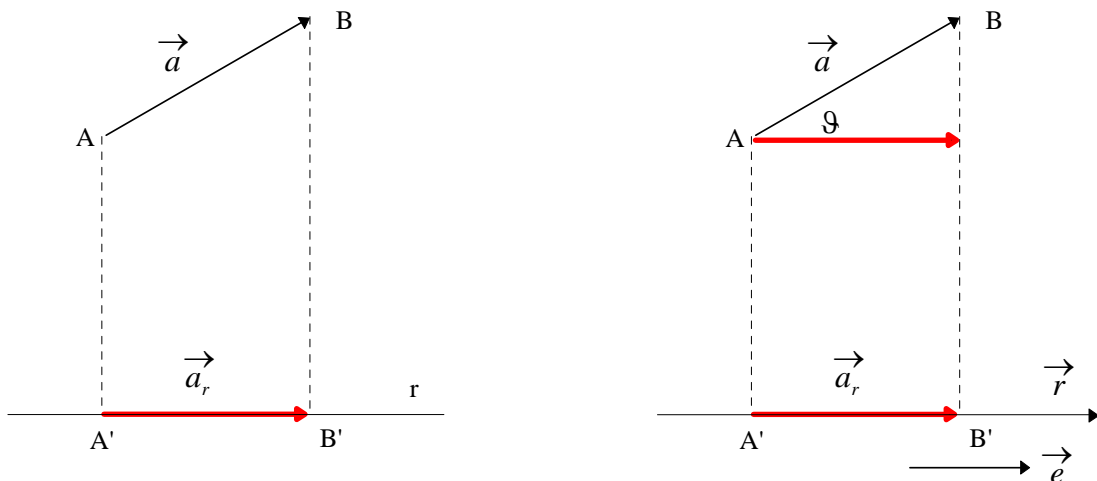
Noi sappiamo che il **versore** di una retta orientata è il vettore \vec{e} avente modulo unitario e direzione e verso di \vec{r} . Consideriamo una retta orientata \vec{r} di versore \vec{e} . La componente del **vettore libero** \vec{a} , non ortogonale ad \vec{r} , secondo la retta orientata \vec{r} è il numero reale relativo a_r definito dal

seguinte rapporto :

$$a_r = \frac{\vec{a}_r}{\vec{e}}$$

Pertanto tra il **componente** \vec{a}_r di un **vettore libero** \vec{a} secondo la retta non orientata r e la **componente** dello stesso vettore secondo la medesima retta orientata \vec{r} (cioè di versore \vec{e}) sussiste la relazione :

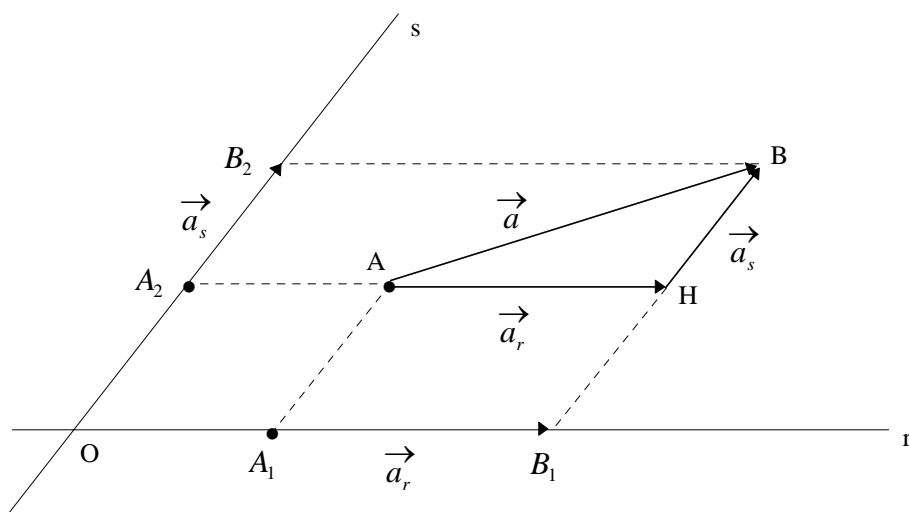
$$\vec{a}_r = a_r \cdot \vec{e}$$



Siano r ed s due rette non orientate complanari . Sia O il loro punto d'intersezione . Sia \vec{a} un vettore non nullo del piano rs , di tipo qualsivoglia , cioè libero o applicato in un punto o lungo la sua retta d'azione . \vec{AB} sia un segmento orientato rappresentativo del vettore \vec{a} . Dai punti A e B tracciamo le rette parallele ad r ed s . Otteniamo i punti A_1, A_2, B_1, B_2 e la seguente relazione vettoriale : $\vec{a} = B - A = (H - A) + (B - H) = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2)$ cioè :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_s}$$

