Unità Didattica N°08 I moti curvilinei

Moto curvilineo piano riferito ad un sistema di assi cartesiani: le grandezze vettoriali espresse in componenti cartesiane

- Un punto materiale **P** percorre una traiettoria curvilinea piana ℓ. Abbiamo già detto cosa dobbiamo intendere per spostamento del punto mobile lungo la traiettoria ℓ. Volendo analizzare il moto del punto nel piano (nello spazio) conviene riferirsi, nella maggior parte dei casi, ad un sistema di assi cartesiani Oxy ($Oxyz$) e considerare la posizione del punto **P** individuata dal vettore $\vec{r} = P - O$, detto vettore posizione (o raggio vettore) spiccato da un punto fisso di riferimento (che si fa quasi sempre coincidere con l'origine **O** del riferimento cartesiano) ed avente l'estremo libero coincidente con **P**. Risulta, istante per istante,

$$\vec{r} = P - O = \vec{r}_x + \vec{r}_y = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} \qquad r^2 = \vec{r}_x^{\,2} + \vec{r}_y^{\,2} = x^2 + y^2$$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ sono le equazioni parametriche della traiettoria ℓ

Eliminando il parametro **t** otteniamo l'equazione cartesiana di ℓ, cioè il tipo di traiettoria ℓ descritta dal punto mobile **P**.

$x = x(t)$ rappresenta la legge oraria del punto P_1 proiezione ortogonale del mobile **P** sull'asse x

$y = y(t)$ rappresenta la legge oraria del punto P_2 proiezione ortogonale del mobile **P** sull'asse y

- $\Delta\vec{r} = \Delta x\cdot\vec{i} + \Delta y\cdot\vec{j} \qquad |\Delta\vec{r}| \neq |\Delta s| \qquad d\vec{r} = d\vec{s} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j}$

$$(dr)^2 = (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Lo spostamento $d\vec{r} = d\vec{s}$ può essere considerato come il risultante di due vettori $dx = dx\cdot\vec{i}$ e $dy = dy\cdot\vec{j}$, i cui valori algebrici dx e dy sono le componenti di $d\vec{s}$.

- La velocità vettoriale del punto **P** è il vettore $\vec{v}$ tangente alla traiettoria ℓ nel punto **P**.

Risulta: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x\cdot\vec{i} + v_y\cdot\vec{j} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j}$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

I vettori $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ sono i componenti della velocità vettoriale $\vec{v}$ lungo gli assi cartesiani x ed y, mentre v_x e v_y sono le componenti di $\vec{v}$ lungo le rette orientate $\vec{x}$ ed $\vec{y}$ rispettivamente di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

La velocità vettoriale $\vec{v}$ nel moto curvilineo è il risultante delle velocità vettoriali $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ di cui sono dotate le proiezioni ortogonali P_1 e P_1 del punto mobile **P** sugli assi cartesiani.

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_x &= \left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i} \\ \vec{v}_y &= \left(\frac{dy}{dt}\right)\vec{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = v_x \cdot dt \\ dy = v_y \cdot dt \end{cases}$$

$$\mathbf{ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(v_x\, dt)^2 + (v_y\, dt)^2} = dt\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Integrando ambo i membri tra la posizione iniziale P_o e la posizione generica **P** abbiamo:

$$\int_{P_o}^{P} ds = \int_{t_o}^{t} \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\cdot dt \Rightarrow s - s_o = \int_{t_o}^{t} \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\cdot dt \Rightarrow \mathbf{s = s_o + \int_{t_o}^{t} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \times dt}$$

che esprime la legge oraria del moto lungo la traiettoria ℓ.

- Anche l'accelerazione vettoriale $\vec{a}$ può essere decomposta lungo gli assi cartesiani.

Risulta: $\mathbf{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}}$

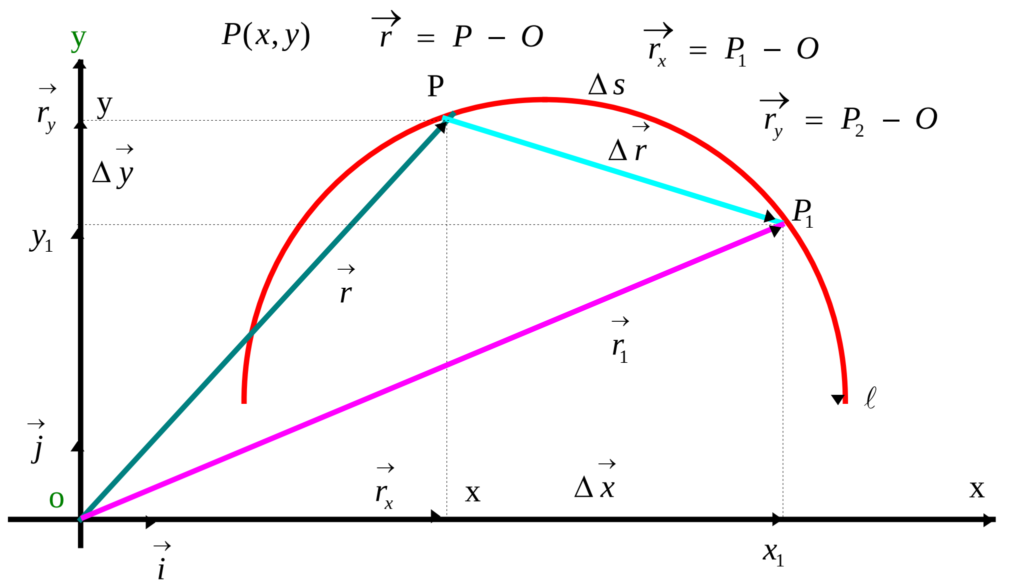
$$a = a_x^2 + a_y^2 \qquad \mathbf{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt} \ , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt}$$

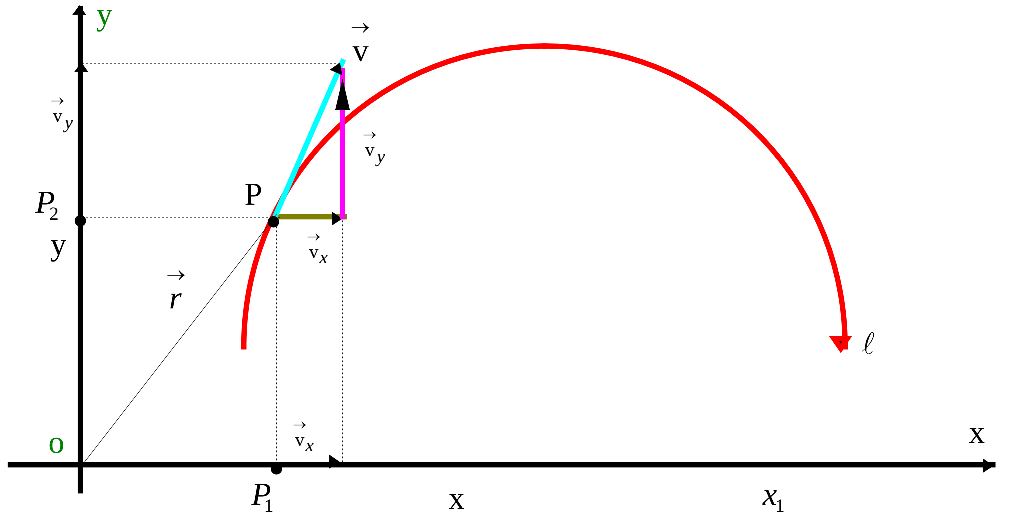
I vettori $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$ sono i componenti dell'accelerazione vettoriale $\vec{a}$ lungo gli assi cartesiani x ed y, gli scalari a_x ed a_y sono le componenti di $\vec{a}$ lungo le rette orientate $\vec{x}$ ed $\vec{y}$ rispettivamente di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

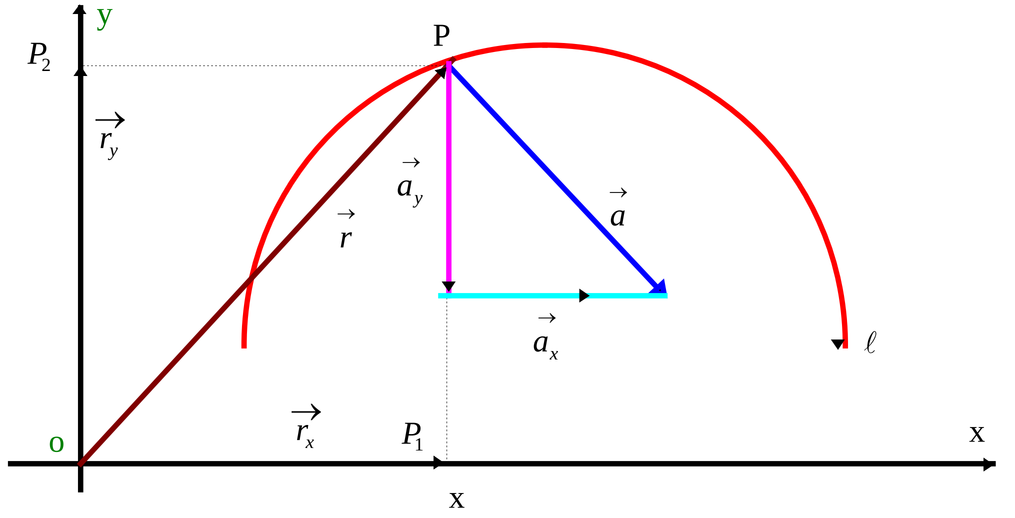
- Le equazioni vettoriali relative ad $\vec{r}$, $\vec{v}$ ed $\vec{a}$ possono essere estese al caso tridimensionale introducendo in esse rispettivamente i termini $z\cdot\vec{k}$, $\vec{v}_z = v_z\cdot\vec{k}$, $\vec{a}_z = a_z\cdot\vec{k}$.

- Un qualsiasi moto di un punto nel piano (nello spazio) può essere immaginato come risultante di due (tre) convenienti moti rettilinei su assi ortogonali.

Il moto curvilineo, che è utilissimo considerare direttamente, non ha più motivo di essere come moto semplice ma come moto risultante di più moti rettilinei.


$P(x,y)$
$\vec{r} = P - O$
$\vec{r}_x = P_1 - O$
$\vec{r}_y = P_2 - O$
P
Δs
$\Delta \vec{r}$
P_1
$\vec{r}$
$\vec{r}_1$
ℓ
y
$\vec{r}_y$
$\Delta \vec{y}$
y_1
$\vec{j}$
o
$\vec{r}_x$
x
$\Delta \vec{x}$
x
$\vec{i}$
x_1


y
$\vec{v}$
$\vec{v}_y$
$\vec{v}_y$
P
P_2
y
$\vec{v}_x$
$\vec{r}$
ℓ
o
$\vec{v}_x$
x
P_1
x
x_1

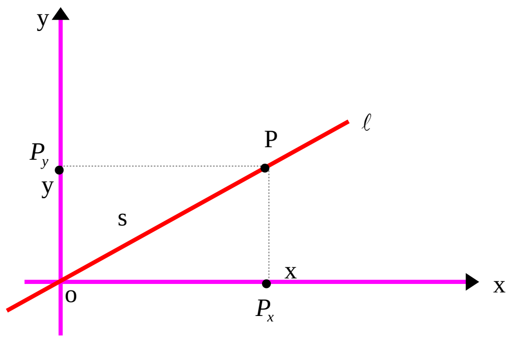

y
P
P_2
$\vec{r}_y$
$\vec{a}_y$
$\vec{a}$
$\vec{r}$
$\vec{a}_x$
ℓ
o
$\vec{r}_x$
P_1
x
x

La composizione dei moti rettilinei

(1) Due moti rettilinei

Il punto materiale **P**, partendo dalla posizione **O**, è soggetto a due moti rettilinei uniformi lungo due rette fra loro perpendicolari.

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{v_x \cdot t} \\ \mathbf{y} = \mathbf{v_y \cdot t} \end{cases} \quad \text{con } v_x \text{ e } v_y \quad \textbf{costanti}$$



Eliminando il parametro **t**, ci ricaviamo l'equazione cartesiana della traiettoria ℓ descritta dal punto materiale $P(x,y)$.

$$t = \frac{x}{v_x} \quad , \quad t = \frac{y}{v_y} \qquad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{v_y}}{\mathbf{v_x}}\mathbf{x}$$

equazione cartesiana della traiettoria ℓ

Il punto materiale P si muove lungo una retta passante per l'origine degli assi cartesiani.

La velocità risultante ha come modulo: $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v_x^2 + v_y^2}} = \text{costante}$

Il moto risultante è rettilineo uniforme. La legge oraria del moto sulla traiettoria rettilinea ℓ è: $s^2 = x^2 + y^2 = v_x^2 \cdot t^2 + v_y^2 \cdot t^2 = \left(v_x^2 + v_y^2\right) \cdot t^2$ $\qquad \mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{v_x^2 + v_y^2}} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$

(2) Moto rettilineo uniforme e moto rettilineo uniformemente vario

Il punto materiale $P(x,y)$, partendo da fermo dalla posizione O, è soggetto a due moti: uno rettilineo uniforme lungo la retta x e l'altro rettilineo uniformemente vario lungo la retta y.

