Unità didattica N° 7

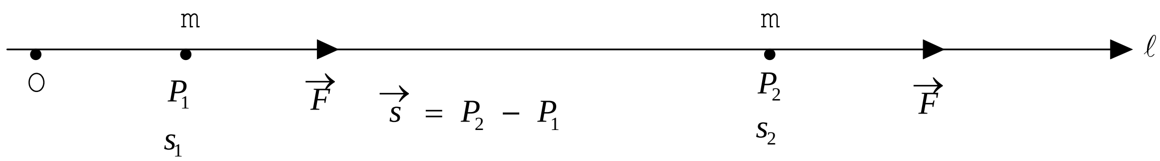
Lavoro, energia, urti

Lavoro compiuto da una forza

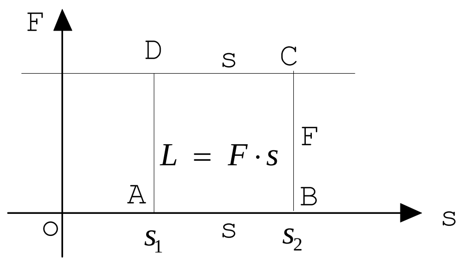
Ad un punto P di massa **m** che si muove con velocità vettoriale $\vec{v}$ sia applicata la forza $\vec{F}$. In generale $\vec{F}$ e $\vec{v}$ sono vettori funzioni del tempo **t** e formano tra loro un angolo ϑ . Può convenire decomporre $\vec{F}$ lungo due direzioni , una parallela a $\vec{v}$ (e quindi anche allo spostamento $\vec{s}$ in quanto $\vec{v} // \vec{s}$) e l'altra perpendicolare a $\vec{v}$: $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$ $(\vec{F}_t // \vec{v} \, , \vec{F}_n \perp \vec{v})$

La forza $\vec{F}$ **compie lavoro** quando sposta il suo punto di applicazione da una posizione P_1 ad un ' altra P_2 . Analizziamo vari casi :

1) $\vec{F}$ **è costante in modulo , direzione e verso** e forma un angolo nullo con lo spostamento $\vec{s} = P_2 - P_1$.



Definiamo lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\vec{s} = P_2 - P_1$ il seguente prodotto scalare : $\boxed{L = \vec{F} \times \vec{s} = F \cdot s}$ **[1]**



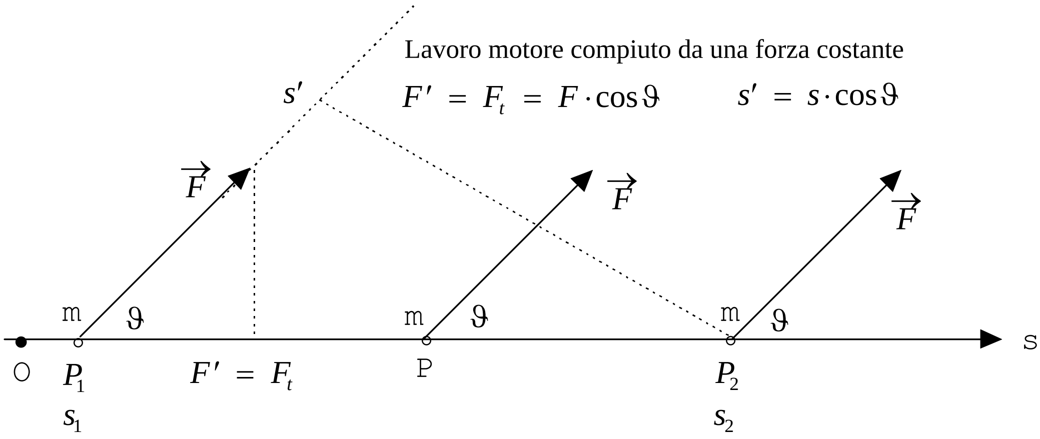
In questo caso , considerato il diagramma della funzione $F = F(s)$, possiamo affermare che il lavoro compiuto dalla forza F è numericamente uguale all'area del rettangolo ABCD .

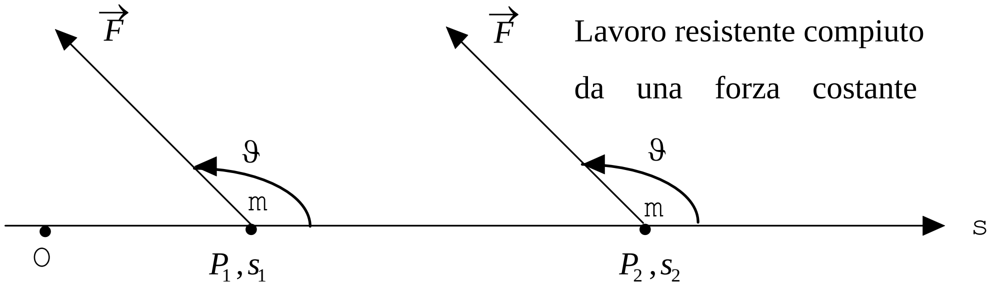
2) $\vec{F}$ **è costante in modulo , direzione e verso** ma forma un angolo ϑ con lo spostamento $\vec{s}$.

In questo caso risulta :

$$\boxed{L = \vec{F} \times \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\vartheta = F \cdot s' = F' \cdot s} \qquad 0 \le \vartheta \le 180° \qquad \textbf{[2]}$$

$$L = \vec{F} \times \vec{s} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right) \times \vec{s} = \vec{F}_t \times \vec{s} + \vec{F}_n \times \vec{s} = \vec{F}_t \times \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\vartheta$$





$\vec{F}_n$ non compie lavoro ; $\vec{F}_t$ compie tutto il lavoro . $L\left(\vec{F}\right) = L\left(\vec{F}_t\right) = S(ABCD)$ dove in ordinata riportiamo i valori di F_t . Quindi , se su una particella m agisce una forza $\vec{F}$ compie lavoro soltanto il componente di $\vec{F}$ che agisce nella direzione dello spostamento , mentre non compie lavoro il componente normale .

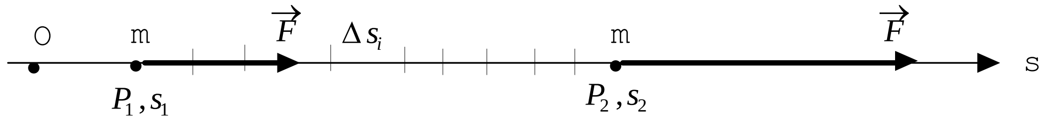
$0 \leq \vartheta < 90°$ il lavoro è positivo e dicesi **lavoro motore** (La forza $\vec{F}$ agevola il movimento della massa m ; $\vec{F}_t$ ha lo stesso verso di $\vec{s}$ e quindi di $\overrightarrow{v}$)

$90° < \vartheta \leq 180°$ il lavoro è negativo e dicesi **lavoro resistente** (La forza $\vec{F}$ si oppone al moto della particella m , $\vec{F}_t$ ha verso opposto ad $\vec{s}$ e quindi a $\overrightarrow{v}$)

$\vartheta = 90°$ il lavoro è nullo . Naturalmente altre forze possono agire sulla massa **m** e quindi $\vec{F}$ può spostare (come nel nostro caso) il suo punto di applicazione in una direzione diversa da quella lungo la quale agisce tale forza . L ' equazione [2] si riferisce soltanto al lavoro compiuto sulla particella m dalla singola forza $\vec{F}$. Il lavoro compiuto sulla massa **m** da eventuali altre forze deve essere calcolato separatamente .

Il lavoro totale compiuto sulla particella m è la somma algebrica dei lavori compiuti dalle singole forze .

3) $\vec{F}$ **è costante in direzione e verso ma non in modulo**



Lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ variabile soltanto in modulo

Si divide lo spostamento $s = P_1P_2$ in tratti Δs_i piccolissimi in maniera che in ciascuno di essi la forza possa ritenersi costante . Risulta :

$$\boxed{L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_2 + \cdots = F \cdot \Delta s_1 + F \cdot \Delta s_2 + F \cdot \Delta s_2 + \cdots}$$

Teoricamente dovremmo considerare spostamenti infinitesimi $d\vec{s}$ e definire **lavoro elementare** dL compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ il seguente prodotto scalare :

$$\boxed{dL = \vec{F} \times d\vec{s} = F \cdot ds = F \cdot v \cdot dt}$$

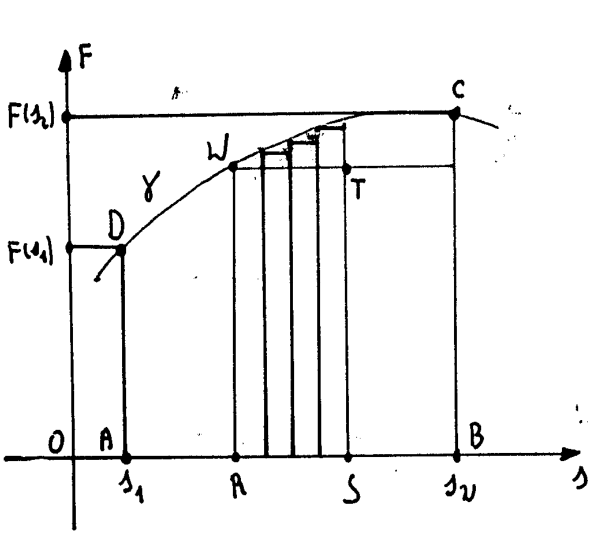
Il lavoro totale **L** è dato da :

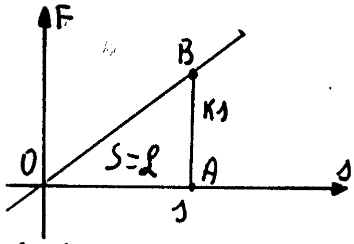
$$\boxed{L = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum \vec{F} \times \Delta \vec{s}_i = \int_{P_1}^{P_2} dL = \int_{s_1}^{s_2} F\,ds = \int_{t_1}^{t_2} F\,v\,dt}$$

Consideriamo il diagramma γ della funzione $F = F(s)$. Dividiamo l'intervallo $s = s_2 - s_1$ in n intervalli (non necessariamente) uguali . Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\Delta \vec{s}_i$ (con approssimazione tanto migliore quanto maggiore è n) è dato dall'area del rettangolo RSTU . Quando $\Delta \vec{s}_i$ è piccolissimo (teoricamente infinitesimo) l'area del rettangolo si identifica con l'area del trapezoide di base $\Delta \vec{s}_i$ e coincide col lavoro effettivamente compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo $\Delta \vec{s}_i$. Allora , pur di suddividere il tratto **s** in un numero grandissimo di intervallini parziali (teoricamente in un numero infinito) , il lavoro totale compiuto dalla forza variabile $\vec{F}$ quando questa sposta il suo punto di applicazione da P_1 a P_2 , sarà dato dalla somma dei lavori elementari parziali così ottenuti . Per esempio consideriamo una molla fissata (nell'estremo B) ad una parete ; assumiamo come traiettoria **s** l'asse orizzontale della molla e scegliamo l'origine (s=0) coincidente con l'estremo libero A della molla nella sua posizione di equilibrio . La direzione positiva dell'asse s sia quella che si allontana dalla parete .

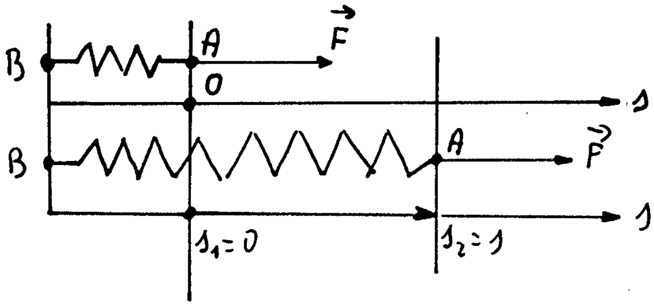
Supponiamo di allungare la molla cosi lentamente da poterla considerare in ogni istante in equilibrio ($a = 0$)

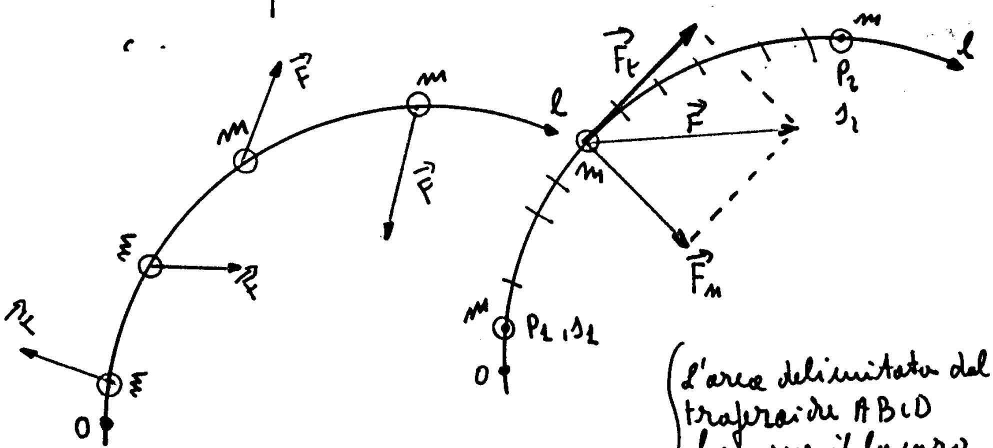
Quando A si porta in una posizione **s** , la molla eserciterà su di noi una forza data con buona approssimazione da : $\vec{F}_i = -k\vec{s}$ $\qquad F_1 = -k\,s$





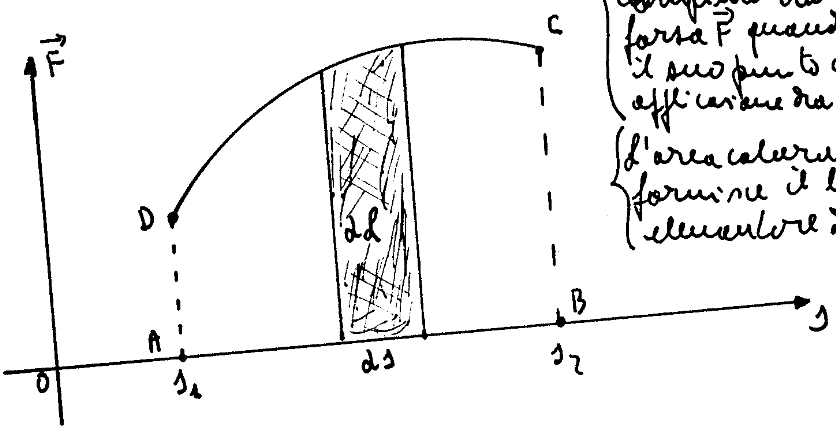
La forza esercitata nell'allungare una molla è $\vec{F} = k\vec{s}$. L'area sotto la curva che dà la forza in funzione dell'allungamento è il lavoro eseguito da $\vec{F}$ nel deformare la molla di un tratto s.





L'area delimitata dal trapezoide ABCD fornisce il lavoro compiuto dalla generica forza $\vec{F}$ quando sposta il suo punto di applicazione da P_1 a P_2

L'area colorata fornisce il lavoro elementare dL



Per allungare la molla noi dobbiamo esercitare su di essa una forza $\vec{F}$ uguale e contraria alla forza $\vec{F}_1$ esercitata dalla molla su di noi . La forza applicata all'estremo A dalla molla elastica è pertanto $F = k\,s$ ed il lavoro fatto da essa per allungare la molla di s metri è dato dall'area del triangolo OAB , cioè :

$$\boxed{L = \frac{1}{2} \cdot s \cdot ks = \frac{1}{2} k\,s^2}$$

4) $\vec{F}$ **è variabile in modulo , direzione e verso** ed il suo punto di applicazione descrive una traiettoria ℓ qualsiasi . Tenendo presente che $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$, definiamo **lavoro elementare** $d\,L$ compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento infinitesimo $d\,\vec{s} = \vec{v}\,d\,t$ il seguente prodotto scalare :

$$\boxed{d\,L = \vec{F} \times d\,\vec{s} = \vec{F}_t \times d\,\vec{s} = \vec{F}_t \times \vec{v}\,d\,t = F \cdot \cos\vartheta \cdot ds = F \cdot v \cdot \cos\vartheta \cdot d\,t}$$

Se vogliamo calcolare il lavoro compiuto da $\vec{F}$ quando il punto P si sposta dalla posizione P_1 alla posizione P_2 ,basta suddividere l'arco di traiettoria $P_1P_2 = s$ in intervalli infinitesimi $d\,\vec{s}$ in ciascuno dei quali la forza $\vec{F}$ può ritenersi costante :

$$\boxed{L = \sum d\,L = \int_{P_1}^{P_2} d\,L = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \times d\,\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}_t \times d\,\vec{s}}$$

Il lavoro dipende soltanto dal modo in cui la forza $\vec{F}$ agisce in ciascun punto della traiettoria e non dalla legge temporale secondo la quale questa è descritta .

