

Unità Didattica N° 6

La gravitazione universale

- 01)** Le leggi di Keplero
- 02)** La legge di gravitazione universale
- 03)** L'accelerazione di gravità
- 04)** La massa della Terra e la sua massa volumica media
- 05)** La massa dei corpi celesti
- 06)** Massa inerziale e massa gravitazionale
- 07)** Variazione del peso di un corpo al variare della sua distanza dal centro della terra
- 08)** Dalle leggi di Keplero alla gravitazione universale, ovvero come si passa dalle leggi di Keplero alla legge di gravitazione universale

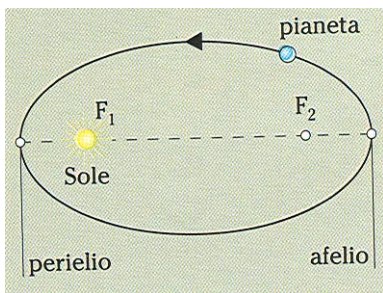
- 09)** La deduzione delle tre leggi di Keplero
- 10)** Cavendish pesa la Terra: accelerazione di gravità e massa della terra

Le leggi di Keplero

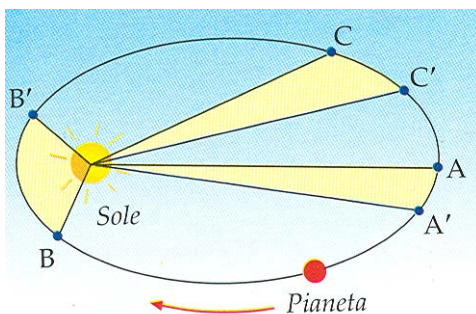
Prima legge di Keplero : *le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi.* Le ellissi descritte dai pianeti sono in generale, poco eccentriche, per cui in alcuni casi possono essere ritenute circolari.

Seconda legge di Keplero: *la velocità areolare di ogni pianeta è costante.*

Con parole diverse possiamo dire che le aree descritte dal raggio vettore tracciato dal Sole ad ogni pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle; questo significa che il raggio vettore che va dal Sole ad ogni pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempi uguali. Come conseguenza di questa legge abbiamo che la velocità di un pianeta nel **perielio** ^(2A) è maggiore di quella posseduta dallo stesso pianeta nell'**afelio**. ^(2B) La **velocità lineare** del pianeta è **minima** all'**afelio**, **massima** al **perielio**. Pertanto essa aumenta quando il pianeta va dall'afelio al perielio e diminuisce quando va dal perielio all'afelio.



Orbita ellittica descritta da un pianeta che ruota attorno al Sole. Il punto di minima distanza dal Sole è il **perielio** e quello di massima distanza è l'**afelio**. La velocità scalare del pianeta varia passando dal *valore massimo* al **perielio** al *valore minimo* all'**afelio**.



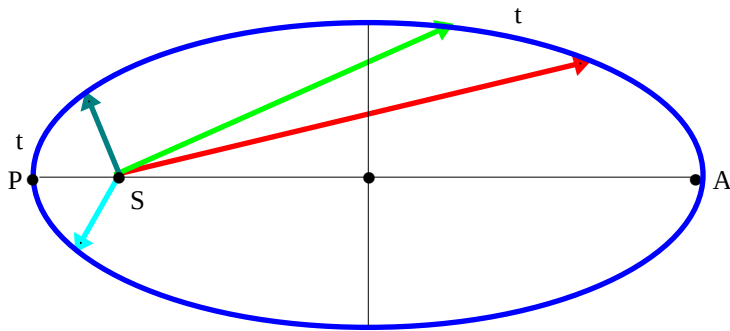
AA' , BB' , CC' sono archi dell'orbita attorno al Sole percorsi da un pianeta in tempi uguali. Le aree colorate in giallo sono uguali. Questo significa che il raggio vettore tracciato dal Sole al pianeta descrive aree uguali in tempi uguali. Questo significa che la **velocità areolare** del pianeta si mantiene costante

Terza legge di Keplero: *i quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a descrivere le proprie orbite sono proporzionali ai cubi dei semiasse maggiori delle ellissi.* Con parole diverse possiamo dire che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore

dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è lo stesso per tutti i pianeti. $\frac{a^3}{T^2} = k$

^(2A) posizione del pianeta più vicina al Sole

^(2B) posizione del pianeta più lontana dal Sole



$$T^2 = k_s \cdot a^3$$

con $k_s = 3 \cdot 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$ costante che dipende dal corpo centrale, cioè dal Sole

La legge di gravitazione universale di Newton

La legge di gravitazione universale afferma quanto segue: <<due particelle puntiformi aventi rispettivamente masse m_1 ed m_2 si attraggono con una forza, agente lungo la retta congiungente le due masse, direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza>> ^(2C) In simboli matematici abbiamo:

$$F_{AB} = F_{BA} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad [1]$$

Il coefficiente di proporzionalità G è una **costante universale** che prende il nome di **costante di gravitazione universale**. Il valore numerico di G non dipende dai valori delle masse che interagiscono né dalla geometria del sistema, né dal luogo dove avviene l'interazione. Il suo valore numerico dipende esclusivamente dal sistema di unità di misura usato. Per questo motivo G è una **costante universale**. Il valore di G è lo stesso sia per i corpi celesti che per qualsiasi altro corpo. La prima misura accurata di G fu eseguita dallo scienziato inglese **Henry Cavendish** nel **1798**, che si servì di una bilancia di torsione. Si tratta di un esperimento davvero delicato. Il valore di G

attualmente accettato nel **S.I.** è il seguente:

$$G = 6,6732 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Si tratta di un valore estremamente piccolo.

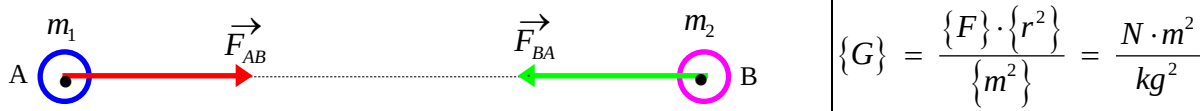
$$[G] = \frac{[F \times r^2]}{[m^2]} = [L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}]$$

F_{AB} = forza gravitazionale che agisce sul corpo A e proveniente dall'azione del corpo B

F_{BA} = forza gravitazionale che agisce sul corpo B e proveniente dall'azione del corpo A

^(2C) La legge di gravitazione universale è rigorosamente valida per corpi puntiformi, cioè per corpi le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alla loro mutua distanza.

Le forze di gravitazione tra due particelle costituiscono nel loro insieme **azione e reazione**. La prima particella esercita sulla seconda una forza che è diretta verso la prima particella lungo la loro congiungente. Similmente la seconda particella esercita sulla prima una forza che è diretta sulla seconda lungo la loro congiungente. Queste forze hanno lo stesso modulo, la stessa direzione, ma versi opposti.



La **legge di gravitazione universale** è rigorosamente valida soltanto per corpi puntiformi, cioè per corpi aventi dimensioni piccole rispetto alla loro distanza. Essa vale anche per masse non puntiformi purché sferiche.

Esempio

Calcolare il valore della forza con cui si attraggono: **1)** il **Sole** e la **Terra** **2)** la **Terra** e la **Luna** **3)** due corpi uguali aventi la massa di 100 kg e posti alla distanza di un metro.

$$F_{ST} = F_{TS} = G \frac{m_S \cdot m_T}{r^2} = 6,6732 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1,98 \cdot 10^{30}) \cdot (5,98 \cdot 10^{24})}{(1,49 \cdot 10^{11})^2} =$$

$$= \frac{6,6732 \cdot 1,98 \cdot 5,98}{2,2201} \cdot 10^{21} = 35,5899 \cdot 10^{21} = 3,6 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

$$F_{LT} = F_{TL} = G \frac{m_L \cdot m_T}{r^2} = 6,6732 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(7,354 \cdot 10^{22}) \cdot (5,98 \cdot 10^{24})}{(3,844 \cdot 10^8)^2} = 1,985 \cdot 10^{19} \text{ N}$$

$$F = 6,6732 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100 \cdot 100}{(1)^2} = 6,6732 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Osservazione

Se riteniamo valide le leggi di Keplero e le leggi della dinamica, allora possiamo dimostrare la **legge di gravitazione universale**, che diventa un teorema.

Se, invece, riteniamo valide le leggi della dinamica e la legge di gravitazione universale, allora possiamo dimostrare le tre leggi di Keplero che diventano altrettanti teoremi.

L'accelerazione di gravità

Il peso di un corpo è la **forza gravitazionale** esercitata su di esso dalla **Terra**. Si tratta di una grandezza vettoriale la cui direzione è orientata dalla posizione occupata dal corpo al centro della **Terra**.

Quando un corpo di massa m è lasciato cadere liberamente, la sua accelerazione (di **gravità**) è indicata col simbolo $\vec{g}$ e la forza di gravità che agisce su di esso è il suo peso $\vec{P}$. La seconda legge di Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, applicata ad un corpo in caduta libera, diventa: $\vec{P} = m\vec{g}$ oppure $\mathbf{P=mg}$ se scritta in forma scalare. La legge di gravitazione universale ci fornisce la seguente relazione:

$$\mathbf{P=G \cdot \frac{m \cdot m_T}{r^2}} \quad . \quad \mathbf{P=mg=P=G \cdot \frac{m \cdot m_T}{r^2}} \Rightarrow \mathbf{g=G \cdot \frac{m_T}{r^2}} \quad [\mathbf{B}] \quad \mathbf{g} \text{ assume lo stesso valore in}$$

tutti i punti dello spazio distanti r metri dal centro della terra. Nella pratica $\mathbf{g}$ si considera **costante** (a causa del valore piuttosto grande del raggio della Terra) in regioni prossime alla superficie

$$\text{terrestre. } g = G \cdot \frac{m_T}{(R_T)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,979 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,8 \frac{m}{s^2} \quad \mathbf{g=9,8 \frac{m}{s^2}}$$

Il valore di $\mathbf{g}$ varia al variare della posizione del punto materiale.

