Unità Didattica N° 6

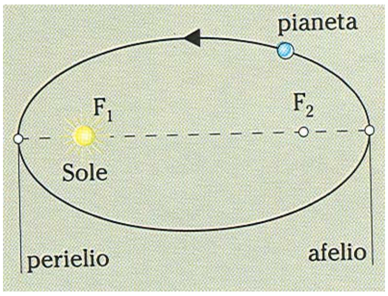
La gravitazione universale

Le leggi di Keplero

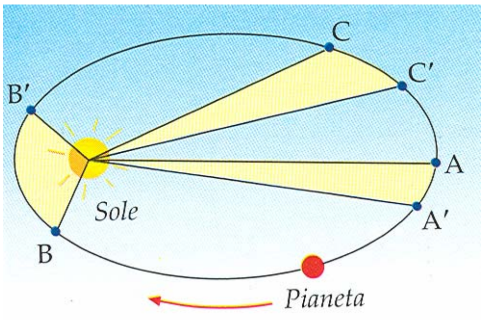
Prima legge di Keplero : *le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi* . **Le ellissi descritte dai pianeti sono . in generale , poco eccentriche , per cui in alcuni casi possono essere ritenute circolari .**

Seconda legge di Keplero : *la velocità areolare di ogni pianeta è costante* .

Con parole diverse possiamo dire che le aree descritte dal raggio vettore tracciato dal Sole ad ogni pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle ; questo significa che il raggio vettore che va dal Sole ad ogni pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempi uguali . Come conseguenza di questa legge abbiamo che la velocità di un pianeta nel **perielio** [2A] è maggiore di quella posseduta dallo stesso pianeta nell ' **afelio** . [2B] La **velocità lineare** del pianeta è **minima** all'**afelio , massima** al **perielio .** Pertanto essa aumenta quando il pianeta va dall'afelio al perielio e diminuisce quando va dal perielio all'afelio .



Orbita ellittica descritta da un pianeta che ruota attorno al Sole . Il punto di minima distanza dal Sole è il perielio e quello di massima distanza è l'afelio . La velocità scalare del pianeta varia passando dal *valore massimo* **al perielio al** *valore minimo* **all'afelio .**

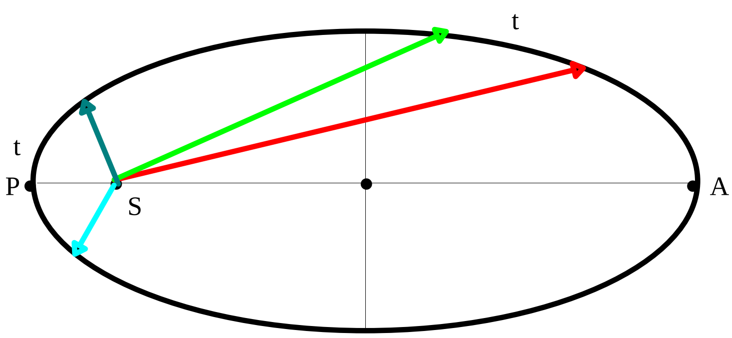


AA' , BB' , CC' **sono archi dell'orbita attorno al Sole percorsi da un pianeta in tempi uguali . Le aree colorate in giallo sono uguali . Questo significa che il raggio vettore tracciato dal Sole al pianeta descrive aree uguali in tempi uguali . Questo significa che la velocità areolare del pianeta si mantiene costante .**

Terza legge di Keplero : *i quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a descrivere le proprie orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi* . Con parole diverse possiamo dire che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è lo stesso per tutti i pianeti .

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = K}$$

[2A] posizione del pianeta più vicina al Sole



$$\boxed{T^2 = k_S \cdot a^3}$$

con $\boxed{k_S = 3 \cdot 10^{-19} \dfrac{s^2}{m^3}}$ costante che dipende dal corpo centrale , cioè dal Sole

La legge di gravitazione universale di Newton

La legge di gravitazione universale afferma quanto segue : << **due particelle puntiformi aventi rispettivamente masse** m_1 ed m_2 **si attraggono con una forza , agente lungo la retta congiungente le due masse , direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza** >> [2C] In simboli matematici abbiamo :

$$\boxed{F_{AB} = F_{BA} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}} \qquad \textbf{[1]}$$

Il coefficiente di proporzionalità **G** è una **costante universale** che prende il nome di *costante di gravitazione universale* . Il valore numerico di **G** non dipende dai valori delle masse che interagiscono né dalla geometria del sistema , né dal luogo dove avviene l'interazione . Il suo valore numerico dipende esclusivamente dal sistema di unità di misura usato . Per questo motivo **G** è una **costante universale** .

