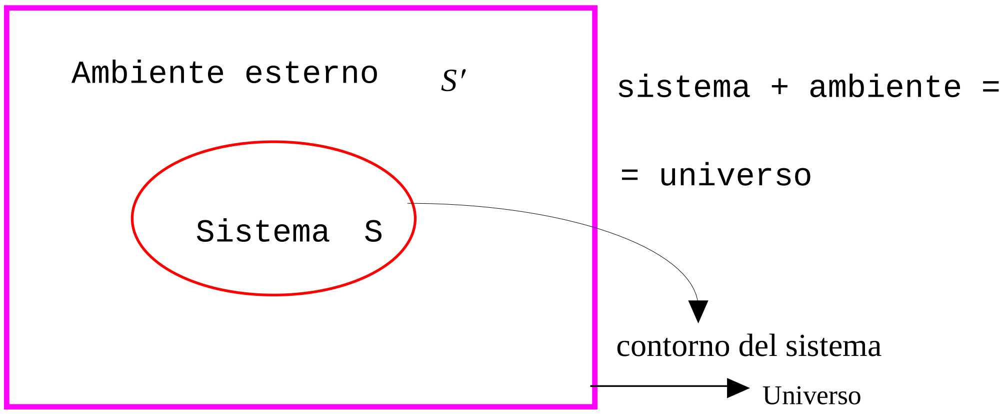
Unità Didattica N° 5

Impulso e quantità di moto

Sistema isolato: forze interne ed esterne

Definiamo sistema di punti materiali l'insieme **S** di due o più punti materiali, distinti dal resto dell'universo, di cui vogliamo mettere in evidenza le proprietà fisiche. Il sistema si dice meccanico, elettrico, .se vogliamo studiare le proprietà meccaniche, elettriche dei suoi costituenti. In generale ai corpi che costituiscono il sistema sono applicate delle forze che vengono classificate in forze interne e forze esterne. Le forze interne (attive o vincolari) sono quelle che si esercitano sui corpi del sistema e che provengono dall'azione di altri corpi appartenenti al sistema considerato. Le forze esterne (attive *o* vincolari) sono quelle che si esercitano sui corpi del sistema ma che provengono dall'azione di corpi che non fanno parte dell'universo. Una forza interna (esterna) sarà indicata col simbolo $\vec{F}^{(i)}$ ($\vec{F}^{(e)}$).

Definiamo ambiente esterno l'insieme S' dei punti materiali che non fanno parte del sistema **S**. Il sistema **S** più l'ambiente esterno S' costituisce l'universo. Spesso il tutto viene schematizzato come in figura.



Si definisce sistema isolato un sistema di punti materiali soggetti a sole forze interne. In un sistema isolato il risultante (cioè la somma vettoriale) delle forze agenti su tutti i punti materiali è **nullo**. E' evidente che un sistema per essere rigorosamente isolato dovrebbe comprendere tutto l'universo. Ogni altro sistema meccanico che si potrà considerare sarà sempre un sistema non isolato Tuttavia, esso potrà essere considerato come isolato con buona approssimazione quando le forze esterne saranno trascurabili rispetto alle forze interne. Possiamo concludere affermando che un sistema di punti materiali è isolato quando:

1) è trascurabile ogni forma di interazione di **S** con punti materiali che non fanno parte del sistema

2) oppure è nullo il risultante delle forze esterne agenti su **S**

3) oppure non agiscono forze esterne su **S**

4) le forze esterne agenti su S sono trascurabili rispetto alle forze interne.

Esempio: Consideriamo il sistema Terra-Luna. La terra e la luna si attirano reciprocamente in base alla legge di gravitazione universale. In prima approssimazione possiamo considerare il sistema Terra-Luna come un sistema isolato, ma si tratterà di una approssimazione grossolana in quanto il sistema è soggetto anche all'attrazione del Sole e degli altri pianeti. Si potrà allora considerare il sistema Terra-Luna come un sistema soggetto alla forza esterna dovuta al Sole, oppure considerare il sistema Terra-Luna-Sole come un sistema isolato. Se poi vogliamo migliorare il grado di isolamento del sistema dobbiamo prendere in considerazione anche gli altri pianeti del sistema solare. In quest'ultimo caso il sistema solare può essere considerato come isolato con un'approssimazione migliore di quelle precedenti. Naturalmente il processo può estendersi fino a comprendere la galassia, il nostro ammasso galattico,......Risulta così chiarito il significato di sistema isolato. E' importante osservare che, pur di ingrandire sufficientemente un sistema, esso può essere sempre considerato isolato con quel grado di precisione che la questione trattata impone. Ne consegue che possiamo enunciare la terza legge della dinamica anche dicendo:<<**In un sistema isolato è nullo il risultante di tutte le forze interne**>>.