Se il punto P è soggetto ad un sistema di forze il cui risultante è $\vec{R}$ allora il lavoro complessivo di queste forze è uguale al lavoro compiuto da $\vec{R}$.

$$[L] = [F \cdot s] = [L^2 \cdot T^{-2} \cdot M] \quad , \quad \{L\} = joule = 1J = \{F\} \cdot \{s\} = 1N \cdot 1m$$

L'unità di misura del lavoro è il **joule** (J) definito come il lavoro compiuto dalla forza di 1 newton nello spostare di 1 metro , nella direzione e nel verso della forza , il suo punto di applicazione .

Il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ esprime la quantità di energia che passa da una forma ad un ' altra .

Per il calcolo del lavoro compiuto da una forza un'espressione equivalente a $\mathcal{L}=\int_a^b \vec{F} \times d\vec{x} = \int_a^b F\cdot dx\cdot\cos\theta$, se scriviamo $\vec{F}$ e $d\vec{x}$ in funzione delle sue componenti si:

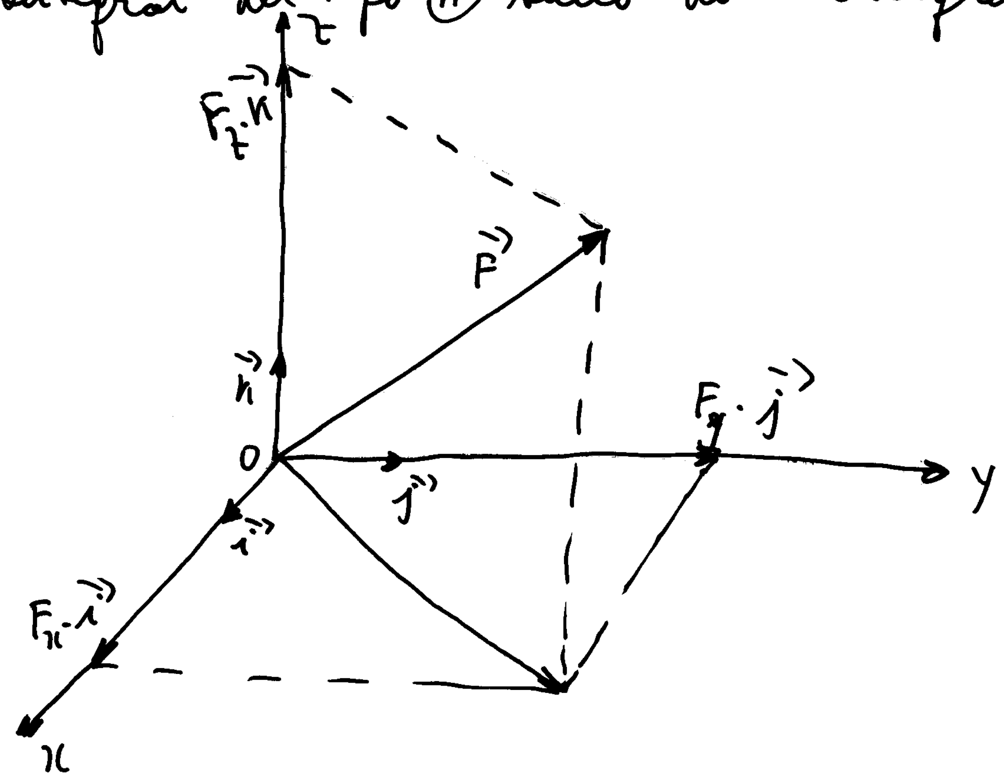
$$\vec{F} = F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\vec{k} \qquad d\vec{x} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$$

Sarà allora $d\mathcal{L} = \vec{F}\times d\vec{x} = F_x\cdot dx + F_y\cdot dy + F_z\cdot dz$

$$\mathcal{L} = \int_a^b \vec{F}\times d\vec{x} = \int_a^b F_x dx + F_y dy + F_z dz =$$

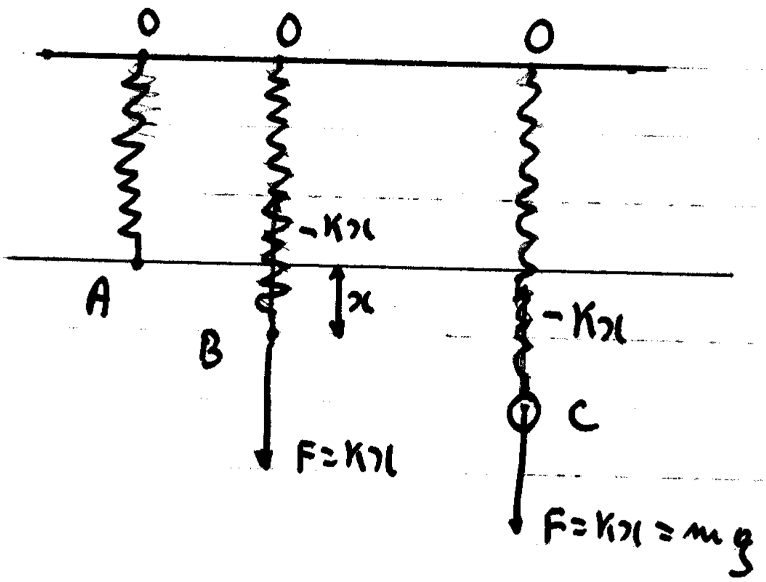
$$= \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\cdot dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\cdot dz \qquad (A)$$

Integrali del tipo (A) sono detti integrali di linea



A.F. p. 187 N° 8.3

Calcolare il lavoro necessario per allungare di 2 cm la molla della figura senza ~~accelerarla~~ accelerarla. Si sa che se si appende alla molla un corpo avente la massa $m = 4\ Kg$ la molla si allunga di 1,5 cm.



Quando nessun corpo è appeso alla molla, la sua lunghezza si estende tra O ad A.

Quando la molla è allungata del tratto x, essa esercita la forza: $\vec{F}_e = -K(A-B) = -Kx$

$[F_e = -Kx]$

Per allungare la molla senza accelerazione, occorre applicare alla molla stessa una forza deformante $\vec{F} = K(B-A) = K\vec{x}$

$[F = Kx]$

Quando la molla si allunga di un tratto $x = 1,5\,cm = 1,5 \cdot 10^{-2}\,m$ abbiamo:

$$F = Kx = mg$$

$$K = \frac{mg}{x} = \frac{4 \cdot 9,8}{1,5 \cdot 10^{-2}} = 2,61 \cdot 10^{3}\ N/m$$

$$\mathcal{L}_{AC}(\vec{F}) = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,61 \cdot 10^{3} \cdot (1,5 \cdot 10^{-2})^2 =$$

$$= 5,22 \cdot 10^{-2}\ J$$

$$\mathcal{L} = \int_0^x F\,dx = \int_0^x Kx\,dx = \frac{1}{2} K x^2$$

Potenza

Nella definizione di **lavoro di una forza** poco importa il tempo durante il quale tale lavoro è stato compiuto . Nella pratica , però , è fondamentale sapere in quanto tempo è stato compiuto un certo lavoro . Si dice che si misura la **potenza** che si sviluppa ($L > 0$) o si assorbe ($L < 0$) in quel lavoro . La **potenza media** W_m in un intervallo di tempo Δt durante il quale è stato compiuto il lavoro **L** è : $$W_m = \frac{L}{\Delta t}$$

La **potenza all'istante t** è il rapporto tra il lavoro elementare dL compiuto nel tempo dt , e tale intervallo di tempo , cioè : $$\boxed{W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \times d\vec{s}}{dt} = \frac{\vec{F} \times \vec{v}\, dt}{dt} = \vec{F} \times \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos\vartheta}$$

La potenza esprime la rapidità con cui un certo lavoro è stato compiuto .

$$[W] = \frac{[L]}{[t]} = \frac{\left[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}\right]}{[T]} = \left[M \cdot L^2 \cdot T^{-3}\right] , \{W\} = watt = W = \frac{\{L\}}{\{t\}} = \frac{J}{s} , 1watt = \frac{1\,joule}{1\sec ondo}$$

L'unità di misura della potenza nel **S.I.** è il **watt** (W) definito come la **potenza di un motore capace di produrre (assorbire) un joule di lavoro al secondo .**

Il watt è il lavoro di 1 joule compiuto in un secondo .

Il **watt** è una unità di misura piuttosto piccola per cui si usano frequentemente suoi multipli :

$$1chilowatt = 1Kw = 1000W = 10^3 W \quad , \quad 1megawatt = 1\,Mw = 10^6 W$$

$$1\mathrm{W} = 10^{-3}\,\mathrm{Kw} \quad , \quad 1\mathrm{W} = 10^{-6}\,\mathrm{Mw}$$

O S S E R V A Z I O N E

In fisica si definisce **macchina** qualsiasi dispositivo capace di compiere lavoro . La potenza di una macchina è il rapporto tra il lavoro compiuto dalla macchina ed il tempo impiegato a compierlo .

Si può parlare anche di <u>potenza sviluppata o assorbita</u> dalla forza $\vec{F}$ (quando questa compie il lavoro **L**) .

$\mathrm{L} = \mathrm{W} \cdot \mathrm{t}$ **,** $1\mathrm{Kwh} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$ **,** $1\mathrm{Wh} = 3{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$ **,**

Kwh **= chilowattora =** unità di misura non coerente di lavoro

Silva Montalbetti p.164 N°

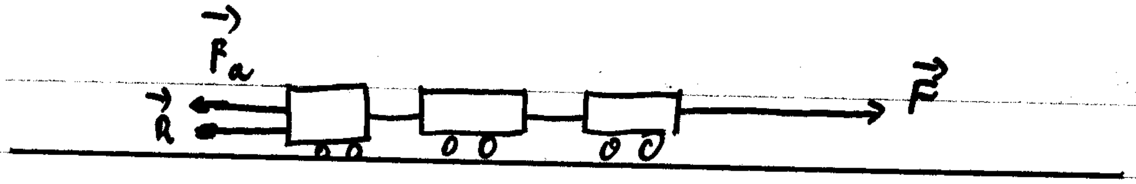
Il motore di un ascensore ~~(sviluppa)~~ assorbe la potenza di 9,8 KW. In quanto tempo ~~solleva all'altezza~~ raggiungerà l'altezza di 20 m sapendo che l'ascensore pesa 300 Kg ?.

$$W = \frac{\mathcal{L}}{t} \Rightarrow t = \frac{\mathcal{L}}{W} = \frac{300 \cdot 9{,}8 \cdot 20}{(9{,}8)(1000)} = 6 \text{ sec}$$

$$\mathcal{L} = -\vec{P} \times \vec{s} = P \cdot s$$

Un treno viaggia alla velocità costante $v = 144$ Km/h su un tratto rettilineo orizzontale. Il treno, formato da un locomotore e da parecchi vagoni, ha la massa $m = 5 \cdot 10^5$ Kg. Il coefficiente complessivo di attrito volvente è $k = 0{,}003$ mentre la resistenza dell'aria si può valutare in 15.000 N.

Calcolare la potenza sviluppata dai motori del locomotore ($g = 10\ m/s^2$).



$\vec{F} + \vec{F}_a + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow F = F_a + R$ = forza applicata al treno proveniente dall'azione dei motori del locomotore

$F_a = K \cdot N = K \cdot m \cdot g = 0{,}003 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 10\ N =$
$= 15 \cdot 000\ N$ = forza di attrito volvente

$R = 15 \cdot 000\ N$ = resistenza dell'aria

$F = 30 \cdot 000\ N$

$$W = \frac{L}{t} = \vec{F} \times \vec{v} = F \cdot v =$$

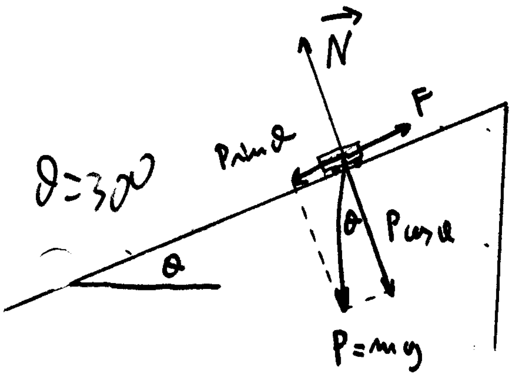
$= 30 \cdot 000 \cdot 40\ W = 12 \cdot 10^5\ W = 1200\ KW$

$144\ Km/h = 44\ m/s$

A. F. p. 186 N° 8.2 4 88

Un carrello avente massa $m = 15\,kg$ è spinto verso l'alto, sul pendio di una collina, da una forza $\vec{F}$ costante. La collina è inclinata di $30°$ rispetto al piano orizzontale. Il carrello mantiene una velocità costante $v = 6\,m/s$ lungo tutto il pendio. Calcolare il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto dalla forza in un minuto e la potenza sviluppata dalla forza. Si trascurino tutti gli attriti.

Le forze agenti sul carrello sono: $\vec{F}$, $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{N}$ la reazione vincolare. Il risultante $\vec{R} = \vec{0}$ è dato da: $\vec{P}\sin\vartheta + \vec{F} = 0$



$F = mg\sin\vartheta =$

$= 15 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 73{,}5\ N$

$a = 0 \quad v = cost \Rightarrow$

$s = v \cdot t = 360\ m$

$\mathcal{L} = \vec{F} \times \vec{s} = F \cdot s = 73{,}5 \cdot 360 = 26460\ J$

$W = \vec{F} \times \vec{v} = F \cdot v = 73{,}5 \cdot 6 = 441\ W$

Energia cinetica

Ad ogni corpo di massa **m** e velocità $\vec{v}$ noi possiamo associare l ' **energia cinetica**

$$\boxed{K = E_c = T = \frac{1}{2}mv^2} \qquad \textbf{[3]}$$

Si tratta di una grandezza scalare , sempre positiva , il cui valore dipende soltanto dalla massa e dal valore istantaneo della velocità . Per capire a fondo il significato della formula [3] analizziamo un caso particolare.

Un corpo di massa **m** si muove di moto rettilineo uniformemente vario sotto l'azione di una forza costante $\vec{F}$. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ quando la massa **m** passa dalla posizione A (dove ha velocità $\vec{v}_i$) alla posizione B (dove ha velocità $\vec{v}_f$) in t secondi .

$$\text{F costante} \quad \Rightarrow \quad \text{a} \quad \text{costante} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

Se all'istante iniziale $t = 0$ scegliamo $s_o = 0$ e $v_o = v_i$ la legge oraria del moto è :

$$s = v_i \cdot t + \frac{1}{2}at^2 = v_i \cdot t + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_f - v_i}{t}\cdot t^2 = v_i \cdot t + \frac{v_f \cdot t - v_i \cdot t}{2} = \frac{2v_i t + v_f t - v_i t}{2} =$$

$$= \frac{v_f + v_i}{2}t$$

$$\text{F = costante} \Rightarrow L_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\times\left(B - A\right) = F\cdot s = m\cdot\frac{v_f - v_i}{t}\cdot\frac{v_f + v_i}{2}\cdot t = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right)$$

$$L_{AB}\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = T_f - T_i = \Delta T = \Delta E_c \qquad \textbf{[4]}$$

Questo risultato è vero non solo per forze $\vec{F}$ costanti e per percorsi rettilinei ma anche per forze comunque variabili e per percorsi curvilinei . La formula [4] esprime il **teorema di variazione dell'energia cinetica** che a parole può essere enunciato cosi : << *Il lavoro compiuto dal risultante* $\vec{F}$ *di tutte le forze agenti sulla massa m lungo un arco di traiettoria AB è uguale alla variazione dell'energia cinetica subita dalla massa m quando passa dalla posizione iniziale A alla posizione finale B* >> .