La massa della Terra e la sua massa volumica media

Dalla misurazione sperimentale di $\mathbf{g}$ possiamo calcolare la massa della **Terra**. Dalla [B] ricaviamo:

$$m_T = \frac{g \cdot r^2}{G}$$

$$m_T = \frac{9,8 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Dividendo la massa della terra per il suo volume otteniamo la **massa volumica** della **Terra**:

$$\rho_T = \frac{m_T}{V_T} = 5,5 \frac{g_r}{cm^3}$$

Poiché la **massa volumica della materia sulla crosta terrestre** è minore del valore trovato, deduciamo che la **Terra** è costituita al suo interno da materiale la cui massa volumica è maggiore del valore $5,5 \frac{g_r}{cm^3}$. Se vogliamo calcolare il valore di $\mathbf{g}$ senza utilizzare la massa della **Terra**, allora

possiamo considerare il moto della luna attorno alla **Terra**. Per quanto visto precedentemente

possiamo scrivere:

$$G \cdot m_T = 4\pi^2 \cdot \frac{\ell^3}{T_L^2}$$

con ℓ = raggio della circonferenza descritta dalla luna nella sua rivoluzione attorno alla **Terra**

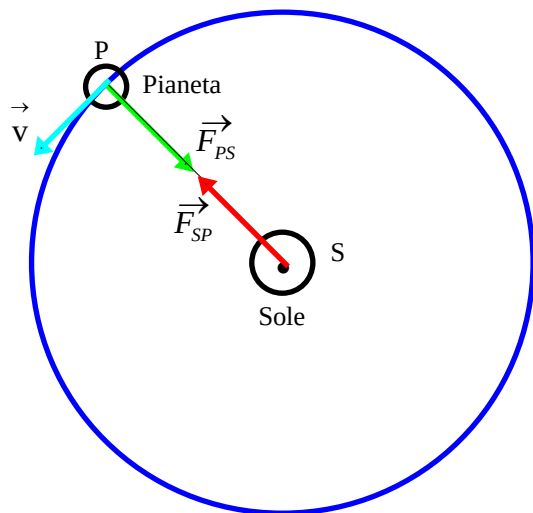
T_L = **periodo di rivoluzione** della luna

Tenendo presente la [B] otteniamo:

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{\ell^3}{r^2 \cdot T_L^2}$$

La massa dei corpi celesti

Se conosciamo il valore della costante di gravitazione universale G e qualche altro dato astronomico come il tempo di rivoluzione e la distanza di due corpi celesti, possiamo calcolare il valore della massa di un corpo celeste, cioè possiamo calcolare la massa del Sole, della **Terra**, di Giove e di tanti altri corpi celesti. Il ragionamento è il seguente:



$\vec{F}_{PS}$ = forza che il Sole esercita sul pianeta P

$\vec{F}_{SP}$ = forza che il pianeta P esercita sul Sole

$\vec{v}$ = velocità vettoriale del pianeta nel suo moto attorno al Sole

La forza centripeta che fa ruotare la **Terra** attorno al Sole è la forza gravitazionale di attrazione esercitata dal Sole.

Consideriamo il caso del **Sole S** e di un **pianeta P** nell'ipotesi che il moto del pianeta attorno al Sole sia circolare ed uniforme. ⁽⁵⁾

Un pianeta di massa m_p , ruotando attorno al Sole di massa m_s lungo un'ellisse, assimilabile in prima approssimazione ad una circonferenza, è ad ogni istante soggetto all'azione di una forza centripeta

data dalla seguente relazione: $F = G \cdot \frac{m_p \cdot m_s}{r^2}$ con r distanza **Sole-pianeta**

Per il secondo principio della dinamica possiamo scrivere:

$$F = m_p \cdot a_c = m_p \cdot \frac{4\pi^2 r}{T_p^2}$$

$$F = F \Rightarrow G \cdot \frac{m_p \cdot m_s}{r^2} = m_p \cdot \frac{4\pi^2 r}{T_p^2} \Rightarrow m_s = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T_p^2} \quad [C]$$

essendo T_p il **periodo di rivoluzione** del pianeta considerato, cioè il tempo necessario perché il pianeta percorra un'intera orbita. Consideriamo adesso il caso particolare della **Terra** e del **Sole**.

⁽⁵⁾ Con ottima approssimazione è il caso della Terra nel suo movimento attorno al Sole

Sia m_s la massa del Sole ed m_T la massa della **Terra**. Supponiamo che l'ellisse descritta dalla **Terra** attorno al sole sia assimilabile ad una circonferenza di raggio r percorsa con moto uniforme, cioè con velocità vettoriale $\vec{v}$ avente modulo $v = \frac{2\pi r}{T}$ costante.

Poiché la terra di massa m_T si muove di moto uniforme lungo la traiettoria circolare, l'unica accelerazione cui è soggetta è quella centripeta $\vec{a}_n$. In base al secondo principio della dinamica la **Terra** è soggetta ad una forza $\vec{F}$ data da: $\vec{F}_n = m_T \cdot \vec{a}_n$ cioè: $\boxed{F_n = m_T \cdot a_n}$

Ma: $\boxed{a_n = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}}$ dove T è il tempo impiegato dalla **Terra** a percorrere una intera orbita circolare. **Ma chi determina sulla Terra questa forza centripeta che la mantiene in orbita?**

E' la forza di attrazione gravitazionale che il **Sole** esercita sulla **Terra** e che ci viene data dalla

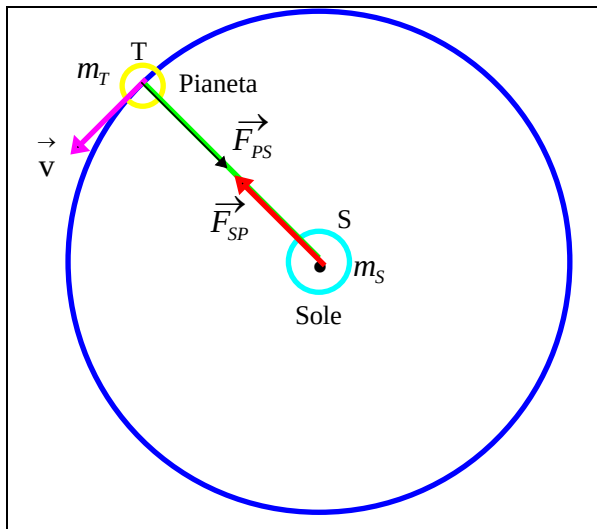
legge di gravitazione universale: $F = G \cdot \frac{m_T \cdot m_s}{r^2} = m_T \cdot a_n = m_T \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

forza gravitazionale esercitata dal Sole sulla terra = forza centripeta necessaria a mantenere la Terra nella sua orbita circolare attorno al Sole

$$\boxed{m_s = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}} \quad [\text{D}] \quad r = 1,48 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad , \quad T = 3,156 \cdot 10^7 \text{ s} \quad , \quad m_s = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Sostituendo nella [D] otteniamo: $m_s = 1,964 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. La [D] è ancora valida per una qualsiasi orbita ellittica con la sola condizione che r rappresenta il **semiasse maggiore** dell'ellisse. La [D] può essere applicata ad un qualsiasi corpo di massa m_T che ruoti attorno ad un corpo centrale di massa m_s .

Più complicato è misurare la massa di un corpo celeste come la **Luna** che non ha satelliti naturali. Il metodo usato è quello delle perturbazioni, cioè dello studio delle modificazioni, rispetto alle traiettorie previste dalle leggi di Keplero, che un corpo induce sui corpi vicini, modifiche che dipendono dal valore della sua massa. Studiando tali perturbazioni si riesce a risalire alla massa del corpo celeste. Un procedimento più semplice è quello di inviare attorno alla Luna un satellite artificiale.



Una massa m_T , per percorrere una circonferenza di raggio r con una velocità vettoriale $\vec{v}$ di modulo costante, ha bisogno di una **forza centrale** di modulo

$$\frac{m_T v^2}{r}.$$

Questa forza viene fornita dal Sole sotto forma

di **forza gravitazionale** $G \cdot \frac{m_T \cdot m_S}{r^2}$

$$\frac{m_T v^2}{r} = \text{forza richiesta} \quad G \cdot \frac{m_T \cdot m_S}{r^2} = \text{forza fornita}$$

Massa inerziale e massa gravitazionale

Ogni corpo è caratterizzato da una proprietà fisica detta **massa**, la quale è caratterizzata da due proprietà che danno luogo alla **massa inerziale** ed alla **massa gravitazionale**. Una forza $\vec{F}$ applicata ad un corpo libero determina su questo corpo una accelerazione $\vec{a}$. Il rapporto fra la forza applicata e l'accelerazione prodotta è una caratteristica intrinseca del corpo e prende il nome di **massa inerziale** del corpo in quanto essa è un indice della tendenza che hanno tutti i corpi

di stare fermi o di muoversi di moto rettilineo uniforme .

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m}$$

L'inerzia rappresenta una importante proprietà della massa che consiste nell'opporsi ai cambiamenti prodotti da una eventuale forza esterna che tenti di modificarne la velocità vettoriale e quando vogliamo evidenziare questa proprietà della massa parliamo di **massa inerziale**.

Al contrario, quando si vuole sottolineare la proprietà della massa di interagire con le altre masse secondo la legge di gravitazione universale come avviene, per esempio, con la forza peso, si parla di **massa gravitazionale**.

La massa inerziale e la massa gravitazionale di un corpo hanno significati diversi , anche se hanno lo stesso valore numerico e si misurano entrambe in chilogrammi.

Si possono realizzare diversi esperimenti con i quali è possibile misurare e confrontare la massa gravitazionale e la massa inerziale di uno stesso corpo. Tutti gli esperimenti finora realizzati hanno sempre dato lo stesso valore per cui , in seguito , parlando di massa di un corpo non preciseremo più se si tratta di massa inerziale o di massa gravitazionale.

Variazione del peso di un corpo al variare della sua distanza dal centro della terra

Calcoliamo l'accelerazione di gravità di un corpo di massa m posto all'altezza h rispeso alla superficie della Terra, che consideriamo sferica, di raggio R_T e massa m_T . Sul corpo agisce la

forza di gravitazione universale (peso del corpo) $F = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$ che, per la legge

fondamentale della dinamica, vale: $F = m \cdot g$. Confrontando le due equazioni otteniamo:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{(R_T + h)^2} \quad \text{e quindi:} \quad \boxed{g = G \cdot \frac{m_T}{(R_T + h)^2}}$$

con $R_T + h$ distanza del corpo dal centro della terra .

Il peso di un corpo diminuisce con l'aumentare della sua distanza dal centro della terra .

L'interazione gravitazionale, che è relativamente debole , è responsabile di importanti fenomeni quali le orbite ellittiche descritte dai pianeti ed è dovuta all'attrazione del Sole.

Le maree sono dovute alla reciproca attrazione esercitata tra la Luna e le masse d'acqua degli oceani.

Le leggi di Keplero e la gravitazione universale, ovvero come si passa dal moto dei pianeti alla legge di gravitazione universale

La legge di gravitazione universale può essere dedotta dalle leggi della dinamica e dalle leggi di Keplero . Noi la dimostreremo nel caso semplice di un'orbita circolare . Nel caso generale di orbite ellittiche occorre il calcolo differenziale . Enunciamo le tre leggi di Keplero.

Prima legge di Keplero

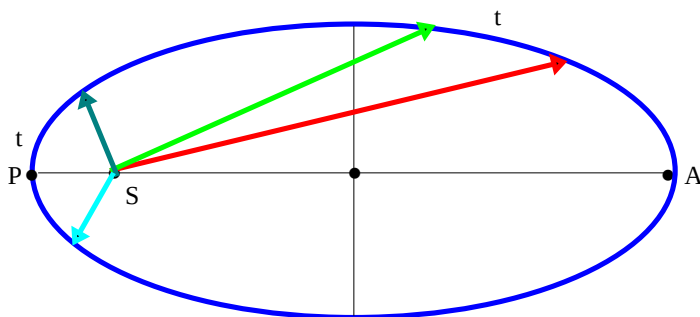
Le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi. Le ellissi descritte dai pianeti sono, in generale, **poco eccentriche**, per cui in alcuni casi possono essere ritenute circolari. Il pianeta si trova alla massima distanza dal Sole nella posizione **A**, detta **Afelio**, ed alla minima distanza nella posizione **P**, detta **perielio**.

Seconda legge di Keplero (o legge delle aree)

Le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il Sole col pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle. Questo significa che la **velocità areolare** del pianeta rispetto al punto occupato dal Sole si mantiene costante. La **velocità lineare** del pianeta è **minima** all'**afelio**, **massima** al **perielio**. Pertanto essa aumenta quando il pianeta va dall'afelio al perielio e diminuisce quando va dal perielio all'afelio.