Il valore di **G** è lo stesso sia per i corpi celesti che per qualsiasi altro corpo . La prima misura accurata di **G** fu eseguita dallo scienziato inglese **Henry Cavendish** nel **1798** , che si servì di una bilancia di torsione . Si tratta di un esperimento davvero delicato . Il valore di **G** attualmente accettato nel **S.I.** è il seguente :

$$\boxed{G = 6{,}6732 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}}$$

Si tratta di un valore estremamente piccolo .

$$\boxed{[G] = \frac{[F \cdot r^2]}{[m^2]} = [L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}]}$$

F_{AB} = **forza gravitazionale che agisce sul corpo A e proveniente dall'azione del corpo B**

(2 B) posizione del pianeta più lontana dal Sole

(2C) La legge di gravitazione universale è rigorosamente valida per corpi puntiformi , cioè per corpi le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alla loro mutua distanza .

F_{BA} = **forza gravitazionale che agisce sul corpo B e proveniente dall'azione del corpo A**

Le forze di gravitazione tra due particelle costituiscono nel loro insieme **azione e reazione** . La prima particella esercita sulla seconda una forza che è diretta verso la prima particella lungo la loro congiungente . Similmente la seconda particella esercita sulla prima una forza che è diretta sulla seconda lungo la loro congiungente . Queste forze hanno lo stesso modulo , la stessa direzione , ma versi opposti .

$$\boxed{\{G\} = \frac{\{F\}\cdot\{r^2\}}{\{m^2\}} = \frac{N\cdot m^2}{kg^2}}$$

La **legge di gravitazione universale** è rigorosamente valida soltanto per corpi puntiformi , cioè per corpi aventi dimensioni piccole rispetto alla loro distanza . Essa vale anche per masse non puntiformi purché sferiche .

Esempio

Calcolare il valore della forza con cui si attirano : **1)** il **Sole** e la **Terra** **2)** la **Terra** e la **Luna**
3) due corpi uguali aventi la massa di $100\,kg$ **e posti alla distanza di un metro** .

$$F_{ST} = F_{TS} = G\frac{m_S\cdot m_T}{r^2} = 6{,}6732\cdot10^{-11}\cdot\frac{(1{,}98\cdot10^{30})\cdot(5{,}98\cdot10^{24)}}{(1{,}49\cdot10^{11})^2} =$$

$$= \frac{6{,}6732\cdot1{,}98\cdot5{,}98}{2{,}2201}\cdot10^{21} = 35{,}5899\cdot10^{21} = 3{,}6\cdot10^{22}\ N$$

$$F_{LT} = F_{TL} = G\frac{m_L\cdot m_T}{r^2} = 6{,}6732\cdot10^{-11}\cdot\frac{(7{,}354\cdot10^{22})\cdot(5{,}98\cdot10^{24)}}{(3{,}844\cdot10^8)^2} = 1{,}985\cdot10^{19}\ N$$

$$F = 6{,}6732\cdot10^{-11}\cdot\frac{100\cdot100}{(1)^2} = 6{,}6732\cdot10^{-7}\ N$$

Osservazione

Se riteniamo valide le leggi di Keplero e le leggi della dinamica , allora possiamo dimostrare la legge di gravitazione universale , che diventa un teorema .
Se , invece , riteniamo valide le leggi della dinamica e la legge di gravitazione universale , allora possiamo dimostrare le tre leggi di Keplero che diventano altrettanti teoremi .

L'accelerazione di gravità

Il peso di un corpo è la **forza gravitazionale** esercitata su di esso dalla terra . Si tratta di una grandezza vettoriale la cui direzione è orientata dalla posizione occupata dal corpo al centro della terra . Quando un corpo di massa **m** è lasciato cadere liberamente ,la sua accelerazione (di **gravità**) è indicata col simbolo $\vec{g}$ e la forza di gravità che agisce su di esso è il suo peso $\vec{P}$. La seconda legge di Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, applicata ad un corpo in caduta libera , ci dà : $\boxed{\vec{P} = m \cdot \vec{g}}$ che scritta in forma scalare diventa : $P = m \cdot g$. La legge di gravitazione universale ci fornisce la seguente relazione : $\boxed{P = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{r^2}}$. $P = P \Rightarrow$ $\boxed{g = G \cdot \frac{m_T}{r^2}}$ **[B]** **g** assume lo stesso valore in tutti i punti dello spazio distanti **r** metri dal centro della terra . Nella pratica **g** si considera **costante** (a causa del valore piuttosto grande del raggio della terra) in regioni prossime alla superficie terrestre. $g = G \cdot \frac{m_T}{(R_T)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}979 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 \cdot 10^6)^2} = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$ $\boxed{g = 9{,}8 \frac{m}{s^2}}$

Il valore di **g** varia al variare della posizione del punto materiale .

