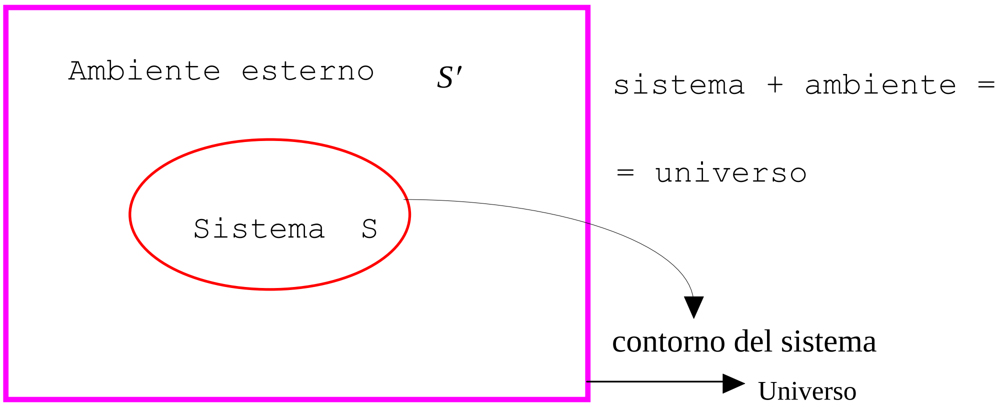
Unità Didattica N° 5

Impulso e quantità di moto

Sistema isolato : forze interne ed esterne

Definiamo **sistema di punti materiali** l'insieme **S** di due o più punti materiali , distinti dal resto dell'universo , di cui vogliamo mettere in evidenza le proprietà fisiche . Il *sistema* si dice *meccanico* , *elettrico* ,...se vogliamo studiare le proprietà meccaniche , elettriche ,..dei suoi costituenti . In generale ai corpi che costituiscono il sistema sono applicate delle forze che vengono classificate in **forze interne** e forze esterne . Le **forze interne** (*attive o vincolari*) sono quelle che si esercitano sui corpi del sistema e che provengono dall'azione di altri corpi appartenenti al sistema considerato. Le **forze esterne** (attive o vincolari) sono quelle che si esercitano sui corpi del sistema ma che provengono dall ' azione di corpi che non fanno parte dell ' universo . Una **forza interna** (*esterna*) sarà indicata col simbolo $\vec{F}^{(i)}$ ($\vec{F}^{(e)}$) .
Definiamo **ambiente esterno** l ' insieme S' dei punti materiali che non fanno parte del sistema **S** . Il sistema **S** più l'ambiente esterno S' costituisce l ' **universo** . Spesso il tutto viene schematizzato come in figura .



Si definisce **sistema isolato** un sistema di punti materiali soggetti a sole forze interne. In un sistema isolato il **risultante** (cioè la somma vettoriale) delle forze agenti su tutti i punti materiali è **nullo** .
E' evidente che un sistema per essere *rigorosamente isolato* dovrebbe comprendere tutto l'universo . Ogni altro **sistema meccanico** che si potrà considerare sarà sempre un sistema non isolato. Tuttavia , esso potrà essere considerato come **isolato con buona approssimazione** quando le forze esterne saranno trascurabili rispetto alle forze interne .
Possiamo concludere affermando che un sistema di punti materiali è isolato quando :
1) è trascurabile ogni forma di interazione di **S** con punti materiali che non fanno parte del sistema
2) oppure è nullo il risultante delle forze esterne agenti su **S**
3) oppure non agiscono forze esterne su **S**
4) le forze esterne agenti su S sono trascurabili rispetto alle forze interne .

E S E M P I O

Consideriamo il sitema *terra-luna* . La terra e la luna si attirano reciprocamente in base alla legge di gravitazione universale . In prima approssimazione possiamo considerare il sistema terra-luna come un sistema isolato , ma si tratterà di una approssimazione grossolana in quanto il sistema è soggetto anche all'attrazione del Sole e degli altri pianeti . Si potrà allora considerare il sistema Terra-Luna come un sistema soggetto alla forza esterna dovuta al Sole , oppure considerare il sistema Terra-Luna-Sole come un sistema isolato . Se poi vogliamo migliorare il **grado di isolamento** del sistema dobbiamo prendere in considerazione anche gli altri pianeti del sistema solare . In quest'ultimo caso il sistema solare può essere considerato come isolato con un'approssimazione migliore di quelle precedenti . Naturalmente il processo può estendersi fino a comprendere la galassia , il nostro ammasso galattico ,......Risulta così chiarito il significato di **sistema isolato** . E' importante osservare che , pur di ingrandire sufficientemente un sistema , esso può essere sempre considerato isolato con quel grado di precisione che la questione trattata impone . Ne consegue che possiamo enunciare la terza legge della dinamica anche dicendo:<< **In un sistema isolato è nullo il risultante di tutte le forze interne** >> .