Il teorema della variazione dell’energia cinetica vale sia per le **forze conservative** sia per le **forze non conservative** .

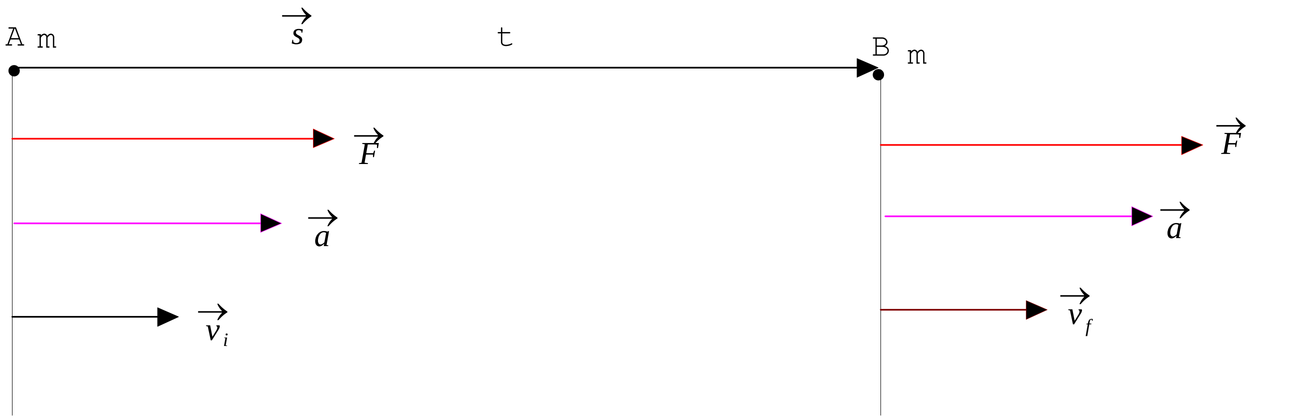
■ Se all'istante iniziale $t_o = 0$ è $v_i = 0$ (corpo in quiete) e all'istante finale t è $v_f = v$ la [4] diventa : $\boxed{L_{AB}\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{2}mv^2}$

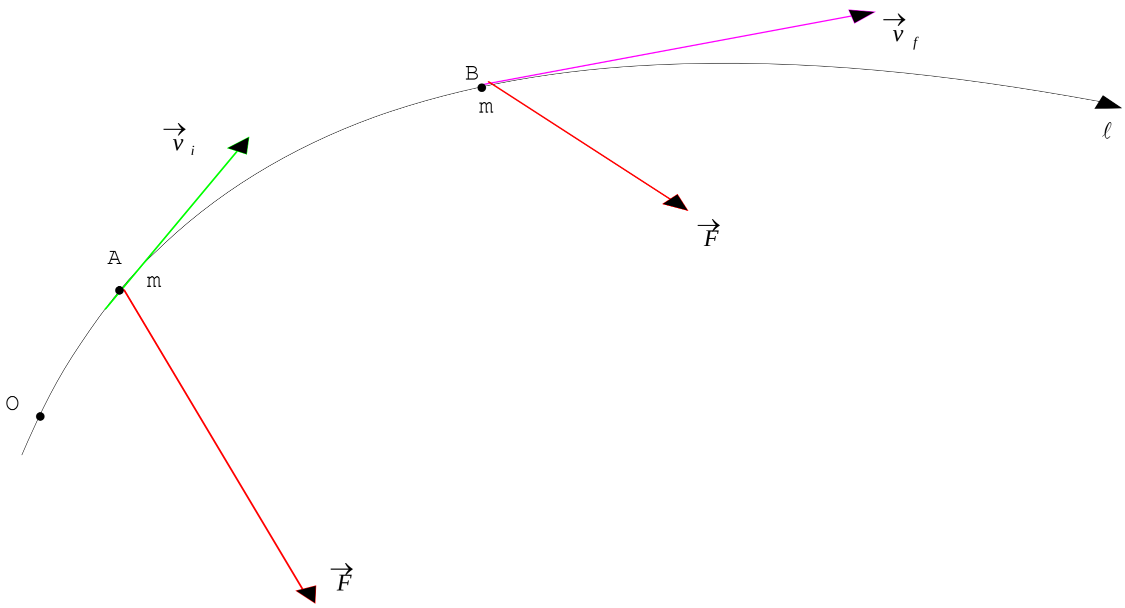
cioè l ' **energia cinetica di un corpo di massa m e velocità $\vec{v}$ rappresenta il lavoro motore che una forza esterna $\vec{F}$ (costante o variabile) applicata al corpo compie per portarlo dalla quiete alla velocità $\vec{v}$** .

■ Se $\vec{v}_i = \vec{v}$ e $\vec{v}_f = \vec{o}$ la [4] diventa : $L_{AB}\left(\vec{F}\right) = -\frac{1}{2}mv^2$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = -L_{AB}\left(\vec{F}\right) = L_{AB}\left(-\vec{F}\right)}$$

cioè l ' **energia cinetica di un corpo rappresenta anche il lavoro che una forza esterna deve compiere sul corpo per fermarlo** .





O S S E R V A Z I O N I

■ L'energia cinetica acquistata da un corpo avviene sempre a spese di un lavoro compiuto su di esso da una forza esterna

■ L'energia cinetica di un corpo dipende ,con la velocità ,dal sistema di riferimento . Quindi essa è definita a meno di una costante additiva . Infatti un corpo in quiete rispetto alla terra ha una energia cinetica nulla in un sistema di riferimento solidale con la terra , ma ha energia cinetica diversa da zero rispetto al sole o rispetto ad un qualsiasi altro sistema di riferimento che si muove rispetto alla terra .

■ Da un punto di vista operativo possiamo affermare che un corpo possiede energia ogni volta che è in grado di compiere del lavoro . Un corpo in movimento essendo in grado di vincere l'attrito , di comprimere una molla urtando contro di essa , o di innalzarsi malgrado la gravità , deve necessariamente possedere energia . Questa capacità di un corpo di compiere lavoro in virtù del suo moto è detta **energia cinetica ,** cioè energia associata al moto . Quindi l ' energia cinetica di un corpo è l ' energia che compete al corpo per il fatto di possedere velocità .

■ L'energia cinetica di un corpo esprime la capacità di compiere lavoro da parte del corpo per il fatto di possedere una velocità . In parole povere compiere lavoro significa trasferire energia da un corpo ad un altro .

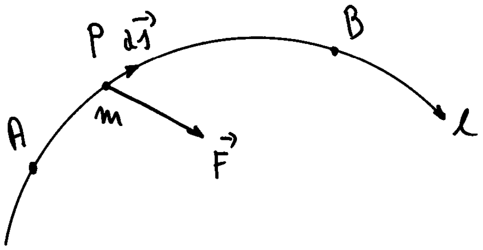
■ Il **teorema dell'energia cinetica** è molto somigliante formalmente alla relazione che dà il teorema dell'impulso . Si noti però che l'impulso è utile quando si conosce la forza in funzione del tempo $F(t)$, mentre il lavoro può essere calcolato facilmente quando conosciamo la forza in funzione della posizione $F(s)$. Ora questo secondo caso si presenta più frequentemente del primo : e ciò spiega l'importanza dei concetti di lavoro e di energia .

■ Si riferisca il moto della massa **m** a due assi cartesiani ortogonali . Risulta : $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

ed anche : $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$ cioè : $T = T_x + T_y$.

L'energia cinetica si può pensare come la somma aritmetica dell'energia cinetica che compete separatamente a ciascuno dei due moti componenti di **m** lungo i due assi .

Energia cinetica di un punto materiale



Consideriamo un punto materiale di massa m che percorre la traiettoria l. Nel tempo dt il punto materiale P si sposta del tratto $d\vec{s}$ ed il lavoro elementare $d\mathcal{L}$ compiuto dalla forza $\vec{F}$ ci viene fornito dal seguente prodotto scalare:

$$d\mathcal{L} = \vec{F} \times d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos\theta = F_t \cdot ds$$

essendo F_t la componente tangenziale della forza $\vec{F}$.

Ricordando che $v = \frac{ds}{dt}$ cioè $ds = v \cdot dt$ e che $F_t = m \cdot a_t = m \cdot \frac{dv}{dt}$

otteniamo $d\mathcal{L} = F_t \cdot ds = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = m\, v\, dv$

Supponiamo che il punto materiale P di massa m passi dalla posizione A alla posizione B. Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo l'intero percorso si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\mathcal{L}_{A \to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \times d\vec{s} = m \int_A^B v\, dv = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_A}^{v_B} =$$

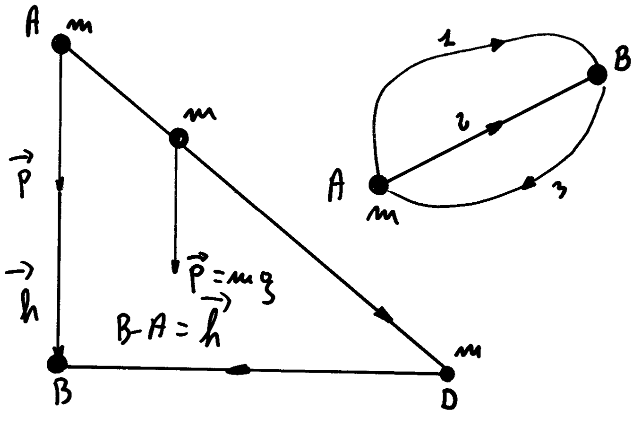
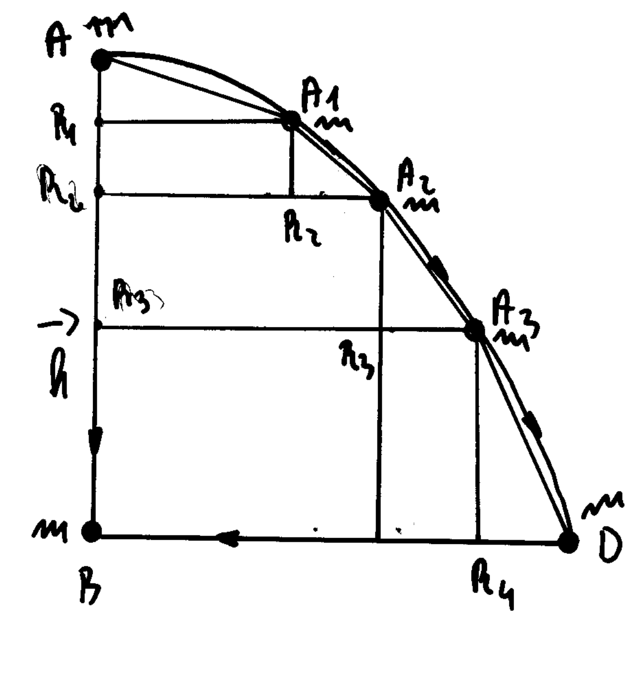
$$= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = K_B - F_A = K_f - K_i = \Delta K \qquad (*)$$

La formula (*) esprime il teorema di variazione dell'energia cinetica che in parole può essere così formulato:

«quando un punto materiale si muove lungo una traiettoria l dalla posizione iniziale A alla posizione finale B, il lavoro compiuto dal risultante di tutte le forze agenti su di esso è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale di massa m.

Il risultato (*) indica che, indipendentemente dalla forma funzionale della forza F e dalla natura della traiettoria l descritta dalla massa m, il valore del lavoro $\mathcal{L}$ compiuto dalla forza $\vec{F}$ è sempre uguale alla differenza della quantità $\frac{1}{2} m v^2$ calcolata alla fine ed all'inizio del tratto percorso da m.

Forze e campi conservativi

 	Tutte le forze della fisica possono essere suddivise in **forze conservative** e <u>forze non conservative</u> o ***forze dissipative*** . Qualche esempio introduttivo ci servirà per capire meglio il significato di forze conservative e forze dissipative .
 	Supponiamo di trovarci in prossimità della terra dove il campo gravitazionale terrestre è uniforme ed il peso $\vec P = m\vec g$ può ritenersi costante . Consideriamo due punti A e B dello spazio e due percorsi diversi , ad esempio AB e ADB . $L_{AB}(\vec P) = \vec P \times (B - A) = \vec P \times \vec h = mgh$ (possiamo pensare alla caduta verticale di un tratto AB) $L_{ADB}(\vec P) = L_{AD}(\vec P) + L_{DB}(\vec P) =$ $= \vec P \times (D - A) + \vec P \times (B - D) =$ $= P \cdot \overline{AD} \cdot \cos\vartheta + 0 = mgh$

essendo $h = \overline{AB} = \overline{AD}\cos\vartheta$ (possiamo pensare allo scorrimento senza attrito di un punto materiale prima sul piano inclinato perfettamente liscio AB e poi sul piano orizzontale liscio DB) .

Abbiamo trovato : $L_{AB}(\vec P) = L_{ADB}(\vec P) = mgh$

Supponiamo adesso che il percorso per andare da A a B non sia rettilineo ma sia mistilineo . In tal caso basta dividere la curva AD in archi piccolissimi mediante piani orizzontali tali che ogni arco di curva possa essere sostituito dalla sua corda .

In tal caso avremo :

$$L_{ADB}\left(\vec{P}\right) = L_{AA_1}\left(\vec{P}\right) + L_{A_1A_2}\left(\vec{P}\right) + L_{A_2A_3}\left(\vec{P}\right) + L_{A_3D}\left(\vec{P}\right) + L_{DB}\left(\vec{P}\right) =$$

$$= L_{\overline{AA_1}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_1A_2}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_2A_3}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_3D}}\left(\vec{P}\right) + 0 =$$

$$= mg \cdot \overline{AR_1} + mg \cdot \overline{R_1R_2} + mg \cdot \overline{R_2R_3} + mg \cdot \overline{R_3B} = mg \cdot \left(\overline{AR_1} + \overline{R_1R_2} + \overline{R_2R_3} + \overline{R_3B}\right) = mgh$$

Quindi **il lavoro compiuto dalla forza peso non dipende dal percorso , ma viene determinato soltanto dalla posizione iniziale A e dalla posizione finale B del punto materiale e dal valore della forza peso** $\vec{P}$.

Abbiamo trovato un caso in cui il lavoro eseguito dalla forza agente non dipende dalla particolare traiettoria seguita dal corpo , ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo . Nel caso delle **forze gravitazionali** si ottiene sempre un risultato analogo anche si considerano traiettorie più complesse e forze applicate comunque complesse . Tutte le forze che si comportano come le forze gravitazionali si dicono **forze conservative** .

DEFINIZIONE GENERALE

<< Un campo di forze si dice **conservativo** se il lavoro compiuto dalle forze del campo su un corpo in movimento non dipende dalla particolare traiettoria seguita , ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale . >>

Sono **forze conservative** : 1) tutte le **forze centrali** , in particolare le forze elastiche $\vec{f} = -k\vec{x}$, le forze deformanti $\vec{f} = k\vec{x}$ 2) le **forze gravitazionali** , in particolare la forza peso 3) le **forze elettrostatiche** .

Diamo un'altra definizione delle forze conservative equivalente alla precedente . Consideriamo un campo conservativo e tre percorsi ($A1B$, $A2B$, $A3B$) che congiungono la posizione iniziale A con la posizione finale B . Essendo il campo conservativo possiamo scrivere :

$$L_{A1B}\left(\vec{F}\right) = L_{A3B}\left(\vec{F}\right) = -L_{B3A}\left(\vec{F}\right) \Rightarrow L_{A1B}\left(\vec{F}\right) + L_{B3A}\left(\vec{F}\right) = 0 \Rightarrow L_{A1B3A}\left(\vec{F}\right) = 0$$

Ma $A1B3A$ è un percorso chiuso . Questo ci consente di affermare che << **il lavoro delle forze conservative lungo un percorso chiuso è nullo** >> . Invertendo il ragionamento si dimostra facilmente che se è nullo il lavoro lungo un percorso chiuso , questo lavoro deve essere indipendente dal percorso effettuato per andare da una posizione iniziale A ad una finale B .

Ne risulta un'altra definizione di *forza conservativa* . << **Le forze conservative sono forze il cui lavoro lungo un percorso chiuso è nullo** >>

Tutte le forze che non soddisfano alle definizioni finora date sono chiamate **forze non conservative.**

Sono forze non conservative le forze dissipative come le **forze d'attrito** che si manifestano quando un corpo scivola sulla superficie di un altro corpo e le **forze di resistenza** alle quali si trovano sottoposti tutti i corpi che si spostano in un mezzo fluido (liquido o aeriforme) .