[1] $\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{v_x \cdot t} \\ \mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{a_y t^2} \end{cases}$ $\quad v_x$ è costante, v_y non è costante, $a = \frac{v_y}{t}$ è costante

Il punto materiale parte dalla quiete ($v_{oy} = 0$). La traiettoria ℓ descritta dal punto P si ottiene eliminando il parametro t dalle equazioni [1]. $\quad t = \frac{x}{v_x} \quad , \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_y}{v_x^2} x^2$

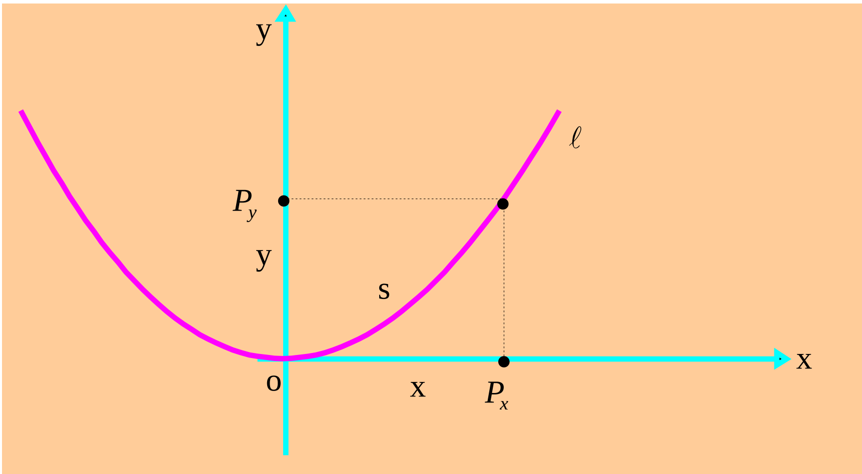
$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{a_y}}{\mathbf{v_x^2}} \mathbf{x^2}$ Si tratta di una traiettoria parabolica col vertice coincidente con l'origine degli assi cartesiani

$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2} = \sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{a}_y^2\,\mathbf{t}^2}$ non è costante $\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2} = \sqrt{\mathbf{0} + \mathbf{a}_y^2} = \mathbf{a}_y$ è costante

Il moto risultante è parabolico uniformemente vario con accelerazione scalare a_y costante.

La sua legge oraria lungo la traiettoria parabolica è:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\mathbf{a}_y\,\mathbf{t}^2$$



(3) Due moti rettilinei uniformemente vari

Il punto **P** parte da fermo dalla posizione **O** ed è soggetto a due moti rettilinei uniformemente vari .

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{a}_x\mathbf{t}^2 \\ \mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{a}_y\mathbf{t}^2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_x = \mathbf{a}_x\mathbf{t} \\ \mathbf{v}_y = \mathbf{a}_y\mathbf{t} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{ox} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{oy} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{a}_x = \textbf{costante} \\ \mathbf{a}_y = \textbf{costante} \end{cases}$$

La traiettoria descritta dal punto **P** è: $\frac{y}{x} = \frac{a_y}{a_x}$

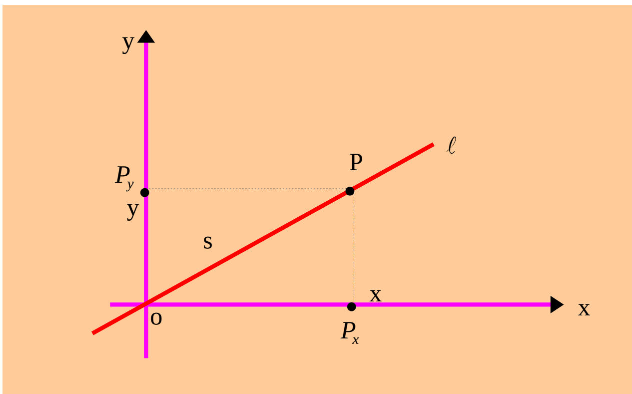
$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{a}_y}{\mathbf{a}_x}\mathbf{x}$ retta passante per l'origine degli assi cartesiani

$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2} = \mathbf{a}\,\mathbf{t} = \mathbf{t}\sqrt{\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2}$ **non è costante** $\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2}$ **è costante**

Il moto risultante è rettilineo uniformemente vario. La legge oraria lungo la traiettoria ℓ è:

$$s^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}a_x^2 t^4 + \frac{1}{4}a_y^2 t^4 = \frac{1}{4}\left(a_x^2 + a_y^2\right)t^4$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2}\cdot\mathbf{t}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{a}\,\mathbf{t}^2$$



(4) Caso generale

Sia **P** un **punto materiale** soggetto a due moti rettilinei aventi direzioni fra loro perpendicolari. Si assumono tali direzioni come asse x ed asse y . I due moti componenti hanno equazioni:

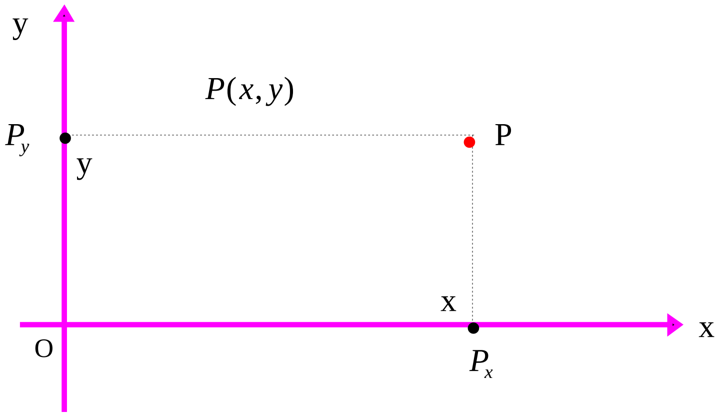
[1] $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ **equazioni parametriche della traiettoria** ℓ

Eliminando il parametro **t** dalle equazioni [1] otteniamo l'equazione cartesiana della traiettoria ℓ descritta dal punto **P**. La velocità risultante ha per componenti: $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$

e come modulo: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

L'accelerazione risultante ha per componenti:

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2}$ $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dy^2}{dt^2}$ e come modulo: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$



La legge oraria del moto risultante è:

$ds = v \cdot dt$ $s = \int v \cdot dt$

Moto piano con accelerazione vettoriale costante

E' il moto di un punto materiale che descrive una traiettoria piana con accelerazione $\vec{a}$ costante, cioè il vettore $\vec{a}$ non muta né in direzione, né in verso, né in modulo. Un esempio ci viene fornito dal moto di un grave lanciato obliquamente nel vuoto. Questo moto può essere descritto mediante la sovrapposizione di due moti che avvengono lungo due rette fra loro perpendicolari. Istante per istante i vettori $\vec{r}$, $\vec{v}$ ed $\vec{a}$ verificano le seguenti equazioni vettoriali:

$$\begin{cases} \vec{a} = \text{costante} \\ \vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t \\ \vec{v}^2 = \vec{v}_o^2 + 2\vec{a}(\vec{r} - \vec{r}_o) \end{cases}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} \qquad \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t \Rightarrow v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} = v_{ox} \cdot \vec{i} + v_{oy} \cdot \vec{j} + t a_x \vec{i} + t a_y \vec{j} \Rightarrow$$

$$v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} = (v_{ox} + a_x \cdot t)\cdot \vec{i} + (v_{oy} + a_y \cdot t)\cdot \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{v_x = v_{ox} + a_x \cdot t} \\ \mathbf{v_y = v_{oy} + a_y \cdot t} \end{cases}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x = x_o + v_{ox} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2} \\ \mathbf{y = y_o + v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2} \end{cases} \quad \text{ed anche} \quad \begin{cases} \mathbf{v_x^2 = v_{ox}^2 + 2a_x(x - x_o)} \\ \mathbf{v_y^2 = v_{oy}^2 + 2a_y(y - y_o)} \end{cases}$$

$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$ la $\begin{cases} v_x^2 = v_{ox}^2 + 2a_x(x - x_o) \\ v_y^2 = v_{oy}^2 + 2a_y(y - y_o) \end{cases}$ velocità $\vec{v}$ all'istante t è la somma della velocità iniziale $\vec{v}_o$ che il punto materiale avrebbe se non fosse accelerato e della variazione di velocità $\vec{a}t$ subita nel tempo **t** per effetto dell'accelerazione costante $\vec{a}$ se la velocità vettoriale iniziale fosse nulla.

$\mathbf{\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$ Il vettore spostamento $\vec{r} - \vec{r}_o$ è la somma vettoriale dello spostamento $\vec{v}_o t$ che il punto subirebbe se non ci fosse l'accelerazione vettoriale $\vec{a}$ e dello spostamento $\frac{1}{2}\vec{a}t^2$ che il punto subisce per effetto dell'accelerazione $\vec{a}$ se la velocità iniziale fosse nulla.

● Un corpo puntiforme **P** è lanciato nel vuoto da un punto **O** con una velocità $\vec{v}_o$ la cui direzione forma un angolo ϑ col piano orizzontale passante per **O**. [1]

Esaminiamo il suo moto trascurando, qualora non ci trovassimo nel vuoto, la resistenza dell'aria. L'angolo ϑ formato dal vettore $\vec{v}$ col piano orizzontale passante per **O** è detto angolo di proiezione o angolo di tiro. Vogliamo determinare l'equazione della traiettoria descritta dal mobile, la sua gittata e l'altezza massima rispetto al piano orizzontale passante per O.

● In assenza di gravità e nel vuoto il moto sarebbe rettilineo uniforme con velocità vettoriale $\vec{v}_o$. Se fosse $\vec{v}_o \equiv \vec{o}$ e sotto la sola azione della forza peso il corpo cadrebbe verso il basso muovendosi di moto rettilineo naturalmente accelerato lungo la verticale con accelerazione vettoriale $\vec{g}$.

● Nel caso nostro si tratta di studiare il moto di un corpo soggetto ad una accelerazione $\vec{g}$ costante in modulo , direzione e verso in quanto il corpo è sottoposto alla sola azione della forza peso.

Per il moto del nostro corpo valgono le seguenti equazioni vettoriali:

[1] **Ad esempio un proietto lanciato da un cannone**

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t \\ \vec{v}^2 = \vec{v}_o^2 + 2\vec{g}(\vec{r} - \vec{r}_o) \end{cases}$$

Si tratta di un moto piano con accelerazione costante.

- Assumiamo come origine **O** del sistema di assi cartesiani il punto da dove il corpo è lanciato. Il moto deve effettuarsi nel piano verticale contenente i vettori $\vec{g}$ e $\vec{v}_o$. Prendiamo questo piano come piano xy in maniera che l'asse x sia orizzontale ed orientato nel verso del moto e l'asse y sia verticale ed orientato dal basso verso l'alto. L'istante iniziale $t_o = 0$ è quello del lancio.
- Il moto del punto **P** può essere considerato come composizione dei moti dei punti P_x e P_y .

P_x si muove lungo l'asse delle x di moto rettilineo uniforme ($a_x = 0$, $v_x = v_{ox} = v_o \cos\vartheta$) , P_y si muove lungo l'asse delle y di moto rettilineo uniformemente vario ($a_y = -g$ se poniamo $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$, $v_{oy} = v_o \sin\vartheta$)

$$\vec{v}_o = v_{ox}\cdot\vec{i} + v_{oy}\cdot\vec{j} \qquad \begin{cases} v_{ox} = v_o\cdot\cos\vartheta \\ v_{oy} = v_o\cdot\sin\vartheta \end{cases} \qquad P(x,y)$$

$$\begin{cases} v_x = v_{ox} = v_o\cdot\cos\vartheta \\ v_y = v_{oy} - gt = v_o\sin\vartheta - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_{ox}t = (v_o\cos\vartheta)\cdot t \\ y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_o\sin\vartheta)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

- Le equazioni orarie dei due moti componenti sono:

$$\begin{cases} x = v_{ox}t \\ y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche della traiettoria descritta dal proietto

Eliminando il parametro t otteniamo l'equazione cartesiana della traiettoria.

$t = \dfrac{x}{v_{ox}} \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{g}{v_{ox}^2}\cdot x^2 + \dfrac{v_{oy}}{v_{ox}}\cdot x$ che può essere scritta nella seguente forma:

$y = -\dfrac{1}{2}\cdot g\cdot\dfrac{1}{v_o^2\cos^2\vartheta}\cdot x^2 + tg\vartheta\cdot x$ essendo: $tg\vartheta = \dfrac{v_{oy}}{v_{ox}}$ $\qquad v_{ox} = v_o\cos\vartheta$

Si tratta di una parabola ad asse verticale con la concavità rivolta verso il basso e passante per l'origine degli assi cartesiani ed avente il vertice nel punto $M\left(\dfrac{v_{ox}\cdot v_{oy}}{g}, \dfrac{v_{oy}^2}{2g}\right)$

- $\begin{cases} v_x = v_{ox} = v_o \cdot \cos\vartheta \\ v_y = v_{oy} - gt = v_o \cdot \sin\vartheta - gt \end{cases}$ $\quad v^2 = v_x^2 + v_y^2$

$v^2 = v_o^2 \cos^2\vartheta + v_o^2 \sin^2\vartheta - 2gv_o \sin\vartheta t + g^2t^2$ $\quad \mathbf{v^2 = v_o^2 - (2v_o g \sin\vartheta)t + g^2t^2}$

$v^2 = v_o^2 - 2g(v_o t \sin\vartheta - \frac{1}{2}gt^2)$ $\quad \mathbf{v^2 = v_o^2 - 2gy}$ $\quad \mathbf{v^2 - v_o^2 = -2gy}$

- calcolo della gittata $G = OC$ del lancio obliquo.