La massa della Terra e la sua massa volumica media

Dalla misurazione sperimentale di **g** possiamo calcolare la massa della terra . Dalla [B] ricaviamo :

$$\boxed{m_T = \frac{g \cdot r^2}{G}} \qquad \boxed{m_T = \frac{9{,}8 \cdot (6{,}38 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}$$

Dividendo la massa della terra per il suo volume otteniamo la **massa volumica** della terra :

$$\boxed{\rho_T = \frac{m_T}{V_T} = 5{,}5 \frac{g_r}{cm^3}}$$

Poiché la **massa volumica della materia sulla crosta terrestre** è minore del valore trovato , deduciamo che la Terra è costituita al suo interno da materiale la cui massa volumica è maggiore del valore $5{,}5 \frac{g_r}{cm^3}$. Se vogliamo calcolare il valore di **g** senza utilizzare la massa della terra, allora possiamo considerare il moto della luna attorno alla terra . Per quanto visto precedentemente possiamo scrivere : $\boxed{G \cdot m_T = 4\pi^2 \cdot \frac{\ell^3}{T_L^2}}$

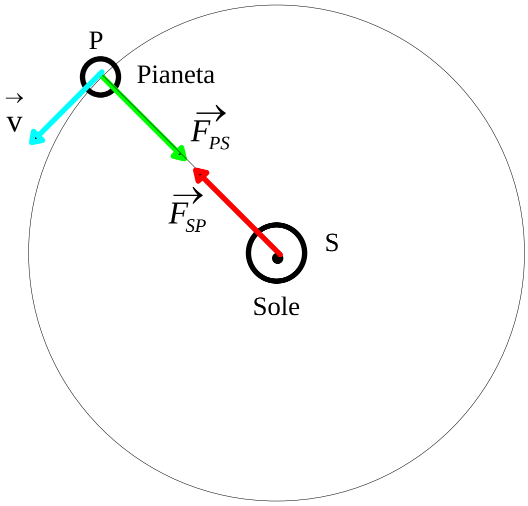
con ℓ = raggio della circonferenza descritta dalla luna nella sua rivoluzione attorno alla terra

T_L = **periodo di rivoluzione** della luna

Tenendo presente la [B] otteniamo : $\boxed{g = 4\pi^2 \cdot \frac{\ell^3}{r^2 \cdot T_L^2}}$

La massa dei corpi celesti

Se conosciamo il valore della costante di gravitazione universale **G** e qualche altro dato astronomico come il tempo di rivoluzione e la distanza di due corpi celesti , possiamo calcolare il valore della massa di un corpo celeste , cioè possiamo calcolare la massa del Sole , della Terra , di Giove e di tanti altri corpi celesti . Il ragionamento è il seguente :



$\vec{F}_{PS}$ = forza che il Sole esercita sul pianeta P

$\vec{F}_{SP}$ = forza che il pianeta P esercita sul Sole

$\vec{v}$ = velocità vettoriale del pianeta nel suo moto attorno al Sole

La forza centripeta che fa ruotare la terra attorno al Sole è la forza gravitazionale di attrazione esercitata dal Sole .

Consideriamo il caso del **Sole S** e di un **pianeta P** nell'ipotesi che il moto del pianeta attorno al Sole sia circolare ed uniforme . (5)

Un pianeta di massa m_P , ruotando attorno al Sole di massa m_S lungo un'ellisse , assimilabile in prima approssimazione ad una circonferenza , è ad ogni istante soggetto all'azione di una forza centripeta data dalla seguente relazione : $\boxed{F = G \cdot \frac{m_P \cdot m_S}{r^2}}$ con **r** distanza **sole-pianeta**

Per il secondo principio della dinamica possiamo scrivere : $\boxed{F = m_P \cdot a_c = m_P \cdot \frac{4\pi^2 r}{T_P^2}}$

$$F = F \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{m_P \cdot m_S}{r^2} = m_P \cdot \frac{4\pi^2 r}{T_P^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_S = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T_P^2}} \qquad \textbf{[C]}$$

essendo T_P il **periodo di rivoluzione** del pianeta considerato , cioè il tempo necessario perché il pianeta percorra un'intera orbita . Consideriamo adesso il caso particolare della **Terra** e del **Sole** .

---

(5) Con ottima approssimazione è il caso della terra nel suo movimento attorno al Sole

Sia m_S la massa del Sole ed m_T la massa della terra . Supponiamo che l'ellisse descritta dalla terra attorno al sole sia assimilabile ad una circonferenza di raggio **r** percorsa con moto uniforme , cioè con velocità vettoriale $\vec{v}$ avente modulo $v=\frac{2\pi r}{T}$ costante .