Delle forze dissipative possiamo dare anche la seguente definizione : << **si chiamano forze dissipative quelle forze il cui lavoro totale , lungo un percorso chiuso è negativo** >>

Sono forze non conservative anche le **forze giroscopiche** , cioè quelle forze (come la forza reale di Lorentz e la forza fittizia di Coriolis) che dipendono dalla velocità del punto materiale ed agiscono sempre lungo una direzione perpendicolare al vettore velocità .

O S S E R V A Z I O N I

■ Un campo di forze si dice **centrale** se la forza , agente in un punto P qualsiasi del campo , è diretta lungo la retta che passa per il punto P scelto e per un punto fisso O detto **centro di forza** . Come esempio si può portare la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole su un pianeta e la forza di interazione elettrostatica di due cariche elettriche puntiformi .

■ Per le forze conservative possiamo introdurre una grandezza **U** (detta *energia potenziale*) che è una funzione dipendente dalla posizione (coordinate) del punto P e che gode della seguente proprietà : << il lavoro compiuto dalle forze del campo per spostare da una posizione iniziale A ad una finale B , il corpo su cui il campo agisce , è dato da : $L_{AB}\left(\vec{F}\right) = U\left(A\right) - U\left(B\right) = U_i - U_f$ >>

Quindi per i campi di forza conservativi il lavoro dipende solo dai punti estremi del percorso seguito ed è possibile esprimere tale lavoro come differenza tra i valori assunti in corrispondenza dei punti estremi da una funzione **U** che dipende soltanto dalla posizione del punto materiale e viene detta **energia potenziale** del campo di forze conservative .

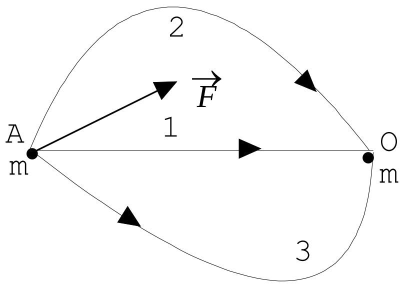
Energia potenziale

Quando un corpo è sottoposto all'azione di sole forze conservative , allora è utile introdurre una grandezza fisica detta **energia potenziale** indicata col simbolo **U** oppure col simbolo E_p .

Definiamo **punto di riferimento** o <u>posizione di riferimento</u> o *posizione zero* di un campo di forze conservative un punto qualsiasi del campo rispetto al quale è nota la posizione del corpo sottoposto all'azione delle sole forze conservative .

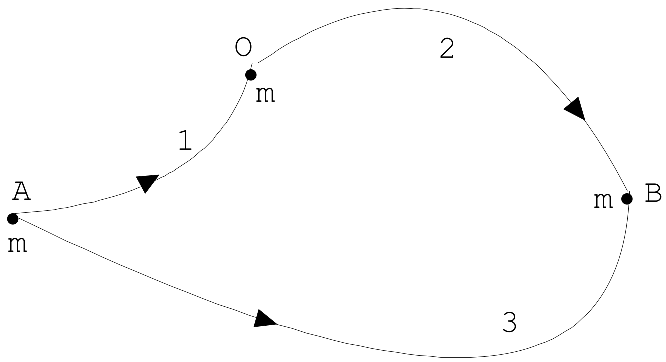
Il lavoro compiuto dalle forze conservative del campo durante lo spostamento del corpo da una posizione qualunque **A** alla posizione di riferimento **O** viene chiamato **energia potenziale** del corpo nella posizione iniziale A . Con parole diverse nella forma ma equivalenti nella sostanza possiamo definire l ' **energia potenziale** di una massa **m** posta in un punto A di un campo di forze conservative nella seguente maniera . Nel punto A collochiamo la massa m . Quando la massa m passa dalla posizione A alla posizione O le forze del campo compiono un lavoro detto **energia potenziale** della massa m . In simboli abbiamo : $\boxed{U(A) = U_A = E_P(A) = L_{A\to O}(\vec{F})}$

E' evidente che risulta : $U(O) = L_{O\to O}(\vec{F}) = 0$



Scegliere il punto **O** come posizione di riferimento significa supporre che l ' **energia potenziale** in O sua nulla e viceversa . Poiché il lavoro delle forze conservative non dipende dal percorso effettuato ma solo dalle posizioni iniziale e finale , l ' energia potenziale di un corpo , una volta scelta la posizione zero , dipende esclusivamente dalla posizione occupata dal corpo . Questo significa che l ' **energia potenziale U di un corpo è funzione soltanto della posizione da esso occupata** .

Il valore dell'energia potenziale col relativo segno dipende dalla posizione di riferimento O ; per questo motivo si dice che l ' *energia potenziale è definita a meno di una costante additiva* .



$$U_A - U_B = U_i - U_f =$$

$$= L_{A\to O}(\vec{F}) - L_{B\to O}(\vec{F}) =$$

$$= L_{A\to O}(\vec{F}) + L_{O\to B}(\vec{F}) = L_{1\to 1}(\vec{F}) = L_3(\vec{F}) =$$

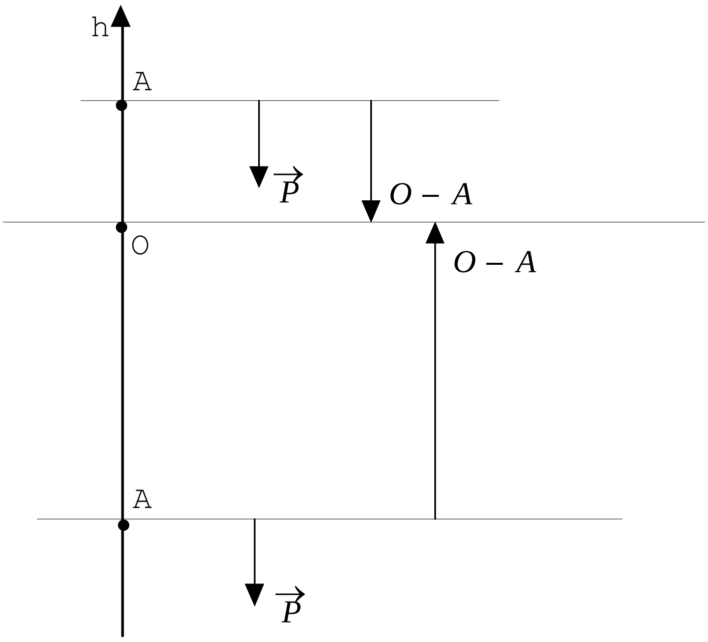
$$= L_{A\to B}(\vec{F}) = L_{i\to f}(\vec{F})$$

$$\boxed{L_{A\to B}(\vec{F}) = -(U_f - U_i) = -\Delta U} \quad \textbf{[*]}$$

<< ***la variazione dell'energia potenziale cambiata di segno rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la massa m passa dalla posizione iniziale A a quella finale B*** >>

Essa non dipende dalla posizione di riferimento ; infatti nella [*] non vi è più traccia della posizione **O** .

■ ■ Abbiamo detto che la **posizione di riferimento** (insieme dei punti cui si attribuisce energia potenziale zero) è scelta arbitrariamente . In talune situazioni potrebbe essere utile scegliere tale posizione secondo criteri di convenienza . Se la forza è **costante** (*campo uniforme*) non si ha nessun particolare vantaggio a scegliere una posizione di riferimento piuttosto che un'altra . Di solito si sceglie come **posizione zero** un punto qualsiasi di un piano orizzontale .



Consideriamo il campo gravitazionale terrestre in prossimità della terra . La forza $\vec{P} = m\vec{g}$ agente su una massa m è costante e diretta verso il basso .

$$U(A) = L_{A\to O}(\vec{P}) = \vec{P}\times(O - A) = mgh$$

con h numero reale relativo , in quanto h è positivo se A è al di sopra del piano orizzontale , negativo se è al di sotto del piano orizzontale .

Quando una massa m cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre , la forza del campo compie un lavoro positivo uguale alla diminuzione dell'energia potenziale gravitazionale .

Più in generale ,quando una massa m cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre dall'altezza h_1 all ' altezza h_2 ($< h_1$) dalla superficie terrestre , la forza del campo compie un lavoro positivo uguale alla diminuzione dell ' energia potenziale . In simboli abbiamo :

$$L = U_1 - U_2 = mgh_1 - mgh_2$$

Viceversa ,per portare una massa m da terra all'altezza h è necessario compiere un lavoro contro la forza gravitazionale . Questo significa che è necessario l'intervento di una forza esterna per portare la massa m all'altezza h .

La forza esterna compie un lavoro positivo pari a $L = mgh$, contemporaneamente la forza del campo un lavoro negativo (che rappresenta l'energia potenziale della massa m alla quota h) $-L = -mgh$ uguale e contrario a quello compiuto dalla forza esterna

Il lavoro compiuto dalla forza esterna viene immagazzinato dalla massa m sotto forma di **energia potenziale gravitazionale** per essere poi restituito sotto forma di lavoro positivo quando la massa m ritorna liberamente a terra .

Se la forza varia con la posizione del corpo di massa m è conveniente assumere come **posizione zero** un punto dove la forza è zero .

Se il campo di forze conservative è creato dalla massa puntiforme **M** , allora la posizione zero è un punto all'infinito in quanto : $U(A) = G \cdot \dfrac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F(\infty) = 0$

L ' **energia potenziale** della massa m distante r dalla massa **M** che crea il campo radiale è data da :

$$U(A) = -G \cdot \frac{Mm}{r} \qquad\qquad O \equiv P_\infty$$

Il segno meno sta a significare che il **lavoro è negativo** in quanto la forza gravitazionale , essendo attrattiva , si oppone all'allontanamento della massa m . Quindi l ' energia potenziale della massa m posta in un punto del campo gravitazionale generato dalla massa M coincide col lavoro resistente (cioè negativo) compiuto dalle forze del campo quando la massa m va dalla posizione A all'infinito

Quando la massa **m** passa dalla posizione iniziale **A** alla posizione finale **B** abbiamo :

$$L_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = U_A - U_B = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

■■ Le **forze elastiche di richiamo** , compaiono quando si comprime o si allunga una molla , sono **forze conservative** . Esse sono del tipo : $\vec{F} = -k\vec{s}$

In questo caso la **posizione zero** coincide con la posizione di equilibrio O della massa m in quanto in tale posizione risulta $F = 0$. L' **energia potenziale** della massa m soggetta alla forza $\vec{F} = -k\vec{s}$, posta alla distanza s da O vale $U(s) = \dfrac{1}{2}ks^2$

L ' energia potenziale di m è sempre positiva .

■ L ' **energia potenziale** di un corpo è l'energia che compete al corpo per il fatto di occupare una posizione di un campo di forze conservative . Essa rappresenta la capacità potenziale di un corpo in condizioni di quiete di compiere del lavoro in virtù della posizione che esso occupa in un campo di forze conservative .

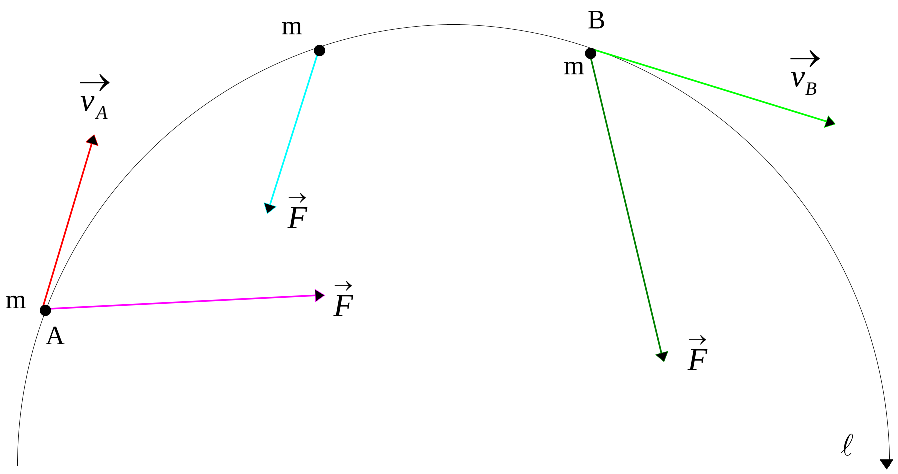
Se una forza esterna $\vec{F}_e$ (cioè non facente parte del campo conservativo) compie un lavoro su un corpo soggetto alle forze di un campo conservativo si può ritenere che tale lavoro venga immagazzinato nel corpo sotto forma di *energia potenziale* .

La conservazione dell'energia meccanica

L'**energia cinetica** e l'**energia potenziale** sono le due forme in cui si può presentare l ' **energia meccanica** di un corpo . Consideriamo una massa **m** soggetta all'azione di un campo di forze conservative e supponiamo che si sposti dalla posizione iniziale **A** , dove ha velocità $\vec{v}_A$, alla posizione finale B , dove ha velocità $\vec{v}_B$. Poiché l'unica forza che agisce su **m** è la **forza conservativa** del campo , possiamo scrivere : $L_{A\to B}(\vec{F}) = T_B - T_A = U_A - U_B$ cioè :

$$\boxed{U_B + T_B = U_A + T_B = U + T = E} \qquad \textbf{[1]}$$

La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è chiamata **energia meccanica totale** della massa m . L'equazione [1] stabilisce che l ' **energia meccanica totale** è costante se l'unica forza che esegue lavoro è una **forza conservativa** . Soltanto quando forze di questo tipo eseguono lavoro , l'energia meccanica totale si conserva .

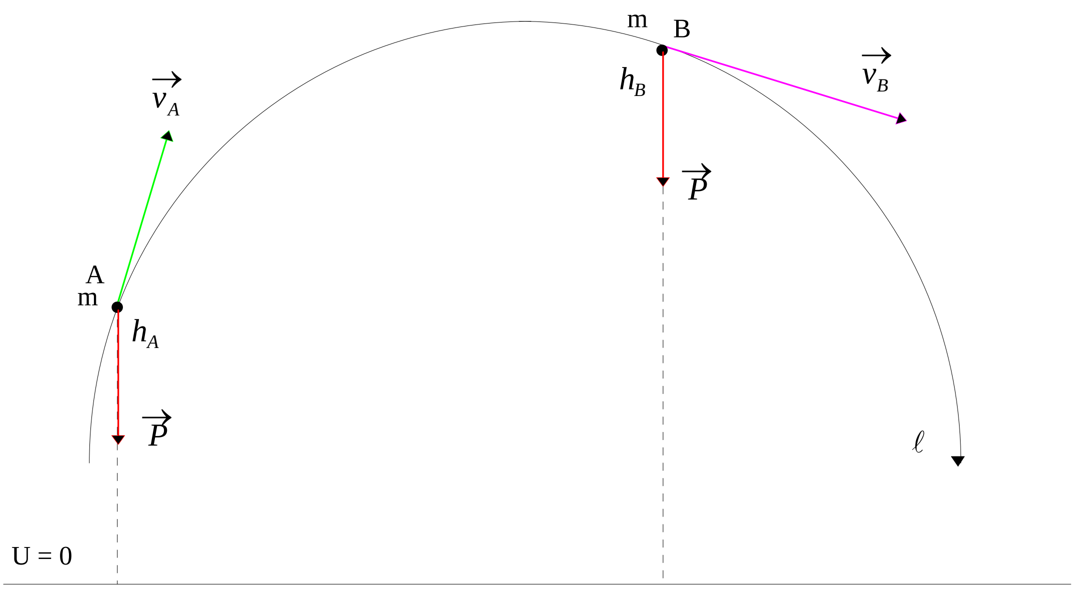


L'equazione [1] è detta **legge di conservazione dell'energia meccanica** per le forze conservative .

<< **Per un corpo soggetto soltanto a forze conservative si mantiene costante , istante per istante , la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale .** >>

La proprietà importante dell ' **energia meccanica** E non è il valore effettivo durante il movimento (che dipende dall'osservatore) ma il fatto che questo valore non cambia durante il movimento quando le forze sono conservative .