$y = 0 \Rightarrow x = 0$ posizione del lancio $\quad v_{oy} - \frac{1}{2}g\frac{x}{v_{ox}} = 0$ $\quad \mathbf{G = x_C = \frac{2v_{ox}v_{oy}}{g}}$

$\mathbf{G = x_C = 2 \cdot \frac{(v_o\cos\vartheta) \cdot (v_o\sin\vartheta)}{g} = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin 2\vartheta}$ $\quad \mathbf{G = x_C = \frac{2v_{ox}v_{oy}}{g} = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin 2\vartheta}$

La gittata massima si ha per $\sin 2\vartheta = 1$ cioè per $2\vartheta = 90°$ cioè per $\vartheta = 45°$

$$\mathbf{G_{max} = \frac{v_o^2}{g}}$$

La gittata massima è il doppio dell'altezza che il proietto raggiungerebbe con un lancio verticale verso l'alto e con la stessa velocità iniziale $\vec{v}_o$.

Questa proprietà fu intuita da **Tartaglia** e dimostrata per la prima volta da **Galileo Galilei**.

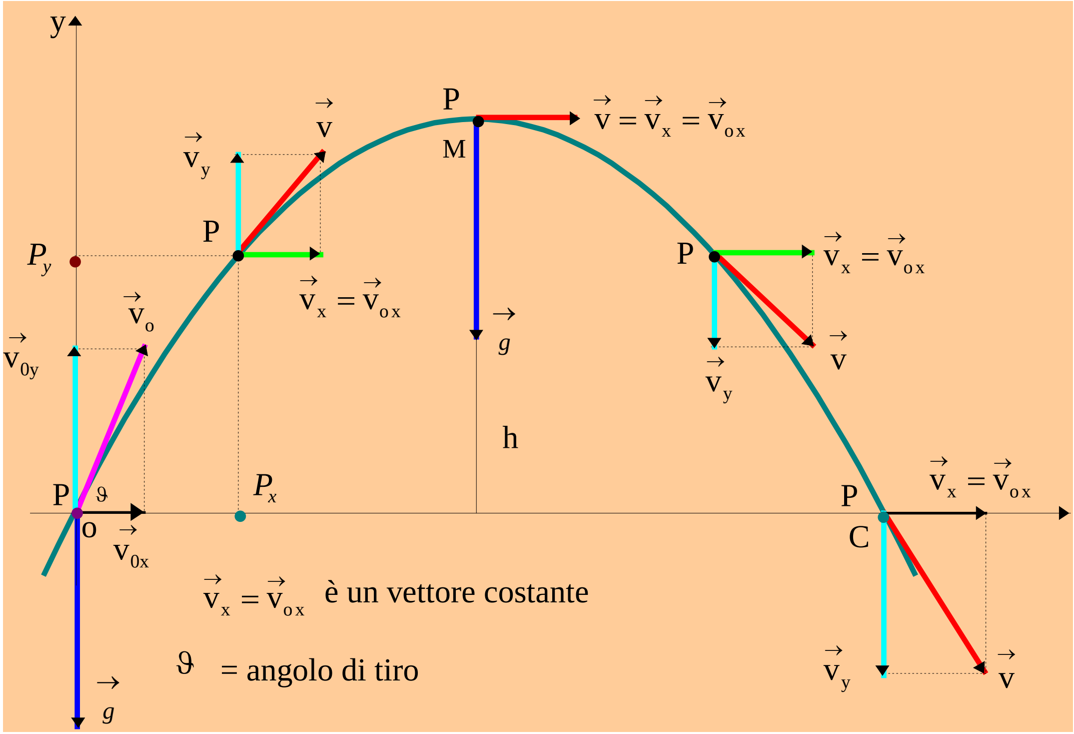
- $y = 0 \Rightarrow t = 0$ **inizio del lancio**

$\mathbf{t = \frac{2v_{oy}}{g} = \frac{2v_o \cdot \sin\vartheta}{g}}$ = tempo di ricaduta al suolo del proietto

- **Calcolo dell'altezza di tiro h**

h è l'altezza massima raggiunta dal proietto. Coincide con l'ordinata del vertice **M** della parabola .

$\mathbf{x_M = -\frac{b}{2a} = \frac{v_{ox}v_{oy}}{g} = \frac{v_o^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{g}}$ $\quad \mathbf{y_M = y(x_M) = \frac{1}{2}\frac{v_{oy}^2}{g} = \frac{v_o^2}{2g}\sin^2\vartheta = \frac{1}{4}G \cdot tg\,\vartheta = h}$



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{ox} \\ v_y = v_{oy} - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_{ox} \cdot t \\ y = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{-g}{2 v_{ox}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{oy}}{v_{ox}} \cdot x = \frac{-g}{2 v_o^2 \cos^2 \vartheta} \cdot x^2 + \operatorname{tg} \vartheta \cdot x$$ = equazione cartesiana della traiettoria

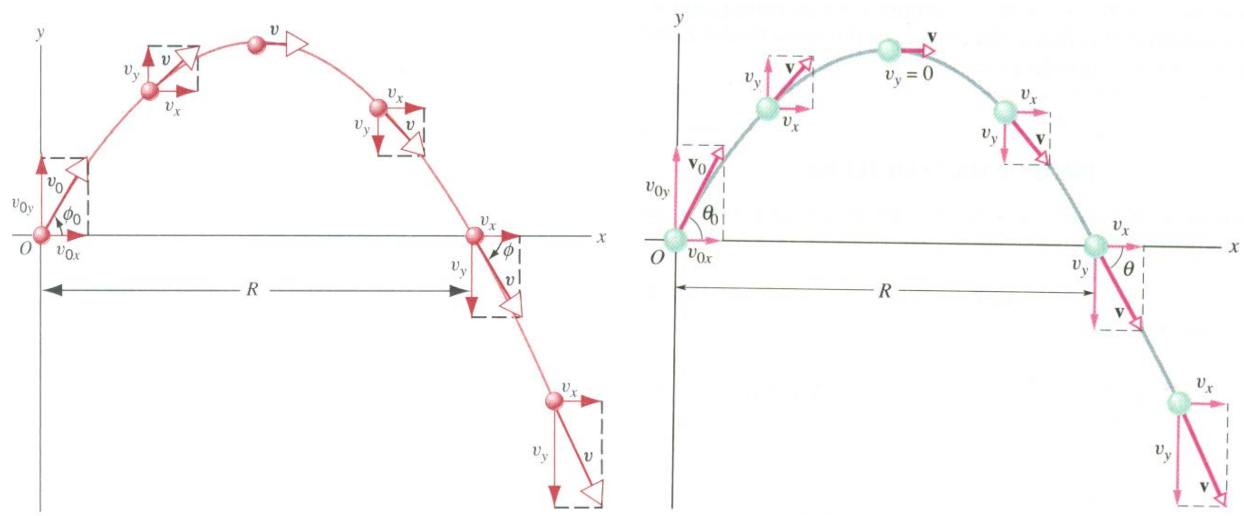
$$OC = R = G = x_C = \frac{2 v_{ox} v_{oy}}{g} = \frac{2 v_o^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta}{g} = \frac{v_o^2}{g} \times \sin 2\vartheta$$ = gittata

$$h = \frac{1}{2} \frac{v_{oy}^2}{g} = \frac{v_o^2}{2g} \sin^2 \vartheta = \frac{1}{4} G \cdot \operatorname{tg} \vartheta$$ = altezza di tiro

$t_s = \frac{v_{oy}}{g}$ tempo necessario per raggiungere la massima altezza

$$t = \frac{2 v_{oy}}{g} = \frac{2 v_o \cdot \sin \vartheta}{g}$$ = tempo di ricaduta al suolo $t = 2t_s$

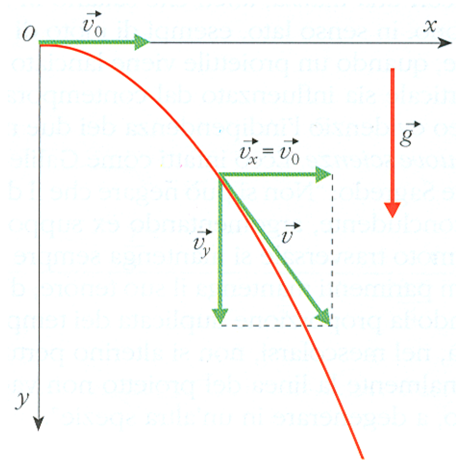
$$\begin{cases} v_{ox} = v_o \cdot \cos \vartheta \\ v_{oy} = v_o \cdot \sin \vartheta \end{cases} \qquad v_y^2 = v_{oy}^2 - 2gy \qquad v^2 = v_o^2 - 2gy$$



Traiettoria di un proiettile lanciato con velocità $\vec{v}_o$. E' indicata la velocità iniziale $\vec{v}_o$ con le sue componenti. E' indicata la velocità $\vec{v}$ con le proprie componenti in cinque istanti diversi. Notare che risulta sempre $v_x = v_{ox}$. La gittata R (G) è la distanza orizzontale descritta dal proiettile quando ripassa alla quota del lancio.

Moto di un proiettile sparato orizzontalmente

Supponiamo che un proiettile (o un qualsiasi grave) sia lanciato orizzontalmente con velocità $\vec{v}_o$. Scegliamo un riferimento cartesiano con l'origine O coincidente col punto di lancio, l'asse x orientato come $\vec{v}_o$ e l'asse verticale y orientato verso il basso.



Il proiettile lanciato orizzontalmente con velocità $\vec{v}_o$ descrive una traiettoria parabolica con asse verticale passante per la sua posizione iniziale. In un generico istante t le componenti cartesiane della velocità del proiettile sono: $\begin{cases} v_x = v_o \\ v_y = g\,t \end{cases}$

Le equazioni parametriche della traiettoria descritta dal proiettile sono: $\begin{cases} x = v_0\, t \\ y = \dfrac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$

Eliminando il parametro t otteniamo l'equazione cartesiana della traiettoria.

$$y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2$$

Il moto del proiettile, per il principio di indipendenza delle azioni simultanee, può essere dedotto dalla composizione dei moti di due punti (P_x e P_y) che muovono lungo due rette ortogonali. P_x si muove di moto rettilineo uniforme P_y si muove di moto rettilineo uniformemente vario.

Le variabili della cinematica rotazionale

- Supponiamo che un punto materiale percorra, muovendosi in senso antiorario, una circonferenza di centro O e raggio r. Misureremo gli angoli descritti dal raggio vettore $\vec{r} = P - O$ a partire dal lato OA e gli archi a partire dal punto **A** . Misureremo gli angoli in **radianti**. Per definizione, la misura in radianti dell'angolo ϑ, ci viene data dalla seguente formula:

$$\vartheta = \frac{\overset{\frown}{AP}}{r} = \frac{s}{r} \qquad [\Delta s = r\Delta\vartheta] \qquad s = \vartheta r$$

Supponiamo che all'istante iniziale $t_o = 0$ il punto mobile occupi la posizione P_o ; diciamo che il valore ϑ_o dell'angolo $A\hat{O}P_o$ è la posizione angolare di P_o. Le posizioni angolari del mobile agli istanti **t** e t_1 sono rispettivamente ϑ e ϑ_1.

Definiamo velocità angolare del punto **P** (o del raggio vettore $\vec{r} = P - O$) relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$ il seguente rapporto:

$$\omega_m = \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{t_1 - t} = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

La velocità angolare media relativa ad un intervallo di tempo Δt piccolissimo (infinitesimo) è la velocità angolare istantanea del punto P, cioè:

$$\omega = \lim_{t_1 \to t} \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r} \qquad v = \omega r$$

dove **v** è la **velocità scalare** (o **velocità lineare**) del punto P.

$$\{\omega\} = \frac{\{\vartheta\}}{\{t\}} = \frac{\text{radiante}}{\text{secondo}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Se la velocità angolare è costante allora la velocità angolare media coincide con quella istantanea e possiamo scrivere:

$$\omega = \frac{\vartheta}{t} \qquad \vartheta = \omega t$$

- Se la velocità angolare di P non è costante, il punto materiale è soggetto ad una **accelerazione angolare** . Siano ω ed ω_1 rispettivamente le velocità angolari di P negli istanti **t** e t_1 .