Impulso e quantità di moto

Si definisce quantità di moto di un punto materiale di massa **m** e velocità $\vec{v}$ la grandezza vettoriale che si ottiene moltiplicando la massa per la velocità $\vec{v}$:

$$\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}} \quad [q]=[m\cdot v]=\left[M\cdot L\cdot T^{-1}\right] \quad ; \quad \{q\} = \{m\}\cdot\{v\} = \frac{kg\cdot m}{s}$$

Se una forza $\vec{F}$, che per semplicità supponiamo costante, agisce per un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1 = t_f - t_i$ su un punto materiale di massa **m**, definiamo impulso della forza $\vec{F}$ relativo all'intervallo di tempo Δt la grandezza vettoriale prodotto della forza per l'intervallo di tempo: $\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\mathbf{t} = \vec{\mathbf{F}}\cdot(\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) = \vec{\mathbf{F}}\cdot(\mathbf{t}_f - \mathbf{t}_i)$

$$[\mathcal{J}] = [\mathbf{F}\cdot\mathbf{t}] = \left[\mathbf{M}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{T}^{-1}\right]$$ dimensioni dell'impulso

$$\{\mathcal{J}\} = \{\mathbf{F}\}\cdot\{\mathbf{t}\} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{s}$$ unità di misura dell'impulso

Per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{t_f - t_i} \quad ; \qquad \vec{F} \cdot (t_f - t_i) = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \Delta \vec{q}$$

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \Delta \vec{q} \quad = \text{ teorema dell'impulso}$$

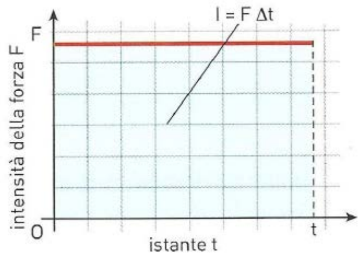
<< **La variazione della quantità di moto $\Delta \vec{q} = \vec{q}_f - \vec{q}_i$ di un punto materiale soggetto all'azione di una forza $\vec{F}$ nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è uguale all'impulso corrispondente**.>> Il teorema dell'impulso continua a valere anche quando la forza $\vec{F}$ è variabile nel tempo. Un sistema di punti materiali P_1, P_2, P_3,... rispettivamente di masse m_1, m_2, m_3,... e velocità vettoriali $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$,.. ha, per definizione, la quantità di moto:

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \cdots\cdots = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 + \cdots\cdots$$

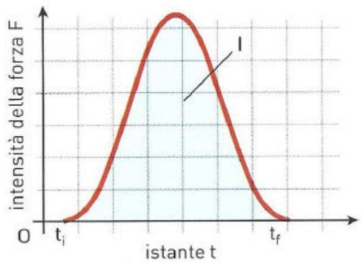
= quantità di moto totale del sistema

L'impulso di una forza variabile

La formula $\vec{\mathcal{J}} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot (t_f - t_i) = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \Delta \vec{q}$ è valida soltanto se, durante l'intervallo di tempo Δt la forza si mantiene costante. Nel caso di una forza variabile nel tempo bisogna tenere presente quanto segue.

Se la forza applicata alla massa m è costante, il valore $\vec{\mathcal{J}} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot (t_f - t_i)$ dell'impulso coincide numericamente con l'area del rettangolo avente come base Δt e come altezza F nel grafico forza-tempo.	

Il grafico delle forza costante F in funzione del tempo è una retta parallela all'asse dei tempi.

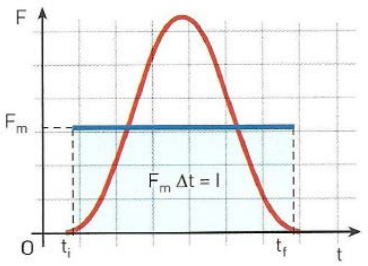
Se $\vec{F}$ non è costante si dimostra che il valore dell'impulso $\vec{\mathcal{J}}$ è dato dall'area individuata dall'asse dei tempi ed il grafico della forza in funzione del tempo.	