Terza legge di Keplero

I quadrati dei tempi **T (periodi di rivoluzione)** impiegati dai diversi pianeti a percorrere la loro orbita ellittica sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi descritte.

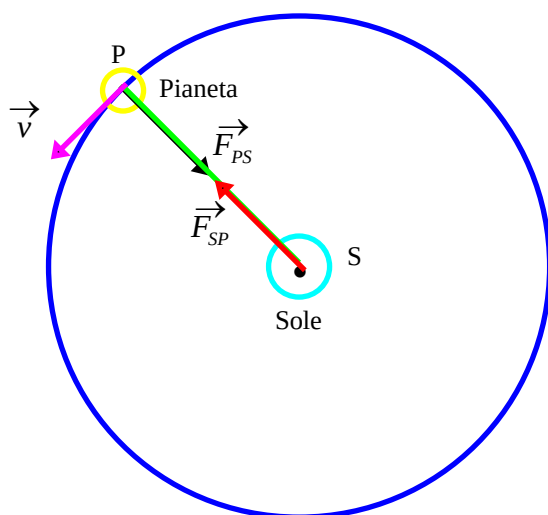


$$T^2 = k_s \cdot a^3$$

con $k_s = 3 \cdot 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$ costante che dipende dal corpo centrale, cioè dal Sole

dalle leggi di Keplero, dedotte sperimentalmente, e dalle leggi della dinamica possiamo dedurre la **legge di gravitazione universale**. Consideriamo il caso del **Sole S** e di un **pianeta P** nell'ipotesi che il moto del pianeta attorno al Sole sia circolare ed uniforme. ⁽⁵⁾

⁽⁵⁾ Con ottima approssimazione è il caso della terra nel suo movimento attorno al Sole



$\vec{F}_{PS}$ = forza che il Sole esercita sul pianeta P

$\vec{F}_{SP}$ = forza che il pianeta P esercita sul Sole

$\vec{v}$ = velocità vettoriale del pianeta nel suo moto attorno al Sole

La forza centripeta che fa ruotare la terra attorno al Sole è la forza gravitazionale di attrazione esercitata dal Sole .

Supponiamo che la traiettoria descritta dal pianeta sia una circonferenza. La **costanza della velocità areolare** si tramuta nella costanza della velocità lineare. Il pianeta si muove attorno al Sole di moto circolare uniforme con velocità lineare $\vec{v} = \frac{2\pi \mathbf{r}}{T} = \omega \mathbf{r}$ ed accelerazione centripeta $\mathbf{a}_c = \omega^2 \mathbf{r}$.

La forza che agisce sul pianeta, permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità scalare costante, deve essere esclusivamente **centripeta** (cioè senza componente tangenziale).

Essa risulta uguale a: $F_{PS} = m_p \cdot a_c = m_p \cdot \frac{v^2}{r} = m_p \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m_p \cdot r$ [2]

dove $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il **periodo di rivoluzione** del pianeta attorno al Sole, m_p è la massa del pianeta, r è il raggio dell'orbita descritta dal pianeta.

Utilizzando la terza legge di Keplero $T^2 = k_s \cdot r^3$ e sostituendo nella [2] otteniamo :

$$F_{PS} = \frac{4\pi^2}{k_s} \cdot \frac{m_p}{r^2} = C \cdot \frac{m_p}{r^2} \quad [3]$$

Questo è il primo risultato importante: **la forza esercitata dal sole sui pianeti è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole e direttamente proporzionale alla massa del pianeta**. La forza esercitata dal pianeta sul Sole ha l'espressione: $F_{SP} = \frac{4\pi^2}{k_p} \cdot \frac{m_s}{r^2}$ [4]

Questa volta è il pianeta che funge da corpo centrale.

Per la terza legge della dinamica sul Sole agisce una forza F_{SP} uguale ed opposta a quella che agisce

$$\text{sulla terra : } F_{PS} = F_{SP} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{k_S} \cdot \frac{m_P}{r^2} = \frac{4\pi^2}{k_P} \cdot \frac{m_S}{r^2} \Rightarrow \boxed{m_P \cdot k_P = m_S \cdot k_S}$$

Poiché il risultato è stato dedotto per un pianeta qualsiasi, possiamo affermare che il prodotto $m \cdot k$ è una **costante universale**, che non dipende dal particolare pianeta considerato. Sarà pure una

costante universale anche la grandezza:
$$G = \frac{4\pi^2}{mk} = \frac{4\pi^2}{m_P k_P} = \frac{4\pi^2}{m_S k_S}$$

Da queste uguaglianze ricaviamo le uguaglianze:
$$\frac{4\pi^2}{k_P} = G \cdot m_P, \quad \frac{4\pi^2}{k_S} = G \cdot m_S$$

Sostituendo i risultati trovati nella [3] e nelle [4] otteniamo :

$$F_{PS} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2}$$

$$F_{SP} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2}$$

Concludiamo ricordando che dalla legge di gravitazione universale e dalle leggi della dinamica possiamo dedurre le tre leggi di Keplero.

La deduzione delle tre leggi di Keplero

Le tre leggi di Keplero, da questi dedotte sperimentalmente, sono una conseguenza delle tre leggi della dinamica applicate al caso particolare del moto di un corpo (**pianeta**) di massa **m** che ruota attorno ad un altro corpo (stella) ritenuto fermo e di massa **M**, attratto da una forza inversamente proporzionale dal quadrato della loro distanza.

Innanzitutto si può dimostrare matematicamente che, con una forza $\propto \frac{1}{r^2}$, la traiettoria del pianeta rispetto al baricentro della stella (ritenuta fissa) è rappresentata da una conica. I pianeti che tornano sempre verso la stella percorrono delle **ellissi**.

La **seconda legge di Keplero** è una conseguenza della **conservazione del momento angolare** (o momento della quantità di moto) $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{m}\vec{v}$. Se $\vec{\ell}$ è un vettore costante allora si può dimostrare che la **velocità areolare** del pianeta è costante.

La **terza legge di Keplero** è una conseguenza del fatto che nel moto del pianeta la forza gravitazionale è una forza esclusivamente centripeta. Dimostriamo la terza legge di Keplero nel caso particolarmente semplice di un pianeta che descrive un'orbita circolare. Supponiamo che un pianeta **P** descriva un'orbita circolare. P si muove di moto circolare uniforme e possiede un'accelerazione centripeta il cui modulo ci viene dato dalla formula: $\mathbf{a}_c = \omega^2 \mathbf{r}$ dove ω è la velocità angolare del pianeta ed $\mathbf{r}$ è la sua distanza dal Sole.

In un moto circolare uniforme, la velocità angolare è legata al periodo T dalla relazione: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Il modulo dell'accelerazione centripeta del pianeta assume la seguente forma: $a_c = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$

Se m_p è la massa del pianeta esso, per la legge fondamentale della dinamica, è attirato verso il centro

del Sole da una forza il cui modulo vale: $f = m_p a_c = m_p \frac{4\pi^2}{T^2} r$

Questa forza è di origine gravitazionale e, quindi, vale: $f = G \frac{m_s \cdot m_p}{r^2}$. $f = f \Rightarrow$

$$G \frac{m_s \cdot m_p}{r^2} = m_p \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_s} = k_s \quad [A]$$

Al secondo membro della [A] compare una quantità che è **indipendente** dal pianeta considerato: dipende solo dalla massa del Sole, che funge da corpo centrale (e da costanti come π e G).

Quindi il rapporto $\frac{T^2}{r^3}$ è lo stesso per tutti i pianeti. E' essenziale che l'intensità della forza di

attrazione gravitazionale sia proporzionale a $\frac{1}{r^2}$; diversamente, non c'è modo di giustificare la terza

legge di Keplero.

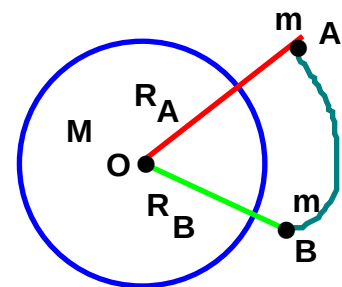
Marte	$0,37 \cdot g$	Terra	g
Luna	$0,17 \cdot g$	Sole	$28 \cdot g$
Mercurio	$0,34 \cdot g$	Urano	$0,84 \cdot g$
Saturno	$1,06 \cdot g$	Giove	$2,51 \cdot g$
Venere	$0,83 \cdot g$		
Valore della gravità sulla superficie di alcuni corpi celesti del sistema solare calcolato in unità di accelerazione di gravità g sulla Terra, nell'ipotesi che i corpi celesti siano sferici.			

	MASSA (kg)	RAGGIO (m)	PERIODO DI ROTAZIONE (s)	ECCENTRICITÀ ORBITALE	RAGGIO MEDIO DELL'ORBITA (m)	PERIODO DI RIVOLUZIONE (a = ANNO g = GIORNO)
Sole	$1,98 \cdot 10^{30}$	$6,96 \cdot 10^8$	$2,14 \cdot 10^6$	—	—	—
Mercurio	$0,33 \cdot 10^{24}$	$2,57 \cdot 10^6$	$7,60 \cdot 10^6$	0,2056	$5,79 \cdot 10^{10}$	87,97 g
Venere	$4,83 \cdot 10^{24}$	$6,31 \cdot 10^6$	$2,6 \cdot 10^6$	0,0068	$1,08 \cdot 10^{11}$	224,70 g
Terra	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,38 \cdot 10^6$	$8,61 \cdot 10^4$	0,0167	$1,50 \cdot 10^{11}$	365,25 g
Marte	$6,37 \cdot 10^{23}$	$3,43 \cdot 10^6$	$8,85 \cdot 10^4$	0,0934	$2,28 \cdot 10^{11}$	686,98 g
Giove	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,18 \cdot 10^7$	$3,54 \cdot 10^4$	0,0483	$7,78 \cdot 10^{11}$	11,86 a
Saturno	$5,67 \cdot 10^{26}$	$6,03 \cdot 10^7$	$3,60 \cdot 10^4$	0,0560	$1,43 \cdot 10^{12}$	29,46 a
Urano	$8,80 \cdot 10^{25}$	$2,67 \cdot 10^7$	$3,88 \cdot 10^4$	0,0461	$2,87 \cdot 10^{12}$	84,02 a
Nettuno	$1,03 \cdot 10^{26}$	$2,48 \cdot 10^7$	$5,69 \cdot 10^4$	0,0100	$4,50 \cdot 10^{12}$	164,79 a
Plutone	$1,37 \cdot 10^{22}$	$1,17 \cdot 10^6$	$5,7 \cdot 10^4$	0,2484	$5,9 \cdot 10^{12}$	247,70 a
Luna	$7,34 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	$2,36 \cdot 10^6$	0,055	$3,84 \cdot 10^8$	27,3 g

Energia potenziale gravitazionale

Quando la massa m , posta nel campo gravitazionale generato dalla Terra di massa M , passa dalla posizione iniziale A a quella finale B , le forze del campo gravitazionale compiono il seguente lavoro:

$$L_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) \quad [1]$$



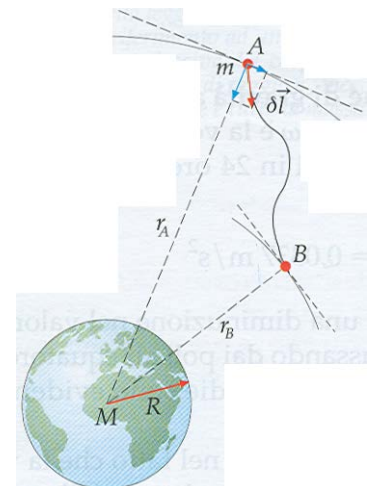
Se $R_B = \infty$ abbiamo: $L_{A \rightarrow \infty}(\vec{F}) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R_A}$ [2] $L_{A \rightarrow \infty}(\vec{F})$ rappresenta il lavoro compiuto dalla

forza $\vec{F}$ quando la massa m passa dalla posizione A all'infinito. Il lavoro L è negativo in quanto le forze gravitazionali sono attrattive.