Impulso e quantità di moto

Si definisce **quantità di moto** di un punto materiale di massa **m** e velocità $\vec{v}$ la grandezza vettoriale : $\vec{q} = \vec{p} = m\vec{v}$

$$[q] = [m \cdot v] = \left[M \cdot L \cdot T^{-1}\right] \qquad ; \qquad \{q\} = \{m\} \cdot \{v\} = \frac{kg \cdot m}{s}$$

Se una forza $\vec{F}$, che per semplicità supponiamo costante , agisce per un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1 = t_f - t_i$ su un punto materiale di massa **m** , definiamo **impulso della forza** $\vec{F}$ **relativo all'intervallo di tempo** Δt la grandezza vettoriale :

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot \left(t_f - t_i\right)$$

$$[I] = [F \cdot t] = \left[M \cdot L \cdot T^{-1}\right] \quad , \quad \{I\} = \{F\} \cdot \{t\} = N \cdot s$$

Per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{m \cdot \left(\vec{v}_f - \vec{v}_i\right)}{t_f - t_i} \quad ; \quad \vec{F} \cdot \left(t_f - t_i\right) = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \Delta \vec{q}$$

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \Delta \vec{q} \quad = \quad \text{teorema dell'impulso}$$

<< La variazione della quantità di moto $\Delta\vec{q} = \vec{q}_f - \vec{q}_i$ di un punto materiale soggetto all'azione di una forza $\vec{F}$ nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è uguale all'impulso corrispondente . >>

Il teorema dell ' impulso continua a valere anche quando la forza $\vec{F}$ è variabile nel tempo .
Un sistema di punti materiali P_1 , P_2 , P_3 ,... rispettivamente di masse m_1 , m_2 , m_3 ,... e velocità vettoriali $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$,.. ha , per definizione , la **quantità di moto** :

$\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 + \cdots =$ quantità di moto totale del sistema

O S S E R V A Z I O N I

■ Per la **quantità di moto** si usa anche il seguente simbolo : $\vec{p} = m\cdot\vec{v}$

■ Spesso il vettore $\vec{q}$ è detto **momento lineare** per distinguerlo dal <u>momento angolare</u> che è il momento della quantità di moto .

■ Essendo $\vec{q} \propto \vec{v}$, la *quantità di moto* di una massa **m** dipende dal sistema di riferimento che deve essere sempre precisato .

■ Vettorialmente , ad un dato istante , $\vec{q}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$, mentre $\vec{I}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{F}$ cioè di $\vec{a}$.

■ **Impulso** e **quantità di moto** , avendo le stesse dimensioni,hanno la stessa unità di misura , cioè :

$$kg\cdot\frac{m}{s} = N\cdot s$$

■ $\vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\cdot\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{q}}{\Delta t}$ oppure $\vec{F} = \dfrac{d\vec{q}}{dt}$ se la forza $\vec{F}$ non è costante .

<< **il rapporto tra la variazione della quantità di moto ed il tempo in cui essa si verifica è uguale alla forza** (o al risultante delle forze) **che agisce** (agiscono) **su m** . >>

Le relazioni $\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ ed $\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{q}}{\Delta t}$ per ogni singola particella sono completamente equivalenti in meccanica classica . E' da notare che Newton ha introdotto la seconda legge della dinamica nella forma $\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{q}}{\Delta t}$. Questa forma è più generale della $\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ perchè quest'ultima espressione presuppone m costante , mentre l'altra non richiede che la massa debba restare costante durante il moto .

■ Se $\vec{F} = \vec{F}(t)$ allora : $\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$ dove : $d\vec{I} = \vec{F} \cdot dt$ è l ' impulso elementare .