Il più delle volte non sappiamo come varia la forza $F(t)$, ma conosciamo l'intensità media F_{media} della forza e la durata Δt della sua azione sulla massa m. F_{media} rappresenta il valore medio di una ipotetica forza costante che nel tempo Δt determina la stessa variazione della quantità di moto determinata dalla forza variabile $F(t)$ nel tempo Δt.

Nella maggior parte delle applicazioni possiamo sostituire questa forza $F(t)$ variabile nel tempo con la forza media F_{media} considerata costante nel tempo Δt e che determina lo stesso impulso. In questo caso la formula $\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{t} = \vec{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) = \vec{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{t}_f - \mathbf{t}_i) = \vec{\mathbf{q}}_f - \vec{\mathbf{q}}_i = \Delta \vec{\mathbf{q}}$ diventa: $\mathcal{J} = F_{\text{media}} \cdot \Delta t$ e quindi:

$$F_{\text{media}} = \frac{\mathcal{J}}{\Delta t} = \frac{S}{\Delta t}$$

Possiamo calcolare il valore di F_{media} solo se siamo in grado di calcolare il valore di $\mathcal{J} = S$.

L'area sotto il grafico della forza media (area del rettangolo) è uguale all'area sotto il grafico della forza reale variabile $F(t)$.	

Osservazioni

- Per la **quantità di moto** si usa anche il seguente simbolo: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
- Spesso il vettore $\vec{q}$ è detto **momento lineare** per distinguerlo dal **momento angolare** che è il **momento della quantità di moto**.
- Essendo $\vec{q} \propto \vec{v}$, la **quantità di moto** di una massa **m** dipende dal sistema di riferimento che deve essere sempre precisato.
- Vettorialmente, ad un dato istante, $\vec{q}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$, mentre $\vec{\mathcal{J}}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{F}$ cioè di $\overrightarrow{a}$.
- **Impulso** e **quantità di moto**, avendo le stesse dimensioni, hanno la stessa unità di misura, cioè: $kg \cdot \frac{m}{s} = N \cdot s$
- $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$ oppure $\vec{F} = \frac{d\,\vec{q}}{d\,t}$ se la forza $\vec{F}$ non è costante.

<< **il rapporto tra la variazione della quantità di moto ed il tempo in cui essa si verifica è uguale alla forza** (o al risultante delle forze) **che agisce** (agiscono) **su m**.>>

Le relazioni $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ed $\vec{F} = \dfrac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$ per ogni singola particella sono completamente equivalenti in meccanica classica. E' da notare che Newton ha introdotto la seconda legge della dinamica nella forma $\vec{F} = \dfrac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$. Questa forma è più generale della $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ perché quest'ultima espressione presuppone m costante, mentre l'altra non richiede che la massa debba restare costante durante il moto.

- Se $\vec{F} = \vec{F}(t)$ allora : $\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$ dove : $d\vec{I} = \vec{F} \cdot dt$ è l'impulso elementare .
- Sia $\vec{V}_C$ la velocità del centro di massa di un sistema di n particelle soggetto all'azione di forze esterne, otteniamo: $\vec{Q} = m \cdot \vec{V}_C$

<<**la quantità di moto totale di un sistema di particelle è uguale al prodotto della massa totale del sistema per la velocità del suo centro di massa**.>>

- $$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} = d\, m\vec{v} = d\,\vec{q}$$

L'impulso della forza $\vec{F}$ relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ ci viene dato da :

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\, m\vec{v} = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} d\,\vec{q} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 = \Delta \vec{q}$$

se $\vec{F}$ è il risultante di tutte le forze esterne applicate al punto P di massa m abbiamo :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Teorema di conservazione della quantità di moto

Abbiamo detto che un sistema di punti materiali è isolato quando su di esso non agisce alcuna forza esterna, cioè proveniente da punti materiali estranei al sistema considerato. Il teorema della conservazione della quantità di moto di un sistema isolato afferma quanto segue: <<in un sistema isolato si mantiene costante la quantità di moto totale $\vec{Q}$>>. Questo significa che il vettore $\vec{Q}$ è una grandezza vettoriale che si conserva nel tempo. Dimostriamo questo teorema per un sistema formato da due soli punti materiali m_1 ed m_2 .