Si può dimostrare che $L_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ non dipende dalla traiettoria che unisce i punti A e B , ma dipende soltanto dalla distanza dei due punti dal centro Della Terra. Questo ci consente di affermare che la **forza gravitazionale è conservativa**.

La grandezza: $U = L_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R_A}$ [6] prende il nome di

energia potenziale della massa m quando occupa una posizione del campo gravitazionale generato dalla massa M .



Il valore negativo dell'energia potenziale è una conseguenza dell'avere posto convenzionalmente l'infinito come livello zero per le energie potenziali.

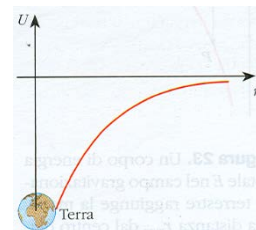
L'espressione 6, che descrive l'energia di una particella di massa m nel campo gravitazionale terrestre, può essere interpretata anche come l'energia potenziale associata al sistema isolato Terra-particella. Un'espressione analoga descrive l'energia potenziale associata a una qualunque coppia di masse m_1 ed m_2 :

Energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale gravitazionale di un sistema isolato di due masse m_1 ed m_2 separate da una distanza r è:

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Figura 22. Grafico dell'energia potenziale gravitazionale in funzione della distanza dal centro della Terra.



Conservazione dell'energia meccanica nel campo gravitazionale

Se indichiamo con m la massa di un corpo in movimento con velocità v nel campo gravitazionale terrestre e con r la sua distanza dal centro della Terra, per il *principio di conservazione dell'energia meccanica* possiamo scrivere:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_T m}{r} = \text{costante} \quad 8$$

cioè la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del corpo si mantiene costante durante il moto.

Un corpo dotato di energia totale E nel campo gravitazionale terrestre può spostarsi in ogni punto dello spazio in cui l'energia potenziale gravitazionale U , che varia da punto a punto, è minore o uguale al valore costante dell'energia totale E , come richiede il principio di conservazione dell'energia meccanica. La differenza $E - U$ esprime l'energia cinetica del corpo.

In conclusione, se E è negativa, il corpo non può allontanarsi indefinitamente dalla Terra.

Supponiamo ora che il corpo in esame sia un satellite in *orbita circolare* di raggio r intorno alla Terra (fig. 24). Per la seconda legge della dinamica, l'accelerazione centripeta $\frac{v^2}{r}$ cui è sottoposto il satellite, moltiplicata per la sua massa m , deve essere uguale alla forza gravitazionale esercitata su di esso dalla Terra, cioè:

$$G \frac{M_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Ne segue che l'energia cinetica del satellite è: $E_c = G \frac{M_T m}{2 r}$

Pertanto l'energia totale $E = E_c + U$ diventa: $E = -G \frac{M_T m}{2 r}$ 9

Il risultato fondamentale che a questo punto vogliamo evidenziare è che il satellite ha energia totale negativa, come ci aspettavamo dal momento che esso, percorrendo la sua orbita, rimane sempre a distanza finita dalla Terra.

Più in generale, *l'energia totale è negativa per ogni orbita chiusa* (circolare o ellittica).

Invece, un corpo dotato di energia totale maggiore o uguale a zero si allontana indefinitamente dalla Terra.

Si tenga presente che tutte le considerazioni che abbiamo fatto finora sul segno dell'energia meccanica sono valide esclusivamente nella convenzione di attribuire valore nullo all'energia potenziale gravitazionale della massa m all'infinito.

In questa discussione abbiamo fatto riferimento, per concretezza, al campo gravitazionale terrestre, ma i risultati si estendono ovviamente al campo gravitazionale di ogni altro corpo celeste, sostituendo alla massa M_T della Terra la massa M del corpo considerato. Così la 9, scritta nella forma:

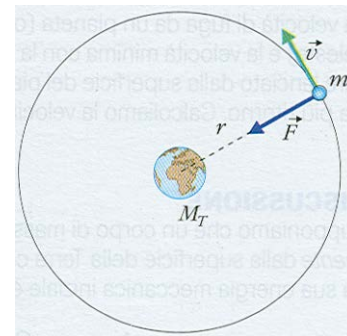
$$E = -G \frac{M m}{2 r}$$

può rappresentare anche, ad esempio, l'energia meccanica di un pianeta di massa m in orbita circolare attorno a una stella di massa M .

La condizione che deve essere rispettata, affinché a un sistema di due masse possano essere applicate equazioni come la 8 o la 9, è che la massa del corpo che genera il campo sia molto maggiore della massa m in movimento nel campo. In questo caso, allora, la massa più grande può essere ritenuta immobile nella posizione che occupa in un sistema di riferimento inerziale e la sua energia cinetica può essere perciò trascurata. In caso contrario, nello scrivere l'energia totale del sistema, dovremmo includere anche l'energia cinetica di questa massa.

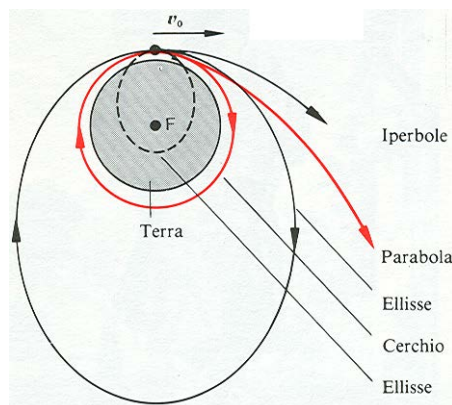
Figura 24. Se un satellite artificiale terrestre di massa m percorre un'orbita circolare di raggio r con velocità $\vec{v}$, la forza gravitazionale $\vec{F}$ costituisce la forza centripeta necessaria a mantenere il satellite su tale orbita. Pertanto si ha:

$$G \frac{M_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$



Prime considerazioni sui satelliti artificiali

Consideriamo il lancio di un satellite artificiale. Vogliamo lanciare il satellite in direzione orizzontale da una rampa e trascuriamo per semplicità la resistenza dell'aria. Si presentano le seguenti possibilità:



Traiettorie descritte sotto l'azione della gravità terrestre. Se la velocità di lancio orizzontale alla superficie della Terra è più piccola della velocità corrispondente all'orbita circolare, il corpo ricade sulla Terra.

Velocità di lancio v_0	Forma dell'orbita	Velocità di lancio v_0	Forma dell'orbita
$0 < v_0 < v_1$	Parabola	$v_0 = v_1 = 7,9 \frac{km}{s}$	Circonferenza
$v_1 < v_0 < v_2$	Ellisse	$v_0 = v_2 = 11,2 \frac{km}{s}$	Parabola
$v_2 < v_0 < \infty$	Iperbole		

In tutti i casi il centro della Terra si trova in un fuoco della sezione conica.

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \text{ è detta "velocità orbitale circolare" o "prima velocità cosmica" .}$$

con M massa della Terra.

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{r}} \text{ è detta } << \text{velocità di fuga} >> \text{ o "seconda velocità cosmica" .}$$

La messa in orbita di un satellite artificiale della Terra

Esempio 1. La velocità orbitale circolare.

Un satellite di massa m deve essere posto in orbita circolare attorno alla Terra; con quale velocità deve essere lanciato in direzione orizzontale?

Riferiamoci per il momento alla legge della conservazione dell'energia. Poiché lungo una traiettoria circolare l'energia potenziale ha sempre lo stesso valore, anche l'energia cinetica deve rimanere costante. La legge dell'energia ci dice quindi solo che la velocità del satellite deve rimanere costante durante il moto.

Per il calcolo di v dobbiamo servirci della legge fondamentale della dinamica $m \cdot a = F$. Poiché l'accelerazione del satellite è fornita dalla forza gravitazionale della Terra, potremo scrivere, indicando con M la massa della Terra, la seguente equazione:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \text{da cui ricaviamo:} \quad v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}$$

Questa velocità si chiama *velocità orbitale circolare*. Essa risulta indipendente dalla massa del satellite, quindi è sempre la stessa per tutti i satelliti che descrivono la medesima traiettoria.

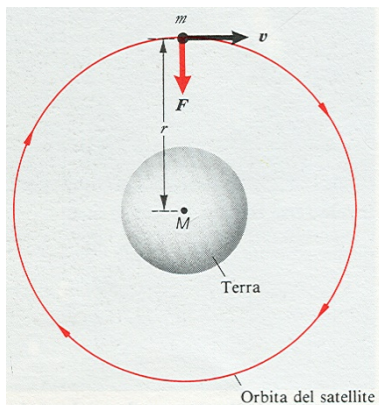
Vogliamo ora calcolare il valore di tale velocità per un satellite in moto su orbita radente la superficie terrestre.

$$v = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3}} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7,9 \text{ km/s}$$

$$\text{Come valore del periodo orbitale si ottiene: } T = \frac{2 R \pi}{v} = \frac{2 \cdot 6370 \cdot 10^3 \cdot 3,14}{7900} = 5066,31 \text{ s} = 84,31 \text{ min}$$

cioè circa un'ora e mezzo.

La velocità orbitale è tanto più piccola quanto più grande è il raggio dell'orbita prescelta. Per $r = 42\,200$ km la velocità orbitale vale solo 3 km/s. In questo caso il satellite descrive un giro completo attorno alla Terra esattamente in un giorno. Se l'orbita del satellite giace nel piano equatoriale terrestre, e se il satellite ruota nello stesso senso della Terra, allora il satellite visto dalla Terra sembra stare fermo. Satelliti di questo tipo, detti geostazionari, hanno un ruolo molto importante nella tecnica delle radiocomunicazioni rendendole possibili su scala mondiale.



Tre satelliti geostazionari che ruotano attorno alla Terra. Se ogni satellite impiega un giorno per compiere una rotazione completa, e le loro orbite giacciono sul piano equatoriale terrestre, i satelliti visti dalla Terra sembrano fermi. Essi sono quindi estremamente utili per la trasmissione radio e televisiva.

Esempio 2. Velocità di fuga.

Un corpo di massa m deve essere lanciato dalla superficie della Terra. Che velocità bisogna imprimergli perché esca dal campo gravitazionale terrestre?

Indichiamo con M la massa della Terra e con R il suo raggio, avremo allora:

$$\text{Energia alla superficie della Terra: } E = \frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} \quad \text{Energia a distanza infinita: } E = 0 - 0$$

In questo caso la velocità del corpo a distanza infinita è nulla. L'energia rimane costante durante il moto e quindi si ha:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} = 0 \quad \text{da cui} \quad v = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{R}}$$

Questa velocità si chiama *velocità di fuga*. Il suo valore non dipende né dalla massa del corpo che viene lanciato né dalla direzione di lancio.