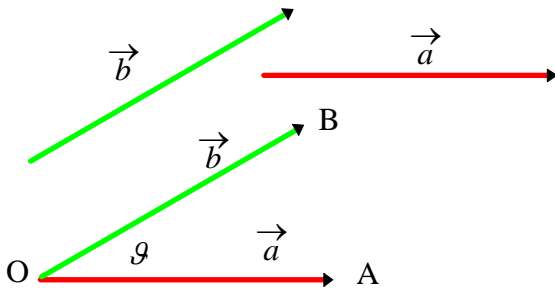
I vettori \vec{a}_r ed \vec{a}_s si dicono i **componenti** del vettore \vec{a} secondo le due direzioni non orientate r ed s .



Angolo di due vettori complanari

Siano \vec{a} e \vec{b} due qualsiasi vettori liberi del piano euclideo π . Per un qualsiasi punto O di π tracciamo due segmenti orientati, $A - O$ equipollente al segmento orientato che rappresenta il vettore \vec{a} , $B - O$ equipollente al segmento orientato che rappresenta il vettore \vec{b} .

Risulta: $A - O = \vec{a}$, $B - O = \vec{b}$



L'angolo convesso $\widehat{AOB} = g$ così ottenuto è l'angolo formato dai vettori \vec{a} e \vec{b} e si indica con uno dei seguenti simboli: $\text{ang}(\vec{a}, \vec{b})$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$, (\vec{a}, \vec{b})

Vettore posizione

Dicesi **vettore posizione** all'istante t il vettore $\vec{r}(t)$ che ha come origine un punto fisso O (che potrebbe essere l'origine di un riferimento cartesiano) e come estremo la posizione $P(t)$ occupata dal mobile all'istante t . Dicesi **vettore spostamento** relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il vettore $P(t_1) - P(t)$ che ha come origine la posizione $P(t)$ occupata dal mobile all'istante t e come estremo la posizione $P(t_1)$ occupata dal mobile all'istante t_1 . Risulta :

$$P(t_1) - P(t) = \Delta \vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t) = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

Velocità vettoriale media ed istantanea

La posizione di un punto materiale che percorre la traiettoria ℓ può essere individuata o dall'ascissa

curvilinea s o dal vettore posizione $\vec{r} = \vec{r}(t) = P - O$. Il vettore posizione \vec{r} varia al variare del tempo t ; si dice che \vec{r} è funzione del tempo e si scrive :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Quando il punto mobile $P(t)$ passa dalla posizione $P(t)$ alla posizione $P(t_1)$ si dice che subisce nel

tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ lo spostamento :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t) = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

cioè $\Delta \vec{r}$ è il **vettore spostamento** relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definiamo **velocità vettoriale media** del punto materiale mobile relativa all'intervallo di

tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il vettore \vec{v}_m definito dalla seguente relazione vettoriale :

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

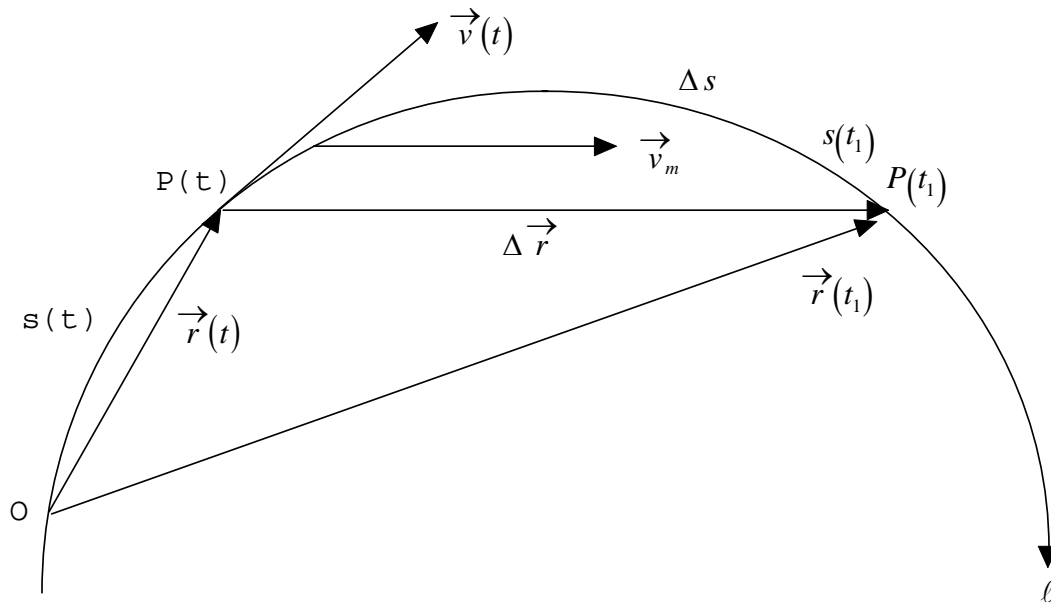
La grandezza \vec{v}_m è una grandezza vettoriale perché ottenuta dal rapporto tra il vettore $\Delta \vec{r}$ e lo scalare Δt . Essa è pertanto caratterizzata da un modulo, da una direzione e da un verso.