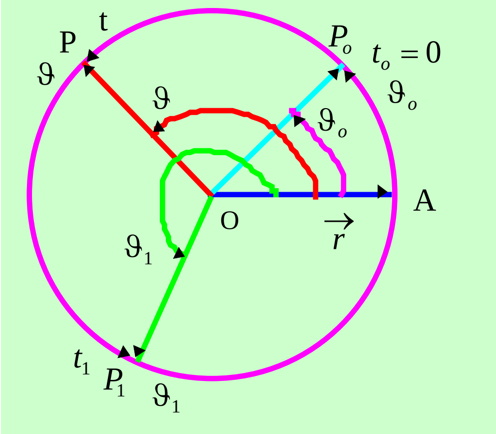
Definiamo accelerazione angolare media del punto P relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$ il seguente rapporto:

$$\alpha_m = \frac{\omega_1 - \omega}{t_1 - t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

L'accelerazione angolare media relativa ad un intervallo di tempo Δt piccolissimo (infinitesimo) ci dà l' **accelerazione angolare istantanea**, cioè:

$$\alpha = \lim_{t_1 \to t} \frac{\omega_1 - \omega}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{r}$$

$$a_t = \alpha \cdot r \qquad \{\alpha\} = \frac{\{\omega\}}{\{t\}} = \frac{rad}{s^2}$$



Se l'accelerazione angolare si mantiene costante, allora l'accelerazione angolare media coincide con quella istantanea . In questo caso possiamo scrivere:

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega}{t}} \qquad \boxed{\omega = \alpha \cdot t} \text{ (1)}$$

● La rotazione di una particella attorno ad un asse fisso (ad esempio attorno ad una retta perpendicolare al piano della circonferenza e passante per il suo centro O) ha una analogia formale col moto di una particella lungo una traiettoria prestabilita.

Nel primo caso le variabili cinematiche sono ϑ , ω , α , nel secondo caso sono **s** , **v** , a_t e queste grandezze si corrispondono a coppie : $\vartheta \to s$, $\omega \to$ v , $\alpha \to a_t$

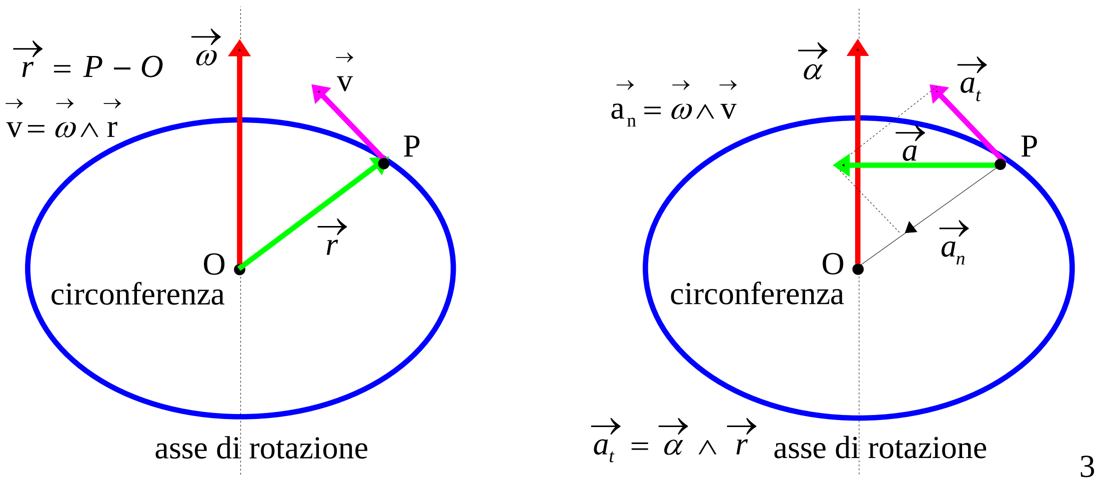
Si noti che dimensionalmente la differenza tra le grandezze angolari e quelle lineari è di una lunghezza, cioè se moltiplico una grandezza angolare per una lunghezza ottengo la corrispondente grandezza lineare, se divido una grandezza lineare per una lunghezza ottengo la corrispondente grandezza angolare.

● Possiamo attribuire alle grandezze angolari ω ed α una forma vettoriale ammettendo che i vettori $\vec{\omega}$ ed $\vec{\alpha}$ abbiano come direzione l'asse di rotazione (cioè la retta perpendicolare al piano della circonferenza e passante per il suo centro O) e verso tale da verificare le seguenti relazioni vettoriali: $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ $\quad \vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$ $\quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$

$\vec{\omega}$ ed $\vec{\alpha}$ possono essere pensati applicati in **P** in quanto sono vettori liberi.

---

(1) $\omega = \dfrac{d\vartheta}{dt} \Rightarrow \alpha = \dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}$



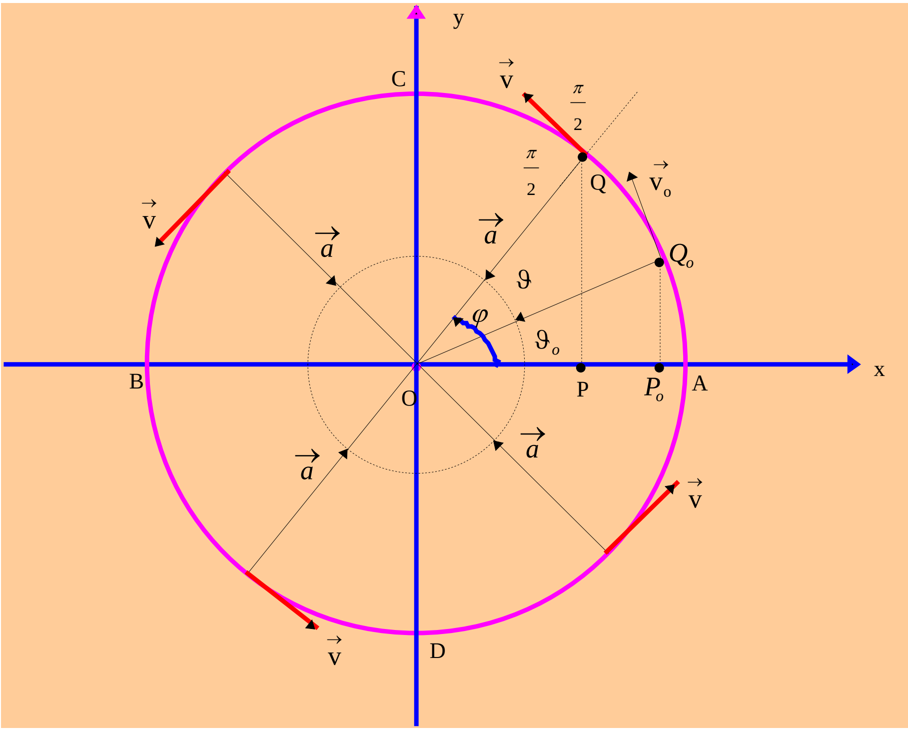
● Il **moto rotatorio** di un corpo rigido può essere descritto sia mediante le variabili angolari (ϑ, ω, α) sia mediante le variabili lineari (s , v, a_t). Però, quando ci interessa il moto di più punti appartenenti allo stesso corpo ruotante, usando variabili lineari dobbiamo specificare spostamento, velocità ed accelerazione di ciascun punto, mentre le corrispondenti variabili angolari sono le stesse per tutti i punti ad ogni istante. Usando, dunque, variabili angolari si può descrivere in modo semplice il moto dell'intero corpo.

moto su traiettoria prestabilita a = costante	moto rotatorio attorno ad un asse prestabilito α = costante
$v = v_o + at$	$\omega = \omega_o + \alpha t$
$s = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o$	$\vartheta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t + \vartheta_o$
$v^2 = v_o^2 + 2a(s - s_o)$	$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\vartheta - \vartheta_o)$
$s - s_o = \frac{v_o + v}{2} \cdot t$	$\vartheta - \vartheta_o = \frac{\omega_o + \omega}{2} \cdot t$

Il moto armonico semplice

● Sia **Q** un punto che sulla circonferenza σ di centro O e raggio **r** si muove di moto circolare uniforme. Il moto del punto **P**, proiezione ortogonale del punto **Q** su un diametro qualsiasi, dicesi moto armonico semplice. La circonferenza σ è detta circonferenza di riferimento o circonferenza associata al moto armonico semplice. In figura è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy; P_o è la posizione del punto mobile all'istante $t_o = 0$ e P la sua posizione dopo **t** secondi.

Gli archi vengono misurati rispetto al punto fisso **A**, gli angoli rispetto al raggio vettore fisso $A - O$. Sia: $A\hat{O}Q_o = \vartheta_o$, $Q_o\hat{O}Q = \vartheta = \omega t$, $A\hat{O}Q = \vartheta + \vartheta_o = \omega t + \vartheta_o$



- Dalla trigonometria risulta:

$$\overline{OP} = \overline{OQ} \cdot \cos(\vartheta + \vartheta_o) \quad \text{cioè :} \qquad \mathbf{x = r \cdot \cos(\omega t + \vartheta_o)} \qquad [1]$$

La [1] rappresenta la legge oraria del moto armonico semplice.

O = centro di oscillazione, $r = \overline{OA}$ = ampiezza del moto armonico

$x = \overline{OP}$ = elongazione , ϑ_o = fase iniziale

$\varphi = \vartheta + \vartheta_o = \omega t + \vartheta_o$ = fase del moto armonico

- calcolo della velocità $\mathbf{v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin(\omega t + \vartheta_o) = -\omega y}$

Ricordando che $\mathbf{v = \omega r}$ possiamo scrivere:

$$\mathbf{v_x = v \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta + \vartheta_o) = -\omega r \sin(\vartheta + \vartheta_o) = -\omega r \sin(\omega t + \vartheta_o) = -\omega y}$$

- calcolo dell'accelerazione

$$\mathbf{a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 \cos(\omega t + \vartheta_o) = -\omega^2 x} \qquad \text{oppure :}$$

$$a_x = \frac{\vec{a}_x}{\vec{i}} = |\vec{a}| \cdot \cos[\pi - (\vartheta + \vartheta_o)] = -a\cos(\vartheta + \vartheta_o) = -\omega^2 r\cos(\omega t + \vartheta_o) = -\omega^2 x \qquad a = \omega^2 r$$

Riepilogo

$$x = r \cdot \cos(\omega t + \vartheta_o) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin(\omega t + \vartheta_o) = -\omega y$$

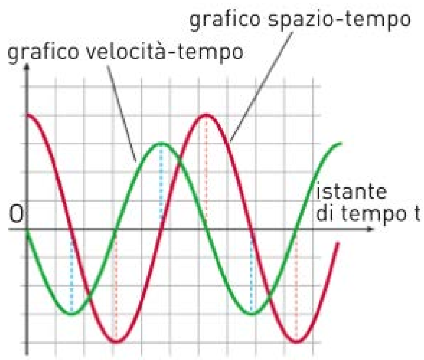
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2\cos(\omega t + \vartheta_o) = -\omega^2 x$$

Caso particolare

$\vartheta_o = 0$, cioè all'istante iniziale $Q \equiv P \equiv A$. I diagrammi delle funzioni $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$ in questo caso particolare sono indicati in figura.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\omega t = r \cdot \cos\vartheta \\ v_x = -r\omega \cdot \sin\omega t = -r\omega \times \sin\vartheta = -\omega y \\ a_x = -r\omega^2 \cdot \cos\omega t = -r\omega^2 \times \cos\vartheta = -\omega^2 x \end{cases}$$

Per il caso semplice valgono i seguenti grafici:



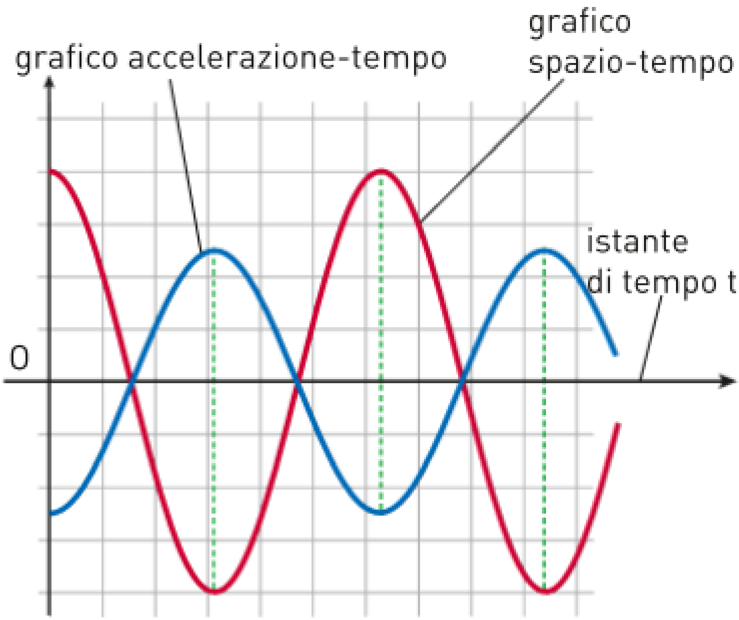
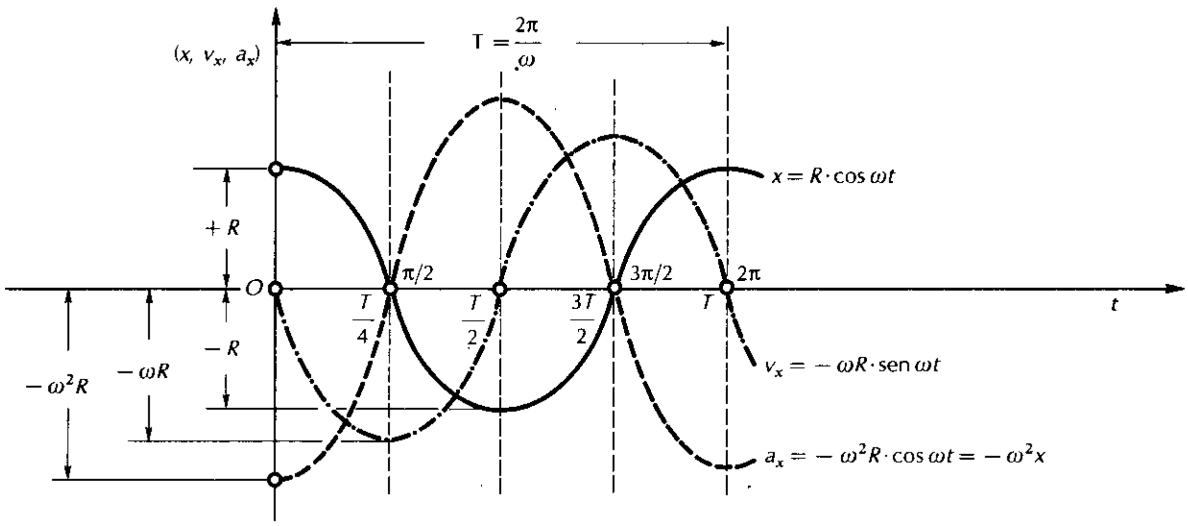


Grafico accelerazione-tempo del moto armonico confrontato con il corrispondente grafico spazio-tempo.