Vogliamo calcolare la velocità di fuga dalla superficie terrestre.

$$v = \sqrt{2 G \frac{M}{R}} = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3}} \text{ m/s} =$$

$$= 11,2 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$$

Sulla superficie della Luna la velocità di fuga vale solo 1,6 km/s. Le molecole gassose, dotate di maggior energia alla temperatura ambiente, raggiungono questi valori della velocità e quindi possono sfuggire al campo gravitazionale della Luna. Se la Luna avesse avuto un'atmosfera questa sarebbe perciò diventata con il passar del tempo sempre più rarefatta. La Luna dunque è troppo piccola per poter trattenere un'atmosfera. Sulla Terra invece la velocità di fuga è dieci volte più grande che sulla Luna e quindi la perdita di atmosfera è minima e basta l'espulsione di gas dai vulcani per compensarla. Si spiega così come la Terra abbia potuto mantenere la propria atmosfera.

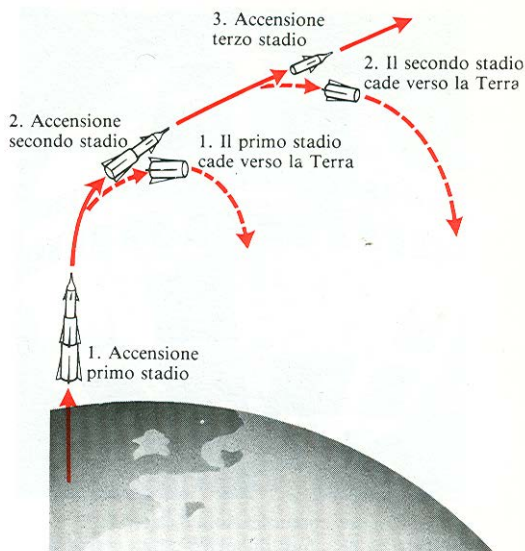
Esempio 3. Il lancio di un satellite terrestre.

Un satellite viene lanciato dalla superficie terrestre e deve girare attorno alla Terra su di una traiettoria circolare. Come si effettua il lancio?

Il razzo, pieno di carburante, alla partenza si alza lentamente da terra e penetra con piccola velocità il denso strato d'aria. Poco dopo che si è alzato, il razzo, mediante un sistema di guida, viene deviato dalla verticale e inclinato nella direzione dell'orbita prevista.

Pochi minuti dopo il decollo il primo stadio del razzo, che ha bruciato già tutto il combustibile e che quindi è diventato inutile, viene sganciato e si accende il secondo stadio. Il razzo, ora più leggero, raggiunge in breve un'elevata velocità. Dopo l'arresto della combustione del secondo stadio la direzione di volo è già quasi orizzontale e il razzo per una decina di minuti procede senza nessuna spinta. In questa fase di lancio le stazioni di controllo hanno la possibilità di correggere la traiettoria azionando i razzi ausiliari.

Eseguite le correzioni, anche il secondo stadio viene sganciato e acceso il terzo. Il satellite raggiunge l'orbita voluta e, dopo il suo spegnimento, si sgancia dal razzo. A questo punto non è più possibile nessuna modificazione della sua traiettoria.



Il lancio di un satellite terrestre.

Il moto nel campo gravitazionale del Sole

Il Sole, i pianeti e i satelliti che costituiscono il sistema solare creano nello spazio circostante un proprio campo gravitazionale; i vari campi si sovrappongono e i loro effetti si sommano. Tuttavia, considerato che la massa del Sole è decisamente maggiore rispetto a quella dei pianeti (circa 1 milione di volte la massa della Terra e 100 milioni di volte quella della Luna), con buona approssimazione si può studiare il sistema solare come formato da piccole masse puntiformi (i pianeti) che vengono a trovarsi nel campo gravitazionale del Sole.

Considerate le enormi distanze planetarie (la distanza di Plutone dal Sole è dell'ordine di 10^{12} m, mentre il raggio del Sole è dell'ordine di soli 10^8 m), anche il Sole può essere considerato un punto materiale nel sistema, immaginando la sua massa tutta concentrata nel suo baricentro.

Entriamo così nel modello di campo gravitazionale centrale che abbiamo visto nei paragrafi precedenti.

Nell'istante in cui un pianeta entra nel campo gravitazionale del Sole, la forza che lo attira verso il Sole agisce come una forza centripeta e la traiettoria diventa curvilinea. Potremmo avere 4 casi:

- il pianeta cade sul Sole;
- il pianeta entra in un'*orbita chiusa circolare o ellittica* e si lega al Sole, continuando poi a girare intorno ad esso;
- il pianeta passa vicino al Sole, ma descrive una *traiettoria aperta parabolica*;
- il pianeta passa vicino al Sole e descrive una *traiettoria aperta iperbolica*.

Da che cosa dipende il verificarsi di uno dei casi sopra citati?

Ci aiutano nella risposta le considerazioni energetiche sul sistema Sole-Pianeta.

1° caso: il pianeta entra in orbita intorno al Sole

considerando fermo il Sole e in movimento il pianeta che si muove con velocità v a distanza r dal Sole, l'energia totale del sistema vale:

$$E = \frac{1}{2} m_p v^2 - G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{r}$$

Nel moto del pianeta, che per semplicità possiamo considerare circolare uniforme abbiamo:

$$a_{centripeta} = a_{gravitazionale}$$

E, di conseguenza, possiamo scrivere: $\frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_s}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_s}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M_s}{r}}$

L'espressione dell'energia totale diventa: $E = G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{2r} - G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{r} = -G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{2r}$

Notiamo anzitutto che nel caso dell'orbita circolare:

- l'energia cinetica è esattamente metà del valore assoluto dell'energia gravitazionale: quindi prevale l'energia gravitazionale;
- che l'energia totale è negativa e ciò significa che le masse del pianeta e del Sole sono legate.

Analoghe considerazioni si possono fare per un'orbita ellittica, considerando r come distanza media del pianeta dal Sole. Aumentando la velocità, l'orbita si modifica, ma rimane sempre chiusa fino a che l'energia totale risulta negativa.

2° caso: il pianeta cade sul Sole

Da quanto scritto prima dobbiamo dedurre che, se l'energia cinetica non è sufficiente a tenere in orbita il pianeta o qualsiasi massa che passa vicino al Sole, la massa cade sul Sole.

In questo caso, la massa del pianeta ha velocità: $v = \sqrt{G \cdot \frac{M_s}{r}}$

Quando l'energia totale del sistema è nulla, il sistema non è più legato e il corpo celeste, pur passando vicino al Sole sfugge alla sua attrazione e riesce ad allontanarsi descrivendo una traiettoria aperta, parabolica:

$$E = \frac{1}{2}m_p v^2 - G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m_p v^2 = G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{r}$$

l'energia cinetica è uguale, in valore assoluto, all'energia gravitazionale.

In tal caso la velocità del pianeta è $\sqrt{2 \frac{GM_s}{r}}$

4° caso: il pianeta percorre un'orbita iperbolica Quando l'energia totale del sistema è maggiore di zero, cioè quando risulta:

$$E = \frac{1}{2}m_p v^2 - G \cdot \frac{M_s \cdot m_p}{r} > 0$$

l'energia cinetica supera il valore assoluto dell'energia gravitazionale e prevale su questa; il Sole non riesce a trattenere il pianeta e questo si allontana con una velo-

cità $v = \sqrt{2 \frac{GM_s}{r}}$, descrivendo una traiettoria iperbolica.

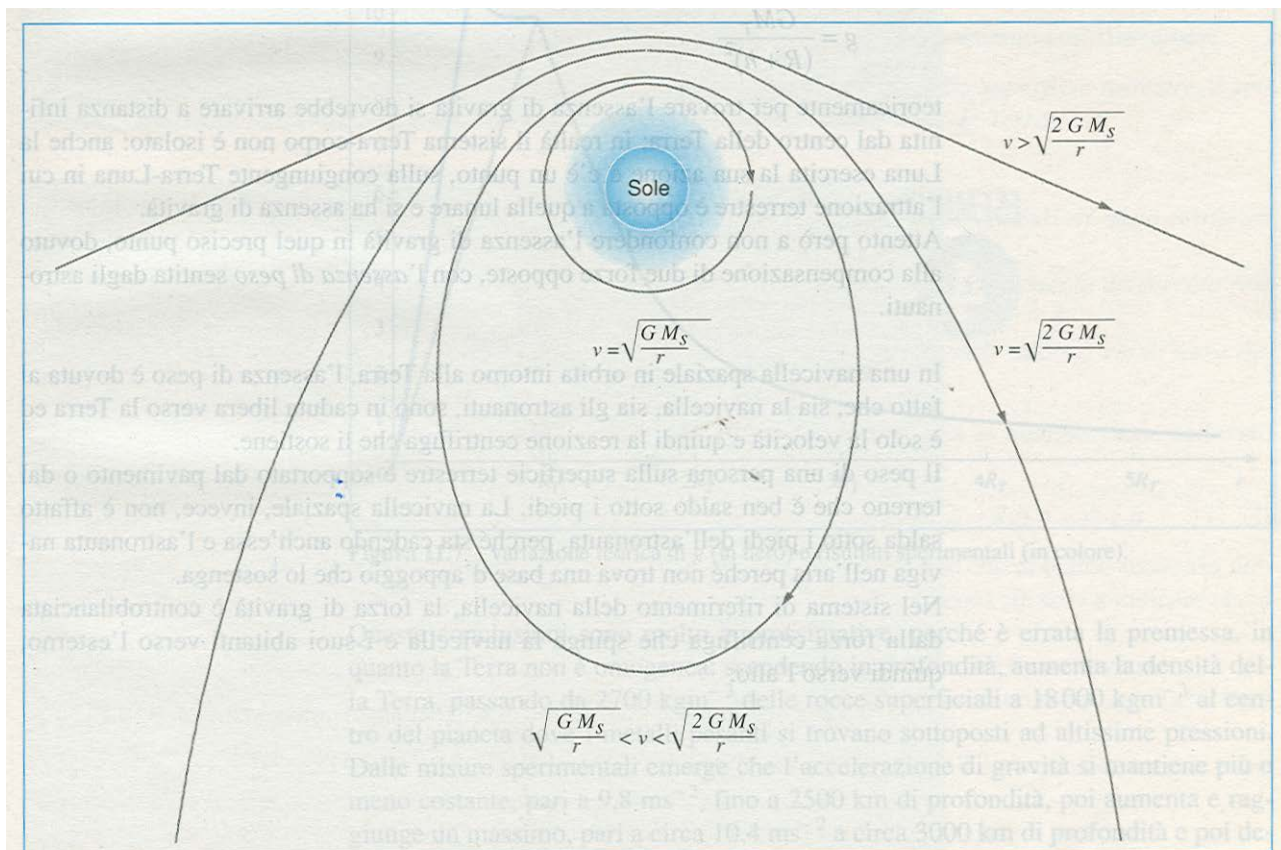


Figura 11.6 Possibili orbite dei corpi celesti nel sistema solare.

Possiamo concludere affermando che:

- *l'orbita descritta dal pianeta dipende dalla sua velocità;*

– se $v_p < \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$ la massa **cade sul Sole**;

se $v_p = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$, il pianeta percorre un'**orbita circolare** intorno al Sole;

se $\sqrt{\frac{GM_s}{r}} < v_p < \sqrt{2\frac{GM_s}{r}}$, il pianeta percorre un'**orbita ellittica**. In tutti questi tre casi l'energia totale del sistema Sole-Pianeta è **negativa**.

