

## Un approccio elementare con la teoria della relatività ristretta

### (A) Introduzione

L'intera meccanica classica, basata sui tre principi di Newton, attribuisce un valore assoluto allo spazio ed al tempo. Questo equivale ad affermare che più osservatori, misurando le dimensioni di uno stesso oggetto o la durata di uno stesso intervallo di tempo, debbono trovare gli stessi risultati, qualunque sia il loro moto relativo. La meccanica classica fa una netta distinzione fra **S.R.I** e **S.R. accelerati**. Soltanto le forze misurate nei **S.R.I** hanno un carattere di realtà e vengono chiamate **fittizie** quelle forze che intervengono quando i processi meccanici sono riferiti a **sistemi non inerziali**. Sappiamo inoltre che, fissato un **S.R.I**, ne esistono infiniti ognuno dotato di **moto traslatorio rettilineo uniforme** rispetto agli altri. Questo implica l'impossibilità di distinguerli l'uno dall'altro mediante esperienze meccaniche compiute al loro interno. Conseguenza di questa situazione è che le leggi della meccanica rimangono invariate quando si passa da un **S.R.I** ad un altro. Agli inizi di questo secolo si presentò ai fisici una grave difficoltà concettuale. In campi della fisica distinti dalla meccanica si era pervenuti alla formulazione di leggi che non avevano la prerogativa di mantenere la stessa forma matematica in tutti i **S.R.I**. La forma matematica delle equazioni di Maxwell, leggi che regolano i fenomeni elettromagnetici, risulta alterata nel passaggio da un **S.R.I** ad un altro. Questa circostanza mise in evidenza la presenza di una grave contraddizione: l'unità della fisica non permette di accettare che **S.R.I**, non distinguibili fra loro con esperienze di meccanica, diventino distinguibili con esperienze di altro tipo, per esempio di elettromagnetismo. Durante la seconda metà del diciannovesimo secolo ci si rese conto che la teoria fisica era in difficoltà. La **dinamica newtoniana** era ben stabilita: si riconobbe che questa teoria era valida in ogni **S.R.I** e che tutti i sistemi di questo tipo erano fra loro equivalenti. Anche la **teoria dell'elettromagnetismo** di

Maxwell era ben stabilita e si era compreso che la luce è un fenomeno ondulatorio descritto correttamente dalle **equazioni di Maxwell**. Una parte integrante della teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche era il concetto di **etere**, sostanza invisibile ed immutabile che permeava tutto lo spazio senza per questo opporre resistenza al moto dei corpi. Le onde elettromagnetiche non erano altro che vibrazioni dell'**etere luminifero** ed era naturale ammettere che la loro velocità valesse  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  soltanto nel **S.R.** nel quale l'etere era fermo. A causa della concezione meccanicistica dell'elettromagnetismo allora in voga, si riteneva essenziale l'esistenza di un etere che costituisse un mezzo in cui anche le onde potessero propagarsi. Le **equazioni di Maxwell** erano considerate valide in un **S.R.** in quiete rispetto all'etere. A differenza delle **equazioni di Newton** che si sapevano valide in tutti i **S.R.I**, le **equazioni di Maxwell** sembravano richiedere un **S.R. privilegiato**. La teoria dell'etere entrò in coma irreversibile quando tre distinti esperimenti richiesero le seguenti conclusioni:

(1) l'etere è trascinato con sé dalla Terra e quindi gli esperimenti in laboratorio sono eseguiti sempre in un **S.R.** in quiete rispetto all'etere ( questa era la conclusione basata sul famoso esperimento di Michelson Morley)

(2) la Terra si muove liberamente attraverso l'etere che resta in quiete rispetto alle stelle fisse

(3) un mezzo materiale in moto (ad esempio l'acqua), attraverso il quale la luce può propagarsi, trascina con sé l'etere, ma con una velocità uguale soltanto alla metà della velocità del mezzo.

Di fronte a queste contraddizioni, la teoria dell'etere finì per morire. Einstein spazzò via la teoria dell'etere ed insieme ad essa tutte le ipotesi ad hoc, sostituendole con due

soli postulati. Sulla base di questi postulati egli riuscì a costruire un'elegante teoria che è un modello di precisione logica.