La velocità vettoriale istantanea è il vettore $\vec{v}(t)$ che ha :

- 1) come **origine** il punto $P(t)$
- 2) come **direzione** la retta tangente alla traiettoria ℓ nel punto **P**
- 3) come **verso** quello del moto che può anche non coincidere col verso fissato arbitrariamente

sulla traiettoria ℓ

4) come **modulo** il valore assoluto della velocità scalare istantanea calcolata all'istante t



ℓ = traiettoria descritta dal punto mobile

$P(t)$ = posizione del mobile all'istante t , $P(t_1)$ = posizione del mobile all'istante t_1

$\vec{r}(t_1)$ = vettore posizione all'istante t_1 , $\vec{r}(t)$ = vettore posizione all'istante t

$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_o$ = vettore posizione all'istante iniziale

$s(t)$ = ascissa curvilinea del mobile all'istante t

$s(t_1)$ = ascissa curvilinea del mobile all'istante t_1

Osservazioni

- La velocità vettoriale \vec{v} può variare perché cambia la sua direzione o perché cambia il suo modulo o perché cambiano entrambi.

- a) Se il modulo del vettore \vec{v} rimane costante mentre varia la sua direzione, allora il moto è **curvilineo uniforme**

- b) Se la direzione di \vec{v} è costante, allora il moto è **rettilineo**

c) Se \vec{v} si mantiene costante in modulo , direzione e verso allora il moto è **rettilineo uniforme**

Accelerazione vettoriale media ed istantanea

Un punto materiale in movimento possiede **accelerazione vettoriale** quando la sua velocità vettoriale \vec{v} muta in almeno uno dei tre elementi che la caratterizzano , cioè : in **modulo** , **direzione** , **verso** .

Supponiamo che all'istante t il punto materiale occupi la posizione $P(t)$ ed abbia velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ e che all'istante $t_1 > t$ sia nella posizione $P(t_1)$ con velocità vettoriale $\vec{v}(t_1)$.

Definiamo **accelerazione vettoriale media** del punto materiale relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il vettore \vec{a}_m definito dalla seguente relazione vettoriale :

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t)}{t_1 - t} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Il vettore \vec{a}_m viene introdotto come primo passo per la definizione di **accelerazione vettoriale istantanea** . Definiamo **accelerazione vettoriale istantanea** l'accelerazione vettoriale media relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo . Con parole diverse possiamo dire che l' *accelerazione vettoriale istantanea* $\vec{a}(t)$ è la posizione limite del vettore \vec{a}_m quando $t_1 \rightarrow t$.