Se $v_p = \sqrt{2\frac{GM_s}{r}}$, il pianeta percorre un'**orbita parabolica** e l'energia totale del sistema Sole-Pianeta è **nulla**;

se $v_p > \sqrt{2\frac{GM_s}{r}}$, il pianeta percorre un'**orbita parabolica** e l'energia totale del sistema Sole-Pianeta è **positiva**.

I due principi di conservazione nel moto dei pianeti sono

- *la conservazione dell'energia meccanica;*
- *la conservazione del momento angolare.*

Il moto nel campo gravitazionale della Terra

Le considerazioni del paragrafo precedente riguardo al moto di una massa nelle vicinanze del Sole, diventano valide anche per il campo gravitazionale terrestre con il solo accorgimento di sostituire la massa del Sole con quella della Terra. Esse non riguardano solo il moto della *Luna*, ma anche quello dei *satelliti* artificiali che l'uomo ha inviato nello spazio e che sono in orbita intorno alla Terra e le modalità necessarie per metterli in orbita.

Passiamo ora alla possibilità di lanciare in orbita un satellite o alla possibilità che un meteorite cada sulla Terra, entri in orbita intorno alla Terra o le passi accanto allontanandosi nello spazio.

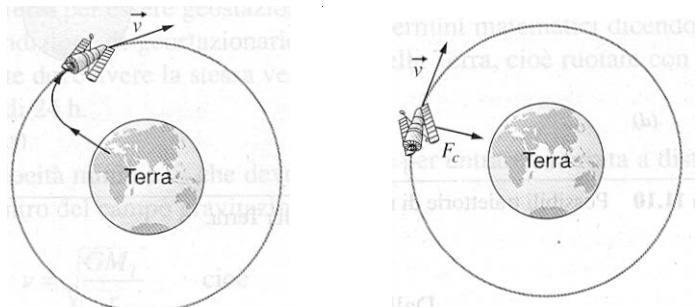
Un corpo lanciato verso l'alto non potrà mai entrare in orbita attorno alla Terra o sfuggire nello spazio; con una maggiore velocità iniziale di lancio può salire più in alto, ma finirà sempre col ricadere.

Infatti, quando si lancia un satellite, nella prima fase il razzo che lo trasporta viene lanciato verso l'alto, affinché giunga nel più breve tempo possibile alla distanza richiesta. Successivamente la traiettoria viene inclinata e quando il satellite si trova sull'orbita desiderata, viene spinto definitivamente, per fargli raggiungere la velocità necessaria per restare in orbita (vedi fig. 11.9).

Figura 11.9

Messa in orbita di un satellite artificiale.

Il satellite entra in orbita quando la sua **velocità vettoriale** $\vec{v}$ è perpendicolare alla **forza gravitazionale terrestre**.



Se il satellite viene portato a una certa altezza h rispetto alla superficie terrestre e gli viene impressa una velocità v in direzione perpendicolare alla forza di gravità, il moto segue le leggi che abbiamo visto per le masse che ruotano intorno al Sole. Abbiamo visto che due sono le velocità limite per le diverse traiettorie in un campo gravitazionale:

- la velocità minima v_0 per entrare in orbita, detta **velocità di sostentamento** o anche **1^a velocità cosmica**.

Questa velocità per la Terra è:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} \approx \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{gR_T} =$$

$$= \sqrt{9,8 \text{ ms}^{-2} \cdot 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}} = \sqrt{6,25 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}} = 7,9 \text{ kms}^{-1}$$

- la velocità minima per entrare in un'orbita aperta che permetta di allontanarsi dal campo gravitazionale. Essa viene indicata con v_f e detta **velocità di fuga** o anche **2^a velocità cosmica**.

Questa velocità per la Terra è:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} \approx \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ ms}^{-2} \cdot 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}} = \sqrt{125 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}} = 11,1 \text{ kms}^{-1}$$

- (a) se $v_{\text{satellite}} < v_0$, il satellite ricade sulla Terra;
 (b), (c), se $v_0 \leq v_{\text{satellite}} < v_f$, il satellite entra in orbita chiusa;
 (d), (e) se $v_{\text{satellite}} \geq v_f$, il satellite si allontana definitivamente dalla Terra percorrendo un'orbita aperta.

La velocità di fuga da un pianeta

La velocità di fuga da un pianeta (o da un qualsiasi altro corpo celeste) è la velocità minima con la quale un corpo deve essere lanciato dalla superficie del pianeta perché non vi faccia più ritorno. Calcoliamo la velocità di fuga da un pianeta (ad esempio la Terra) o da un altro corpo celeste. Si chiama velocità di fuga di un corpo di massa m la minima velocità che deve essere posseduta dalla massa m per allontanarsi per sempre dal pianeta di Massa M senza più ricadervi. Supponiamo che un corpo di massa m sia lanciato dalla superficie del pianeta con una velocità iniziale avente modulo v . La sua energia potenziale iniziale è $U_i = -G \cdot \frac{mM}{R}$ con R raggio del pianeta, la sua energia cinetica iniziale è $K_i = \frac{1}{2}mv^2$, la sua energia meccanica totale è

$$E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R}$$

Quando il corpo di massa m non risente più dell'attrazione gravitazionale del pianeta (e questo avviene quando il corpo si trova all'infinito, cioè a grande distanza dal pianeta), la sua energia potenziale è $U_f = 0$, la sua energia cinetica è $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$, la sua energia meccanica totale è:

$$E_f = K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \geq 0$$

Utilizzando la legge di conservazione dell'energia meccanica, possiamo scrivere:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} = K_f \geq 0$$

Il valore di v , in corrispondenza del quale abbiamo $K_f = 0$, cioè $v_f = 0$ (il corpo di massa m ha velocità nulla) prende il nome di velocità di fuga o seconda velocità cosmica. Otteniamo:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} = 0 \quad v_f = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{R}}$$

Eseguendo il calcolo numerico per il pianeta Terra, ricordando che risulta $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ otteniamo:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot (6,67 \cdot 10^{-11}) \cdot (5,98 \cdot 10^{24})}{6,38 \cdot 10^6}} = 1,12 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

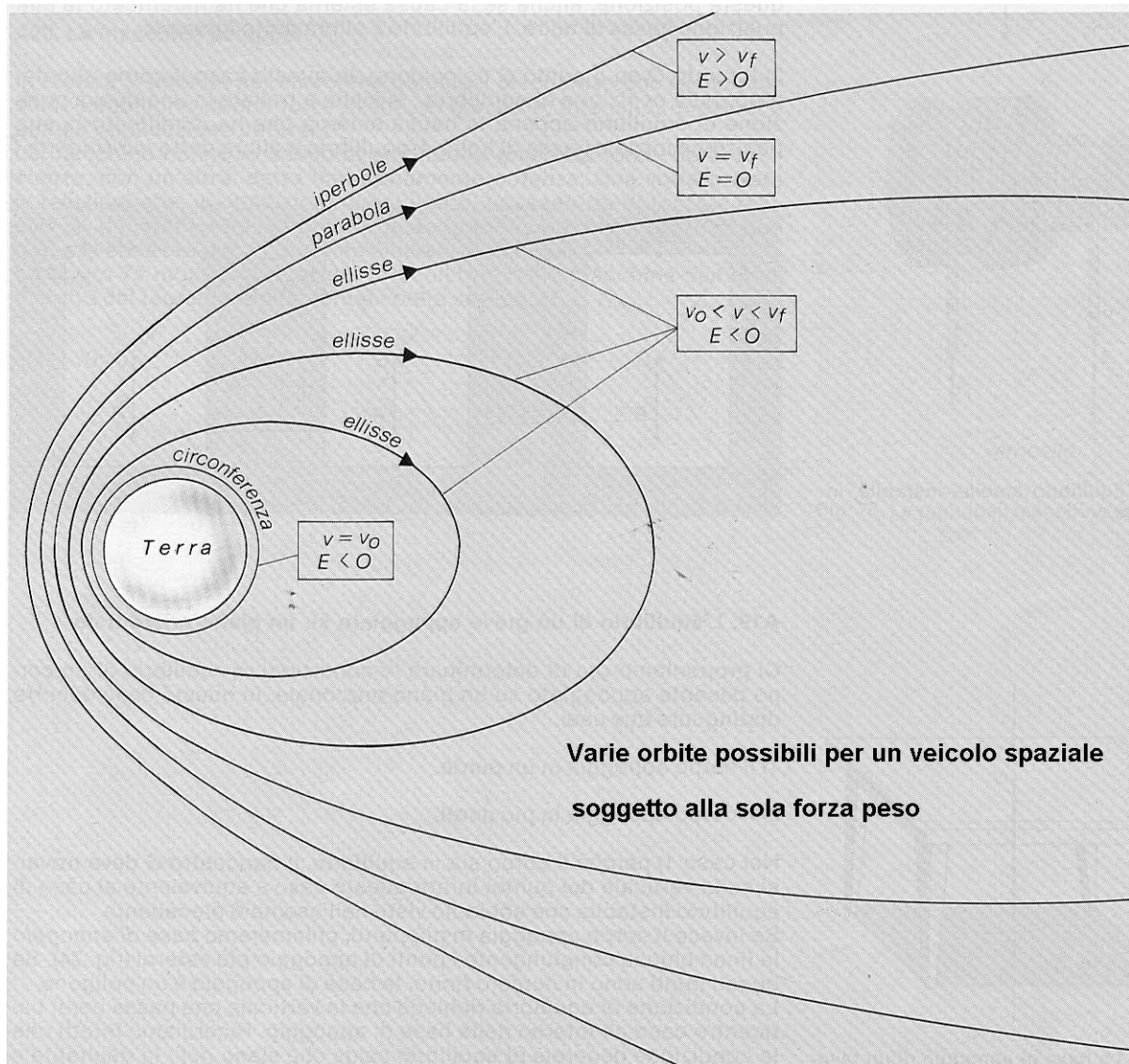
La velocità di fuga non dipende dalla massa del corpo lanciato dalla terra; essa dipende esclusivamente dalla massa della Terra e dal suo raggio.

Per $v_f = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ il corpo di massa m descrive un'orbita parabolica attorno alla Terra che occupa il fuoco della parabola. Il corpo si allontana dalla Terra lungo la traiettoria parabolica con il modulo della velocità che diminuisce fino ad annullarsi all'infinito.

Per $v_f > 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ il corpo di massa m descrive un'orbita iperbolica, con la Terra che occupa uno dei due fuochi dell'iperbole.