La **teoria della relatività di Einstein** stabilì il legame fra la meccanica e l'elettromagnetismo: unificò le due grandi teorie della fisica classica. La soluzione di Einstein al problema richiedeva che si abbandonasse l'opinione precedente secondo la quale lo spazio ed il tempo erano concetti distinti e senza correlazione. Nella concezione di Einstein noi non esistiamo in uno spazio tridimensionale sul quale sovrapponiamo il concetto di tempo. Secondo la sua ipotesi le coordinate spaziali e temporali esistono insieme su una base di parità in un mondo quadrimensionale di **spazio-tempo**. Quando si incontrano per la prima volta, i concetti della relatività sembrano alquanto strani e forzati. Ma gli effetti relativistici sono importanti solo quando s'incontrano velocità prossime alla velocità della luce, e la nostra intuizione è basata sulla nostra esperienza quotidiana nella quale non s'incontrano quasi mai situazioni che coinvolgono velocità così alte. Forse, se crescissimo in un mondo in cui fosse facile incontrare velocità molto più alte, i concetti relativistici sarebbero naturali e facili da accettare. Ciò nonostante, dobbiamo rispettare il principio che se i fatti sperimentali sono in contrasto con le nostre nozioni preconcepite, non possiamo cambiare i fatti, ma solo le nostre idee.

### (B) La velocità della luce è costante

Le forze elettriche e magnetiche agiscono sui corpi elettricamente carichi e modificano il loro stato di moto secondo le leggi della meccanica. E' quindi naturale partire dall'ipotesi che anche le leggi dell'elettromagnetismo siano invarianti rispetto a trasformazioni galileiane. Così facendo si incontra una grandissima difficoltà. In ogni **S.R.I** gli esperimenti atti a determinare le grandezze  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  dovranno dare gli stessi risultati. Ma allora, se  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  sono invarianti, lo sarà pure  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Dunque, secondo questo ragionamento, la velocità della luce dovrebbe avere lo stesso valore in tutti i

**S.R.I**, il che è in lampante contraddizione con la cinematica classica, per la quale le velocità non sono invarianti ma seguono la seguente legge di composizione:

$$\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_T$$

Di fronte a questa contraddizione vi sono solo due vie d'uscita. Una consiste nell'ammettere che il **principio di relatività classica** non sia valido per i fenomeni elettromagnetici e quindi la luce si propaga seguendo la relazione  $\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_T$ . Maxwell, non volendo rinunciare alla legge galileiana di composizione delle velocità, fece l'ipotesi che le sue equazioni fossero valide soltanto in un **S.R.** privilegiato, il sistema nel quale l'**etere luminifero** è a riposo. Quindi, per scoprire questo **S.R.** privilegiato fu inventata una sostanza speciale, l'etere. L'etere doveva essere molto diversa dalle altre sostanze materiali. Doveva essere tanto tenue da penetrare in tutti i corpi e doveva essere capace di trasmettere le vibrazioni luminose. E poiché le vibrazioni luminose sono **trasversali**, cioè perpendicolari alla direzione di propagazione, l'etere doveva addirittura avere una proprietà dei corpi solidi. Pertanto verso la fine dell'800, l'etere appariva come l'indispensabile mezzo per spiegare in termini meccanici anche i fenomeni elettromagnetici e tentare così una grandiosa unificazione di tutte le leggi fisiche che non era più stata realizzata dal tempo di Aristotele. Restava, però, aperto il problema della verifica sperimentale dell'esistenza dell'etere e, secondo la teoria, tale verifica doveva essere fondata sulla misura della velocità della luce in diversi **S.R.** in moto relativo fra loro. Infatti la velocità di propagazione di un raggio luminoso rispetto ad un certo osservatore dovrebbe dipendere dalla velocità con cui l'osservatore stesso si muove rispetto all'etere. In particolare, soltanto in un **S.R.** in quiete rispetto all'etere, la luce si propagherebbe con la stessa velocità in tutte le direzioni. Tale sistema di riferimento risulterebbe privilegiato nello studio dei fenomeni fisici, in quanto in esso le leggi dell'ottica e dell'elettromagnetismo assumerebbero la forma più semplice.