Poiché la terra di massa m_T si muove di moto uniforme lungo la traiettoria circolare , l'unica accelerazione cui è soggetta è quella centripeta $\vec{a}_n$. in base al secondo principio della dinamica la terra è soggetta ad una forza $\vec{F}$ data da : $\vec{F}_n = m_T \cdot \vec{a}_n$ cioè : $\boxed{F_n = m_T \cdot a_n}$

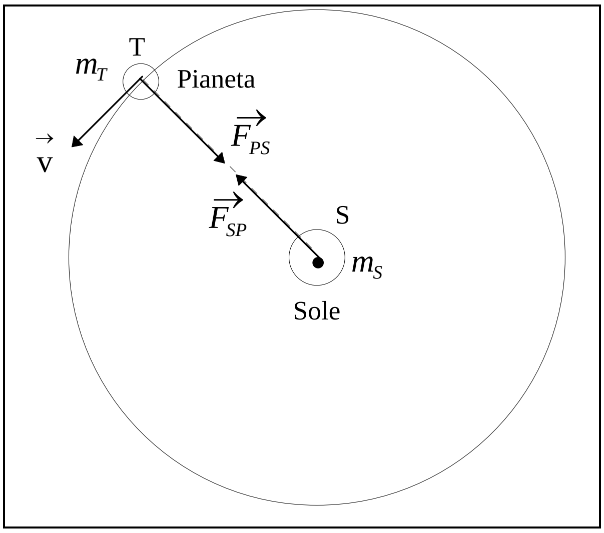
Ma : $\boxed{a_n=\frac{v^2}{r}=\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2\cdot\frac{1}{r}=\frac{4\pi^2 r}{T^2}}$ dove **T** è il tempo impiegato dalla terra a percorrere una intera orbita circolare . **Ma chi determina sulla terra questa forza centripeta che la mantiene in orbita ?** E' la forza di attrazione gravitazionale che il Sole esercita sulla Terra e che ci viene data dalla legge di gravitazione universale : $F = G\cdot\frac{m_T\cdot m_S}{r^2} = m_T\cdot a_n = m_T\cdot\frac{4\pi^2 r}{T^2}$

forza gravitazionale esercitata dal Sole sulla terra = forza centripeta necessaria a mantenere la Terra nella sua orbita circolare attorno al Sole

$\boxed{m_S = \frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{r^3}{T^2}}$ **[D]** $r = 1{,}48\cdot10^{11}\,m$, $T = 3{,}156\cdot10^{7}\,s$, $m_S = 1{,}98\cdot10^{30}\,kg$

Sostituendo nella [D] otteniamo : $m_S = 1{,}964\cdot10^{30}\,kg$. La [D] è ancora valida per una qualsiasi orbita ellittica con la sola condizione che **r** rappresenta il **semiasse maggiore** dell'ellisse . La [D] può essere applicata ad un qualsiasi corpo di massa m_T che ruoti attorno ad un corpo centrale di massa m_S .

Più complicato è misurare la massa di un corpo celeste come la **Luna** che non ha satelliti naturali . Il metodo usato è quello delle perturbazioni , cioè dello studio delle modificazioni , rispetto alle traiettorie previste dalle leggi di Keplero , che un corpo induce sui corpi vicini , modifiche che dipendono dal valore della sua massa . Studiando tali perturbazioni si riesce a risalire alla massa del corpo celeste . Un procedimento più semplice è quello di inviare attorno alla Luna un satellite artificiale .



Una massa m_T , per percorrere una circonferenza di raggio **r** con una velocità vettoriale $\vec{v}$ di modulo costante , ha bisogno di una **forza centrale** di modulo $\frac{m_T v^2}{r}$. Questa forza viene fornita dal Sole sotto forma di **forza gravitazionale** $G \cdot \frac{m_T \cdot m_S}{r^2}$

$\frac{m_T v^2}{r}$ = **forza richiesta** $G \cdot \frac{m_T \cdot m_S}{r^2}$ = **forza fornita**

Massa inerziale e massa gravitazionale

Ogni corpo è caratterizzato da una proprietà fisica detta **massa** , la quale è caratterizzata da due proprietà che danno luogo alla **massa inerziale** ed alla **massa gravitazionale** .

Una forza $\vec{F}$ applicata ad un corpo libero determina su questo corpo una accelerazione $\vec{a}$. Il rapporto fra la forza applicata e l'accelerazione prodotta è una caratteristica intrinseca del corpo e prende il nome di **massa inerziale** del corpo in quanto essa è un indice della tendenza che hanno tutti i corpi di stare fermi o di muoversi di moto rettilineo uniforme . $\boxed{\frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m}$

L'inerzia rappresenta una importante proprietà della massa che consiste nell'opporsi ai cambiamenti prodotti da una eventuale forza esterna che tenti di modificarne la velocità vettoriale e quando vogliamo evidenziare questa proprietà della massa parliamo di **massa inerziale** .

Al contrario , quando si vuole sottolineare la proprietà della massa di interagire con le altre masse secondo la legge di gravitazione universale come avviene , per esempio , con la forza peso , si parla di **massa gravitazionale** .