■ Sia $\vec{V}_C$ la velocità del **centro di massa** di un sistema di n particelle soggetto all'azione di forze esterne , otteniamo : $\vec{Q} = m \cdot \vec{V}_C$

<< la quantità di moto totale di un sistema di particelle è uguale al prodotto della massa totale del sistema per la velocità del suo centro di massa . >>

■ $$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} = d\, m\vec{v} = d\vec{q}$$

L'impulso della forza $\vec{F}$ relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ ci viene dato da :

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\, m\vec{v} = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} d\vec{q} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 = \Delta\vec{q}$$

se $\vec{F}$ è il risultante di tutte le forze esterne applicate al punto P di massa m abbiamo :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Teorema di conservazione della quantità di moto

Abbiamo detto che un sistema di punti materiali è **isolato** quando su di esso non agisce alcuna forza esterna , cioè proveniente da punti materiali estranei al sistema considerato . Il *teorema della conservazione della quantità di moto* di un sistema isolato afferma quanto segue :

<< **in un sistema isolato si mantiene costante la quantità di moto totale** $\vec{Q}$ >> .

Questo significa che il vettore $\vec{Q}$ è una grandezza vettoriale che si conserva nel tempo . Dimostriamo questo teorema per un sistema formato da due soli punti materiali m_1 ed m_2 . Supponiamo che all ' istante iniziale t_i le masse abbiano velocità $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$, mentre all 'istante t_f le masse abbiano velocità $\vec{v}_{1f}$, $\vec{v}_{2f}$.

Hp : $\begin{cases} \vec{Q}_i = \vec{Q}(t_i) = \vec{q}_{1i} + \vec{q}_{2i} = m_1\vec{v}_{1i} + \vec{v}_{2i} = \text{quantità di moto del sistema all ' istante } t_i \\ \vec{Q}_f = \vec{Q}(t_f) = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} = m_1\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} = \text{quantità di moto del sistema all ' istante } t_f \end{cases}$

Th : $\left\{ \vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t_f) \right.$ *cioè* $\vec{Q}_i = \vec{Q}_f$

Per la terza legge della dinamica possiamo scrivere : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Consideriamo l'azione delle forze $\vec{F}_{12}$ ed $\vec{F}_{21}$ (che per semplicità consideriamo costanti) per un intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$.

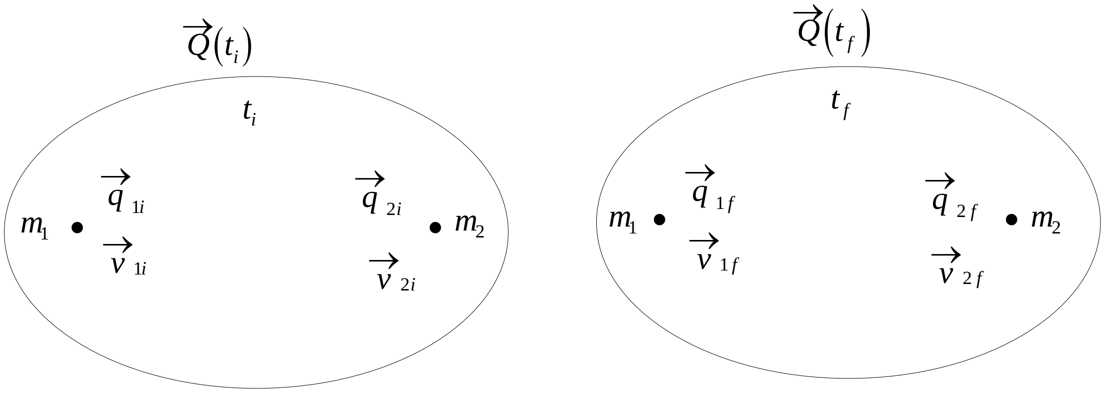
Abbiamo : $$m_1 \frac{\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}}{t_f - t_i} = - m_2 \frac{\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}}{t_f - t_i}$$

$$m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} = - m_2\vec{v}_{2f} + m_2\vec{v}_{2i} \quad ; \quad m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}$$

$$\vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} \quad \vec{Q}(t_f) = \vec{q}_{1i} + \vec{q}_{2i} = \vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t) = \text{costante}$$

Questo teorema continua a sussistere tanto se le forze $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ sono variabili (in questo caso la dimostrazione avviene mediante il calcolo differenziale) , quanto se i punti materiali del sistema sono più di due .