La formula $v_f = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{R}}$ è teoricamente vera quando il corpo viene lanciato partendo dalla superficie della Terra ed il satellite dovrebbe volare raso terra, con tutti gli inconvenienti dovuti al fatto che la terra non è perfettamente sferica, ma ha pianure e rilievi. Nella pratica al posto di R dovremmo scrivere $R + h$, con h distanza del satellite dalla superficie esterna della Terra.

$$v_f = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{R + h}}$$



Conclusione finale

Quando il satellite parte dalla Terra (o meglio dalla quota $R + h$) ha energia meccanica

totale
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R}$$

Si può dimostrare quanto segue:

a) $v < v_f \Rightarrow E < 0$ Il satellite non possiede energia cinetica sufficiente per sfuggire al campo gravitazionale terrestre e pertanto la sua orbita sarà una circonferenza o una ellisse.

b) $v = v_f \Rightarrow E = 0$ Il satellite possiede energia cinetica sufficiente per sfuggire al campo gravitazionale terrestre, la sua velocità tende a zero a mano a mano che si allontana dalla Terra; si può dimostrare che la sua orbita è una parabola, con la Terra posta nel fuoco.

c) $v > v_f \Rightarrow E > 0$ Il satellite possiede energia cinetica sufficiente per sfuggire al campo gravitazionale terrestre, e la sua velocità non tende a zero a mano a mano che si allontana dalla Terra; ma tende ad un valore finale u dato dalla legge di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} u^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 - G \cdot \frac{\cancel{m} \cdot m_T}{r}$$

con $r = R_T + h$ distanza del satellite dal centro della Terra di raggio R_T .

$$u = \sqrt{v^2 - 2G \cdot \frac{m_T}{r}} = \sqrt{v^2 - 2G \cdot \frac{m_T}{R_T + h}}$$

Si può dimostrare che la sua orbita è una iperbole, con la Terra posta in uno dei due fuochi.

Satellite geostazionario o sincrono

Un satellite è detto **geostazionario** o **sincrono** quando, rispetto ad un osservatore solidale con la Terra, resta in posizione fissa ad una certa altezza al disopra dell'equatore terrestre. Un satellite geostazionario descrive sul piano equatoriale un'orbita circolare ruotando con lo stesso periodo e nello stesso verso in cui la Terra ruota attorno al suo asse. Questo significa che il tempo T impiegato dal satellite a descrivere la sua orbita circolare deve essere uguale al tempo T impiegato dalla Terra a compirè una rotazione completa attorno al proprio asse.

$$T = 24 \text{ ore} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

La condizione di geostazionarietà si traduce in termini matematici affermando che il satellite deve avere la **stessa velocità angolare** della Terra. Se il periodo di rotazione attorno al proprio asse della Terra è uguale al periodo di rivoluzione del satellite, la Terra ed il satellite ruotano assieme (in modo **sincrono**) ed il satellite rimane in una posizione fissa rispetto alla Terra.

Ad un osservatore solidale con la Terra il satellite geostazionario appare fermo.

I satelliti geostazionari sono usati per telecomunicazioni e per previsioni meteorologiche.

Determiniamo l'altezza sulla superficie terrestre a cui un tale satellite deve orbitare e la velocità con la quale percorre l'orbita.

Siano $R_T = 6380 \text{ km}$ il raggio della Terra ed ha la quota del satellite sincrono che descrive l'orbita circolare con velocità lineare v .

$$v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T} = \text{velocità lineare del satellite geostazionario}$$

L'accelerazione centripeta del satellite è: $a_c = \frac{v^2}{R_T + h} = \frac{4\pi^2(R_T + h)}{T^2}$

L'accelerazione gravitazionale del satellite vale:

$$a_{grav} = \frac{F_{grav}}{m} = \frac{G \times \frac{m \cdot M_T}{(R_T + h)^2}}{m} = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$a_c = a_{grav} \Rightarrow \frac{4\pi^2(R_T + h)}{T^2} = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \Rightarrow (R_T + h)^3 = \frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{(6,67 \cdot 10^{-11}) \cdot (5,98 \cdot 10^{24}) \cdot (86400)^2}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7 m = 42200 km$$

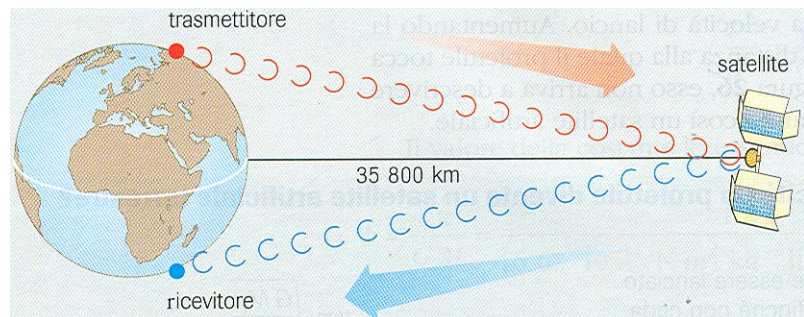
Un **satellite geostazionario** ruota attorno alla Terra descrivendo un'orbita circolare di raggio

$$r = R_T + h = 42 \cdot 200 km$$

$$h = r - R_T = 42200 - R_T = 42200 - 6380 = 35800 km$$

$$v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T} = \frac{2\pi \cdot 42200}{86400} = 3,07 \frac{km}{s} = 3070 \frac{m}{s}$$

Telecomunicazioni intercontinentali per mezzo di un satellite geostazionario.



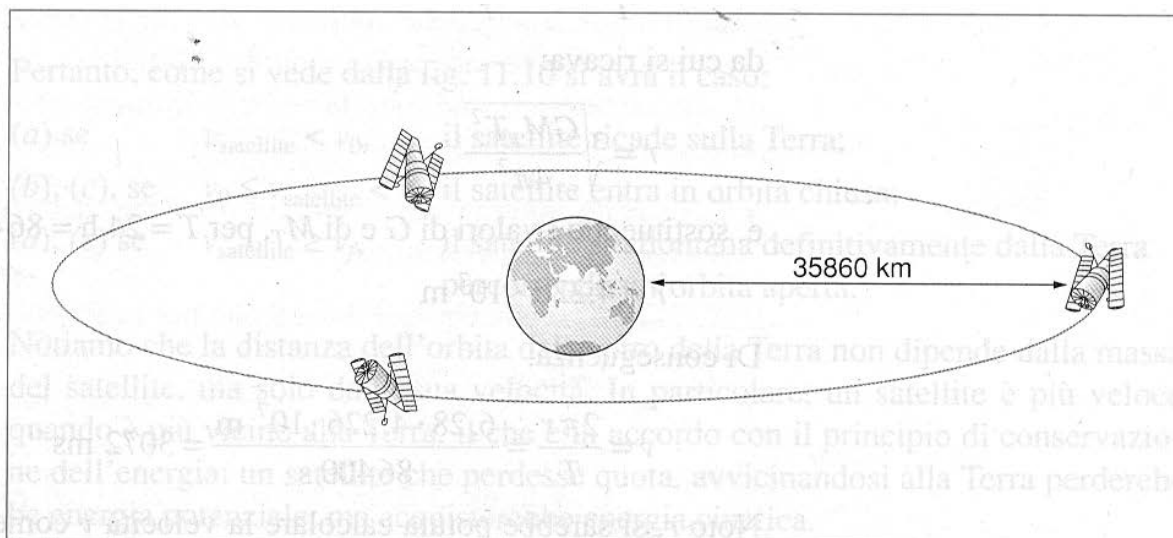
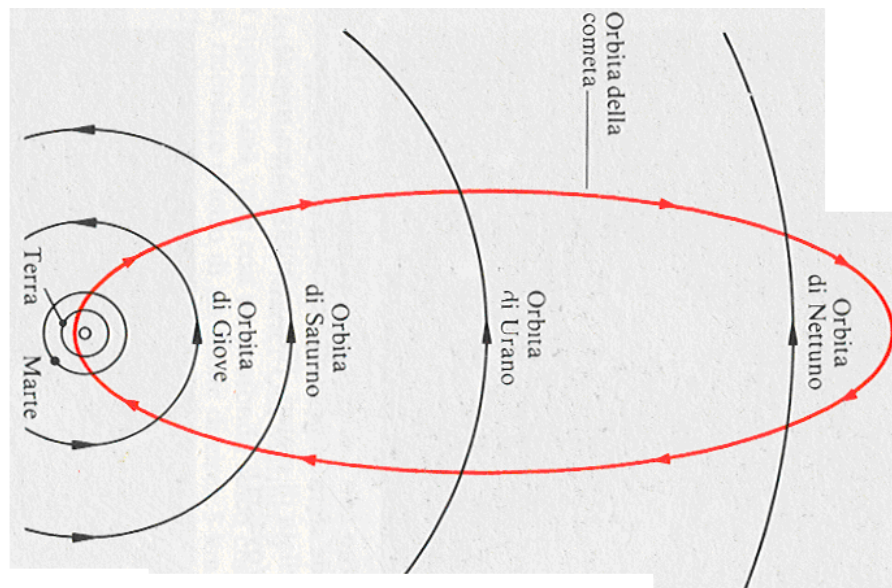


Figura 11.12 Sono sufficienti tre satelliti geostazionari situati a 120° l'uno dall'altro per coprire tutta la superficie terrestre.

I. Le comete. Le comete sono frammenti di materia il cui diametro al massimo raggiunge il valore di alcuni chilometri. In genere si muovono attorno al Sole, su orbite ellittiche molto allungate, e i loro periodi di rivoluzione possono essere di migliaia o anche di milioni di anni. Il calcolo delle loro orbite è estremamente difficile, perché il tratto di orbita lungo il quale ciascuna cometa viene osservata è molto breve e alla misura può sembrare quasi parabolico.

Quando una cometa si avvicina al Sole, si riscalda e una parte del materiale di cui è costituita evapora e finisce per formare nello spazio la coda della cometa, che può raggiungere una lunghezza di 300 milioni di chilometri, diventando molto appariscente nel cielo. La coda è costituita da gas rarefatti ed è sempre rivolta in direzione opposta al Sole. Più avanti vedremo come questo fatto sia dovuto alla pressione esercitata dalla radiazione solare. Quando la cometa si è sufficientemente allontanata dal Sole, l'evaporazione cessa e la cometa diventa invisibile fino al prossimo ritorno.

In questo modo noi raccogliamo, ad esempio per la cometa di Halley, informazioni di secolo in secolo. Questa cometa gira attorno al Sole in appena 76 anni e fu vista già nel 1066: infatti la sua apparizione è illustrata su di un arazzo dell'epoca. Successivamente venne osservata nel 1531, 1607 e 1682 e l'astronomo inglese Edmund Halley, che calcolò la sua orbita, predisse giustamente la sua nuova apparizione per il 1758. La cometa apparve poi anche nel 1835 e nel 1910. Il prossimo perielio è atteso per il 1986.



L'orbita della cometa di Halley

Ogni volta che una cometa passa vicino al Sole perde un po' di materia diventando così sempre più piccola fino a scomparire. Per esempio la cometa Biela, nel 1846, passando vicino al Sole si spezzò in due parti che ricomparvero nel 1852. Da allora la cometa è scomparsa. Sono però state osservate, nei momenti in cui la cometa avrebbe dovuto ritornare, degli sciami luminosi di stelle cadenti probabilmente i resti della cometa.

J. I meteoriti. I meteoriti sono frammenti di materia provenienti dallo spazio – probabilmente dalla fascia degli asteroidi – che cadono sulla Terra. Ad esempio, la pietra santa della Mecca è un meteorite.

Grossi meteoriti sono fortunatamente rari, infatti con la loro caduta potrebbero produrre effetti disastrosi come prova il cratere di 180 metri di profondità prodotto da un meteorite in Arizona. I piccoli meteoriti all'entrata nell'atmosfera vengono così fortemente riscaldati per attrito che vaporizzano manifestandosi come luminose stelle cadenti. Si parla allora di meteore.