Poiché è assai improbabile che questo **S.R.** privilegiato possa coincidere con la terra, a causa del moto di rotazione di questa, i fisici ritenevano che l'etere fosse in quiete rispetto alle stelle fisse in accordo anche con le osservazioni astronomiche. Il problema

di rilevare il moto di un osservatore rispetto all'etere era intimamente collegato con quello di scoprire se ed in qual modo la velocità della luce si componeva con quella dell'osservatore. Poiché la velocità della luce è elevatissima rispetto a quella con cui si poteva muovere l'osservatore, si ricorse al moto della Terra nello spazio.

Rispetto al sistema solare la sua velocità è di  $30\frac{km}{s}$  ed è presumibile supporre che rispetto all'etere sia dello stesso ordine di grandezza. Si tratta di una velocità diecimila volte più piccola di quella della luce. Tuttavia, si poteva sperare di poterla rivelare. E' ciò che si propose **Albert Michelson**, realizzando con **Edward Morley** nel **1887** una celebre esperienza interferometrica, ripetuta successivamente con sempre migliore precisione. Risultò che la velocità della luce non si compone con quella della terra. In qualunque direzione si propaghi la luce rispetto al moto della Terra, la sua velocità è la stessa. L'esperimento di Michelson, ripetuto molte volte nell'arco di anni, in diverse stagioni ed ore del giorno (e quindi con diverse orientazioni dell'interferometro rispetto alle stelle fisse) non ha mai rivelato alcuna differenza nella velocità di propagazione della luce, come se la velocità dell'etere rispetto al laboratorio solidale con la terra fosse nulla.

Si pensò di modificare l'esperimento usando al posto di una sorgente di luce posta nel laboratorio la luce del sole, che è in moto rispetto al laboratorio, e quindi all'etere in esso contenuto. Ma anche in questo caso il risultato dell'esperimento fu negativo e si dovette concludere che la **velocità della luce è indipendente non solo dal moto dell'osservatore, ma anche dal moto della sorgente rispetto all'etere.**

Il risultato negativo dell'esperimento di Michelson e Morley mise in crisi l'ipotesi che le leggi di Maxwell valessero rigorosamente soltanto in un S.R. privilegiato.

L'altra via d'uscita, seguita da Einstein nel 1905, era quella di supporre valido il principio di relatività classica per tutti i fenomeni naturali. Con ciò era necessario supporre anche che la **luce si propagasse con la stessa velocità in tutti i S.R.I.** L'ipotesi dell'etere doveva essere abbandonata perché non conforme col **principio della costanza della velocità della luce.**

### (C) Il concetto di simultaneità

Nella nostra esperienza quotidiana ci siamo abituati a considerare che tutti gli eventi si svolgano nel tempo in modo ordinato e regolare: esiste un **passato**, un **presente** ed un **futuro**, e possiamo stabilire sempre se un evento ha preceduto o seguito un altro evento o se i due eventi si sono verificati simultaneamente. Einstein ha dimostrato che nel mondo relativistico non esiste una distinzione netta tra il passato ed il futuro: **eventi che sembrano avvenire in una certa successione temporale secondo un osservatore possono sembrare avvenire in una successione diversa ad un osservatore in moto rispetto al primo.**

E' forse il risultato più sorprendente della teoria di Einstein, ma è facile dimostrare che questa conclusione è una semplice e diretta conseguenza della costanza della velocità della luce. Il concetto di **contemporaneità** o simultaneità di due eventi dipende dal **S.R.** nel quale si trova l'evento. A titolo di esempio, si consideri una nave in movimento. In un punto del ponte, intermedio fra la prua e la poppa, si accenda una lampada. Per chi sta sulla nave la luce impiegherà lo stesso tempo per raggiungere la prua e la poppa. Per un tale osservatore i due eventi ( **A = arrivo del fascio luminoso a prua**, **B = arrivo del fascio luminoso a poppa**) risultano contemporanei. Per un osservatore fermo a Terra, mentre la luce viaggia verso gli estremi della nave, la prua si allontana dinanzi ad essa, mentre la poppa avanza verso di essa. Si avrà prima l'evento B e poi l'evento A. **Si deve concludere che i due eventi A e B, contemporanei per chi sta sulla nave, non lo sono in generale per chi osserva il fenomeno da Terra.**