<< **La variazione della quantità di moto di un sistema isolato è zero** >>



<u>Dimostrazione col calcolo differenziale</u>

Consideriamo un **sistema isolato** costituito da due soli corpi rispettivamente di massa m_1 ed m_2 .

La terza legge della dinamica si scrive : $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{o} \quad , \quad m_1 \frac{d\,\vec{v}_1}{d\,t} + m_2 \frac{d\,\vec{v}_2}{d\,t} = \vec{o}$

Se l'azione e la reazione agiscono per un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ abbiamo :

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\, dt = \vec{o} \quad ; \quad \int_{\vec{v}_{1i}}^{\vec{v}_{1f}} m_1\, d\vec{v}_1 + \int_{\vec{v}_{2i}}^{\vec{v}_{2f}} m_2\, d\vec{v}_2 = \vec{o}$$

$$m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2f} - m_2\vec{v}_{2i} = \vec{o} \quad , \quad m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = \text{costante}$$

$$\vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t_f) = \vec{Q}(t) = \text{costante}$$

<< Il terzo principio della dinamica asserisce che , in seguito all ' interazione di m_1 ed m_2 restano costanti sia la **quantità di moto** del sistema isolato costituito dai corpi m_1 ed m_2 , sia il **momento** $\vec{L}$ di tale quantità di moto (**momento angolare**) rispetto ad un punto qualsiasi O . >>

La terza legge della dinamica e la conservazione della quantità di moto

Il principio di azione e reazione ed il principio di conservazione della quantità di moto sono fra loro **equivalenti** . Questo significa che , ammessa la verità di uno dei due principi , si può dimostrare la verità dell'altro . Nel paragrafo precedente , dal principio di azione e reazione abbiamo dedotto il teorema di conservazione della quantità di moto di un sistema isolato .

Adesso , supposta vera la conservazione della quantità di moto di un sistema isolato , dimostreremo la verità del principio di azione e reazione che in questo caso assume il rango di teorema .

$$\text{Hp : } \{ \ \vec{Q}(t_i) = \vec{Q}(t_f) = \vec{Q}(t) = \text{costante} \qquad\qquad \text{Th : } \{ \ \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Riferiamoci ad un sistema isolato formato da due soli punti materiali m_1 ed m_2 . Per ipotesi sappiamo che : $m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}$

Se i punti materiali m_1 ed m_2 subiscono , nel tempo $\Delta t = t_f - t_i$, una variazione di velocità vuole dire che sono sottoposte all'azione di forze che per semplicità supponiamo costanti . Analizzando il fenomeno per in tempo $\Delta t = t_f - t_i$ abbiamo : $m_1\left(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}\right) = -m_2\left(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}\right)$

$$\frac{m_1\left(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}\right)}{\Delta t} = -\frac{m_2\left(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}\right)}{\Delta t} \quad , \quad m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \quad , \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

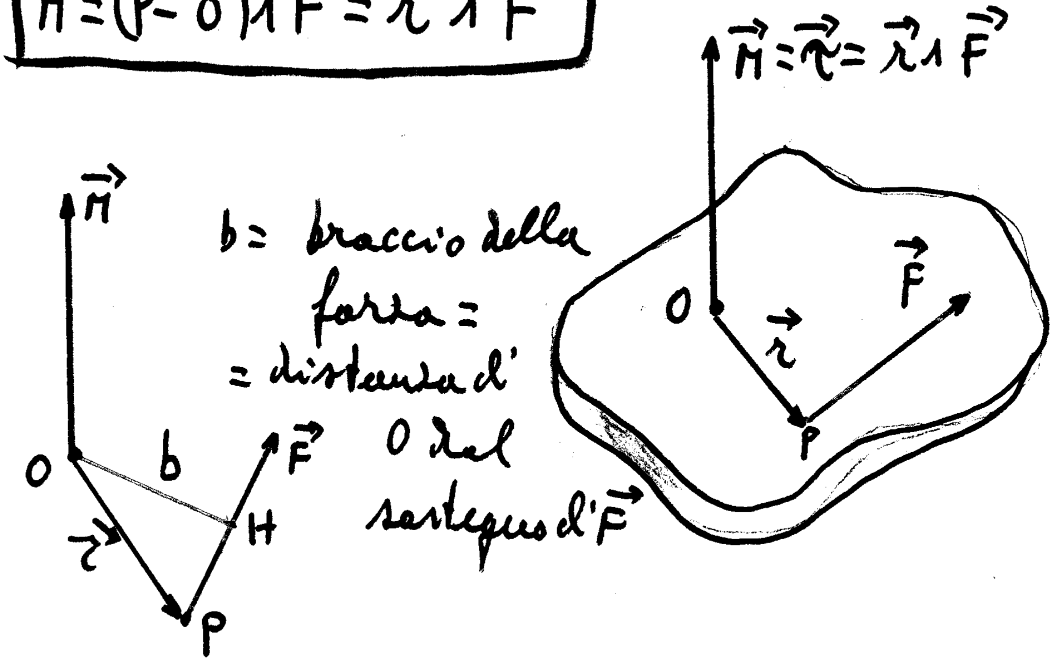
oppure : $m_1\vec{v}_{1f} - m_1\vec{v}_{1i} = -\left(m_2\vec{v}_{2f} - m_2\vec{v}_{2i}\right) \quad , \quad \vec{q}_{1f} - \vec{q}_{1i} = -\vec{q}_{2f} - \vec{q}_{2i}$