La massa inerziale e la massa gravitazionale di un corpo hanno significati diversi , anche se hanno lo stesso valore numerico e si misurano entrambe in chilogrammi .

Si possono realizzare diversi esperimenti con i quali è possibile misurare e confrontare la massa gravitazionale e la massa inerziale di uno stesso corpo .

Tutti gli esperimenti finora realizzati hanno sempre dato lo stesso valore per cui , in seguito , parlando di massa di un corpo non preciseremo più se si tratta di massa inerziale o di massa gravitazionale .

Variazione del peso di un corpo al variare della sua distanza dal centro della terra

Calcoliamo l'accelerazione di gravità di un corpo di massa m posto all'altezza h rispeso alla superficie della Terra , che consideriamo sferica , di raggio R_T e massa m_T . Sul corpo agisce la forza di gravitazione universale (peso del corpo) $F = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$ che , per la legge fondamentale della dinamica , vale : $F = m \cdot g$. Confrontando le due equazioni otteniamo :

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{(R_T + h)^2} \qquad \text{e quindi :} \qquad \boxed{g = G \cdot \frac{m_T}{(R_T + h)^2}}$$

con $R_T + h$ distanza del corpo dal centro della terra .

Il peso di un corpo diminuisce con l'aumentare della sua distanza dal centro della terra .

L'interazione gravitazionale , che è relativamente debole , è responsabile di importanti fenomeni quali le orbite ellittiche descritte dai pianeti ed è dovuta all'attrazione del Sole .

Le maree sono dovute alla reciproca attrazione esercitata tra la Luna e le masse d'acqua degli oceani .

Le leggi di Keplero e la gravitazione universale, ovvero come si passa dal moto dei pianeti alla legge di gravitazione universale

La legge di gravitazione universale può essere dedotta dalle leggi della dinamica e dalle leggi di Keplero . Noi la dimostreremo nel caso semplice di un'orbita circolare . Nel caso generale di orbite ellittiche occorre il calcolo differenziale . Enunciamo le tre leggi di Keplero .

Prima legge di Keplero

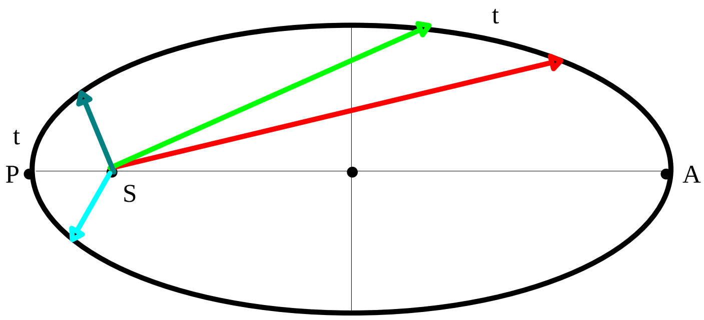
Le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi . Le ellissi descritte dai pianeti sono . in generale , **poco eccentriche** , per cui in alcuni casi possono essere ritenute circolari. Il pianeta si trova alla massima distanza dal Sole nella posizione **A** , detta **Afelio** , ed alla minima distanza nella posizione **P , detta** perielio **.**

Seconda legge di Keplero (o legge delle aree)

Le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il Sole col pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle . Questo significa che la **velocità areolare** del pianeta rispetto al punto occupato dal Sole si mantiene costante . La **velocità lineare** del pianeta è **minima** all'**afelio , massima** al **perielio .** Pertanto essa aumenta quando il pianeta va dall'afelio al perielio e diminuisce quando va dal perielio all'afelio.

Terza legge di Keplero

I quadrati dei tempi **T** (**periodi**) impiegati dai diversi pianeti a percorrere la loro orbita ellittica sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi descritte .

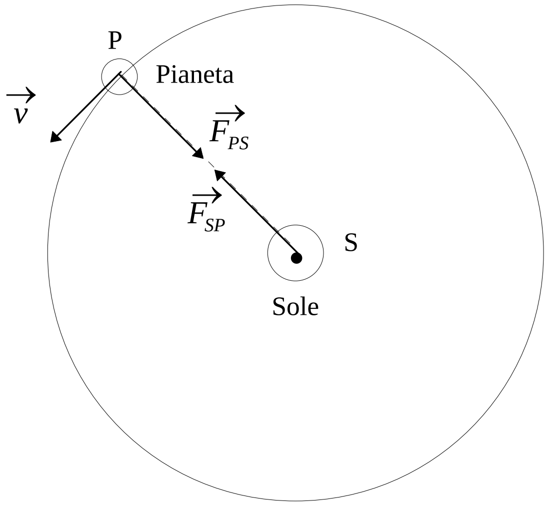


$$\boxed{T^2 = k_S \cdot a^3}$$

con $\boxed{k_S = 3 \cdot 10^{-19} \dfrac{s^2}{m^3}}$ costante che dipende dal corpo centrale , cioè dal Sole

dalle leggi di Keplero , dedotte sperimentalmente , e dalle leggi della dinamica possiamo dedurre la **legge di gravitazione universale .**