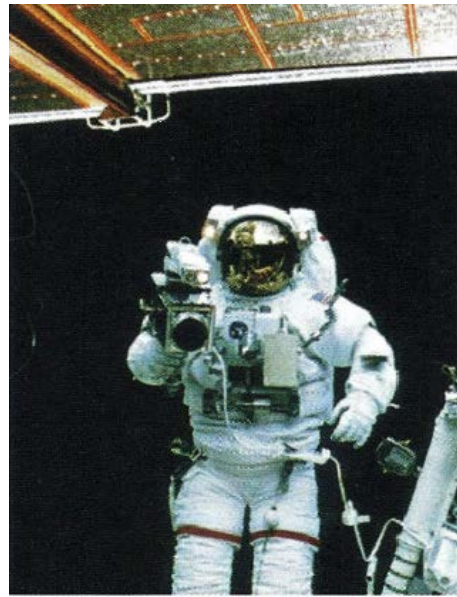
Se si escludono i 400 kg di pietra che gli astronauti dell'Apollo hanno portato sulla Terra dalla Luna, i meteoriti sono gli unici materiali extraterrestri che possiamo analizzare, e rivestono quindi un ruolo molto importante nella ricerca.

Peso effettivo e peso apparente per un corpo di massa m

Assenza di gravità per un astronauta all'interno di una navicella spaziale che orbita attorno alla Terra

Domanda: Un astronauta in orbita su una nave spaziale a 1000 km dalla superficie della Terra si sente senza peso. Perché? Forse perché, a questa quota, è trascurabile la forza di gravità esercitata dalla Terra sull'astronauta?

L'astronauta è in equilibrio rispetto alla navicella spaziale in quanto soggetto a due forze aventi la stessa direzione, lo stesso modulo e versi opposti: la forza di gravità $\vec{F}_g$ (forza reale in quanto nasce come interazione fra corpi) e la forza centrifuga $\vec{F}_{cen}$ (forza inerziale o apparente in quanto non nasce come interazione fra corpi ma esiste perché riferita ad un sistema accelerato).



Iniziamo la discussione domandandoci cosa dobbiamo intendere per **peso di un corpo**. Il peso di un corpo di massa m è la forza esercitata sul corpo dalla forza di gravità. Sulla Terra, il **peso di un corpo** coincide con la forza di gravità che la Terra esercita sul corpo. Similmente il **peso di un corpo** sulla Luna è dovuto all'attrazione gravitazionale della Luna. Consideriamo un astronauta all'interno di una navicella spaziale in orbita alla quota $h=1000\text{ km}$ rispetto alla superficie sferica della Terra. A questa distanza l'accelerazione di gravità vale $g=7,3\frac{m}{s^2}$. Infatti risulta:

$g = g_o \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$ con $g_o = 9,8\frac{m}{s^2}$ accelerazione di gravità sulla superficie della Terra. Ad una quota

$$h=1000\text{ km} \text{ abbiamo: } g = 9,8 \cdot \frac{(6,37 \cdot 10^6)^2}{(6,37 \cdot 10^6 + 10^6)^2} = 7,3\frac{m}{s^2}$$

Un corpo di massa $m=1\text{ kg}$ sulla Terra pesa $P=1 \cdot 9,8=9,8\text{ N}$; alla quota $h=1000\text{ km}$ pesa:

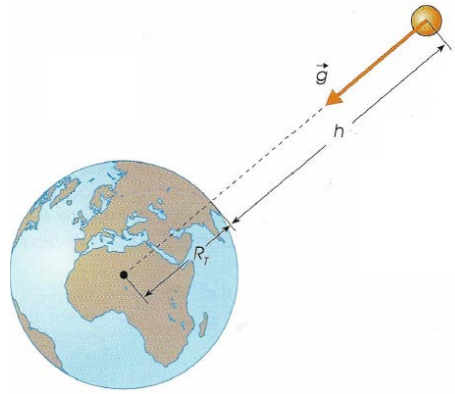
$$P_{R_T+h} = 1 \cdot 7,3 = 7,3\text{ N}$$

Dimostrazione delle formule precedenti

Sulla superficie della Terra l'accelerazione (di gravità) va calcolata applicando la formula:

$$g_o = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{m \cdot R_T^2} = G \cdot \frac{m_T}{R_T^2} = 9,81 \frac{m}{s^2} \quad m_T = \frac{g_o \cdot R_T^2}{G}$$

Se il corpo si trova ad un'altezza h dalla superficie terrestre, la sua distanza dal centro della Terra è $R_T + h$ e l'intensità



della forza gravitazionale diventa: $F = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{(R_T + h)^2}$

In questa situazione l'accelerazione del corpo va calcolata applicando la formula:

$$g_o = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{m \cdot (R_T + h)^2} = G \cdot \frac{m_T}{(R_T + h)^2} = \cancel{G} \cdot \frac{m_T}{(R_T + h)^2} \cdot \frac{g_o \cdot R_T^2}{\cancel{G}} = g_o \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Quindi, per un osservatore solidale con la Terra, un astronauta di massa $m = 60 \text{ kg}$ ha un peso pari a:

$$P = 60 \cdot 7,3 = 438 \text{ N}$$

Tuttavia si dice che gli astronauti in orbita attorno alla Terra sono privi di peso. Dobbiamo distinguere tra **peso effettivo** di un corpo e suo **peso apparente**. Si ha il **peso effettivo** di un corpo di massa m quando viene calcolato rispetto ad un sistema di riferimento inerziale; si ha il **peso apparente** quando viene calcolato rispetto ad un sistema di riferimento accelerato dove sono presenti delle forze inerziali o forze fittizie. Il **peso apparente** è la somma di tutte le forze reali e fittizie che agiscono sul corpo in un sistema accelerato. In un sistema di riferimento inerziale solidale con la Terra, la navicella spaziale ruota attorno alla Terra per effetto della forza gravitazionale che è la forza centripeta che consente alla navicella di descrivere la sua orbita circolare. Ben diversa è la situazione in un sistema di riferimento non inerziale collegato con la navicella. In questo sistema la navicella, ed anche l'astronauta, è soggetto alla forza di gravità ed alla **forza centrifuga**, sotto l'azione delle quali è in equilibrio. La situazione dell'astronauta all'interno della capsula spaziale è in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità che è una forza centripeta e della forza apparente che è una forza centrifuga. Queste due forze sono uguali ed opposte. Ciò che, nel linguaggio comune, si chiama peso (apparente) è la somma vettoriale nulla della forza gravitazionale (forza reale) e della forza fittizia (forza centrifuga). Concludiamo che rispetto alla navicella spaziale gli astronauti galleggiano in quanto sono privi di peso (apparente). In particolare possiamo precisare che se l'astronauta tiene i piedi sul pavimento della capsula non è soggetto ad alcuna reazione da parte del pavimento della capsula in quanto non esercita alcuna azione su di esso.

Problemi sulla gravitazione universale

- H.R.W. pag. 305 N° 14.6 + 14.7 + 14.8 + 14.9 + 14.10
- Mazzoldi pag. 173 N° 5-4 + Tabella di pagina 185
- Caforio Ferilli pagina 402 N° 2 pagina 419 N° 185 pag. 424 N° 08 pag. 428 N° 35 p.431 N°63

DOMANDE TEORICHE

D01) Quanto vale la costante di gravitazione universale G sulla luna ?

R01) Lo stesso che sulla superficie terrestre o in qualsiasi altro luogo , poiché si tratta di una costante universale

D02) Dire se la forza che determina la rotazione della luna attorno alla terra è il risultante della forza centripeta e della forza gravitazionale dovuta alla terra .

R02) Falso ; le due forze sono la stessa identica cosa

D03) La massa della luna è molto più piccola della massa della terra . E' giusto dire che la Luna attrae la Terra con una forza minore di quella che la Terra esercita sulla Luna ?

R03) No ,in quanto per la terza legge della dinamica la Terra e la Luna interagiscono fra loro con una a avente la stessa intensità.

D04) Immaginiamo che venga scoperto un pianeta che orbita attorno al Sole ad una distanza doppia di quella della terra . Che periodo di rivoluzione T_1 ha quel pianeta ?

R04) Si applica la terza legge di Keplero $T^2 = k r^3$; $T_2^2 : T_1^2 = r_2^3 : r_1^3$, $r_2 = 2r_1 \Rightarrow$
 $T_2^2 = 8 \cdot T_1^2$ $T_2 = T_1 \cdot \sqrt{8}$, T_1 = periodo di rivoluzione della terra ; T_2 circa 2 anni e 10 mesi

D05) A parità di distanza , se triplichiamo la massa die due corpi , di quanto aumenta la forza di attrazione gravitazionale ?

R05) di 9 volte

D06) Calcolare la massa del Sole , conoscendo il raggio dell'orbita terrestre ed il periodo di rivoluzione della terra .

R06) $m_s = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2} = 1,96 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

D07) Calcolare la velocità v ed il periodo di rivoluzione T di un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Terra ad un'altezza di 200 km

R07) $v = 7,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ $T = 88 \text{ minuti}$. Si tratta di calcolare l'accelerazione di gravità g a 6370 + 200 chilometri dal centro della terra e ricordare le formule relative al moto circolare uniforme che ha g come accelerazione centripeta . Oppure possiamo ricorrere alla terza legge di Keplero , conoscendo i dati relativi al moto della Luna

D08) Calcolare la velocità v ed il periodo di rivoluzione T di un satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Luna ad un'altezza di 200 km

R08) $v = 1,6 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ $T = 124\text{ minuti}$.

D9) A che quota deve trovarsi l'orbita di un satellite geostazionario ? Un satellite è **geostazionario** quando orbita in 24 ore nello stesso senso della rotazione Terra attorno al proprio asse . In questo modo il satellite appare praticamente fermo nel cielo .

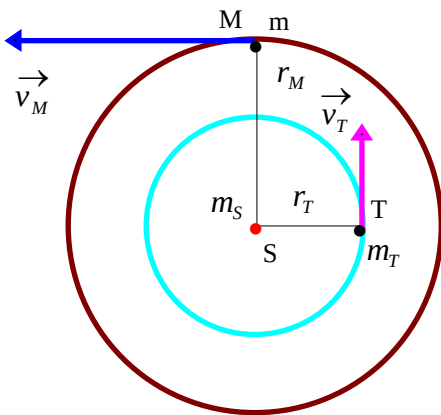
R09) 35900 km

D10) Calcolare il valore dell'accelerazione di gravità g_G su Giove , sapendo che il suo diametro è 11,3 volte maggiore di quello terrestre e la massa m_G 337 volte maggiore di quella terrestre .

R10) $g_G = 2,6 g = 25,48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ciò significa che un corpo , su Giove , pesa circa 2,6 volte quello che pesa sulla Terra .

D11) La Terra e Marte sono due pianeti del Sole . Supponendo che essi descrivono due orbite circolari aventi rispettivamente raggi r_T ed r_M , calcolare il rapporto delle loro velocità lineari .

R11)



$$a_T = \frac{v_T^2}{r_T} = \text{accelerazione centripeta della Terra}$$

$$a_M = \frac{v_M^2}{r_M} = \text{accelerazione centripeta di Marte}$$

$$F_T = m_T \cdot \frac{v_T^2}{r_T} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_T}{r_T^2}$$

$$F_M = m \cdot \frac{v_M^2}{r_M} = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r_M^2}$$

$$G \cdot m_S = v_T^2 \cdot r_T = v_M^2 \cdot r_M \Rightarrow \frac{v_T}{v_M} = \sqrt{\frac{r_M}{r_T}} \Rightarrow v_T > v_M$$