$$\vec{F}_{12}\cdot\Delta t = -\vec{F}_{21}\cdot\Delta t \quad , \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Momento angolare o momento della quantità di moto o momento cinetico

Data una forza $\vec{F}$, applicata in un punto P, definiamo momento della forza $\vec{F}$ rispetto ad un generico polo O la grandezza vettoriale $\vec{M}$ (oppure $\vec{\tau}$) definita dal seguente prodotto vettoriale:

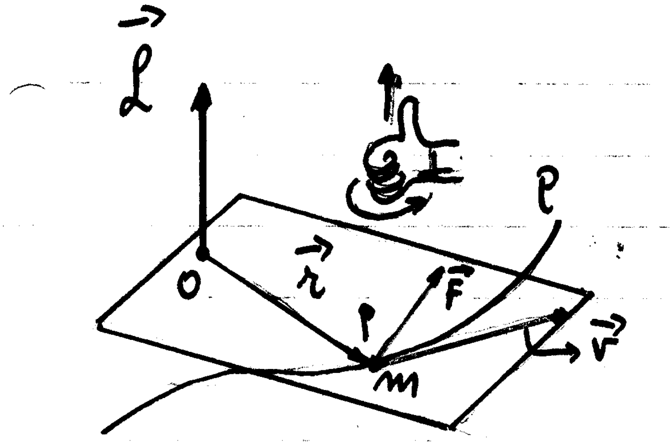
$$\boxed{\vec{M} = (P - O) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$



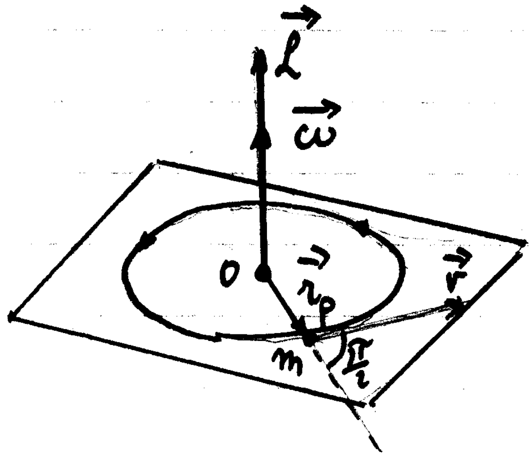
Il momento angolare è una grandezza di notevole importanza in fisica ed è, per un moto rotatorio, l'equivalente della quantità di moto per un moto lineare.
Il momento angolare (o momento della quantità di moto o momento cinetico) rispetto ad un punto O di una particella di massa m che si muove con velocità lineare $\vec{v}$ è definito dal seguente prodotto vettoriale:

$$\boxed{\vec{\ell} = (P-O)\wedge m\vec{v} = \vec{r}\wedge\vec{p} = m\vec{r}\wedge\vec{v}}$$

Il momento angolare è pertanto un vettore perpendicolare al piano individuato da $\vec{r} = P-O$ e $\vec{v}$.
Il momento angolare della particella in generale cambia in modulo, direzione e verso mentre la particella si muove.
Nel caso del moto circolare, se O è il centro della circonferenza, i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono perpendicolari mentre $v = \omega r$



Momento angolare di una particella di massa m e velocità $\vec{v}$



Relazione vettoriale fra la velocità angolare $\vec{\omega}$ ed il momento angolare nel moto circolare

$L = mrv = mr^2\omega = I\omega$ dove I è il momento d'inerzia della particella m rispetto al suo asse di rotazione.