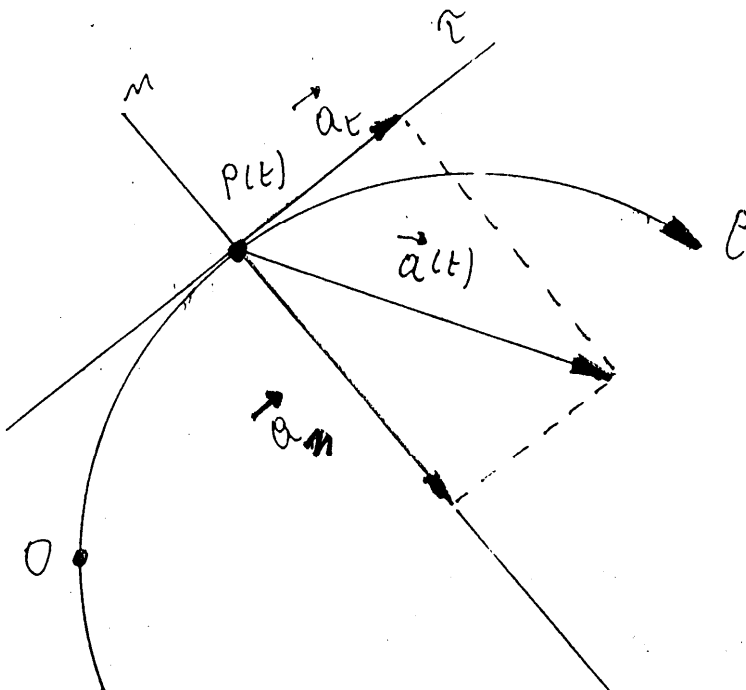
In generale il vettore $\vec{a}(t)$ non risulta né tangente né ortogonale alla traiettoria ℓ , per cui è utile e conveniente decomporlo lungo la tangente τ e la normale n alla traiettoria ℓ nel punto $P(t)$.

Si ottiene :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Il componente di \vec{a} lungo la tangente τ prende il nome di **accelerazione tangenziale** ed indica la rapidità della variazione del modulo della velocità vettoriale . Quindi \vec{a}_t determina unicamente una **variazione nel modulo della velocità vettoriale** . Il modulo di \vec{a}_t coincide col valore assoluto dell'accelerazione scalare istantanea : Inoltre \vec{a}_t risulta parallelo a \vec{v} , rispetto al quale può avere verso concorde o discorde .Il componente \vec{a}_n del vettore \vec{a} lungo la normale n alla

traiettoria ℓ prende il nome di **accelerazione normale** o *centripeta* o radiale ed indica la rapidità di variazione della direzione della velocità vettoriale .



Quindi \vec{a}_n determina unicamente una variazione nella direzione della velocità vettoriale $\vec{v}(t)$. Il vettore \vec{a}_n è perpendicolare alla traiettoria ℓ ed è diretto verso il **centro di curvatura** della traiettoria stessa .

$$\text{Si dimostra che : } a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

dove v è la velocità scalare all'istante t , e ρ è il **raggio di curvatura** della traiettoria ℓ relativo al punto $P(t)$.

Se la traiettoria ℓ è una circonferenza di raggio r abbiamo :

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Osservazioni

- L'accelerazione vettoriale $\vec{a}(t)$ varia se muta almeno uno dei tre elementi (modulo , direzione , verso) che la caratterizzano .

- $\vec{a} = \vec{o} \Rightarrow \Delta \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow \vec{v}(t_1) = \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{v}(t)$ costante in modulo , direzione e verso .

Siamo in presenza del **moto rettilineo uniforme** .

- Se $\vec{a}_n \neq \vec{o}$ allora la velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ muta la sua direzione . Questo vuole dire che , istante per istante , muta la tangente alla traiettoria ℓ e questo è possibile solo se ℓ è una curva .

Quindi $\vec{a}_n \neq \vec{o} \Rightarrow$ un **moto curvilineo**

- Una accelerazione si dice **tangenziale** quando la sua direzione coincide con quella della velocità vettoriale , cioè dello spostamento , cioè con la direzione del moto , si dice **normale o radiale o**

centripeta quando la sua direzione è perpendicolare alla direzione dello spostamento ossia alla direzione del moto , ossia alla traiettoria ℓ , ossia alla velocità vettoriale .

- Per **direzione del moto** all'istante t intendiamo la retta tangente alla traiettoria nel punto $P(t)$.
- I vari tipi di moto possono essere classificati in relazione ai componenti \vec{a}_t e \vec{a}_n .

	a_t	a_n	tipo di moto
1	$a_t = 0$	$a_n = 0$	rettilineo uniforme
2	$a_t = \text{cost}$	$a_n = 0$	rettilineo uniformemente vario
3	$a_t = f(t)$	$a_n = 0$	rettilineo vario
4	$a_t = 0$	$a_n = \text{cost}$	circolare uniforme
5	$a_t = 0$	$a_n = f(t)$	curvilineo uniforme
6	$a_t = \text{cost}$	$a_n \neq 0$	curvilineo uniformemente vario
7	$a_t = f(t)$	$a_n \neq 0$	curvilineo vario