Due eventi sono **contemporanei** se segnali luminosi che partono dai punti A e B in cui essi hanno luogo, raggiungono simultaneamente il punto medio del segmento  $AB$ . Tale definizione può essere leggermente modificata dicendo che **due diversi eventi sono simultanei quando sono prodotti da segnali luminosi che partono**

nello stesso istante dal punto medio del segmento ai cui estremi gli eventi stessi hanno luogo.

Possiamo pertanto affermare che << **eventi che hanno luogo in punti diversi dello spazio e che si verificano contemporaneamente in un certo S.R.I., si verificano in istanti diversi in un altro S.R.I. in moto rispetto al primo**>>.

Sebbene la successione temporale di eventi visti da differenti osservatori dipenda dalla velocità relativa di quest'ultimi, la legge fisica di **causa ed effetto** deve essere ancora valida nel mondo relativistico; nessun osservatore (qualunque sia il suo stato di moto) può rivelare un evento B che è **effetto** prima di un evento A che è la **causa** dell'evento B.

(D) I postulati di Einstein e le trasformazioni di Lorentz

Nel 1905 Einstein dimostrò che si potevano eliminare tutte le discrepanze apparenti fra la dinamica dei sistemi meccanici e quella dei sistemi elettromagnetici per mezzo di una teoria basata su due soli postulati:

**(1) Tutte le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.**

**(2) La velocità della luce nel vuoto è la stessa per ogni osservatore in un S.R.I., qualunque sia il moto relativo fra la sorgente luminosa e l'osservatore.**

La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  in tutte le

direzioni e in tutti i sistemi di riferimento inerziali. La velocità della luce

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  nel vuoto è una velocità limite che non può essere da nessuna

particella.

La teoria che è basata su questi due postulati e che è valida per tutti i **S.R.** non soggetti ad accelerazioni si chiama **teoria ristretta della relatività**.

Il caso dei **S.R.** soggetti ad accelerazione che è più complicato è l'argomento della cosiddetta **teoria generale della relatività**. E' davvero notevole che una teoria di così vasta portata, una teoria che ha costretto a riesaminare le concezioni tradizionali dello spazio e del tempo e che ha avuto un effetto così profondo sull'interpretazione dei fenomeni atomici, nucleari ed astrofisici, possa essere costruita su due soli postulati così semplici come quelli formulati da **Einstein**.

**Se lo scopo della teoria fisica è formulare le leggi della natura con brevità ed economia di ipotesi, allora la teoria della relatività è sicuramente il capolavoro della scienza.**

Sulla base dei due postulati della relatività di Einstein, non è difficile sviluppare le equazioni che correlano le coordinate spaziali ed il tempo in due S.R. che si muovono di **moto traslatorio rettilineo uniforme** l'uno rispetto all'altro.

Queste equazioni sono analoghe alle trasformazioni galileiane ma contengono differenze sostanziali quando la velocità del moto relativo è confrontabile con la velocità della luce. Queste equazioni di trasformazione furono sviluppate per la prima volta da Hendrick Antoon Lorentz e sono chiamate **equazioni di trasformazione di Lorentz**.

Esse sostituiscono le trasformazioni di Galileo in modo che la velocità della luce rimanga costante per osservatori inerziali. Ogni fenomeno naturale è una precisa successione di eventi. Ogni evento verrà specificato dalle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  del punto in cui ha luogo e dall'istante di tempo  $t$  corrispondente. I quattro numeri  $x, y, z, t$  vengono detti **coordinate dell'evento**: le prime tre sono dette **coordinate spaziali** e la quarta **coordinata temporale**.

Consideriamo due osservatori; uno  $S$ , verrà assunto convenzionalmente come fisso, e l'altro  $S'$  in moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità vettoriale costante  $\vec{v}$ .