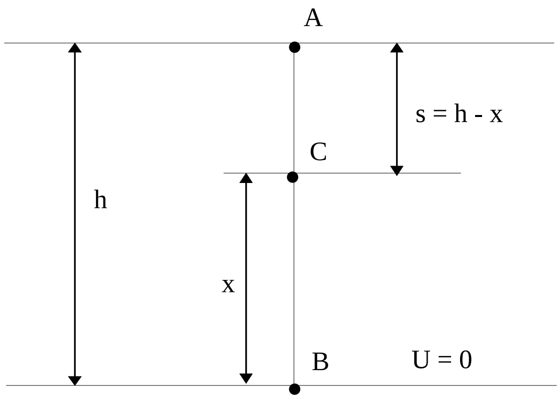
<< **In un sistema isolato soggetto a sole forze conservative si mantiene costante la somma delle energie cinetiche e potenziali di tutte le particelle , cioè si mantiene costante l'energia meccanica totale del sistema .** >>



Nel caso in cui la massa **m** si muove in prossimità della terra ed è soggetta alla sola forza peso , l'equazione [1] assume la forma :

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = E} \qquad \textbf{[2]}$$

Illustriamo il significato fisico dell'equazione [2] attraverso un esempio .



Sia **m** la massa di un grave in prossimità della terra . Tale massa parte dalla quiete dalla posizione A ed attraverso la posizione C .
Tale massa , in quiete nella posizione A , giunge al suolo nella posizione B passando attraverso la posizione intermedia C . Vogliamo dimostrare che : $\boxed{E(A) = E(C) = E(B)}$

A) $v_A = 0$, $T_A = 0$, $U_A = mgh$, $E(A) = T_A + U_A = mgh$

Nella posizione A l ' **energia della massa m è tutta potenziale** .

B) $h = 0$, $v_B = \sqrt{2gh}$, $T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m2gh = mgh$, $E(B) = T_B + U_B = mgh$

Tutta l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica .

C) $U_C = mgx$, $T_C = \frac{1}{2}mv_x^2$

La massa m si muove di moto naturalmente accelerato :

$s = h - x = \frac{1}{2}gt^2$, $v_x^2 = 2gs = 2g(h - x)$, $T_C = \frac{1}{2}m2g(h - x) = mgh - mgx$

$E(C) = T_C + U_C = mgh - mgx + mgx = mgh$

$v_C^2 = v_A^2 + 2g(h - x) = 2gh - 2gx$

Una parte dell'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica . Possiamo concludere affermando che : $\boxed{E(A) = E(C) = E(B) = mgh}$

generalizzazione del principio di conservazione dell'energia meccanica al caso in cui sono presenti forze non conservative

☐ Finora abbiamo considerato soltanto l'azione di una singola forza $\vec{F}$ conservativa su un punto materiale di massa m. Quando la massa m passa ~~dalla posizione~~ da uno stato iniziale A dove ha velocità v_i ed ~~eneg~~ energia potenziale U_i ad uno stato finale B dove ha velocità v_f ed energia potenziale U_f abbiamo

$$\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F}) = K_f - K_i = U_i - U_f$$

Questa relazione può essere scritta in una delle seguenti maniere:

$$\boxed{\Delta K = -\Delta U} \qquad \boxed{\Delta K + \Delta U = 0} \qquad \boxed{K_f + U_f = K_i + U_i = E}$$

$\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F})$ è il lavoro che compie la forza $\vec{F}$ quando la massa m passa dallo stato iniziale A allo stato finale B.

« La variazione dell'energia cinetica più la variazione dell'energia potenziale è zero se la forza che agisce su m è conservativa »

Se sulla massa m agiscono più forze conservative quali la forza peso, la forza elastica di una molla, la forza elettrostatica allora possiamo generalizzare le formule precedentemente ricavate.

$\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F})$ diventa $\sum \mathcal{L}$ cioè diventa la somma algebrica dei lavori compiuti dalle varie forze conservative

ΔU diventa $\sum \Delta U$ = somma delle corrispondenti variazioni di energia potenziale associate alle forze conservative.

ΔK è sempre la variazione di energia cinetica della massa m

$$\boxed{\sum \mathcal{L} = \Delta K = -\sum \Delta U} \qquad \boxed{\Delta K + \sum \Delta U = 0}$$

Nella pratica, si presenta frequentemente il caso in cui sulla massa m agisca oltre alla forza conservativa $\vec{F}$ anche una forza non conservativa $\vec{f_a}$, dovuta ad esempio all'attrito.

In questo caso la somma della variazione dell'energia cinetica e della variazione dell'energia potenziale non è più zero ma è uguale al lavoro (negativo) compiuto dalla forza non conservativa (forza d'attrito)

$$\boxed{\Delta K + \Delta U = \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})}$$

Infatti dovrà essere: $\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F}) + \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a}) = \Delta K$ { il lavoro compiuto su m da parte di tutte le forze agenti su m è uguale alla variazione di energia cinetica di m

Ma noi sappiamo che: $\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F}) = -\Delta U$ quindi

$$-\Delta U + \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a}) = \Delta K \quad \text{cioè} \quad \Delta K + \Delta U = \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})$$

La formula precedente può essere scritta così:

$$K_f - K_i + U_f - U_i = \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a}) \quad ; \quad \boxed{K_f + U_f = K_i + U_i + \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})}$$

$$\boxed{E_f = E_i + \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})} \qquad \boxed{E_f - E_i = \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})}$$

Avendo indicato rispettivamente con E_B ed E_A l'energia meccanica totale posseduta dal punto materiale nello stato finale B e nello stato iniziale A.

Questa relazione mostra che in presenza di forze non conservative l'energia meccanica totale non si conserva.

Poiché il lavoro $\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})$ compiuto sulla massa m dalla forza di attrito è sempre negativo deduciamo che l'energia meccanica finale E_f è minore di quella iniziale E_i.

Il lavoro non conservativo $\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})$ rappresenta un trasferimento irreversibile di energia dal corpo di massa m all'ambiente circostante.

Le forze e l'energia potenziale

- Si può descrivere la mutua interazione dei corpi sia in termini di forze, sia in termini di energia potenziale U espressa in funzione delle coordinate delle particelle che interagiscono.
Nella meccanica macroscopica vengono utilizzati ambedue i procedimenti.
Il primo procedimento possiede un campo di applicazione più vasto, perchè si applica anche alle forze cui non si può attribuire un'energia potenziale (es. le forze d'attrito).
Il secondo procedimento si applica soltanto alle forze conservative. In meccanica quantistica, che si occupa soltanto dei fenomeni del microcosmo dove mancano le forze dissipative, viene utilizzato esclusivamente il secondo procedimento. Nelle equazioni del moto della meccanica quantistica le forze non figurano, ma è presente l'energia potenziale delle particelle che interagiscono.
- Conoscendo le forze che agiscono in funzione delle coordinate dei punti materiali del sistema, se ne può calcolare l'energia potenziale. Questo problema viene risolto mediante l'integrazione. Infatti:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \qquad d\vec{s} = d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

$$d\mathcal{L} = -dU \quad ; \quad \vec{F} \times d\vec{s} = -dU$$

$$\mathcal{L}_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B d\mathcal{L} = -\int_A^B dU$$

$$\int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -(U_B - U_A)$$

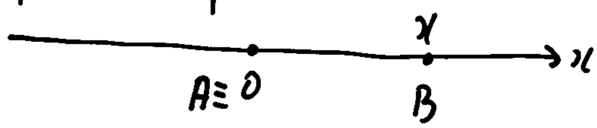
$$\mathcal{L}_{AB}(\vec F) = \int_A^B \left(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\right) = U_A - U_B \qquad (1)$$

dove $U(\vec r) = U(x,y,z)$ è l'energia potenziale spettante al punto materiale quando si trova nella posizione $P(x,y,z)$ di un campo conservativo.

La (1) esprime il seguente concetto fisico:

«Il lavoro compiuto dalle forze di un campo conservativo quando un punto materiale passa dalla posizione iniziale A a quella finale B (attraverso una ~~[illegible]~~ qualsiasi ~~percorso~~ linea che congiunge A con B) è uguale all'energia potenziale che spetta al punto materiale quando era in A, diminuita dell'energia potenziale che ancora possiede quando si trova in B».

Esempio della forza elastica $F = -kx$



$U_A = U_O = 0$

$U_B = U(x)$

$$\mathcal{L}_{OB}(\vec F) = \int_0^x -kx\,dx = U_O - U_B$$

$$-\frac{1}{2}kx^2 = -U \quad ; \quad U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia potenziale che compete al punto materiale soggetto alla forza $F = -kx$ quando si trova nella posizione x.

□ Si può fare anche il problema inverso: calcolare le forze applicate conoscendo l'energia potenziale in funzione delle coordinate dei punti materiali che interagiscono. Questo problema viene risolto mediante procedimenti di derivazione.

Consideriamo un punto materiale soggetto all'azione della forza conservativa $\vec{F}$ e sia $U(\vec{r}) = U(x,y,z)$ l'energia potenziale che compete al punto materiale.

Se il punto materiale subisce lo spostamento infinitesimo $d\vec{s} = d\vec{r}$ abbiamo:

$$\vec{F} \times d\vec{r} = \vec{F} \times d\vec{s} = -dU \qquad (2)$$

La (2) definisce completamente la forza $\vec{F}$ in modulo, direzione e verso. La (2) può essere scritta:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dU \qquad (3)$$

Se lo spostamento $d\vec{s} = d\vec{r}$ avviene lungo l'asse x abbiamo:

$$F_x\,dx = -dU \qquad F_x = -\frac{dU}{dx} \quad \text{con } y \text{ e } z \text{ costanti.}$$

Pertanto F_x è l'opposto della derivata di U rispetto ad x con y e z considerate costanti. Tale derivata si chiama derivata parziale e si scrive $\frac{\partial U}{\partial x}$.

In generale le componenti della forza $\vec{F}$ sono legate all'energia potenziale U dalle relazioni:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (4)$$

Esempio

Noi sappiamo che l'energia potenziale di una molla a spirale è $U = \frac{1}{2}Kx^2$ dove x è l'allungamento e K il coefficiente di elasticità della molla:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dx} = -Kx$$

dove il segno meno sta ad indicare che $\vec{F}$ agisce in verso opposto allo spostamento, è cioè una forza d'attrazione.

Le formule (4) possono essere riunite in una unica formula vettoriale:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U \quad (5)$$

dove il simbolo grad U rappresenta la somma vettoriale:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k} \quad (6)$$

Il vettore definito dalla relazione (6) si chiama gradiente dello scalare U.

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U \Rightarrow$$

$$F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\vec{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \quad (7)$$

osservazione

Perchè le relazioni (4) siano verificate occorre che risulti:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad (8)$$

Le (8) rappresentano le C.N.S. perchè il campo della forza $\vec{F}$ sia conservativo. Questo significa che $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ è il differenziale esatto della funzione $U(x,y,z)$.

□ Per mezzo della nozione di energia potenziale si può esprimere la condizione di equilibrio e la sua stabilità di un punto materiale.

In uno stato di equilibrio la forza $\vec{F}$ (e quindi anche le derivate prime parziali dell'energia potenziale U) deve essere nulla.

Ne deriva che lo stato di equilibrio esige che l'energia potenziale sia stazionaria (cioè costante nel tempo).

In particolare il punto materiale sarà in equilibrio se l'energia potenziale U è minima o massima.

Se l'energia potenziale è minima, il punto materiale è in uno stato di equilibrio stabile. Questo significa che il punto materiale, spostato di poco dalla sua posizione di equilibrio, tende a ritornarvi per effetto delle sole forze del campo conservativo.

Se l'energia potenziale è massima il punto materiale si trova in uno stato di equilibrio instabile. Questo significa che il punto materiale, spostato anche di poco dalla sua posizione di equilibrio, non vi torna più per effetto delle sole forze del campo.

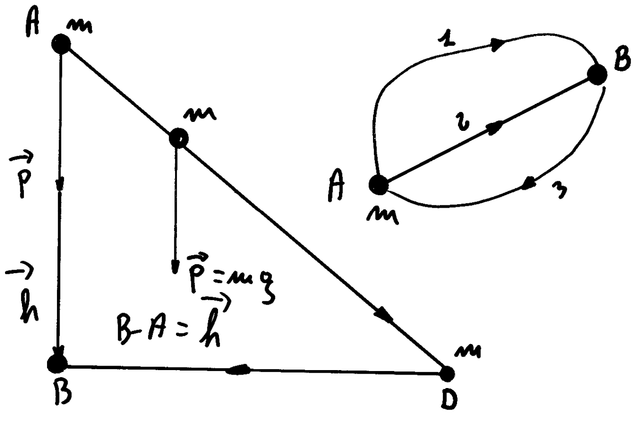
Se l'energia potenziale è la stessa in una certa regione dello spazio allora il punto materiale

si trova in una posizione di equilibrio indifferente. Il punto materiale, comunque spostato in tale regione, rimane sempre in equilibrio.
In presenza di vincoli le condizioni di equilibrio di un punto materiale assumono la forma:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} + \Phi_x = 0 \,, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} + \Phi_y = 0 \,; \quad -\frac{\partial U}{\partial z} + \Phi_z = 0$$

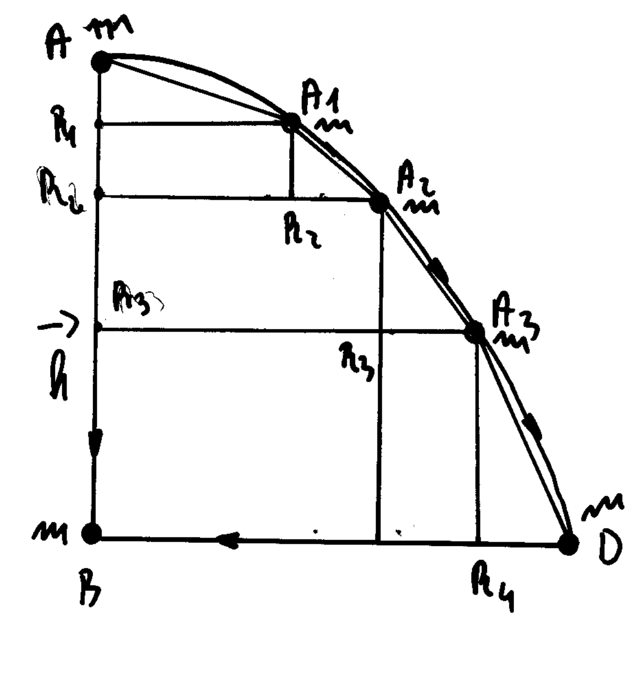
dove $\vec{\Phi}$ è la reazione vincolare, cioè la forza con cui i legami agiscono sul punto materiale considerato.
(Vedere Tipler I pag. 195)

Forze e campi conservativi



Tutte le forze della fisica possono essere suddivise in **forze conservative** e <u>forze non conservative</u> o ***forze dissipative*** .

Qualche esempio introduttivo ci servirà per capire meglio il significato di forze conservative e forze dissipative .



Supponiamo di trovarci in prossimità della terra dove il campo gravitazionale terrestre è uniforme ed il peso $\vec{P} = m\vec{g}$ può ritenersi costante . Consideriamo due punti A e B dello spazio e due percorsi diversi , ad esempio AB e ADB .

$$L_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}\times\left(B - A\right) = \vec{P}\times\vec{h} = mgh$$

(possiamo pensare alla caduta verticale di un tratto AB)

$$L_{ADB}\left(\vec{P}\right) = L_{AD}\left(\vec{P}\right) + L_{DB}\left(\vec{P}\right) =$$

$$= \vec{P}\times\left(D - A\right) + \vec{P}\times\left(B - D\right) =$$

$$= P\cdot\overline{AD}\cdot\cos\vartheta + 0 = mgh$$

essendo $h = \overline{AB} = \overline{AD}\cos\vartheta$ (possiamo pensare allo scorrimento senza attrito di un punto materiale prima sul piano inclinato perfettamente liscio AB e poi sul piano orizzontale liscio DB) .

Abbiamo trovato : $L_{AB}\left(\vec{P}\right) = L_{ADB}\left(\vec{P}\right) = mgh$

Supponiamo adesso che il percorso per andare da A a B non sia rettilineo ma sia mistilineo . In tal caso basta dividere la curva AD in archi piccolissimi mediante piani orizzontali tali che ogni arco di curva possa essere sostituito dalla sua corda .