$\vec{a}_n = 0$ il moto è **rettilineo** , $\vec{a}_n \neq 0$ il moto è **curvilineo**

Ulteriori considerazioni sui moti accelerati e sui moti ritardati

Da un punto di vista vettoriale possiamo dire che un moto è **accelerato** (*ritardato*) quando i

vettori \vec{a} e \vec{v} formano un **angolo acuto** (*ottuso*), cioè :

$$\left(\vec{a}, \vec{v} \right) = \vartheta \text{ angolo acuto} \Leftrightarrow \text{moto accelerato}$$

$$\left(\vec{a}, \vec{v} \right) = \vartheta \text{ angolo ottuso} \Leftrightarrow \text{moto decelerato}$$

Con parole diverse possiamo dire che un moto è accelerato (ritardato) se i vettori \vec{a}_t e \vec{v} sono **equiversi** (*hanno versi opposti*)

Caduta dei gravi nel vuoto

La terra imprime ad un corpo libero una accelerazione \vec{g} detta accelerazione di gravità .

In prossimità della superficie terrestre il modulo di \vec{g} può ritenersi costante ($g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

mentre il vettore \vec{g} è diretto sempre verso il centro della terra . Un corpo soggetto all'azione della terra prende il nome di **grave** . Consideriamo il moto di un grave che , partendo dalla quiete , cade liberamente verso il centro della terra .

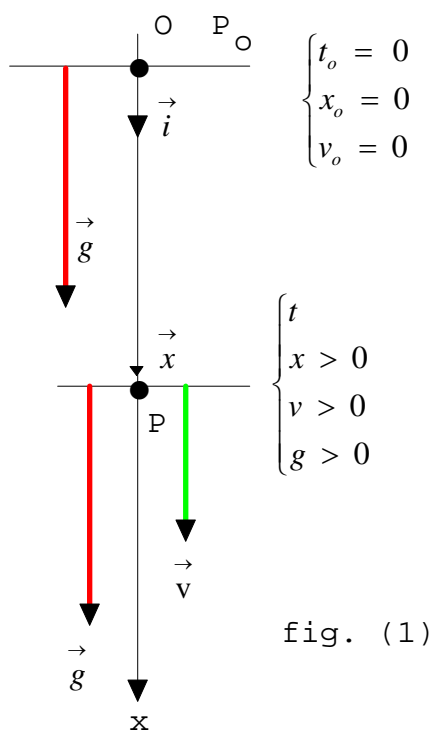


fig. (1)

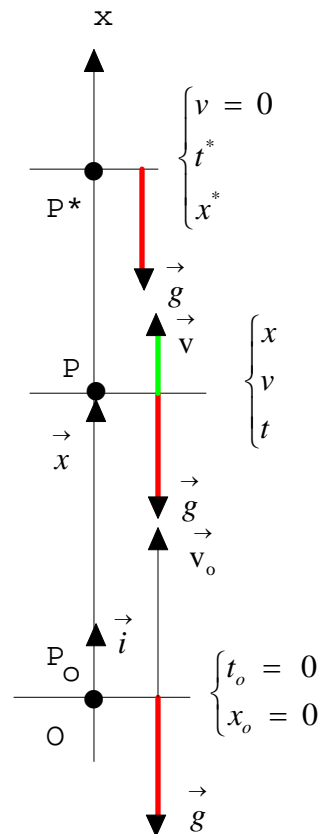


Fig. (2)

Se la traiettoria è orientata come nella fig. (1) valgono le seguenti relazioni scalari :

$$\begin{cases} v = gt \\ x = \frac{1}{2} g t^2 \\ v = \sqrt{2gx} \end{cases}$$

In questo caso risultano positivi i valori delle grandezze scalari x, v, g . :

Consideriamo adesso il moto di un grave lanciato verso l'alto con una velocità iniziale $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$.