Supponiamo che all'istante iniziale t_i le masse abbiano velocità $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$, mentre all'istante t_f le masse abbiano velocità $\vec{v}_{1f}$, $\vec{v}_{2f}$.

$$\text{Hp}: \begin{cases} \vec{Q}_i = \vec{Q}(t_i) = \vec{q}_{1i} + \vec{q}_{2i} = m_1\vec{v}_{1i} + \vec{v}_{2i} = \text{quantità di moto del sistema all'istante } t_i \\ \vec{Q}_f = \vec{Q}(t_f) = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} = m_1\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} = \text{quantità di moto del sistema all'istante } t_f \end{cases}$$

$$\text{Th}: \left\{ \vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t_f) \quad cio\grave{e} \quad \vec{Q}_i = \vec{Q}_f \right.$$

Per la terza legge della dinamica possiamo scrivere: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Consideriamo l'azione delle forze $\vec{F}_{12}$ ed $\vec{F}_{21}$ (che per semplicità consideriamo costanti) per un intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$.

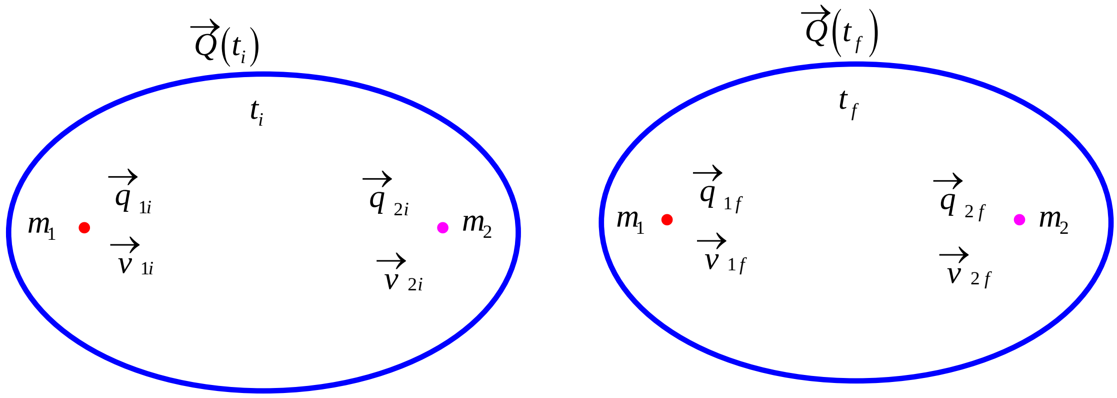
Abbiamo : $$m_1 \frac{\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}}{t_f - t_i} = -m_2 \frac{\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}}{t_f - t_i}$$

$$m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} = -m_2\vec{v}_{2f} + m_2\vec{v}_{2i} \quad ; \quad m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}$$

$$\vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} \quad \vec{Q}(t_f) = \vec{q}_{1i} + \vec{q}_{2i} = \vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t) = \text{costante}$$

Questo teorema continua a sussistere tanto se le forze $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ sono variabili (in questo caso la dimostrazione avviene mediante il calcolo differenziale) , quanto se i punti materiali del sistema sono più di due .

<< **La variazione della quantità di moto di un sistema isolato è zero**>>



Dimostrazione col calcolo differenziale

Consideriamo un sistema isolato costituito da due soli corpi rispettivamente di massa m_1 ed m_2

La terza legge della dinamica si scrive: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{o}$, $m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{o}$

Se l'azione e la reazione agiscono per un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ abbiamo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\,dt = \vec{o} \quad ; \quad \int_{\vec{v}_{1i}}^{\vec{v}_{1f}} m_1\,d\vec{v}_1 + \int_{\vec{v}_{2i}}^{\vec{v}_{2f}} m_2\,d\vec{v}_2 = \vec{o}$$

$$m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2f} - m_2\vec{v}_{2i} = \vec{o} \quad , \quad m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = \text{costante}$$

$$\vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t_f) = \vec{Q}(t) = \text{costante}$$

<<Il terzo principio della dinamica asserisce che, in seguito all'interazione di m_1 ed m_2 restano costanti sia la quantità di moto del sistema isolato costituito dai corpi m_1 ed m_2, sia il **momento** $\vec{L}$ di tale quantità di moto (momento angolare) rispetto ad un punto qualsiasi O.>>

La terza legge della dinamica e la conservazione della quantità di moto

Il principio di azione e reazione ed il principio di conservazione della quantità di moto sono fra loro equivalenti. Questo significa che, ammessa la verità di uno dei due principi, si può dimostrare la verità dell'altro. Nel paragrafo precedente, dal principio di azione e reazione abbiamo dedotto il teorema di conservazione della quantità di moto di un sistema isolato.