In tal caso avremo :

$$L_{ADB}\left(\vec{P}\right) = L_{AA_1}\left(\vec{P}\right) + L_{A_1A_2}\left(\vec{P}\right) + L_{A_2A_3}\left(\vec{P}\right) + L_{A_3D}\left(\vec{P}\right) + L_{DB}\left(\vec{P}\right) =$$

$$= L_{\overline{AA_1}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_1A_2}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_2A_3}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overline{A_3D}}\left(\vec{P}\right) + 0 =$$

$$= mg\cdot\overline{AR_1} + mg\cdot\overline{R_1R_2} + mg\cdot\overline{R_2R_3} + mg\cdot\overline{R_3B} = mg\cdot\left(\overline{AR_1} + \overline{R_1R_2} + \overline{R_2R_3} + \overline{R_3B}\right) = mgh$$

Quindi **il lavoro compiuto dalla forza peso non dipende dal percorso , ma viene determinato soltanto dalla posizione iniziale A e dalla posizione finale B del punto materiale e dal valore della forza peso** $\vec{P}$.

Abbiamo trovato un caso in cui il lavoro eseguito dalla forza agente non dipende dalla particolare traiettoria seguita dal corpo , ma solo dalla posizione iniziale e finale del corpo . Nel caso delle **forze gravitazionali** si ottiene sempre un risultato analogo anche si considerano traiettorie più complesse e forze applicate comunque complesse . Tutte le forze che si comportano come le forze gravitazionali si dicono **forze conservative** .

DEFINIZIONE GENERALE

<< Un campo di forze si dice **conservativo** se il lavoro compiuto dalle forze del campo su un corpo in movimento non dipende dalla particolare traiettoria seguita , ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale . >>

Sono **forze conservative** : 1) tutte le **forze centrali** , in particolare le forze elastiche $\vec{f} = -k\vec{x}$, le forze deformanti $\vec{f} = k\vec{x}$ 2) le **forze gravitazionali** , in particolare la forza peso 3) le **forze elettrostatiche** .

Diamo un'altra definizione delle forze conservative equivalente alla precedente . Consideriamo un campo conservativo e tre percorsi ($A1B$, $A2B$, $A3B$) che congiungono la posizione iniziale A con la posizione finale B . Essendo il campo conservativo possiamo scrivere :

$$L_{A1B}\left(\vec{F}\right) = L_{A3B}\left(\vec{F}\right) = -L_{B3A}\left(\vec{F}\right) \Rightarrow L_{A1B}\left(\vec{F}\right) + L_{B3A}\left(\vec{F}\right) = 0 \Rightarrow L_{A1B3A}\left(\vec{F}\right) = 0$$

Ma $A1B3A$ è un percorso chiuso . Questo ci consente di affermare che << **il lavoro delle forze conservative lungo un percorso chiuso è nullo** >> . Invertendo il ragionamento si dimostra facilmente che se è nullo il lavoro lungo un percorso chiuso , questo lavoro deve essere indipendente dal percorso effettuato per andare da una posizione iniziale A ad una finale B .

Ne risulta un'altra definizione di *forza conservativa* . << **Le forze conservative sono forze il cui lavoro lungo un percorso chiuso è nullo** >>

Tutte le forze che non soddisfano alle definizioni finora date sono chiamate **forze non conservative.**

Sono forze non conservative le forze dissipative come le **forze d'attrito** che si manifestano quando un corpo scivola sulla superficie di un altro corpo e le **forze di resistenza** alle quali si trovano sottoposti tutti i corpi che si spostano in un mezzo fluido (liquido o aeriforme) .

Delle forze dissipative possiamo dare anche la seguente definizione : << **si chiamano forze dissipative quelle forze il cui lavoro totale , lungo un percorso chiuso è negativo** >>

Sono forze non conservative anche le **forze giroscopiche** , cioè quelle forze (come la forza reale di Lorentz e la forza fittizia di Coriolis) che dipendono dalla velocità del punto materiale ed agiscono sempre lungo una direzione perpendicolare al vettore velocità .

O S S E R V A Z I O N I

■ Un campo di forze si dice **centrale** se la forza , agente in un punto P qualsiasi del campo , è diretta lungo la retta che passa per il punto P scelto e per un punto fisso O detto **centro di forza** . Come esempio si può portare la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole su un pianeta e la forza di interazione elettrostatica di due cariche elettriche puntiformi .

■ Per le forze conservative possiamo introdurre una grandezza **U** (detta *energia potenziale*) che è una funzione dipendente dalla posizione (coordinate) del punto P e che gode della seguente proprietà : << il lavoro compiuto dalle forze del campo per spostare da una posizione iniziale A ad una finale B , il corpo su cui il campo agisce , è dato da : $L_{AB}\left(\vec{F}\right) = U\left(A\right) - U\left(B\right) = U_i - U_f$ >>

Quindi per i campi di forza conservativi il lavoro dipende solo dai punti estremi del percorso seguito ed è possibile esprimere tale lavoro come differenza tra i valori assunti in corrispondenza dei punti estremi da una funzione **U** che dipende soltanto dalla posizione del punto materiale e viene detta **energia potenziale** del campo di forze conservative .

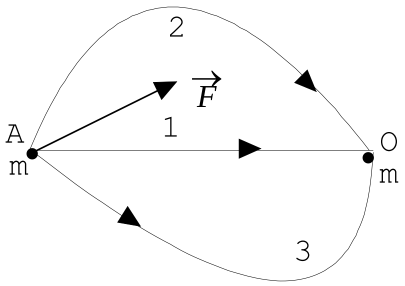
Energia potenziale

Quando un corpo è sottoposto all'azione di sole forze conservative , allora è utile introdurre una grandezza fisica detta **energia potenziale** indicata col simbolo **U** oppure col simbolo E_p .

Definiamo **punto di riferimento** o <u>posizione di riferimento</u> o *posizione zero* di un campo di forze conservative un punto qualsiasi del campo rispetto al quale è nota la posizione del corpo sottoposto all'azione delle sole forze conservative .

Il lavoro compiuto dalle forze conservative del campo durante lo spostamento del corpo da una posizione qualunque **A** alla posizione di riferimento **O** viene chiamato **energia potenziale** del corpo nella posizione iniziale A . Con parole diverse nella forma ma equivalenti nella sostanza possiamo definire l ' **energia potenziale** di una massa **m** posta in un punto A di un campo di forze conservative nella seguente maniera . Nel punto A collochiamo la massa m . Quando la massa m passa dalla posizione A alla posizione O le forze del campo compiono un lavoro detto **energia potenziale** della massa m . In simboli abbiamo : $\boxed{U(A) = U_A = E_P(A) = L_{A\to O}(\vec{F})}$

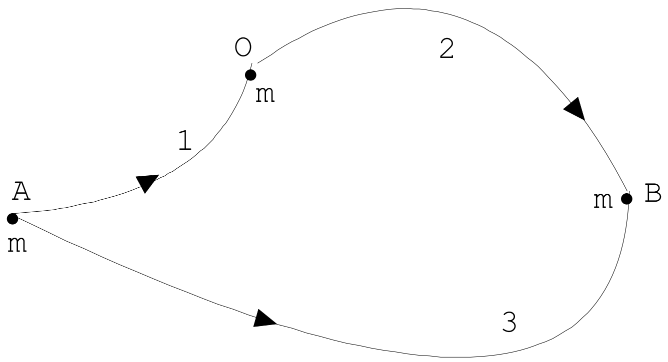
E' evidente che risulta : $U(O) = L_{O\to O}(\vec{F}) = 0$



Scegliere il punto **O** come posizione di riferimento significa supporre che l ' **energia potenziale** in O sua nulla e viceversa . Poiché il lavoro delle forze conservative non dipende dal percorso effettuato ma solo dalle posizioni iniziale e finale , l ' energia potenziale di un corpo , una volta scelta la posizione zero , dipende esclusivamente dalla posizione occupata dal corpo .

Questo significa che l ' **energia potenziale U di un corpo è funzione soltanto della posizione da esso occupata** .

Il valore dell'energia potenziale col relativo segno dipende dalla posizione di riferimento O ; per questo motivo si dice che l ' *energia potenziale è definita a meno di una costante additiva* .



$$U_A - U_B = U_i - U_f =$$

$$= L_{A\to O}(\vec{F}) - L_{B\to O}(\vec{F}) =$$

$$= L_{A\to O}(\vec{F}) + L_{O\to B}(\vec{F}) = L_{1\to 1}(\vec{F}) = L_3(\vec{F}) =$$

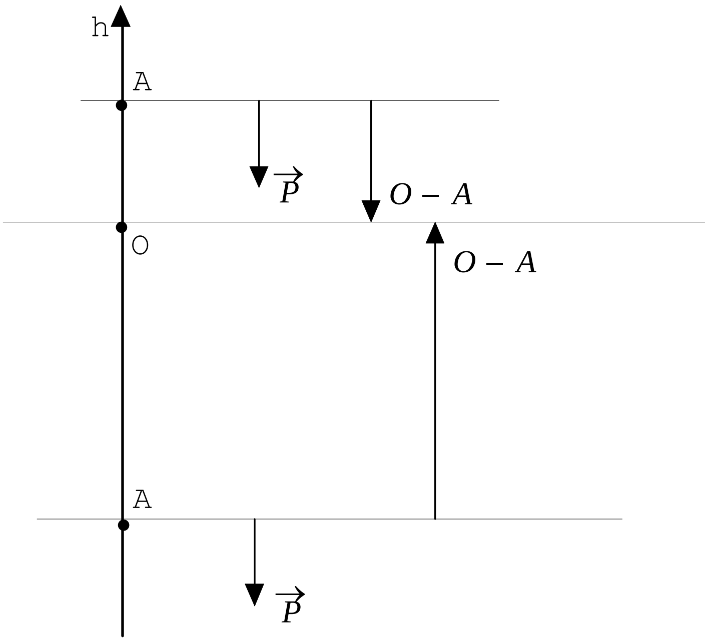
$$= L_{A\to B}(\vec{F}) = L_{i\to f}(\vec{F})$$

$$\boxed{L_{A\to B}(\vec{F}) = -(U_f - U_i) = -\Delta U} \quad \textbf{[*]}$$

<< ***la variazione dell'energia potenziale cambiata di segno rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la massa m passa dalla posizione iniziale A a quella finale B*** >>

Essa non dipende dalla posizione di riferimento ; infatti nella [*] non vi è più traccia della posizione **O** .

■ ■ Abbiamo detto che la **posizione di riferimento** (insieme dei punti cui si attribuisce energia potenziale zero) è scelta arbitrariamente . In talune situazioni potrebbe essere utile scegliere tale posizione secondo criteri di convenienza . Se la forza è **costante** (*campo uniforme*) non si ha nessun particolare vantaggio a scegliere una posizione di riferimento piuttosto che un'altra . Di solito si sceglie come **posizione zero** un punto qualsiasi di un piano orizzontale .



Consideriamo il campo gravitazionale terrestre in prossimità della terra . La forza $\vec{P} = m\vec{g}$ agente su una massa m è costante e diretta verso il basso .

$$U(A) = L_{A \to O}(\vec{P}) = \vec{P} \times (O - A) = mgh$$

con h numero reale relativo , in quanto h è positivo se A è al di sopra del piano orizzontale , negativo se è al di sotto del piano orizzontale .

Quando una massa m cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre , la forza del campo compie un lavoro positivo uguale alla diminuzione dell'energia potenziale gravitazionale .

Più in generale ,quando una massa m cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre dall'altezza h_1 all ' altezza h_2 ($< h_1$) dalla superficie terrestre , la forza del campo compie un lavoro positivo uguale alla diminuzione dell ' energia potenziale . In simboli abbiamo :

$$L = U_1 - U_2 = mgh_1 - mgh_2$$

Viceversa ,per portare una massa m da terra all'altezza h è necessario compiere un lavoro contro la forza gravitazionale . Questo significa che è necessario l'intervento di una forza esterna per portare la massa m all'altezza h .

La forza esterna compie un lavoro positivo pari a $L = mgh$, contemporaneamente la forza del campo un lavoro negativo (che rappresenta l'energia potenziale della massa m alla quota h) $-L = -mgh$ uguale e contrario a quello compiuto dalla forza esterna

Il lavoro compiuto dalla forza esterna viene immagazzinato dalla massa m sotto forma di **energia potenziale gravitazionale** per essere poi restituito sotto forma di lavoro positivo quando la massa m ritorna liberamente a terra .

Se la forza varia con la posizione del corpo di massa m è conveniente assumere come **posizione zero** un punto dove la forza è zero .

Se il campo di forze conservative è creato dalla massa puntiforme **M** , allora la posizione zero è un punto all'infinito in quanto : $U(A) = G \cdot \dfrac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F(\infty) = 0$

L ' **energia potenziale** della massa m distante r dalla massa **M** che crea il campo radiale è data da :

$$U(A) = -G \cdot \frac{Mm}{r} \qquad\qquad O \equiv P_\infty$$

Il segno meno sta a significare che il **lavoro è negativo** in quanto la forza gravitazionale , essendo attrattiva , si oppone all'allontanamento della massa m . Quindi l ' energia potenziale della massa m posta in un punto del campo gravitazionale generato dalla massa M coincide col lavoro resistente (cioè negativo) compiuto dalle forze del campo quando la massa m va dalla posizione A all'infinito

Quando la massa **m** passa dalla posizione iniziale **A** alla posizione finale **B** abbiamo :

$$L_{A\to B}(\vec{F}) = U_A - U_B = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

■■ Le **forze elastiche di richiamo** , compaiono quando si comprime o si allunga una molla , sono **forze conservative** . Esse sono del tipo : $\vec{F} = -k\vec{s}$

In questo caso la **posizione zero** coincide con la posizione di equilibrio O della massa m in quanto in tale posizione risulta $F = 0$. L' **energia potenziale** della massa m soggetta alla forza $\vec{F} = -k\vec{s}$, posta alla distanza s da O vale $U(s) = \dfrac{1}{2}k s^2$

L ' energia potenziale di m è sempre positiva .

■ L ' **energia potenziale** di un corpo è l'energia che compete al corpo per il fatto di occupare una posizione di un campo di forze conservative . Essa rappresenta la capacità potenziale di un corpo in condizioni di quiete di compiere del lavoro in virtù della posizione che esso occupa in un campo di forze conservative .

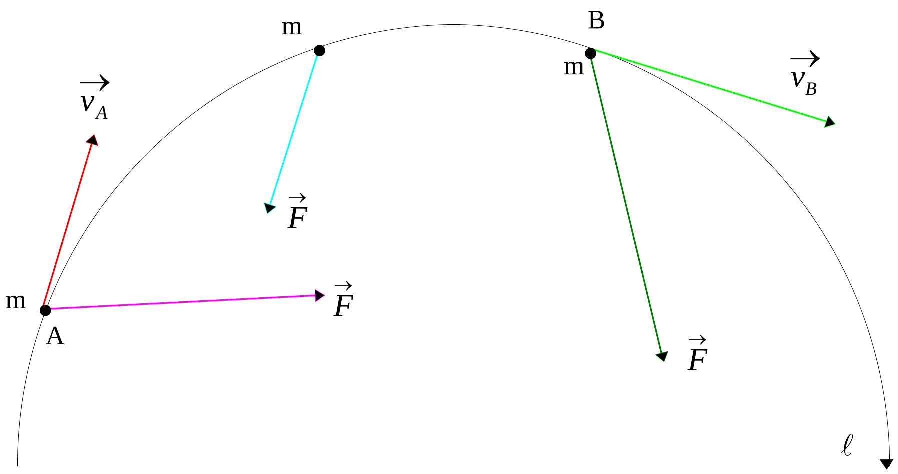
Se una forza esterna $\vec{F}_e$ (cioè non facente parte del campo conservativo) compie un lavoro su un corpo soggetto alle forze di un campo conservativo si può ritenere che tale lavoro venga immagazzinato nel corpo sotto forma di *energia potenziale* .