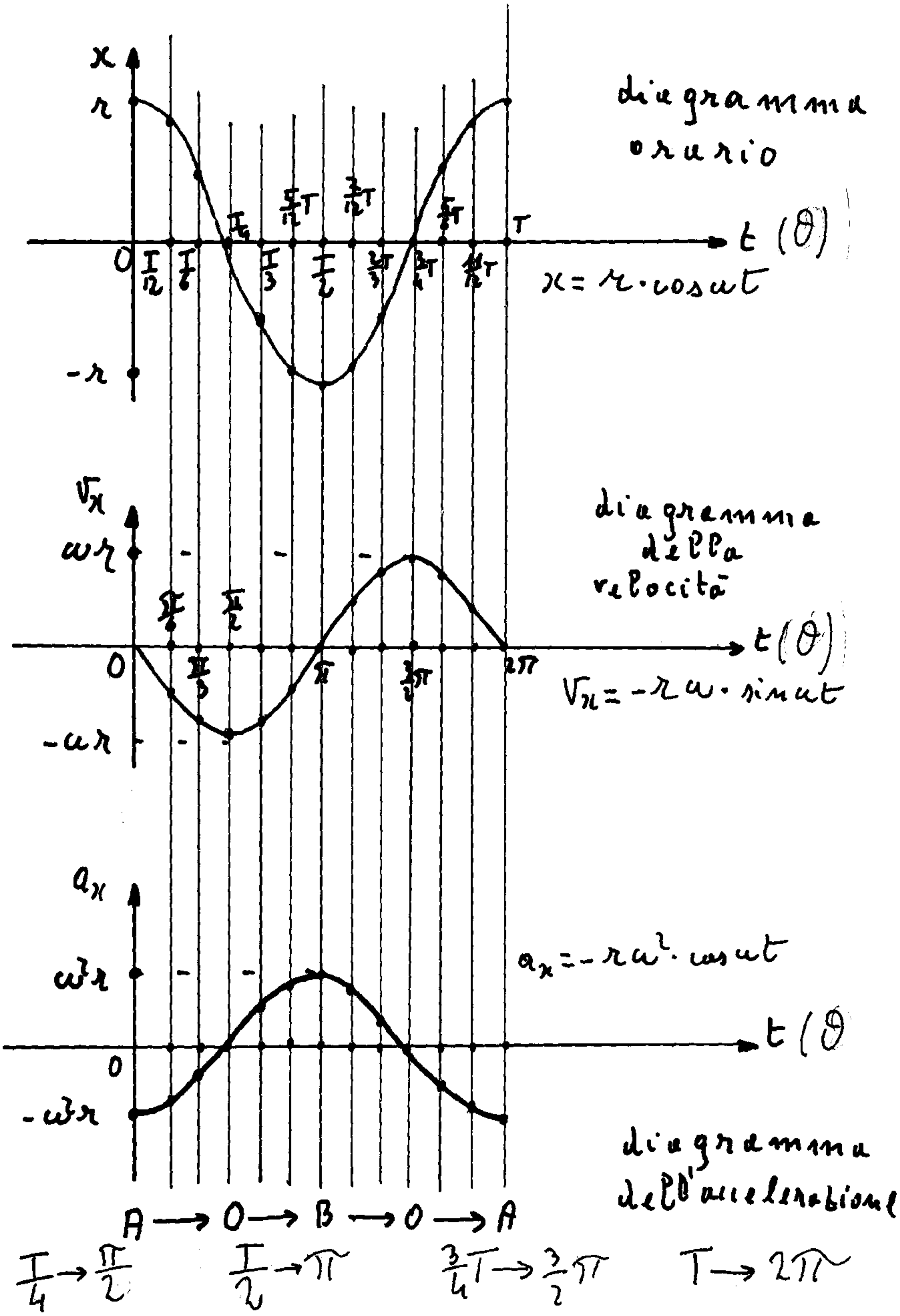
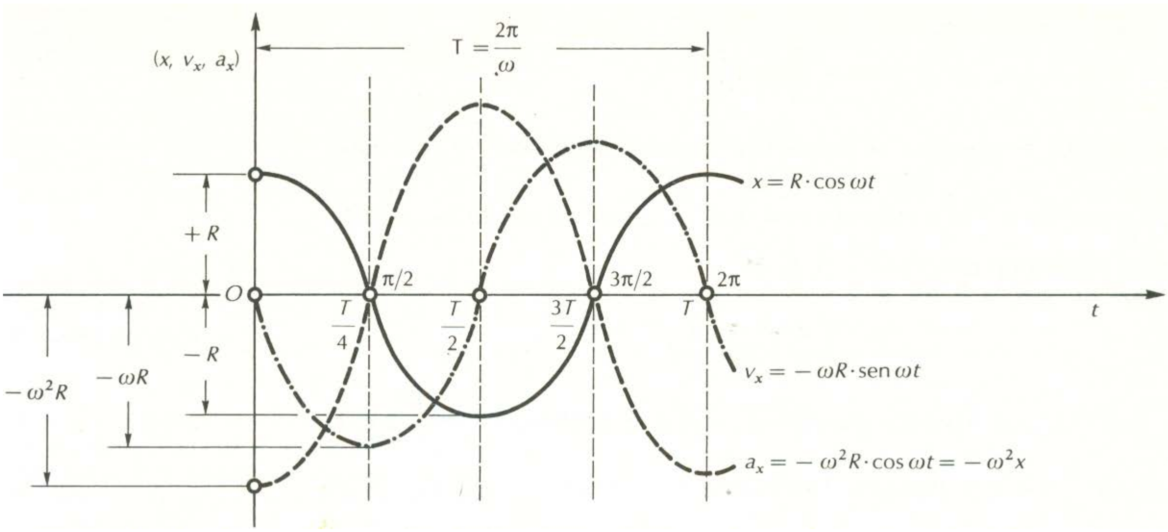
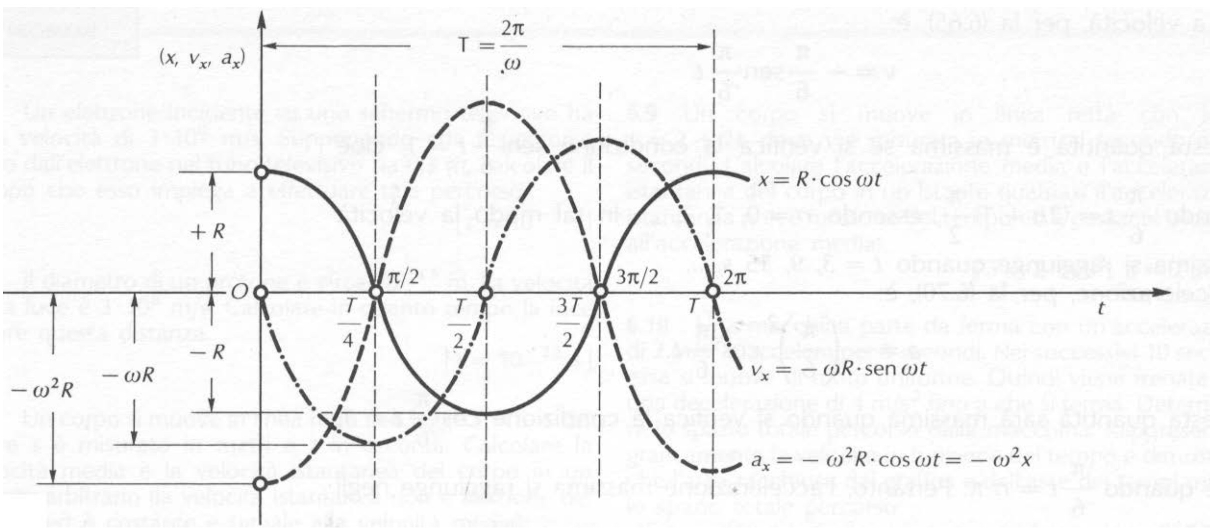


diagramma orario
$x = r \cdot \cos\omega t$
diagramma della velocità
$v_x = -r\omega \cdot \sin\omega t$
$a_x = -r\omega^2 \cdot \cos\omega t$
diagramma dell'accelerazione
A → O → B → O → A
$\frac{T}{4} \to \frac{\pi}{2}$
$\frac{T}{2} \to \pi$
$\frac{3}{4}T \to \frac{3}{2}\pi$
$T \to 2\pi$





- La velocità è **nulla** in A e B, **massima** o **minima** in O , precisamente è **minima** quando il punto P passa per O provenendo da A, è **massima** quando il punto P passa per O provenendo da B . L'accelerazione è **nulla** in O , **massima** in B , **minima** in A .

$A \vdash\!\!\dashv O$ il moto è accelerato retrogrado ($v_x < 0$, $a_x < 0$)

$O \vdash\!\!\dashv B$ il moto è decelerato retrogrado ($v_x < 0$, $a_x > 0$)

$B \vdash\!\!\dashv O$ il moto è accelerato progressivo ($v_x > 0$, $a_x > 0$)

$O \vdash\!\!\dashv A$ il moto è decelerato progressivo ($v_x > 0$, $a_x < 0$)

<<Il moto armonico semplice è un moto rettilineo vario con la velocità scalare che aumenta (diminuisce) quando il punto materiale si avvicina (si allontana) al (dal) centro di oscillazione O>>

- Il percorso *AOBOA* (uguale due volte il diametro) dicesi oscillazione completa, mentre il percorso *AB* oppure *BA* (uguale al diametro) dicesi oscillazione semplice.

$\mathbf{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$ **frequenza** = numero di oscillazioni complete compiute dal punto P in un secondo

$\mathbf{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ = periodo = tempo necessario perché il punto P compia una oscillazione completa

$\mathbf{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ = pulsazione o frequenza angolare e coincide con la velocità angolare del punto Q

Periodo e frequenza nel moto armonico semplice e nel moto circolare uniforme associato coincidono

periodo = tempo necessario perché il moto riprenda gli stessi caratteri cinematici, cioè la stessa posizione , la stessa velocità , la stessa accelerazione.

oscillazione completa = spazio percorso dal mobile nel tempo **T**

- Se avessimo considerato il moto di P_y, proiezione ortogonale di **Q** sul diametro *CD* , avremmo ottenuto:

$$\begin{cases} y = r\cdot\sin(\omega t + \vartheta_o) \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = r\omega\cos(\omega t + \vartheta_o) = \omega x \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -r\omega^2\sin(\omega t + \vartheta_o) = -\omega^2 y \end{cases}$$

La proiezione di un moto circolare uniforme su di un diametro qualsiasi genera sempre un moto armonico. Viceversa un moto circolare uniforme può essere ottenuto dalla combinazione di due moti armonici che avvengono su due assi perpendicolari aventi la stessa ampiezza, la stessa frequenza ed una differenza di fase di $\frac{\pi}{2}$.