Se la traiettoria è orientata come nella figura (2) valgono le seguenti relazioni scalari :

Si ottengono le seguenti relazioni scalari :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = v_0 + gt \\ x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2gx \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 0, v > 0 \\ g < 0, v_0 > 0 \\ g = -9,8 \frac{m}{s^2} \end{array} \right.$$

Se invece supponiamo che sia : $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ allora le precedenti relazioni diventano :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = v_0 - gt \\ x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_0^2 - 2gx \end{array} \right.$$

La misura degli angoli in radianti

Un angolo $\alpha = a\hat{b}$ lo possiamo considerare sempre come angolo al centro di due (o più) circonferenze concentriche di raggi arbitrari OA ed OA' . Detti AB ed $A'B'$ gli archi corrispondenti , per un noto teorema di geometria euclidea , possiamo scrivere :

$$AB:A'B' = OA:OA' \text{ ed anche : } \boxed{\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \alpha^R}$$

cioè il rapporto tra l' arco (individuato su una circonferenza qualsiasi di centro O) ed il rispettivo raggio dipende esclusivamente dall'angolo e non dalla circonferenza considerata .

Tale rapporto (indicato col simbolo α^R) si assume come misura dell'angolo in radianti .

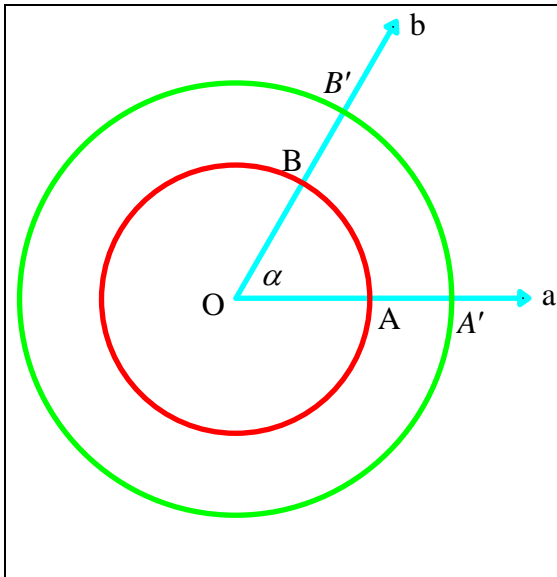
L'angolo $a\hat{b}$ individua su una circonferenza di centro O e raggio r un arco MN di lunghezza ℓ .

Il rapporto $\boxed{\alpha^R = \frac{\ell}{r}}$ [1] , misura in radianti dell'angolo $a\hat{b}$, dicesi anche misura in radianti dell'arco $MN = \ell$.

Se l'arco MN rettificato è lungo quanto il raggio della circonferenza cui appartiene abbiamo

$\ell = r$ e quindi : $\alpha^R = \frac{r}{r} = 1 \text{ radiante} = 1^R$ cioè l' **arco radiante** è quell'arco lungo quanto

il raggio della circonferenza che lo contiene . Di conseguenza l' **angolo radiante** è quell'angolo che , posto col vertice nel centro di una qualsiasi circonferenza , sottende un arco lungo quanto il raggio .



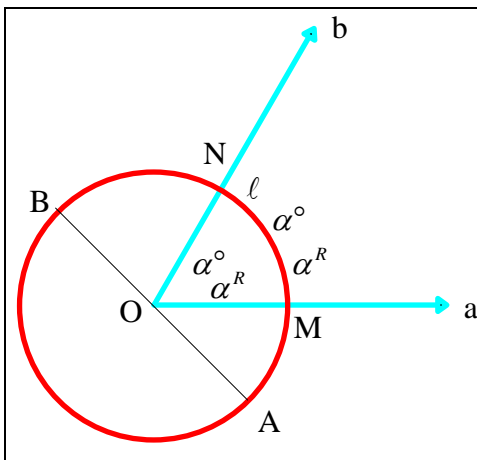
La misura (α^R) in radianti di un angolo o di un arco è un numero puro in quanto rapporto di due grandezze (**lunghezze**) omogenee.

La misura di un angolo (arco) in **radianti** è detta **misura ciclotometrica** dell'angolo (arco) .

La **misura ciclotometrica** di un arco coincide con la **misura ciclotometrica** del corrispondente angolo al centro . Dalla [1] ricaviamo :

$$\ell = \alpha^R \cdot r \quad [2]$$

cioè moltiplicando il raggio per la misura in radianti dell'arco si ottiene la lunghezza dell'arco stesso . Vediamo adesso come si fa a passare dalla misura di un angolo in gradi a quella in radianti e viceversa .