La direzione ed il verso di $\vec{L}$ coincidono con quelli di $\vec{\omega}$ e quindi possiamo scrivere:

$$\boxed{\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = I\cdot\vec{\omega}}$$

Se l'unica forza che agisce sulla particella è la forza centripeta diretta verso l'origine O il momento angolare sarà costante in quanto, mancando $\vec{F}_t$, ω è costante.

Osservazione N° 1

Sebbene il momento angolare sia associato di solito al moto rotatorio, anche una particella che si muove in linea retta ha un momento angolare rispetto ad un punto non giacente sulla retta.

Osservazione N° 2

La variazione del momento angolare $\vec{L}$ nel tempo dipende strettamente dal momento meccanico $\vec{M}(\vec{\tau})$ della forza valutato rispetto allo stesso punto O:

Ricordando che: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d\vec{q}}{dt}$,

$\vec{M} = \vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ derivo rispetto al tempo ambo i membri della relazione:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{\tau}}$$

N.B.
Per una singola particella si usa il simbolo $\vec{l}$ ($\vec{L}$ di solito è riferito ad un sistema di particelle)

Questa equazione è corretta soltanto se $\vec{L}$ ed $\vec{M}$ sono calcolati rispetto allo stesso punto O.
L'equazione $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, che somiglia molto all'equazione $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, dove la quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$ è sostituita dal momento angolare $\vec{L}$ e la forza $\vec{F}$ dal momento meccanico $\vec{M} = \vec{\tau}$, è fondamentale per la discussione del moto rotatorio.
Essa stabilisce semplicemente che: «la derivata rispetto al tempo del momento angolare di una particella è uguale al momento meccanico della forza ad essa applicata, quando entrambi sono calcolati rispetto allo stesso punto.

Teorema di conservazione del momento angolare

Se il momento risultante di tutte le forze agenti su una particella di massa m è nullo [$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$] deve essere:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{cioè} \quad \vec{L} = \text{vettore costante}$$

Quindi « il momento angolare di una particella è costante se il momento risultante delle forze agenti su di essa è uguale a zero ».

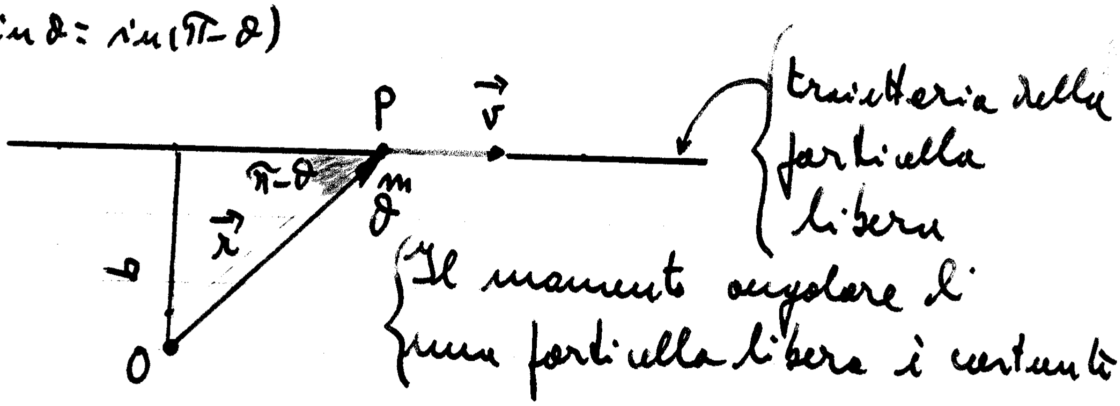
Ma $\vec{\tau} = \vec{0}$ è senz'altro vero in un sistema isolato. Questo ci permette di scrivere il secondo principio della dinamica in forma di principio di conservazione: se un sistema è isolato, si conserva il suo momento angolare.

Questo principio di conservazione del momento angolare è analogo a quello di conservazione della quantità di moto, ma è utile nel caso di rotazioni.