Consideriamo il caso del **Sole S** e di un **pianeta P** nell'ipotesi che il moto del pianeta attorno al Sole sia circolare ed uniforme . [5]



$\vec{F}_{PS}$ = forza che il Sole esercita sul pianeta P

$\vec{F}_{SP}$ = forza che il pianeta P esercita sul Sole

$\vec{v}$ = velocità vettoriale del pianeta nel suo moto attorno al Sole

La forza centripeta che fa ruotare la terra attorno al Sole è la forza gravitazionale di attrazione esercitata dal Sole .

Supponiamo che la traiettoria descritta dal pianeta sia una circonferenza . La **costanza della velocità areolare** si tramuta nella costanza della velocità lineare . Il pianeta si muove attorno al Sole di moto circolare uniforme con velocità lineare $\boxed{v = \dfrac{2\pi r}{T} = \omega r}$ ed accelerazione centripeta $\boxed{a_c = \omega^2 r}$

[5] Con ottima approssimazione è il caso della terra nel suo movimento attorno al Sole

La forza che agisce sul pianeta , permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità scalare costante , deve essere esclusivamente **centripeta** (cioè senza componente tangenziale) .

Essa risulta uguale a : $F_{PS} = m_P \cdot a_c = m_P \cdot \frac{v^2}{r} = m_P \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m_P \cdot r$ [2]

dove $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il **periodo di rivoluzione** del pianeta attorno al Sole , m_P è la massa del pianeta , **r** è il raggio dell'orbita descritta dal pianeta .

Utilizzando la terza legge di Keplero $T^2 = k_S \cdot r^3$ e sostituendo nella [2] otteniamo :

$$F_{PS} = \frac{4\pi^2}{k_S} \cdot \frac{m_P}{r^2} = C \cdot \frac{m_P}{r^2} \qquad \textbf{[3]}$$

Questo è il primo risultato importante : **la forza esercitata dal sole sui pianeti è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole e direttamente proporzionale alla massa del pianeta** . La forza esercitata dal pianeta sul Sole ha l'espressione : $F_{SP} = \frac{4\pi^2}{k_P} \cdot \frac{m_S}{r^2}$ **[4]**

Questa volta è il pianeta che funge da corpo centrale .

Per la terza legge della dinamica sul Sole agisce una forza F_{SP} uguale ed opposta a quella che agisce sulla terra : $F_{PS} = F_{SP} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{k_S} \cdot \frac{m_P}{r^2} = \frac{4\pi^2}{k_P} \cdot \frac{m_S}{r^2} \Rightarrow \boxed{m_P \cdot k_P = m_S \cdot k_S}$

Poiché il risultato è stato dedotto per un pianeta qualsiasi , possiamo affermare che il prodotto $m \cdot k$ è una **costante universale** , che non dipende dal particolare pianeta considerato . Sarà pure una **costante universale** anche la grandezza : $G = \frac{4\pi^2}{m k} = \frac{4\pi^2}{m_P k_P} = \frac{4\pi^2}{m_S k_S}$

Da queste uguaglianze ricaviamo le uguaglianze : $\frac{4\pi^2}{k_P} = G \cdot m_P$, $\frac{4\pi^2}{k_S} = G \cdot m_S$

Sostituendo i risultati trovati nella [3] e nelle [4] otteniamo :

$$F_{PS} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2} \qquad F_{SP} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2}$$

Concludiamo ricordando che dalla legge di gravitazione universale e dalle leggi della dinamica possiamo dedurre le tre leggi di Keplero .

La deduzione delle tre leggi di Keplero

Le tre leggi di Keplero , da questi dedotte sperimentalmente , sono una conseguenza delle tre leggi della dinamica applicate al caso particolare del moto di un corpo (**pianeta**) di massa **m** che ruota attorno ad un altro corpo (stella) ritenuto fermo e di massa **M** , attratto da una forza inversamente proporzionale dal quadrato della loro distanza .

Innanzitutto si può dimostrare matematicamente che , con una forza $\propto \frac{1}{r^2}$, la traiettoria del pianeta rispetto al baricentro della stalla (ritenuta fissa) è rappresentata da una conica . I pianeti che tornano sempre verso la stella percorrono delle **ellissi** .

La **seconda legge di Keplero** è una conseguenza della **conservazione del momento angolare** (o momento della quantità di moto) $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$. Se $\vec{\ell}$ è un vettore costante allora si può dimostrare che la **velocità areolare** del pianeta è costante .