La dinamica del moto armonico semplice

Il moto armonico semplice è generato da una forza elastica di richiamo, cioè da una forza del tipo $\vec{F} = -k\vec{s}$ (nel caso nostro è del tipo $\vec{F} = -k\vec{x}$) . Se **m** è la massa del punto **P** che si muove di moto armonico, abbiamo: $\mathbf{\vec{F} = m\cdot\vec{a}_x = -\omega^2 m\cdot\vec{x} = -k\cdot\vec{x}}$

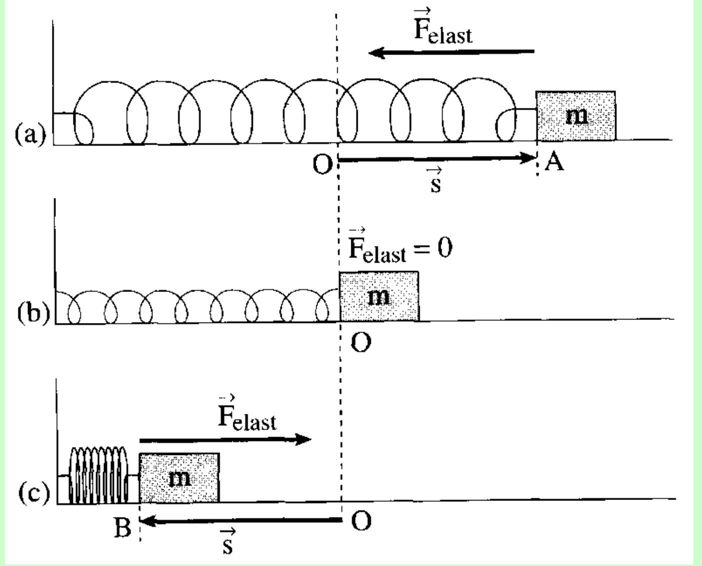
Risulta : $\{k\} = \frac{\{F\}}{\{x\}} = \frac{N}{m}$ $\quad \mathbf{k = \omega^2 m} \quad \mathbf{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\,x}{F}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{a_x}} \qquad v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F}{mx}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_x}{x}}$$

Un disco di massa m è fissato all'estremo libero di una molla che può scivolare senza attrito lungo un piano orizzontale, come indicato in figura. Se spostiamo il disco verso destra di un tratto $\vec{x}$ la molla si deforma ed esercita sul disco un forza elastica $\vec{F} = -k\,\vec{x}$ che richiama il disco verso la posizione di equilibrio O. Il sistema disco-molla oscilla muovendosi di moto armonico semplice.

Se **m** è la massa del punto che si muove di moto armonico, applicando la seconda legge della dinamica abbiamo : $\boxed{\vec{F} = m\cdot\vec{a}_x = -\omega^2 m\cdot\vec{x} = -k\cdot\vec{x}}$ con $\vec{a} = -\omega^2\cdot\vec{x}$

Questo risultato ci consente di affermare che il moto armonico semplice è generato da una **forza elastica di richiamo** , cioè da una forza del tipo $\vec{F} = -k\,\vec{x}$ $\vec{F} = -k\,\vec{x}$.

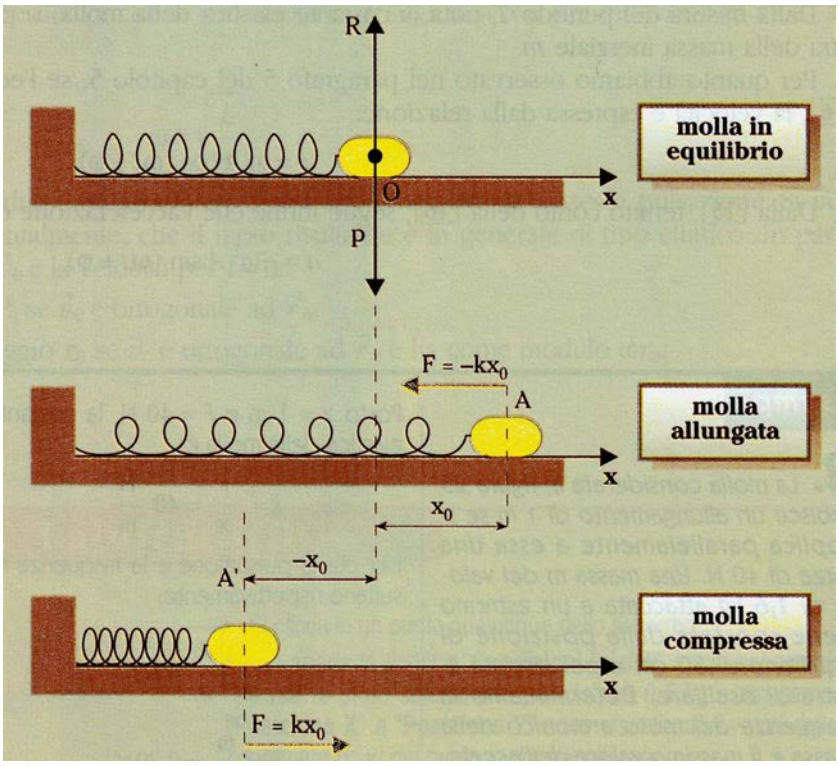


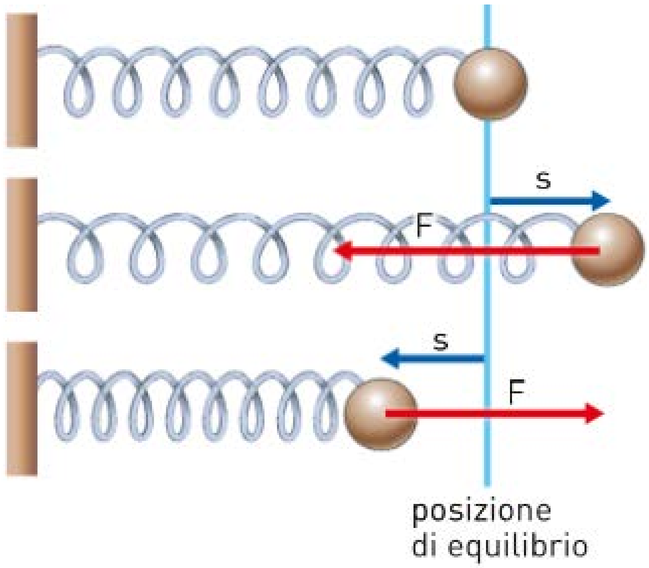
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\,x}{F}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{a_x}}$$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F}{mx}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_x}{x}}$$

Il moto armonico semplice è il moto di una particella di massa m soggetta ad una forza proporzionale allo spostamento della particella ma di segno opposto.

Concludendo possiamo affermare che un punto materiale di massa m soggetto ad una forza elastica di costante k si muove di moto armonico semplice con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e con periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.





Una molla si oppone sempre alla propria deformazione. Se lo spostamento $\vec{s}$ della pallina dalla posizione di equilibrio della molla è verso destra, la molla esercita sulla pallina una forza $\vec{F}$ verso sinistra; se lo spostamento $\vec{s}$ è verso sinistra, la forza $\vec{F}$ esercitata dalla molla è verso destra.

Il pendolo semplice

- Dicesi pendolo semplice (o pendolo matematico) un sistema ideale costituito da un grave puntiforme di massa **m** fissato ad un punto **C** mediante un filo flessibile, inestensibile e di massa trascurabile rispetto a quella del grave. Il vincolo, cioè il filo di lunghezza ℓ, consente al grave di descrivere archi di circonferenza di centro **C** e raggio ℓ. Indichiamo con ϑ l'angolo formato dalla verticale passante per il punto di sospensione **C** del pendolo con la direzione del filo del pendolo.
- Analizziamo le forze che agiscono sulla massa **m** in alcune situazioni particolari :

(1) pendolo nella posizione più bassa col filo verticale ($\vartheta = 0$)

La posizione di equilibrio statico è quella che si ha in corrispondenza del filo verticale teso e con il pendolo fermo. Il peso $\vec{P} = m\vec{g}$ del grave è equilibrato dalla reazione vincolare (tensione) $\vec{T}$ del filo: $\vec{P} = -\vec{T}$. La forza esercitata dal filo sul pendolo (tensione del filo) vale in modulo $T = mg$. Se $v = 0$ abbiamo l'equilibrio statico, altrimenti la tensione del filo è massima e vale $\mathbf{T = mg + m\frac{v^2}{l} = mg + m\frac{2gh}{l} = mg + 2mg = 3mg = 3P}$ se il pendolo è lasciato libero quando il filo è in posizione orizzontale. In tal caso la posizione O del pendolo non è una posizione di equilibrio dinamico in quanto la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sul pendolo non è nulla.

(2) Pendolo formante un angolo ϑ con la verticale passante per il punto di sospensione C.

Se spostiamo il pendolo dalla sua posizione O di equilibrio statico, esso comincia ad oscillare attorno ad O muovendosi lungo un arco di circonferenza di raggio ℓ, pari alla lunghezza ℓ del filo, in un piano verticale.

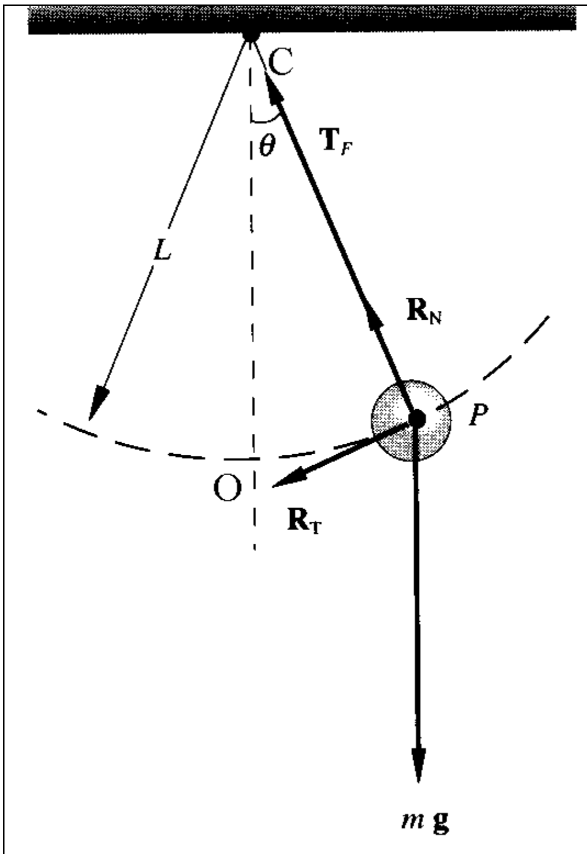
Le forze agenti sul pendolo sono il suo peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e la tensione $\vec{T}$ del filo. Il moto del pendolo è regolato dalla seconda legge della dinamica che, in questa circostanza, assume la forma:

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{R} = m\vec{a}$$

Questa equazione vettoriale è equivalente alle due seguenti equazioni vettoriali:

[1] $\vec{P}_t = \vec{R}_t = m \cdot \vec{a}_t$ $\qquad$ $\vec{P}_n + \vec{T} = \vec{R}_n = m \cdot \vec{a}_n$ **[2]**

Qui $\vec{a}_c$ è l'accelerazione centripeta, $m \cdot \vec{a}_c$ è la forza centripeta $\vec{R}_n$ che tiene la massa **m** sulla traiettoria circolare



$\vec{R}_t$ agisce lungo la direzione del moto, cioè lungo la tangente alla traiettoria (arco di circonferenza) orientata dalla posizione di equilibrio O verso destra, $\vec{R}_n$ agisce lungo la direzione del filo (normale alla direzione del moto) orientata dalla posizione occupata dal pendolo verso il punto di sospensione C. Le [1] e [2] scritte in forma scalare assumono la forma : $\mathbf{R_t = P_t = -mg\sin\vartheta = ma_t}$

$$\mathbf{R_n = T_n - P_n = T_n - mg\cos\vartheta = ma_n = m\frac{v^2}{l}}$$

Il segno negativo della componente lungo la direzione del moto è dovuto al fatto che la forza tangenziale ha segno opposto rispetto a quello dell'ascissa curvilinea s introdotta per individuare la posizione del pendolo.

Per $s < 0$, posizioni dell'arco di circonferenza poste alla sinistra della verticale, la forza tangenziale è diretta verso la destra della verticale, mentre per $s > 0$ la forza tangenziale è diretta verso la sinistra della verticale.

Fisicamente $\vec{R}_t$ è una forza di richiamo che tende a riportare il punto materiale di massa **m** (pendolo semplice) sulla verticale, anche se non è di direzione costante come nel caso delle forze elastiche.

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ($\vartheta = 0$) e nulla agli estremi delle oscillazioni ($\vartheta = \vartheta_o$) dove il verso del moto si inverte. Notiamo che i risultati cinematici non dipendono dalla massa del pendolo. La tensione del filo si calcola applicando La seguente formula: **[3]** $\mathbf{T = mg\cos\vartheta + m\cdot\frac{v^2}{l}}$ = tensione istantanea del filo

La tensione è massima nella posizione verticale, dove sia $\cos\vartheta$ che $v(t)$ assumono i valori massimi, ed è minima nei punti di inversione.

Lo studio dettagliato del moto di un pendolo semplice è il seguente. Inizialmente il pendolo occupi la posizione di equilibrio statico O. Esso viene portato nella posizione **A** ed ivi trattenuto mediante un piolo. Decomponiamo la forza $\vec{P}$ lungo la tangente e la normale alla traiettoria: $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}_t + \vec{\mathbf{P}}_n$

Il componente $\vec{P}_n$ è equilibrato dalla tensione del filo $\vec{T}$, il componente $\vec{P}_t$ è equilibrato dalla reazione vincolare $\vec{Z}$ offerta dal piolo.