La geometria euclidea ci insegna che gli archi (di uguale raggio) sono direttamente proporzionali ai rispettivi angoli al centro per cui possiamo scrivere la seguente proporzione :

$$MN : AB = M\hat{O}N : A\hat{O}B \quad [3] \quad \ell : \pi r = \alpha^o : 180^o$$

$$\left(\ell = \pi r \cdot \frac{\alpha^o}{180^o} \right)$$

Ma : $\ell = \alpha^R \cdot r$ per cui abbiamo : $\alpha^R \cdot r : \pi r = \alpha^o : 180^o$ $\alpha^R : \pi = \alpha^o : 180^o$ cioè :

$$[4] \quad \alpha^R = \frac{\alpha^o}{180^o} \cdot \pi \quad \alpha^o = \frac{\alpha^R}{\pi} \cdot 180^o \quad [5]$$

La misura in radianti di un angolo la cui misura in gradi è **1** la si ottiene ponendo nella [4] 1^o al posto di α^o , cioè :

$$1^o = \frac{\pi}{180} = 0,01745 \dots \text{radianti}$$

la misura in gradi di un angolo la cui misura in radianti è **1** la si ottiene ponendo nella [5] 1^R al posto di α^R , cioè :

$$1^R = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'' ,806\dots$$

Moti periodici

- Un punto materiale si muove di **moto periodico** quando , ad ogni intervallo costante di tempo **T** , riassume le medesime caratteristiche cinematiche , cioè passa per lo stesso punto con la stessa **velocità vettoriale** e la stessa *accelerazione vettoriale* .
- Il tempo **T** è detto **periodo** e rappresenta il tempo necessario perché il mobile passi due volte di seguito per uno stesso punto con le medesime caratteristiche cinematiche .
- Nei moti periodici ha importanza una grandezza fisica detta **frequenza** definita come il rapporto costante fra il numero **n** di **eventi periodici** che si verificano nel tempo **t** ed il tempo **t** , cioè :

$$f = \nu = \frac{n}{t} = \frac{\text{numero di eventi periodici che si verificano nel tempo } t}{t}$$

La frequenza di un moto periodico è unitaria , cioè di un **hertz (Hz)** se l'evento periodico si verifica in un secondo .

• $n = 1 \Rightarrow t = T \Rightarrow \boxed{f = \nu = \frac{1}{T}} \quad \boxed{f \cdot T = 1} \quad \boxed{\nu \cdot T = 1}$

<< **In ogni moto periodico la frequenza è l'inverso del periodo** >>

- Nel **moto circolare uniforme** l' evento periodico consiste nel descrivere una intera circonferenza ; pertanto la frequenza di **1 Hz** significa che il punto materiale P descrive una intera circonferenza in un secondo .

$$f = \nu = \frac{\text{numero di circonferenze descritte nel tempo } t}{t}$$

$\nu = 25 \text{ Hz}$ significa che il punto P percorre in un secondo 25 volte la circonferenza

- Nel **moto armonico semplice** l'evento periodico consiste nel descrivere una oscillazione completa (o ciclo) e quindi la frequenza di **1 Hz** significa che il punto P descrive una oscillazione completa in un secondo .

Moto circolare uniforme

- E' il moto di un punto che descrive una circonferenza con accelerazione tangenziale nulla e quindi con velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ avente modulo costante e direzione variabile istante per istante .

In un moto circolare uniforme la velocità scalare (detta anche velocità periferica o velocità lineare) si mantiene costante .

- In un qualsiasi moto circolare uniforme sono valide le seguenti relazioni :

$$a_t = 0 \quad , \quad v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu = \omega r \quad , \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

- Il *moto circolare uniforme* è un **moto periodico** in quanto dopo **T** secondi ritorna in A con la stessa velocità vettoriale e con la stessa accelerazione vettoriale che aveva all'istante iniziale .

Quindi :

T = periodo = tempo impiegato dal mobile a percorrere una intera circonferenza =

tempo necessario perché si riproducano le condizioni iniziali (stessa posizione , stessa velocità , stessa accelerazione)

$f = \nu = \frac{1}{T}$ = **frequenza** = numero di giri compiuti dal mobile in un secondo

$t = T \Rightarrow s = 2\pi r$ e quindi :

$$\boxed{v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu = \omega r}$$

- Il vettore $P - O = \vec{OP} = \vec{r}$ è detto **raggio vettore** (o *vettore posizione*) . Esso nel tempo **t** descrive l'angolo ϑ . Definiamo **velocità angolare media** del punto P o del raggio vettore

$P - O = \vec{OP} = \vec{r}$ la grandezza fisica definita dal seguente rapporto : $\omega_m = \frac{\vartheta}{t}$

cioè l'angolo ϑ descritto dal raggio vettore $\vec{r}(t)$ nel tempo **t** riferito al tempo stesso .