La **terza legge di Keplero** è una conseguenza del fatto che nel moto del pianeta la forza gravitazionale è una forza esclusivamente centripeta . Dimostriamo la terza legge di Keplero nel caso particolarmente semplice di un pianeta che descrive un'orbita circolare .

Supponiamo che un pianeta **P** descriva un'orbita circolare . P si muove di moto circolare uniforme e possiede un'accelerazione centripeta il cui modulo ci viene dato dalla formula : $\boxed{a_c = \omega^2 r}$

dove ω è la velocità angolare del pianeta ed **r** è la sua distanza dal Sole . In un moto circolare uniforme , la velocità angolare è legata al periodo **T** dalla relazione : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

Il modulo dell'accelerazione centripeta del pianeta assume la seguente forma : $\boxed{a_c = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r}$

Se m_P è la massa del pianeta esso , per la legge fondamentale della dinamica , è attirato verso il centro del Sole da una forza il cui modulo vale : $f = m_P a_c = m_P \frac{4\pi^2}{T^2} r$

Questa forza è di origine gravitazionale e , quindi , vale : $f = G \frac{m_S \cdot m_P}{r^2}$. $f = f \Rightarrow$

$$G \frac{m_S \cdot m_P}{r^2} = m_P \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_S} = k_S \qquad [A]$$

Al secondo membro della [A] compare una quantità che è **indipendente** dal pianeta considerato : dipende solo dalla massa del Sole , che funge da corpo centrale (e da costanti come π e **G**) .

Quindi il rapporto $\frac{T^2}{r^3}$ è lo stesso per tutti i pianeti . E' essenziale che l'intensità della forza di attrazione gravitazionale sia proporzionale a $\frac{1}{r^2}$; diversamente , non c'è modo di giustificare la terza legge di Keplero.

Marte	$0{,}37 \cdot g$	**Terra**	g
Luna	$0{,}17 \cdot g$	**Sole**	$28 \cdot g$
Mercurio	$0{,}34 \cdot g$	**Urano**	$0{,}84 \cdot g$
Saturno	$1{,}06 \cdot g$	**Giove**	$2{,}51 \cdot g$
Venere	$0{,}83 \cdot g$		

Valore della gravità sulla superficie di alcuni corpi celesti del sistema solare calcolato in unità di accelerazione di gravità g sulla Terra , nell'ipotesi che i corpi celesti siano sferici .

	MASSA (kg)	RAGGIO (m)	PERIODO DI ROTAZIONE (s)	ECCENTRICITÀ ORBITALE	RAGGIO MEDIO DELL'ORBITA (m)	PERIODO DI RIVOLUZIONE (a = ANNO g = GIORNO)
Sole	$1{,}98 \cdot 10^{30}$	$6{,}96 \cdot 10^{8}$	$2{,}14 \cdot 10^{6}$	—	—	—
Mercurio	$0{,}33 \cdot 10^{24}$	$2{,}57 \cdot 10^{6}$	$7{,}60 \cdot 10^{6}$	0,2056	$5{,}79 \cdot 10^{10}$	87,97 g
Venere	$4{,}83 \cdot 10^{24}$	$6{,}31 \cdot 10^{6}$	$2{,}6 \cdot 10^{6}$	0,0068	$1{,}08 \cdot 10^{11}$	224,70 g
Terra	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}38 \cdot 10^{6}$	$8{,}61 \cdot 10^{4}$	0,0167	$1{,}50 \cdot 10^{11}$	365,25 g
Marte	$6{,}37 \cdot 10^{23}$	$3{,}43 \cdot 10^{6}$	$8{,}85 \cdot 10^{4}$	0,0934	$2{,}28 \cdot 10^{11}$	686,98 g
Giove	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	$7{,}18 \cdot 10^{7}$	$3{,}54 \cdot 10^{4}$	0,0483	$7{,}78 \cdot 10^{11}$	11,86 a
Saturno	$5{,}67 \cdot 10^{26}$	$6{,}03 \cdot 10^{7}$	$3{,}60 \cdot 10^{4}$	0,0560	$1{,}43 \cdot 10^{12}$	29,46 a
Urano	$8{,}80 \cdot 10^{25}$	$2{,}67 \cdot 10^{7}$	$3{,}88 \cdot 10^{4}$	0,0461	$2{,}87 \cdot 10^{12}$	84,02 a
Nettuno	$1{,}03 \cdot 10^{26}$	$2{,}48 \cdot 10^{7}$	$5{,}69 \cdot 10^{4}$	0,0100	$4{,}50 \cdot 10^{12}$	164,79 a
Plutone	$1{,}37 \cdot 10^{22}$	$1{,}17 \cdot 10^{6}$	$5{,}7 \cdot 10^{4}$	0,2484	$5{,}9 \cdot 10^{12}$	247,70 a
Luna	$7{,}34 \cdot 10^{22}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$	$2{,}36 \cdot 10^{6}$	0,055	$3{,}84 \cdot 10^{8}$	27,3 g

DOMANDE TEORICHE

D01) Quanto vale la costante di gravitazione universale G sulla luna ?