- Tagliando il piolo la forza $\vec{P}_t$, non essendo più equilibrata dalla reazione vincolare $\vec{Z}$, diventa una forza motrice ed è la causa delle oscillazioni della massa **m**.

Le oscillazioni avvengono sul piano verticale passante per **O** e contenente i vettori $\vec{P}$ e $\vec{v}$.

In generale, nel caso dinamico, la massa **m** è soggetta, istante per istante, alla forza $\vec{R}$ somma vettoriale delle forze $\vec{P}$ e $\vec{T}$, cioè : $\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{R}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$ essendo $\vec{a}$ l'accelerazione posseduta dalla massa m quando questa percorre l'arco di circonferenza $AOBOA$. La relazione [2] ci dice che $\vec{T}$ si può decomporre in due parti: una uguale e contraria al componente normale $(\vec{P}_n)$ del peso, l'altra uguale alla forza centripeta che mantiene la massa **m** sulla traiettoria curva . In altre parole, nel caso dinamico, la tensione $\vec{T}$ è sempre maggiore (o uguale) di quella del caso statico ed il suo modulo , ad ogni istante , è la somma del modulo di $\vec{P}_n$ e del modulo della forza centripeta $\vec{R}_n$ ($T = P_n + R_n$) .

$\mathbf{R_n = T - P_n = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{\ell}}$ = forza centripeta = forza necessaria per mantenere il pendolo lungo un arco di circonferenza di centro C e raggio ℓ .

- Il risultante $\vec{R}$ si decompone nei due componenti : $\vec{R}_n$ forza normale che costituisce la forza centripeta che mantiene la massa m sulla traiettoria circolare ; $\vec{R}_t$ forza tangenziale motrice variabile è la forza di richiamo su **m** che tende a ricondurla nella sua posizione **O** .

[$\vec{R}_t = \vec{P}_t = m \cdot \vec{a}_t$]

• effetti prodotti da $\vec{R}_n$

Se orientiamo il segmento AC da A verso C l'equazione vettoriale $\vec{P}_n + \vec{T} = \vec{R}_n = m \cdot \vec{a}_n$ si traduce nell'equazione scalare : $-P_n + T = m \cdot a_n$ $\mathbf{T = P_n + m \cdot a_c = mg\cos\vartheta + m \times \frac{v^2}{\ell}}$

[3] $\mathbf{T = mg\cos\vartheta + m \cdot \frac{v^2}{\ell}}$ = tensione istantanea del filo

La tensione massima si ha nel punto **O**, la tensione minima si ha nei punti **A** e **B** dove la massa è in quiete ma non in equilibrio ($v_A = v_B$) .

Ad ogni istante il modulo della tensione è la somma dei moduli del componente normale del peso $\vec{P}$ e della forza centripeta $\vec{R}_n$

Quando il pendolo occupa la posizione O abbiamo:

$$\mathbf{T_O} = \mathbf{mg} + \sqrt{2gh_o} = \mathbf{mg}(3 - 2\cos\vartheta_o) \qquad \vartheta = 0 \Rightarrow P = mg \ , \ \mathbf{R_n} = \mathbf{m}\frac{\mathbf{2gh_o}}{\ell}$$

- Effetti prodotti da $\vec{R}_t$

Fissiamo sulla traiettoria circolare, come verso positivo quello antiorario e come origine la posizione di equilibrio **O**. Gli archi di circonferenza saranno misurati a partire da **O** e gli angoli a partire dal lato CO. La lunghezza **s** dell'arco è legata all'angolo ϑ dalla seguente relazione :

$$\mathbf{s} = \ell \cdot \vartheta \qquad\qquad \vartheta = \frac{\mathbf{s}}{\ell}$$

L'equazione vettoriale: $\vec{\mathbf{R}}_t = \vec{\mathbf{P}}_t = \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}}_t$ si traduce nell'equazione scalare :

$-mg \cdot \sin\vartheta = m \cdot a_t$ cioè : $\qquad \mathbf{a_t} = -\mathbf{g} \cdot \sin\vartheta \qquad$ **[4]**

dove il segno meno sta ad indicare che la forza $\vec{P}_t$ (e quindi anche l'accelerazione a_t) ha verso opposto a quello dello spostamento, cioè la forza $\vec{P}_t$ è diretta nel verso di ϑ decrescente . *

La [4] ci dice che il moto del pendolo semplice non è un moto armonico semplice.

- Per piccole oscillazioni ($\vartheta < 5°$) è lecito porre: $\sin\vartheta = \vartheta = \frac{\mathbf{s}}{\ell}$ La [4] diventa :

[5] $\qquad \mathbf{a_t} = -\frac{\mathbf{g}}{\ell} \cdot \mathbf{s} = -\omega^2 \cdot \mathbf{s}$ avendo posto : $\qquad \boxed{\omega^2 = \frac{g}{\ell}} \qquad$ **[6]**

Per ϑ sufficientemente piccolo la forza $\vec{P}_t$ agente su **m** assume la forma:

$$\mathbf{P_t} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a_t} = -\mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{g}}{\ell} \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{m}\omega^2 \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} \qquad \textbf{[7]}$$

$$k = m\omega^2 \ , \ \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{\ell} \ , \ \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \ , \ \omega = \frac{2\pi}{T} \ , \ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \ , \ g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2} \qquad \textbf{[8]}$$

Per piccoli spostamenti il moto del pendolo semplice è armonico in quanto $\vec{P}_t$ è una forza elastica di richiamo cioè del tipo $\vec{\mathbf{P}}_t = -\mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{s}}$ cioè proporzionale allo spostamento e diretta in verso opposto .

Le formule [8] ci consentono di ricavare le seguenti 4 leggi del pendolo semplice:

(1) Il periodo di oscillazione di un pendolo semplice non dipende dalla sua massa. Questo significa che a parità di lunghezza un pendolo con una massa di acciaio ed un altro con una massa di sughero hanno uguale periodo di oscillazione .

---

* allo spostamento curvilineo $\overset{\frown}{OA}$ orientato da O verso A , oppure al vettore posizione $A - K$ se ϑ_o è piccolo , al vettore posizione $A - O$ negli altri casi

(2) Il periodo è direttamente proporzionale alla radice quadrata della sua lunghezza ed inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'accelerazione di gravità.

(3) Le piccole oscillazioni sono ISOCRONE, cioè non dipendono dall'ampiezza di oscillazione (sempre che questa non superi i 5°) . Quindi il periodo di oscillazione , cioè il tempo impiegato dal pendolo a compiere una oscillazione completa , è indipendente dall'ampiezza dell'arco , purché esso sia piccolo .

(4) Il piano di oscillazione si mantiene costante. Esso coincide col piano verticale passante per il punto fisso **C** (solidale col sistema di riferimento scelto per analizzare il moto del pendolo semplice) e per la posizione iniziale del pendolo. Se ciò non si verifica si ha una prova che il sistema di riferimento scelto non è inerziale.

- In realtà il moto del pendolo è smorzato a causa degli attriti delle sospensioni e dell'aria . Per individuare il moto del pendolo occorre specificare la posizione iniziale e la velocità iniziale della massa m.

- La velocità nel pendolo semplice

Se trascuriamo la resistenza dell'aria , sulla massa **m** agiscono due forze :

(1) la tensione $\vec{T}$ nel filo che non compie lavoro essendo sempre perpendicolare alla direzione del moto (spostamento istantaneo)

(2) il peso $\vec{P}$ che è una forza conservativa .

In questo soltanto forze conservative eseguono lavoro per cui l'energia meccanica totale della massa m si conserva. Assumiamo come riferimento per l'energia potenziale [§] la retta **r** tangente all'arco di circonferenza nel punto di equilibrio **O** . Nella posizione iniziale **A** ed in quella finale **B** la massa **m** è in quiete . Sia h_o la distanza fra le rette parallele **r** ed AB .

Applicando il teorema di conservazione dell'energia meccanica totale abbiamo:

$$T_A + U_A = T_M + U_M \quad \text{cioè : } 0 + mgh_o = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \qquad \mathbf{v = \sqrt{2g(h_o - h)}} \qquad \mathbf{[9]}$$

$$h_o = OC - CK = \ell - \ell \cdot \cos\vartheta_o = \ell(1 - \cos\vartheta_o)$$

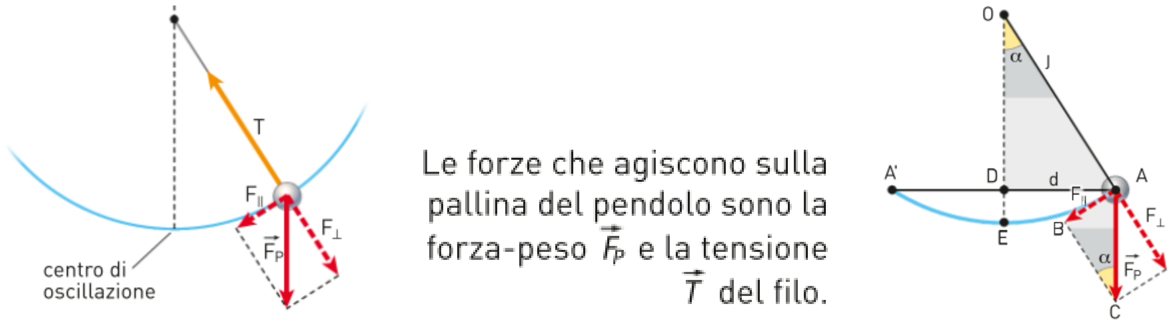
$$h = OC - SC = \ell - \ell \cdot \cos\vartheta = \ell(1 - \cos\vartheta)$$

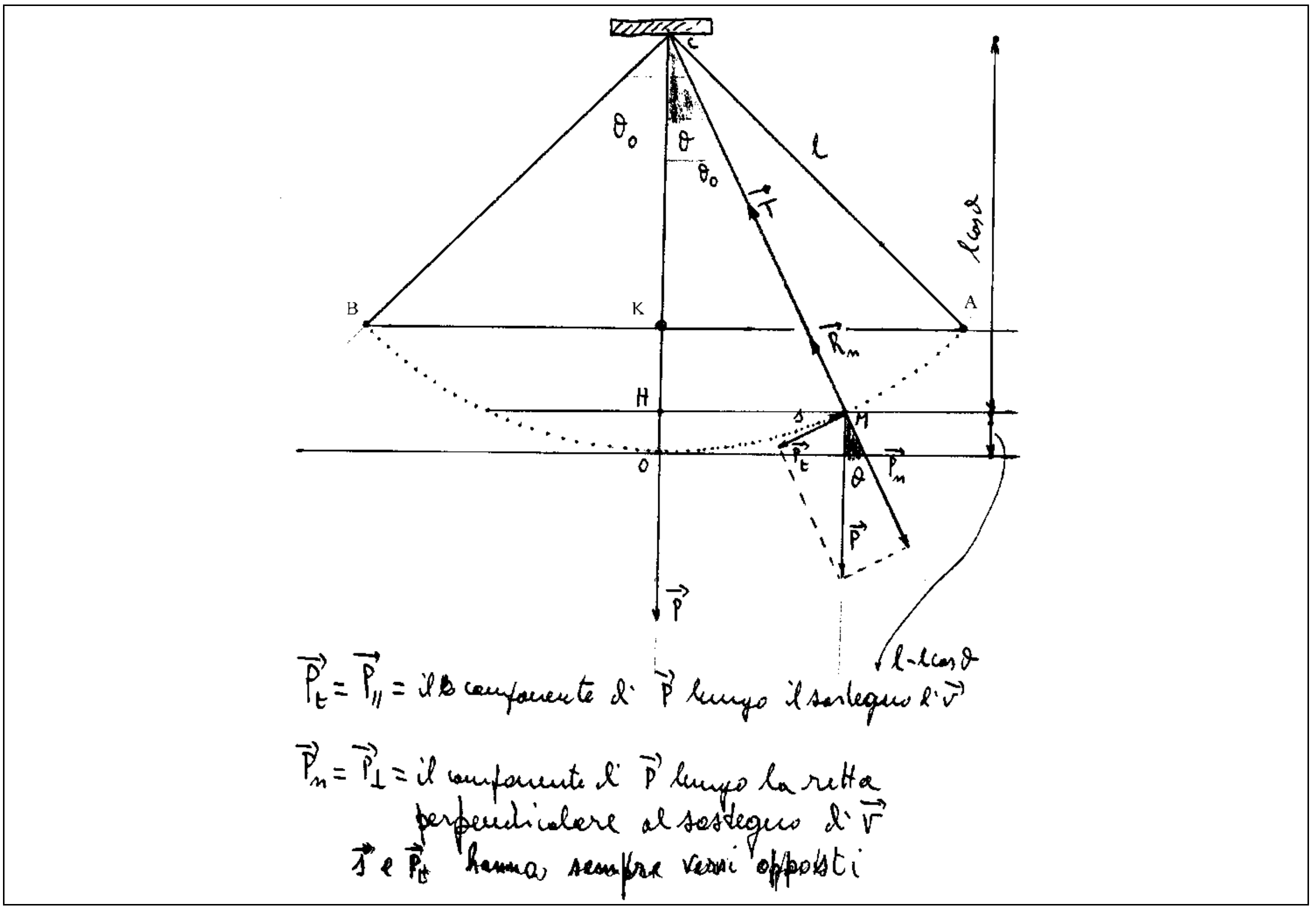
$$h_o - h = \ell \cdot (\cos\vartheta - \cos\vartheta_o) \qquad \mathbf{v = \sqrt{2g\ell \cdot (\cos\vartheta - \cos\vartheta_o)}} \qquad \mathbf{[10]}$$