Adesso, supposta vera la conservazione della quantità di moto di un sistema isolato, dimostreremo la verità del principio di azione e reazione che in questo caso assume il rango di teorema.

$$\text{Hp: } \{ \; \vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t_f) = \vec{Q}(t) = \text{costante} \qquad \text{Th: } \{ \; \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Riferiamoci ad un sistema isolato formato da due soli punti materiali m_1 ed m_2. Per ipotesi sappiamo che: $m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}$

Se i punti materiali m_1 ed m_2 subiscono, nel tempo $\Delta t = t_f - t_i$, una variazione di velocità vuole dire che sono sottoposte all'azione di forze che per semplicità supponiamo costanti. Analizzando il fenomeno per in tempo $\Delta t = t_f - t_i$ abbiamo: $m_1\left(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}\right) = -m_2\left(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}\right)$

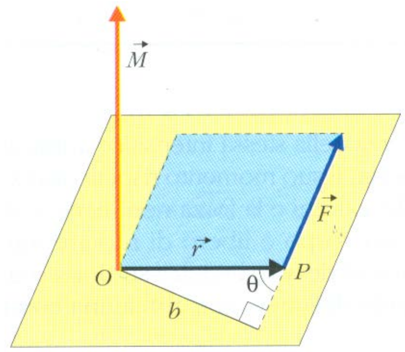
$$\frac{m_1\left(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}\right)}{\Delta t} = -\frac{m_2\left(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}\right)}{\Delta t} \quad , \quad m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \quad , \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

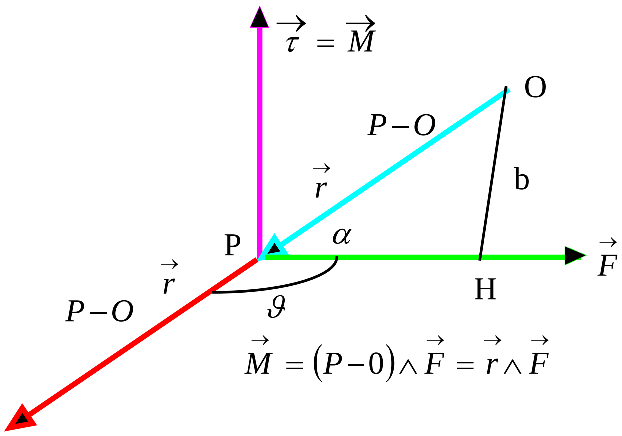
oppure: $m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} = -\left(m_2\vec{v}_{2f} - m_2\vec{v}_{2i}\right) \quad , \quad \vec{q}_{1f} - \vec{q}_{1i} = -\vec{q}_{2f} - \vec{q}_{2i}$

$$\vec{F}_{12}\cdot\Delta t = -\vec{F}_{21}\cdot\Delta t \quad , \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Momento angolare o momento della quantità di moto o momento cinetico

Data una forza $\vec{F}$, applicata in un punto P, definiamo momento della forza $\vec{F}$ rispetto ad un generico polo **O** la grandezza vettoriale $\vec{M}$ (o $\vec{\tau}$) definita dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{\mathbf{M}} = (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \wedge \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}}$ **[16]**





Il momento angolare è una grandezza di notevole importanza in fisica ed è, per un moto rotatorio, l'equivalente della quantità di moto per un moto lineare e per questo motivo, spesso, la quantità di moto è detta momento lineare.

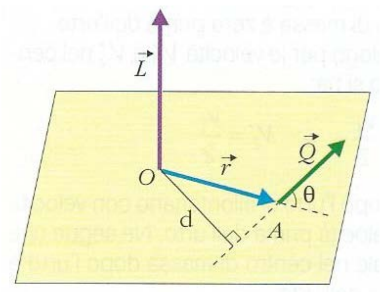
B =braccio della forza $\vec{F}$ = distanza del polo O dal sostegno della forza $\vec{F}$.

Sia $\vec{q} = m \cdot \vec{v}$ la quantità di moto di una particella di massa **m** occupante la posizione **P** e distante **r** da un punto **O** (origine di un riferimento cartesiano).

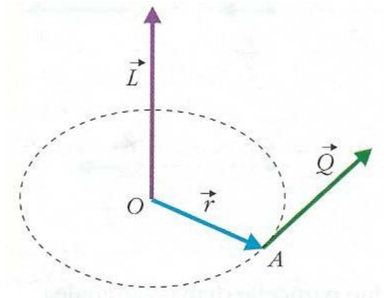
Definiamo momento angolare (o momento della quantità di moto o momento cinetico) rispetto ad un punto fisso **O** il vettore $\vec{\ell}$ definito dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{\ell} = (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \wedge \vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{q}} \wedge (\mathbf{O}-\mathbf{P}) = \vec{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ **[17]**

essendo $\vec{r} = P - O$ il vettore posizione del punto P rispetto al punto O.