R01) Lo stesso che sulla superficie terrestre o in qualsiasi altro luogo , poiché si tratta di una costante universale

D02) Dire se la forza che determina la rotazione della luna attorno alla terra è il risultante della forza centripeta e della forza gravitazionale dovuta alla terra .

R02) Falso ; le due forze sono la stessa identica cosa

D03) La massa della luna è molto più piccola della massa della terra . E' giusto dire che la Luna attrae la Terra con una forza minore di quella che la Terra esercita sulla Luna ?

R03) No ,in quanto per la terza legge della dinamico la Terra e la Luna interagiscono fra loro con una a avente la stessa intensità.

D04) Immaginiamo che venga scoperto un pianeta che orbita attorno al Sole ad una distanza doppia di quella della terra . Che periodo di rivoluzione T_1 ha quel pianeta ?

R04) Si applica la terza legge di Keplero $T^2 = k\,r^3$; $T_2^2 : T_1^2 = r_2^3 : r_1^3$, $r_2 = 2r_1 \Rightarrow$

$T_2^2 = 8 \cdot T_1^2$ $T_2 = T_1 \cdot \sqrt{8}$, T_1 = periodo di rivoluzione della terra ; T_2 circa 2 anni e 10 mesi

D05) A parità di distanza , se triplichiamo la massa die due corpi , di quanto aumenta la forza di attrazione gravitazionale ?

R05) di 9 volte

D06) Calcolare la massa del Sole , conoscendo il raggio dell'orbita terrestre ed il periodo di rivoluzione della terra .

R06) $m_S = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2} = 1{,}96 \cdot 10^{30}\ kg$

D07) Calcolare la velocità **v** ed il periodo di rivoluzione **T** di un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Terra ad un'altezza di $200\,km$

R07) v=7,8$\frac{km}{s}$ $T = 88\,\text{minuti}$. Si tratta di calcolare l'accelerazione di gravità **g** a $6370 + 200$ chilometri dal centro della terra e ricordare le formule relative al moto circolare uniforme che ha **g** come accelerazione centripeta . Oppure possiamo ricorrere alla terza legge di Keplero , conoscendo i dati relativi al moto della Luna

D08) Calcolare la velocità **v** ed il periodo di rivoluzione **T** di un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Luna ad un'altezza di $200\,km$

R08) $v = 1{,}6\dfrac{km}{s} \quad T = 124\,\text{minuti}$.

D9: A che quota deve trovarsi l'orbita di un satellite geostazionario ? Un satellite è **geostazionario** quando orbita in 24 ore nello stesso senso della rotazione Terra attorno al proprio asse . In questo modo il satellite appare praticamente fermo nel cielo .

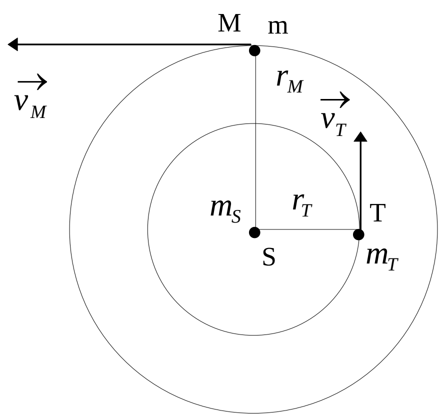
R09) $35900\,km$

D10) Calcolare il valore dell'accelerazione di gravità g_G si Giove , sapendo che il suo diametro è 11,3 volte maggiore di quello terrestre e la massa m_G 337 volte maggiore di quella terrestre .

R10) $g_G = 2{,}6\,g = 25{,}48\dfrac{m}{s^2}$. Ciò significa che un corpo , su Giove , persa circa 2,6 volte quello che pesa sulla Terra .

D11) La Terra e Marte sono due pianeti del Sole . Supponendo che essi descrivono due orbite circolari aventi rispettivamente raggi r_T ed r_M , calcolare il rapporto delle loro velocità lineari .

R11)



$$a_T = \frac{v_T^2}{r_T} = \text{accelerazione centripeta della Terra}$$

$$a_M = \frac{v_M^2}{r_M} = \text{accelerazione centripeta di Marte}$$

$$F_T = m_T \cdot \frac{v_T^2}{r_T} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_T}{r_T^2}$$

$$F_M = m \cdot \frac{v_M^2}{r_M} = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r_M^2}$$

$$G \cdot m_S = v_T^2 \cdot r_T = v_M^2 \cdot r_M \quad \Rightarrow \quad \frac{v_T}{v_M} = \sqrt{\frac{r_M}{r_T}} \quad \Rightarrow \quad v_T > v_M$$