Abbiamo ottenuto un terzo principio di conservazione per i sistemi isolati.
L'energia, la quantità di moto, ed il momento angolare si conservano.
Il principio di conservazione del momento angolare è una fondamentale legge naturale.
Anche sulla scala microscopica della fisica atomica e nucleare, in cui la meccanica newtoniana non è valida, il momento angolare di un sistema isolato è costante nel tempo.

La condizione $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ è soddisfatta se $\vec{F} = \vec{0}$; cioè se la particella è libera.
$L = mvr \sin\theta = mvb$ ove $b = r \sin\theta$.
L, in questo caso, rimane costante in quanto tutti i fattori da cui dipende sono pure costanti, dato che la traiettoria di una particella libera è rettilinea, e la velocità non cambia.

$\sin\vartheta = \sin(\pi - \vartheta)$



Il momento angolare di una particella libera è costante

La condizione $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ è soddisfatta anche se $\vec{F}$ è parallela ad $\vec{r} = P - O$. Inoltre sarebbe se il sostegno di $\vec{F}$ fosse per O. Una forza diretta sempre verso un punto fisso è detta forza centrale.

Pertanto, quando un corpo si muove sotto l'azione di una forza centrale, il suo momento angolare rimane costante e viceversa.

Un altro modo di enunciare questa tesi è il seguente:

<< quando la forza è centrale, il momento angolare rispetto al centro della forza è una costante del moto, e viceversa >> Questo risultato è molto importante, perchè in natura esistono

diverse forze centrali. Per esempio, la terra si muove attorno al sole sotto l'influenza di una forza centrale, la cui direzione passa sempre per il centro del sole.
Il momento angolare della terra rispetto al sole è quindi costante.
L'elettrone, in un atomo di idrogeno, si muove essenzialmente sotto l'azione della forza centrale dovuta all'interazione elettrostatica col nucleo.
Pertanto il momento angolare dell'elettrone rispetto al nucleo è costante.
« Calcolare il momento angolare della terra rispetto al sole, e quello dell'elettrone rispetto al nucleo nell'atomo di idrogeno. Supporre per semplicità in entrambi i casi che l'orbita sia circolare. »

$m_T = 5,98 \cdot 10^{24}\ kg \qquad d(T,S) = 1,49 \cdot 10^{11}\ m$

Il periodo di rivoluzione della terra attorno al sole è $3,16 \cdot 10^{7}\ s$.

La velocità angolare media della terra attorno al sole è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3{,}16\cdot 10^7} = 1{,}98\cdot 10^{-7}\ rad/s$$

Il momento angolare della terra rispetto al sole è:

$$\mathcal{L} = m r^2 \omega = 5{,}98\cdot 10^{24}(1{,}49\cdot 10^{11})^2 1{,}98\cdot 10^{-7} =$$

$$= 2{,}67\cdot 10^{40}\ m^2 Kg/s$$

Per l'elettrone dell'atomo di idrogeno abbiamo:

$$\mathcal{L} = (9{,}11\cdot 10^{-31})\cdot(5{,}29\cdot 10^{-11})^2\cdot(4{,}13\cdot 10^{16}) =$$

$$= 1{,}05\cdot 10^{-34}\ m^2 Kg/s = \hbar$$

Questo valore numerico di $\mathcal{L}$ costituisce una delle più importanti costanti della fisica e si indica col simbolo $\hbar$ (si legge: acca tagliato). Il momento angolare delle particelle atomiche e nucleari è

usualmente espresso in unità di $\hbar$.
La quantità $h = 2\pi\hbar$ è detta costante di Planck.

« Sia P un pianeta del Sole. Dimostrare che la sua velocità areolare si mantiene costante » Alonso Finn 366

La forza che agisce sul pianeta è centrale, quindi è costante il momento angolare $\vec{L}$ del pianeta rispetto al sole.

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow L = mrv\sin\vartheta$$

La velocità areolare $\vec{\Gamma}$ del pianeta è:

$$\vec{\Gamma} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{v} \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2} rv\sin\vartheta = \frac{L}{2m} \Rightarrow$$

Γ costante

In un campo di forze centrali:
1) la traiettoria del punto materiale è una curva piana
2) il raggio vettore, che congiunge il centro del campo al punto che descrive la traiettoria, descrive aree uguali in tempi uguali.