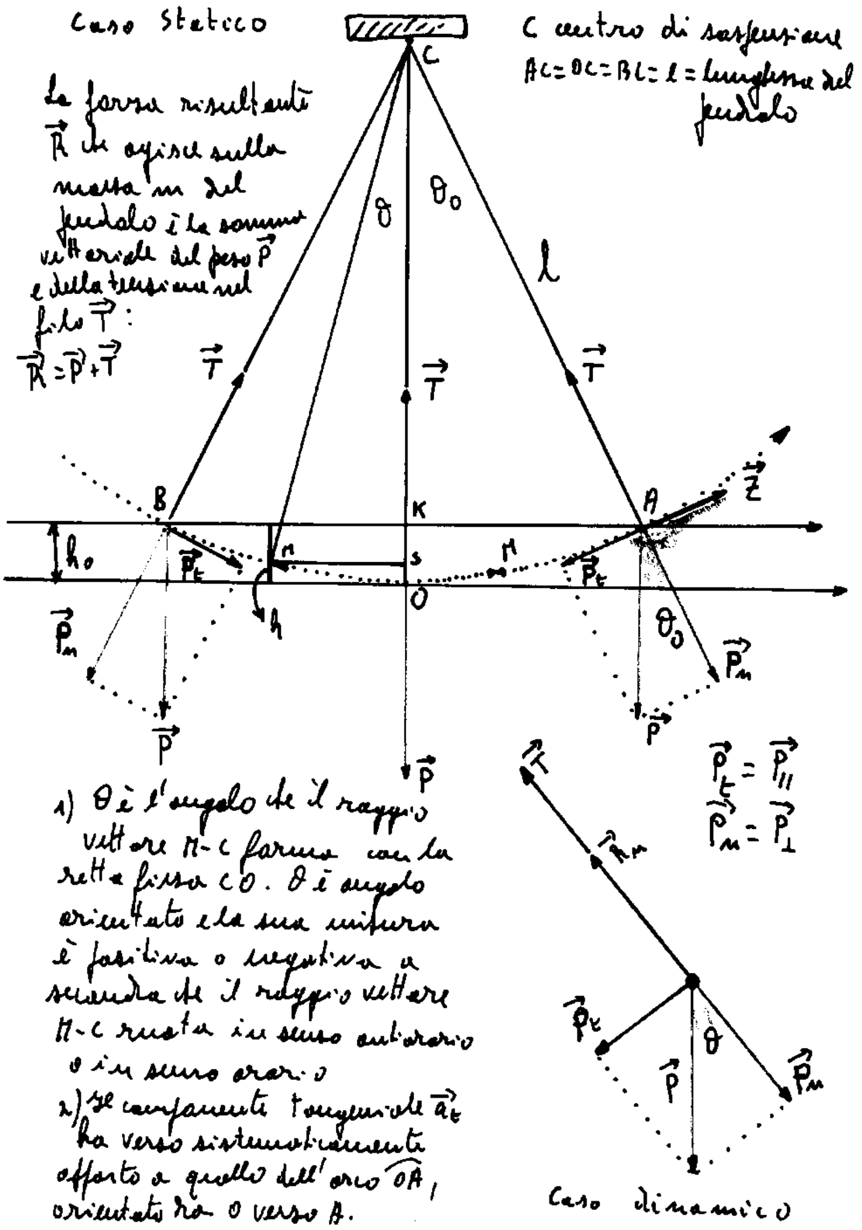
La [3] diventa : **[11]** $\mathbf{T = mg(3\cos\vartheta - 2\cos\vartheta_o)}$

[§] lo zero per l'energia potenziale

La [11] è valida per qualsiasi ampiezza ϑ date che per l'angolo ϑ non è stata fatta alcuna approssimazione.







Pendolo semplice: considerazioni sintetiche finali

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{R}_t + \vec{R}_n = \vec{P}_t + \vec{T}_t + \vec{P}_n + \vec{T}_n = m\vec{a}_t + m\vec{a}_n \Rightarrow$$

$$\vec{F}_t + \vec{F}_c = \vec{P}_t + \vec{T}_t + \vec{P}_n + \vec{T}_n = m\vec{a}_t + m\vec{a}_n$$

$$\mathbf{\vec{F}_t = \vec{P}_t + \vec{T}_t = \vec{P}_t = m\vec{a}_t} \quad \vec{T}_t = \vec{o} \quad \mathbf{\vec{F}_c = \vec{P}_n + \vec{T}_n = \vec{P}_n + \vec{T} = m\vec{a}_c}$$

$$\vec{F}_t = \vec{P}_t + \vec{T}_t = \vec{P}_t = m\vec{a}_t \Rightarrow m \cdot a_t = -m \cdot g \cdot \sin\vartheta \Rightarrow \mathbf{a_t = -g \cdot \sin\vartheta}$$

$$\vec{F}_c = \vec{P}_n + \vec{T}_n = \vec{P}_n + \vec{T} = m\vec{a}_c \Rightarrow \mathbf{T - P_n = m \cdot a_c} \Rightarrow T - m \cdot g \cdot \cos\vartheta = m \cdot \frac{v^2}{\ell} \Rightarrow$$

$$\mathbf{T = m \cdot g \cdot \cos\vartheta + m \cdot \frac{v^2}{l}}$$

Il pendolo semplice si muove di moto oscillatorio circolare vario

Pendolo conico

Un filo flessibile ed inestensibile di massa trascurabile è sospeso ad un punto fisso O e porta all'altra estremità una piccola sferetta di massa m .

Allontanata la sferetta dalla posizione di equilibrio , si applica ad essa una forza tangenziale esterna in modo da farle descrivere un moto circolare uniforme lungo un piano orizzontale .
Il filo del pendolo descriverà la superficie laterale di un cono di vertice O e semiapertura α .

Questo dispositivo è chiamato pendolo conico . Un osservatore solidale con la terra afferma che le forze che agiscono sulla massa m sono la tensione $\vec{T}$ del filo e la forza peso $\vec{P}$.
$\vec{R} = \vec{T} + \vec{P}$ = **forza centripeta che determina il moto circolare uniforme di m**

Il componente verticale $\vec{T}_y$ della tensione deve equilibrare il peso $\vec{P} = m\vec{g}$, il componente orizzontale $\vec{T}_x$ della tensione è la forza centripeta $m\vec{a}_c$ che determina il moto circolare uniforme della massa m . Risulta :

$$T_x = T\cdot\sin\alpha \ , \quad T_y = T\cdot\cos\alpha \ , \quad R = \ell\cdot\sin\alpha \ , \quad \vec{T}_y + \vec{P} = \vec{o} \ \Rightarrow \ \vec{T}_y = -\vec{P} \ \Rightarrow \ T_x = P \ \Rightarrow$$

$$T\cdot\cos\alpha = mg \qquad \boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha}} \qquad \vec{T}_x = m\cdot\vec{a}_c \ \Rightarrow \ T_x = m\cdot a_c \ \Rightarrow \ T\cdot\sin\alpha = m\cdot\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = m\cdot\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = gR\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{v^2}{gR} = \frac{\omega^2 R^2}{gR} = \frac{\omega^2 R}{g} \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2\cdot\ell\cdot\sin\alpha}{g} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2\cdot\ell}}$$

<< **L 'ampiezza dell'angolo α aumenta rapidamente con la velocità angolare e non dipende da m** >>

$$\cos\alpha \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{\omega^2\cdot\ell} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \ge \frac{g}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \omega \ge \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Il valore $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ è il **valore minimo** da dare alla velocità angolare perché il pendolo conico si sposti dalla sua posizione di equilibrio .

$$h = OC = \ell\cdot\cos\alpha \qquad T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\frac{g}{\omega^2\ell}} \qquad \boxed{T = m\omega^2\ell}$$

Calcolo del periodo di rotazione

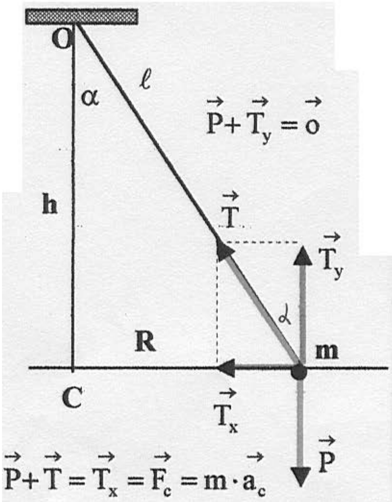
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega^2 = \frac{g}{\ell \cdot \cos\alpha} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{\ell \cdot \cos\alpha} \qquad T^2 = \frac{4\pi^2 \ell \cos\alpha}{g} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\alpha}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}}$$

Un osservatore solidale con la sferetta del pendolo afferma che essa è in **equilibrio statico** ed è sottoposta all'azione di **due forze reali** il peso $\vec{P}$ e la tensione $\vec{T}$ del filo e di **una forza fittizia**, la forza di trascinamento $\vec{F}_T = \vec{F}_c$ che, in questo caso, è una **forza centrifuga** uguale ed opposta alla forza centripeta.

La seconda legge della dinamica, applicata alla massa m, ci consente di scrivere:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_c = \vec{o} \qquad \vec{P} + \vec{T} - m\cdot\vec{a}_c = \vec{o} \qquad \vec{P} + \vec{T} = m\cdot\vec{a}_c$$

Abbiamo trovato lo stesso risultato ottenuto dall'osservatore inerziale.

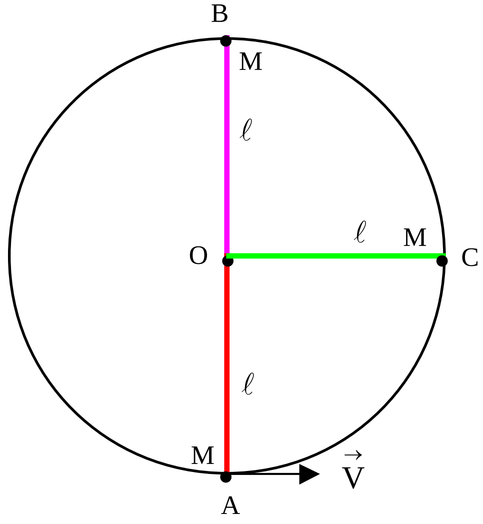


Pendolo conico

a) Un pendolo conico il cui filo forma un angola α con la verticale

b) Un diagramma delle forze che agiscono sulla massa m del pendolo. Gli assi sono rivolti nelle direzioni verticale e radiale. La forza risultante (e quindi l'accelerazione centripeta) è diretta radialmente verso l'interno, ~~in~~ nella direzione del centro della circonferenza descritta da m

Un pendolo formato da un filo di lunghezza ℓ e da una pallina di massa m, si trova nella sua posizione di equilibrio A. Quale velocità dobbiamo imprimere alla pallina affinché questa compia un giro completo in un piano verticale senza ricadere.

	**La velocità deve essere tale da permettere alla pallina di raggiungere la posizione B e di proseguire il suo cammino lungo la circonferenza di centro O e raggio ℓ. Otteniamo questo imponendo che l'energia meccanica totale in A sia uguale all'energia meccanica totale in B e che la tensione nel punto più alto B sia nulla.**

$$K_A + U_A = K_B + U_B \quad \Rightarrow \quad U_A = 0 \ , \ U_B = 2mg\ell \ , \ \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2mg\ell$$

$$v_A^2 = v_B^2 + 4g\ell \qquad \mathbf{v_B^2 = v_A^2 - 4g\ell}$$

Le forze che agiscono lungo la direzione del filo sono la tensione del filo $\vec{T}$, la forza centripeta $\vec{F}_n$, il componente normale del peso $\vec{P}_n$. La legge fondamentale della dinamica vuole che sia: $\vec{F}_n = \vec{T} + \vec{P}_n$. Nella posizione **B** abbiamo:

$$F_n = T + P_n \qquad \mathbf{T = F_n - P_n}$$

Dato la tensione **T** del filo non può essere negativa, il valore minimo possibile in **B** é **zero** .

$$F_n - P_n \ge 0 \ , \ F_n \ge P_n \ , \ m\frac{v_B^2}{\ell} \ge mg \ , \ v_B^2 \ge \ell g \ , \ v_A^2 - 4\ell g \ge \ell g \ , \ v_A^2 \ge 5\ell g$$

$$\mathbf{v_A \ge \sqrt{5\ell g}}$$

Se alla pallina del pendolo imprimiamo una velocità $\mathbf{v_A \ge \sqrt{5\ell g}}$ allora essa non solo raggiunge la posizione più alta B , ma prosegue lungo la circonferenza di centro O e raggio ℓ .