Nel nostro caso *la velocità angolare è costante* e quindi coincide con quella media , per cui

possiamo scrivere :

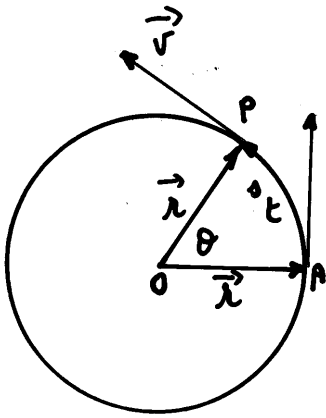
$$\boxed{\omega = \frac{\vartheta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

in quanto nel tempo **T** il raggio vettore $\vec{r}(t)$ descrive l'angolo 2π .

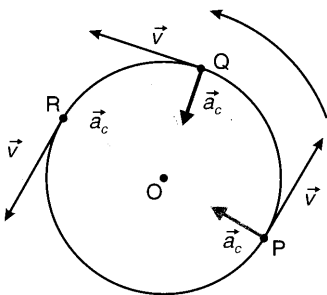
$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu = \omega r$$

- Poiché il modulo di $\vec{v}(t)$ è costante , il punto **P** non possiede accelerazione tangenziale ma

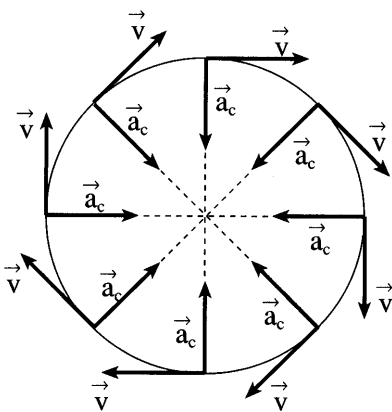
soltanto accelerazione centripeta \vec{a}_n il cui modulo vale : $a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$



Moto circolare uniforme : mentre il punto materiale P ruota sulla circonferenza di centro O e raggio r , il raggio vettore $\vec{r}(t)$ ruota attorno al centro O .



Vettore accelerazione nel moto circolare uniforme : il **vettore accelerazione centripeta** \vec{a}_c risulta in ogni punto perpendicolare al **vettore velocità** $\vec{v}(t)$. Inoltre \vec{a}_c risulta rivolto sempre verso il centro O della circonferenza . Il modulo di \vec{a}_c è costante .



Moto circolare uniforme
velocità vettoriale ed **accelerazione centripeta**
 in diversi punti .

Problema

Determinare l'ora in cui, per la prima volta dopo mezzogiorno, le due lancette di una orologio tornano a sovrapporsi.

Risoluzione

Tanto la lancetta dei minuti primi (la cui velocità angolare è ad esempio ω_2) quanto quella delle ore (la cui velocità angolare è ad esempio $\omega_1 < \omega_2$) si muovono di moto circolare uniforme. Nel tempo t la prima descrive l'angolo $\vartheta_2 = \omega_2 t$, la seconda l'angolo $\vartheta_1 = \omega_1 t$. Le due lancette si sovrappongono quando:

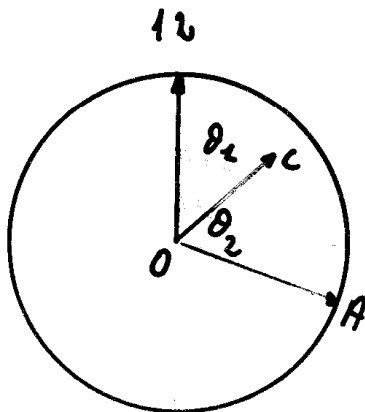
$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\pi$$

$$\omega_2 t - \omega_1 t = 2\pi ; t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{12 \cdot 60}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{60} - \frac{1}{12 \cdot 60}} = \frac{12 \cdot 60}{11} \text{ minuti} = \left(\frac{720}{11}\right)' = (65,45)' =$$

$$= 1^h 5' 27'' \text{ in quanto}$$

$$\left(\frac{45}{100}\right)' = \left(\frac{45}{100} \cdot 60\right)'' = 27'' \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



OC: lancetta delle ore

OA: lancetta dei minuti primi

$$\widehat{AOB} = \vartheta_2 \quad \widehat{COB} = \vartheta_1$$