Il vettore $\vec{L}$ è il **momento angolare,** rispetto al punto O, di una particella con quantità di moto $\vec{Q}$



momento angolare di una particella rotante.



Il momento angolare di un punto materiale è uguale al prodotto vettoriale tra il suo vettore posizione $\vec{r} = P - O$ e la sua quantità di moto $\vec{p}$.

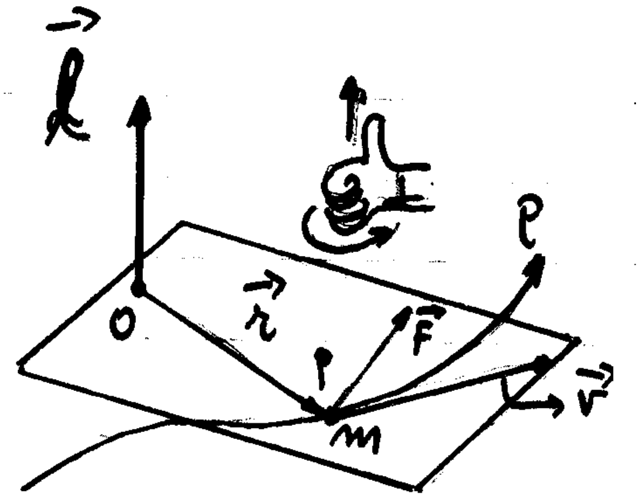
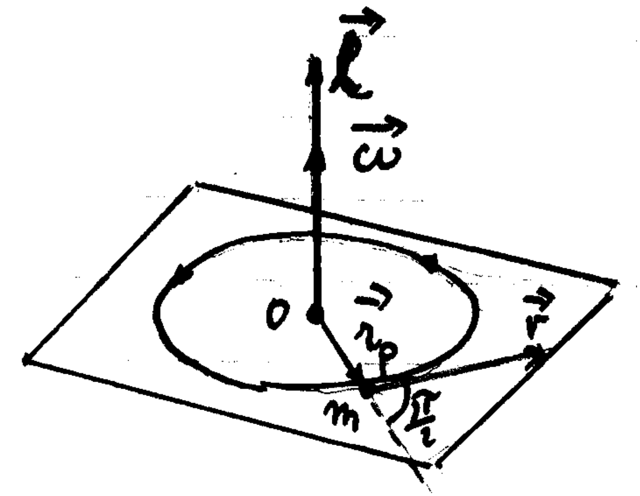
momento angolare [kg · m²/s] quantità di moto [kg · m/s]

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

vettore posizione [m]

Il vettore $\vec{L}$ ha: • ha come **direzione** la perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{r} = P - O$ e $\vec{p}$ • **verso** diretto come il pollice della mano destra, se il pollice il pollice è disposto perpendicolarmente alle altre dita piegate secondo il verso della rotazione che porta il vettore $\vec{r} = P - O$ sul vettore $\vec{p}$ (regola della mano destra) • modulo $\mathbf{L = r\,m\,v \sin\vartheta = m\,v\,d}$ dove d è il braccio del vettore $\vec{Q}$ rispetto al punto O, cioè la distanza del punto dal sostegno del vettore $\vec{Q}$.

Per un moto circolare abbiamo: $\mathbf{L = r\,p \sin 90° = r\,p = r\,m\,v}$

<table>
<tr>
<td>
Momento angolare di una particella di massa m e velocità $\vec{v}$</td>
<td>
Relazione vettoriale fra la velocità angolare $\vec{\omega}$ ed il momento angolare $\vec{L}$ nel moto circolare</td>
</tr>
</table>

$\mathbf{L = m\,r\,v = m\,r^2\,\omega = \mathcal{J}\,\omega}$ dove $\mathcal{J}$ è il momento d'inerzia della particella **m** rispetto al suo asse di rotazione. La direzione e il verso di $\vec{L}$ coincidono con quelli di $\vec{\omega}$ per cui possiamo scrivere:

$$\vec{\mathbf{L}} = \mathbf{m\,r^2}\,\vec{\boldsymbol{\omega}} = \mathcal{J}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

Regola della mano destra per individuare il momento angolare $\vec{\mathbf{L}}$ della quantità di moto $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{Q}}$ Momento angolare nel moto circolare