La conservazione dell'energia meccanica

L'**energia cinetica** e l'**energia potenziale** sono le due forme in cui si può presentare l ' **energia meccanica** di un corpo . Consideriamo una massa **m** soggetta all'azione di un campo di forze conservative e supponiamo che si sposti dalla posizione iniziale **A** , dove ha velocità $\vec{v}_A$, alla posizione finale B , dove ha velocità $\vec{v}_B$. Poiché l'unica forza che agisce su **m** è la **forza conservativa** del campo , possiamo scrivere : $L_{A\to B}(\vec{F}) = T_B - T_A = U_A - U_B$ cioè :

$$\boxed{U_B + T_B = U_A + T_B = U + T = E} \qquad \textbf{[1]}$$

La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è chiamata **energia meccanica totale** della massa m . L'equazione [1] stabilisce che l ' **energia meccanica totale** è costante se l'unica forza che esegue lavoro è una **forza conservativa** . Soltanto quando forze di questo tipo eseguono lavoro , l'energia meccanica totale si conserva .

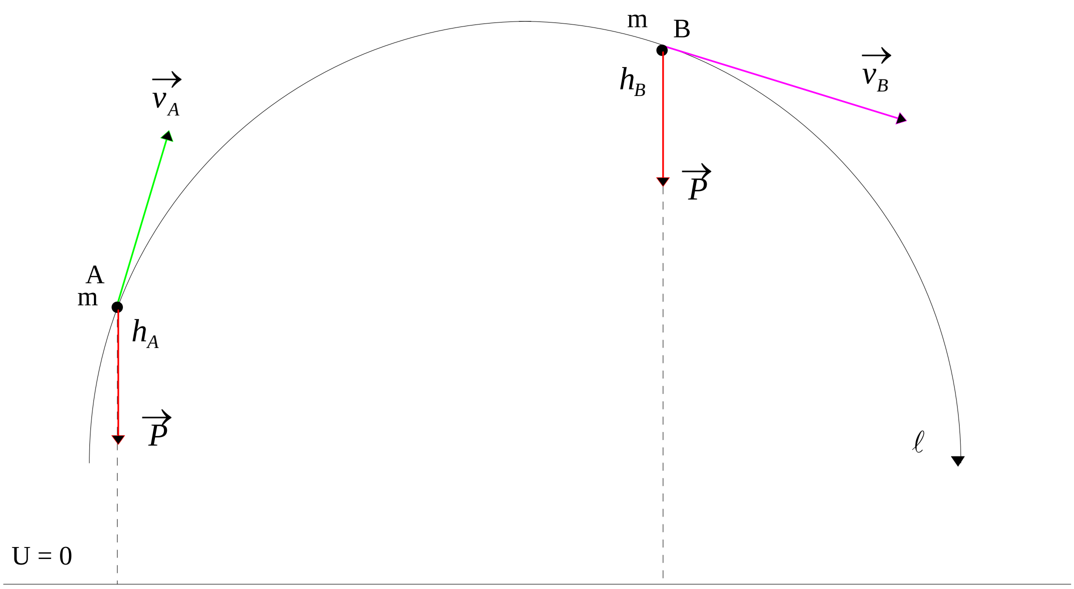


L'equazione [1] è detta **legge di conservazione dell'energia meccanica** per le forze conservative .

<< Per un corpo soggetto soltanto a forze conservative si mantiene costante , istante per istante , la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale . >>

La proprietà importante dell ' **energia meccanica** E non è il valore effettivo durante il movimento (che dipende dall'osservatore) ma il fatto che questo valore non cambia durante il movimento quando le forze sono conservative .

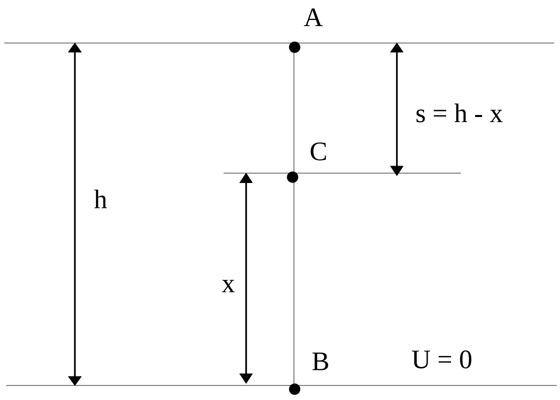
<< **In un sistema isolato soggetto a sole forze conservative si mantiene costante la somma delle energie cinetiche e potenziali di tutte le particelle , cioè si mantiene costante l'energia meccanica totale del sistema .** >>



Nel caso in cui la massa **m** si muove in prossimità della terra ed è soggetta alla sola forza peso , l'equazione [1] assume la forma :

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = E} \qquad \textbf{[2]}$$

Illustriamo il significato fisico dell'equazione [2] attraverso un esempio .



Sia **m** la massa di un grave in prossimità della terra . Tale massa parte dalla quiete dalla posizione A ed attraverso la posizione C .
Tale massa , in quiete nella posizione A , giunge al suolo nella posizione B passando attraverso la posizione intermedia C . Vogliamo dimostrare che : $\boxed{E(A) = E(C) = E(B)}$

A) $v_A = 0 \;,\; T_A = 0 \;,\; U_A = mgh \;,\; E(A) = T_A + U_A = mgh$

Nella posizione A l ' **energia della massa m è tutta potenziale** .

B) $h = 0 \;,\; v_B = \sqrt{2gh} \;,\; T_B = \dfrac{1}{2}mv_B^2 = \dfrac{1}{2}m2gh = mgh \;,\; E(B) = T_B + U_B = mgh$

Tutta l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica .

C) $U_C = mgx \quad , \quad T_C = \dfrac{1}{2}mv_x^2$

La massa m si muove di moto naturalmente accelerato :

$$s = h - x = \frac{1}{2}gt^2 \;,\; v_x^2 = 2gs = 2g(h - x) \;,\; T_C = \frac{1}{2}m2g(h - x) = mgh - mgx$$

$$E(C) = T_C + U_C = mgh - mgx + mgx = mgh$$

$$v_C^2 = v_A^2 + 2g(h - x) = 2gh - 2gx$$

Una parte dell'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica . Possiamo concludere affermando che : $\boxed{E(A) = E(C) = E(B) = mgh}$

generalizzazione del principio di conservazione dell'energia meccanica al caso in cui sono presenti forze non conservative

- Finora abbiamo considerato soltanto l'azione di una singola forza $\vec{F}$ conservativa su un punto materiale di massa. Quando la massa m passa ~~dalla posizione~~ da uno stato iniziale A dove ha velocità v_i ed ~~energ~~ energia potenziale U_i ad uno stato finale B dove ha velocità v_f ed energia potenziale U_f abbiamo

$$\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F}) = K_f - K_i = U_i - U_f$$

Questa relazione può essere scritta in una delle seguenti maniere:

$$\boxed{\Delta K = -\Delta U} \qquad \boxed{\Delta K + \Delta U = 0} \qquad \boxed{K_f + U_f = K_i + U_i = E}$$

$\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F})$ è il lavoro che compie la forza $\vec{F}$ quando la massa m passa dallo stato iniziale A allo stato finale

« La variazione dell'energia cinetica più la variazione dell'energia potenziale è zero se la forza che agisce su m è conservativa »

Se sulla massa m agiscono più forze conservative quali la forza peso, la forza elastica di una molla, la forza elettrostatica allora possiamo generalizzare le formule precedentemente ricavate

$\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F})$ diventa $\sum \mathcal{L}$ cioè diventa la somma algebrica dei lavori compiuti dalle varie forze conservative

ΔU diventa $\sum \Delta U$ = somma delle corrispondenti variazioni di energia potenziale associate alle forze conservative.

ΔK è sempre la variazione di energia cinetica della massa m

$$\boxed{\sum \mathcal{L} = \Delta K = -\sum \Delta U} \qquad \boxed{\Delta K + \sum \Delta U = 0}$$

Nella pratica, si presenta frequentemente il caso in cui sulla massa m agisca oltre alla forza conservativa $\vec{F}$ anche una forza non conservativa $\vec{f_a}$, dovuta ad esempio all'attrito.

In questo caso la somma della variazione dell'energia cinetica e della variazione dell'energia potenziale non è più zero ma è uguale al lavoro (negativo) compiuto dalla forza non conservativa (forza d'attrito)

$$\boxed{\Delta K + \Delta U = \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})}$$

Infatti dovrà essere: $\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F}) + \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a}) = \Delta K$ Il lavoro compiuto su m da parte di tutte le forze agenti su m è uguale alla variazione di energia cinetica di m

Ma noi sappiamo che: $\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{F}) = -\Delta U$ quindi

$$-\Delta U + \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a}) = \Delta K \quad \text{cioè} \quad \Delta K + \Delta U = \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})$$

La formula precedente può essere scritta così:

$$K_f - K_i + U_f - U_i = \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a}) \quad ; \quad \boxed{K_f + U_f = K_i + U_i + \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})}$$

$$\boxed{E_f = E_i + \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})} \qquad \boxed{E_f - E_i = \mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})}$$

Avendo indicato rispettivamente con E_B ed E_A l'energia meccanica totale posseduta dal punto materiale nello stato finale B e nello stato iniziale A.

Questa relazione mostra che in presenza di forze non conservative l'energia meccanica totale non si conserva.

Poichè il lavoro $\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})$ compiuto sulla massa m dalla forza di attrito è sempre negativo deduciamo che l'energia meccanica finale E_f è minore di quella iniziale E_i.

Il lavoro non conservativo $\mathcal{L}_{A\to B}(\vec{f_a})$ rappresenta un trasferimento irreversibile di energia dal corpo di massa m all'ambiente circostante.

Le forze e l'energia potenziale

- Si può descrivere la mutua interazione dei corpi sia in termini di forze, sia in termini di energia potenziale U espressa in funzione delle coordinate delle particelle che interagiscono.
Nella meccanica macroscopica vengono utilizzati ambedue i procedimenti.
Il primo procedimento possiede un campo di applicazione più vasto, perchè si applica anche alle forze cui non si può attribuire un'energia potenziale (es. le forze d'attrito).
Il secondo procedimento si applica soltanto alle forze conservative. In meccanica quantistica, che si occupa soltanto dei fenomeni del microcosmo dove mancano le forze dissipative, viene utilizzato esclusivamente il secondo procedimento. Nelle equazioni del moto della meccanica quantistica le forze non figurano, ma è presente l'energia potenziale delle particelle che interagiscono.
- Conoscendo le forze che agiscono in funzione delle coordinate dei punti materiali del sistema, se ne può calcolare l'energia potenziale. Questo problema viene risolto mediante l'integrazione. Infatti:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \qquad d\vec{s} = d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

$$d\mathcal{L} = -dU \quad ; \quad \vec{F} \times d\vec{s} = -dU$$

$$\mathcal{L}_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B d\mathcal{L} = -\int_A^B dU$$

$$\int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -(U_B - U_A)$$

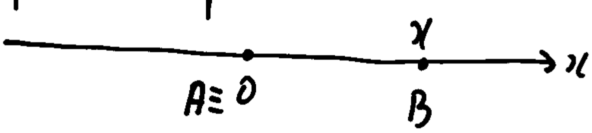
$$\mathcal{L}_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = U_A - U_B \qquad (1)$$

dove $U(\vec{r}) = U(x,y,z)$ è l'energia potenziale spettante al punto materiale quando si trova nella posizione $P(x,y,z)$ di un campo conservativo.

La (1) esprime il seguente concetto fisico:

« il lavoro compiuto dalle forze di un campo conservativo quando un punto materiale passa dalla posizione iniziale A a quella finale B (attraverso una qualsiasi ~~percorso~~ linea che congiunge A con B) è uguale all'energia potenziale che spetta al punto materiale quando era in A, diminuita dell'energia potenziale che ancora possiede quando si trova in B ».

Esempio della forza elastica $F = -kx$



$U_A = U_O = 0$

$U_B = U(x)$

$$\mathcal{L}_{OB}(\vec{F}) = \int_0^x -kx\,dx = U_O - U_B$$

$$-\frac{1}{2}kx^2 = -U \quad ; \quad U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia potenziale che compete al punto materiale soggetto alla forza $F = -kx$ quando si trova nella posizione x.

□ Si può porre anche il problema inverso: calcolare le forze applicate conoscendo l'energia potenziale in funzione delle coordinate dei punti materiali che interagiscono. Questo problema viene risolto mediante procedimenti di derivazione.

Consideriamo un punto materiale soggetto all'azione della forza conservativa $\vec{F}$ e sia $U(\vec{r}) = U(x,y,z)$ l'energia potenziale che compete al punto materiale.

Se il punto materiale subisce lo spostamento infinitesimo $d\vec{s} = d\vec{r}$ abbiamo:

$$\vec{F} \times d\vec{r} = \vec{F} \times d\vec{s} = -dU \qquad (2)$$

La (1) definisce completamente la forza $\vec{F}$ in modulo, direzione e verso. La (1) può essere scritta:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dU \qquad (3)$$

Se lo spostamento $d\vec{s} = d\vec{r}$ avviene lungo l'asse x abbiamo:

$$F_x\,dx = -dU \qquad F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad \text{con } y \text{ e } z \text{ costanti.}$$

Pertanto F_x è l'opposto della derivata di U rispetto ad x con y e z considerate costanti. Tale derivata si chiama derivata parziale e si scrive $\frac{\partial U}{\partial x}$.

In generale le componenti della forza $\vec{F}$ sono legate all'energia potenziale U dalle relazioni:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (4)$$

Noi sappiamo che l'energia potenziale di una molla a spirale (Esempio) è $U = \frac{1}{2}Kx^2$ dove x è l'allungamento e K il coefficiente di elasticità della molla.

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dx} = -Kx$$

dove il segno meno sta ad indicare che $\vec{F}$ agisce in verso opposto allo spostamento, è cioè una forza d'attrazione.

Le formule ④ possono essere riunite in una unica formula vettoriale:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U \quad (5)$$

dove il simbolo grad U rappresenta la somma vettoriale:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k} \quad (6)$$

Il vettore definito dalla relazione (6) si chiama gradiente dello scalare U.

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U \Rightarrow$$

$$F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\vec{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \quad (7)$$

osservazione

Perchè le relazioni ④ siano verificate occorre che risulti:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad (8)$$

Le (8) rappresentano le C.N.S. perchè il campo della forza $\vec{F}$ sia conservativo. Questo significa che $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ è il differenziale esatto della funzione $U(x,y,z)$.

□ Per mezzo della nozione di energia potenziale si può esprimere la condizione di equilibrio e la sua stabilità di un punto materiale.

In uno stato di equilibrio la forza $\vec{F}$ (e quindi anche le derivate parziali prime dell'energia potenziale U) deve essere nulla.

Ne deriva che lo stato di equilibrio esige che l'energia potenziale sia stazionaria (cioè costante nel tempo).

In particolare il punto materiale sarà in equilibrio se l'energia potenziale U è minima o massima.

Se l'energia potenziale è minima, il punto materiale è in uno stato di equilibrio stabile. Questo significa che il punto materiale, spostato di poco dalla sua posizione di equilibrio, tende a ritornarvi per effetto delle sole forze del campo conservativo.

Se l'energia potenziale è massima il punto materiale si trova in uno stato di equilibrio instabile. Questo significa che il punto materiale, spostato anche di poco dalla sua posizione di equilibrio, non vi torna più per effetto delle sole forze del campo.

Se l'energia potenziale è la stessa in una certa regione dello spazio allora il punto materiale

si trova in una posizione di equilibrio indifferente. Il punto materiale, comunque portato in tale regione, rimane sempre in equilibrio.
In presenza di vincoli le condizioni di equilibrio di un punto materiale assumono la forma:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} + \Phi_x = 0 \,, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} + \Phi_y = 0 \,; \quad -\frac{\partial U}{\partial z} + \Phi_z = 0$$

dove $\vec{\Phi}$ è la reazione vincolare, cioè la forza con cui i legami agiscono sul punto materiale considerato.
(Vedere Tipler I pag. 195)

URTI OBLIQUI

Un urto si dice obliquo se, dopo la collisione, le due sfere hanno quantità di moto $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ che formano un certo angolo.

Eccetto che per un urto completamente anelastico, l'uso delle leggi di conservazione non basta per determinare il moto delle particelle dopo l'urto, basandosi solo sulla conoscenza del loro moto prima dell'urto se il moto è bidimensionale.

Infatti, per un urto bidimensionale elastico, che è il caso più semplice, noi abbiamo a che fare con 4 incognite, e cioè le due componenti della velocità di ciascuna sfera dopo l'urto.

Ma abbiamo solo tre relazioni note fra di esse, una per la conservazione dell'energia cinetica e due per la

conservazione della quantità di moto (una per ciascuna dimensione).
Quindi occorrono maggiori informazioni, oltre alle condizioni iniziali.
Quando non si conoscono le forze realmente in gioco nell'urto, come spesso succede, l'informazione ausiliaria deve essere ricavata dall'esperimento. La via più semplice è quella di specificare l'angolo di collisione di una delle particelle urtanti.
In figura è rappresentato il caso di urto obliquo elastico tra due sferette di masse m_1 ed m_2.

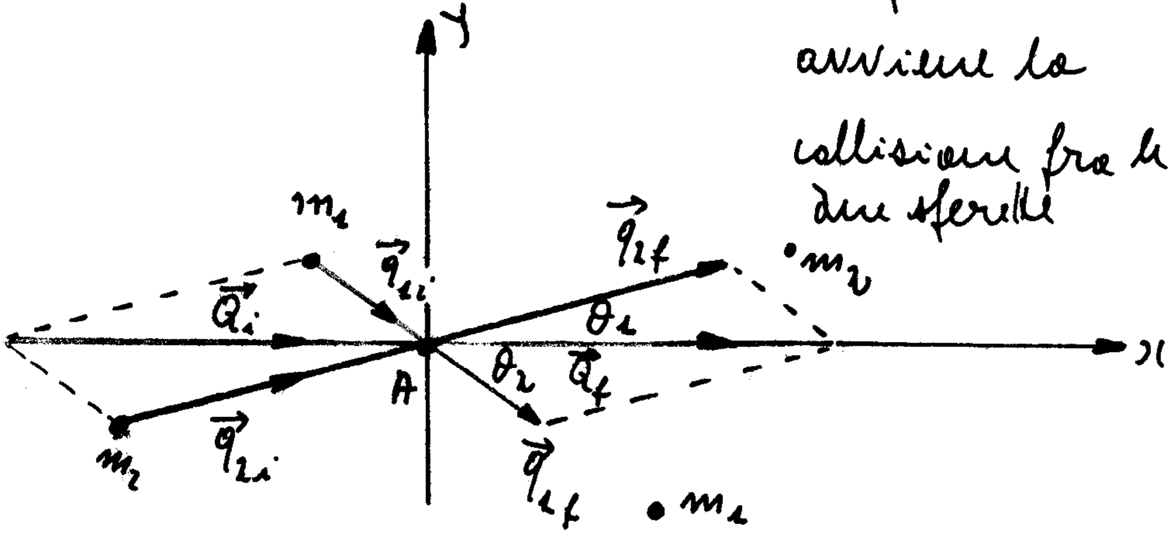
$\vec{Q}_i = \vec{q}_{1i} + \vec{q}_{2i}$ = quantità di moto del sistema prima dell'urto

$\vec{Q}_f = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f}$ = quantità di moto del sistema dopo l'urto

$$\vec{Q}_1 = \vec{Q}_f \Longrightarrow \vec{q}_{1i} + \vec{q}_{2i} = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} \qquad (*)$$

$$T_i = T_f \Longrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Nel punto A avviene la collisione fra le due sferette



$$\vec{q}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1ix} + m_1 \vec{v}_{1iy}$$

$$\vec{q}_{2i} = m_2 \vec{v}_{2i} = m_2 \vec{v}_{2ix} + m_2 \vec{v}_{2iy}$$

$$\vec{q}_{1f} = m_1 \vec{v}_{1f} = m_1 \vec{v}_{1fx} + m_1 \vec{v}_{1fy}$$

$$\vec{q}_{2f} = m_2 \vec{v}_{2f} = m_2 \vec{v}_{2fx} + m_2 \vec{v}_{2fy}$$

La relazione vettoriale (*) si tramuta in due relazioni scalari.
Le equazioni sono tre, le incognite sono 4. Occorre un'altra condizione, ad esempio la conoscenza di qualche angolo. Per il calcolo effettivo delle 4 incognite, analizziamo due casi semplici.

a) Urto elastico obliquo tra due sferette di cui una ferma

Consideriamo l'urto obliquo elastico fra una sferetta m_1 avente velocità $\vec{v}_{1i}$ e la sferetta m_2 inizialmente ferma. La direzione del moto della particella incidente m_1 dopo l'urto forma un angolo ϑ_1 con la direzione iniziale, ~~di m_1~~. e la particella bersaglio m_2, inizialmente a riposo, si muove dopo l'urto lungo una direzione che forma un angolo ϑ_2 con la direzione del moto iniziale di m_1.

Applicando la conservazione della q.d.m.:

$$\vec{q}_{1i} = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f}$$

che è una relazione vettoriale, otteniamo due equazioni scalari. Per la componente lungo l'asse x si ha:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\vartheta_1 + m_2 v_{2f} \cos\vartheta_2$$

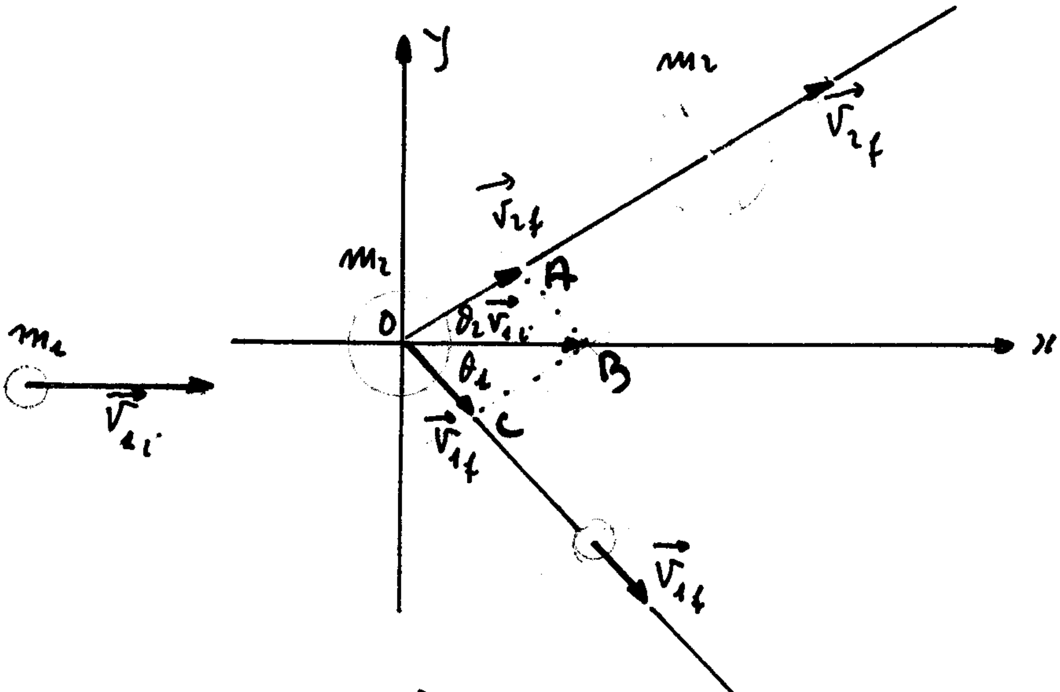
e per la componente lungo l'asse y si ha:

$$0 = m_2 v_{2f} \sin\vartheta_2 - m_1 v_{1f} \sin\vartheta_1$$

La conservazione dell'energia cinetica dà:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m v_{2f}^2$$

Se conosciamo le condizioni iniziali (m_1, m_2, v_{1i}) abbiamo 4 incognite ($v_{1f}, v_{2f}, \vartheta_1, \vartheta_2$) e solo tre equazioni fra queste. Possiamo quindi determinare il moto dopo l'urto se fissiamo il valore di una di queste incognite, ad esempio ϑ_1.
Se le masse sono uguali ($m_1 = m_2$) si può dimostrare che $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 90°$, cioè in un urto elastico fra particelle di uguale massa, una delle quali inizialmente è ferma, succede sempre che l'angolo formato dalle traiettorie delle due particelle dopo l'urto è retto.



$m_1 = m_2 \Longrightarrow v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \Longrightarrow O\hat{A}B = 90^0$

Il parallelogramma OABC è un rettangolo. Quindi $A\hat{O}C = 90^0$

b) Urto elastico obliquo contro una parete

L'urto avvenga su di una parete piana, ferma, di massa $m_2 = \infty$.

Risulta: $\vec{V}_{2i} = \vec{V}_{2f} = \vec{0}$.

Si scomponga la velocità $\vec{V}_{1i}$ della sfera m_1 urtante nelle due componenti $\vec{V}_{1iy}$ parallela al piano urtato e V_{1ix} normale:

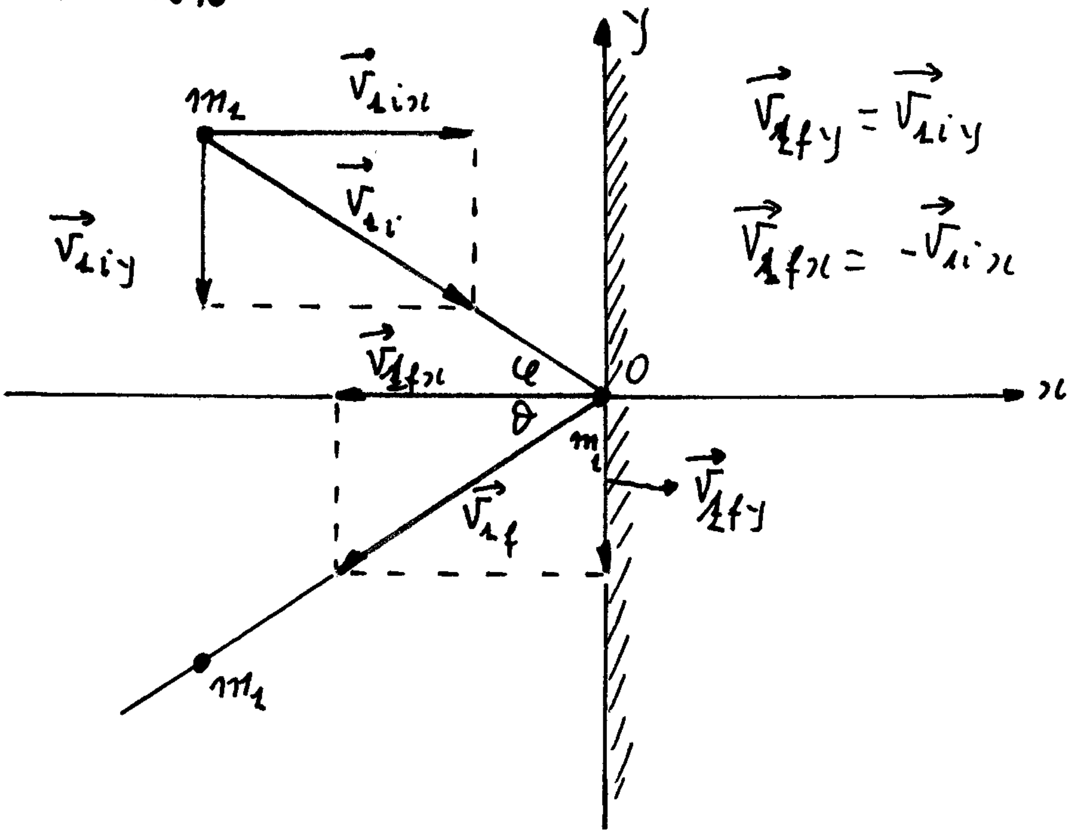
$$\vec{V}_{1i} = \vec{V}_{1xi} + \vec{V}_{1iy}$$

Dopo l'urto, trascurando gli attriti, $\vec{V}_{1iy}$ rimane inalterata, V_{1xi} si tramuta in $-\vec{V}_{1xi}$, cioè:

$$\vec{V}_{1f} = \vec{V}_{1fx} + \vec{V}_{1fy} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \vec{V}_{1fx} = -\vec{V}_{1ix} \\ \vec{V}_{1fy} = \vec{V}_{1iy} \end{cases}$$

Se ne deducono le ben note leggi della riflessione meccanica. In particolare la velocità $\vec{V}_{1f}$ con cui rimbalza la sfera giace nel piano di $\vec{V}_{1i}$ e della normale x alla parete, e l'angolo di riflessione ϑ è uguale all'angolo di incidenza φ.

La parete determina una variazione della quantità di moto della sfera uguale a $-2 m_1 \vec{v}_{1ix}$ e quindi riceve dalla sfera un impulso della stessa grandezza, in direzione opposta a quella di $\vec{v}_{1ix}$.



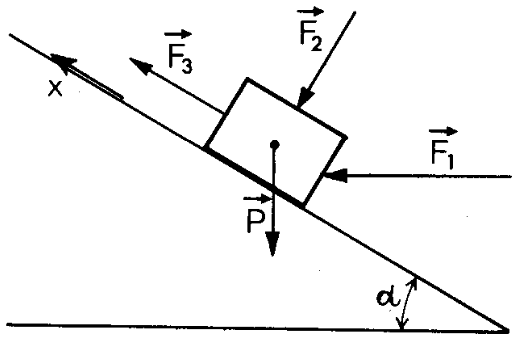
Bibliografia URTI

1) H.R. pag. 203
2) C.F. pag. 216
3) Porreca pag. 167
4) Bernardini pag. 285
5) Perucca pag. 304
6) Lazzarotto pag. 157
7) Guizzetti Piazzalli pag. 105
8) Segré Roberti pag. 106
9) Nobel I pag. 180
10) Toraldo di Francia pag. 124
11) Caldirola pag. 242
12) Roller Blum pag. 172

Pendolo Balistico

1) Perucca pag. 307
2) H.R. 212
3) Roller Blum pag 175

Un blocco, di massa $m = 10$ kg, è posto sopra un piano inclinato liscio con $\alpha = 30°$ ed è soggetto alle forze, mostrate in figura, $\mathbf{F}_1 = 100$ N, $\mathbf{F}_2 = 30$ N ed $\mathbf{F}_3 = 80$ N. Calcolare il lavoro compiuto quando il blocco sale di $\mathbf{s} = 2$ m lungo il piano inclinato.



Il lavoro compiuto da ciascuna forza è:

$$L_P = \mathbf{P}\,\mathbf{s}\cos(90° + \alpha) = -\mathbf{P}\,\mathbf{s}\,\mathrm{sen}\,\alpha = -10 \cdot 9{,}8 \cdot 2\,\tfrac{1}{2} = -98\ \mathrm{J}$$
$$L_1 = \mathbf{F}_1\,\mathbf{s}\cos\alpha = 173\ \mathrm{J}$$
$$L_2 = \mathbf{F}_2\,\mathbf{s}\cos 90° = 0$$
$$L_3 = \mathbf{F}_3\,\mathbf{s} = 160\ \mathrm{J}$$

Perciò, il lavoro totale compiuto è:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_P = 235\ \mathrm{J}$$

19 Un corpo di massa $m = 3\ kg$ sta scivolando su un piano orizzontale, avente un coefficiente di attrito dinamico $f = 0{,}15$, con velocità $v = 8\ m/s$. Calcolare:

a) la forza massima di attrito che si esercita tra piano e corpo
b) il tempo che il corpo impiega a fermarsi
c) lo spazio percorso prima di fermarsi
d) il lavoro compiuto dalla forza d'attrito

Soluzione. a) Per definizione di coefficiente di attrito la forza massima d'attrito è data dalla relazione:

$$F_a = f\,m\,g$$

per cui:

$$F_a = 4{,}4\ N$$

b) Il moto avviene con forza costante (F_a), per cui:

$$a = \frac{F_a}{m} = 1{,}47\ m/s^2$$

$$v = v_0 - a\,t$$

Il tempo impiegato a fermarsi si calcola imponendo che la velocità si annulli:

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = 5{,}44\ s$$

c) Lo spazio percorso è dato da:

$$s = s_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad (s_0 = 0)$$

per cui lo spazio di fermata, corrispondente a $t = t_1$ vale:

$$s_1 = v_0\,t_1 - \frac{1}{2}\,a\,t_1^2 = 21{,}8\ m$$

d) Il lavoro compiuto vale:

$$L = -\,F_a\,s_1 = 95{,}9\ J$$

Lo stesso risultato si ottiene applicando il teorema delle forze vive:

$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = 96{,}0\ J$$

ottenendosi così anche un risultato più preciso (la differenza è dovuta agli arrotondamenti introdotti).