L'osservatore S ( $S'$ ) si riferirà ad un sistema di coordinate cartesiane  $Oxyz$  ( $O'x'y'z'$ ) con origine in O ( $O'$ )

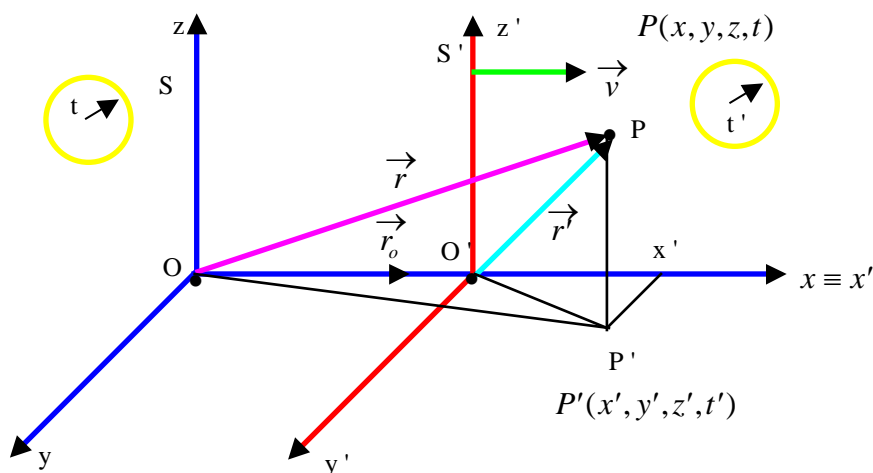
Senza perdere in generalità supporremo che gli assi  $x$  ed  $x'$  coincidano (cioè scorrano l'uno sull'altro) e che  $y$  ed  $y'$ ,  $z$  e  $z'$  siano rispettivamente paralleli tra loro. Essendo ora  $t \neq t'$  dovremo fare una convenzione sugli orologi usati da S e da  $S'$ . Per semplicità supporremo che entrambi gli osservatori S ed  $S'$ , in moto relativo con velocità vettoriale costante  $\vec{v}$ , regolino il proprio orologio in modo che quando  $O \equiv O'$  sia  $t = t' = 0$ .

Chiediamoci ora: quale relazione sussiste tra le coordinate di un evento nel sistema di S e quelle dello stesso evento nel sistema di  $S'$ ? La risposta che dà la meccanica classica la conosciamo ed è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y} \\ \mathbf{z}' = \mathbf{z} \\ \mathbf{t}' = \mathbf{t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}' \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}' \\ \mathbf{t} = \mathbf{t}' \end{array} \right. \quad \text{Trasformazioni di Galileo}$$

Con queste trasformazioni non riusciamo a spiegare la costanza della velocità della luce nel vuoto quando ci riferiamo ad un **S.R.I.** La risposta che dà la **teoria ristretta della relatività** è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y}; \quad \mathbf{z}' = \mathbf{z} \\ \mathbf{t}' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta = \frac{v}{c} \end{array} \right. \quad [§§] \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}' + \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{x}' + \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}'; \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}' \\ \mathbf{t} = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta = \frac{v}{c} \end{array} \right.$$



Le equazioni [§§] significano che quando l'osservatore O determina che un certo evento è avvenuto nel punto  $(x, y, z)$  e nell'istante  $t$ , l'osservatore  $S'$  vede lo stesso evento nel punto  $(x', y', z')$  e nell'istante  $t'$ . Se la velocità relativa  $\mathbf{v}$  è piccola rispetto alla velocità della luce  $\mathbf{c}$  ( $\mathbf{v} \ll \mathbf{c}$ ) e quindi  $\beta \cong 0$ , il termine  $\sqrt{1 - \beta^2}$  è praticamente uguale ad 1 ed il termine  $\frac{\beta}{c}x$  diventa tanto piccolo da potere essere trascurato.

Quindi se  $\mathbf{v} \ll \mathbf{c}$ , le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo. **Le trasformazioni di Galileo si possono considerare come una buona approssimazione di quelle di Lorentz, quando la velocità considerata è abbastanza piccola.**

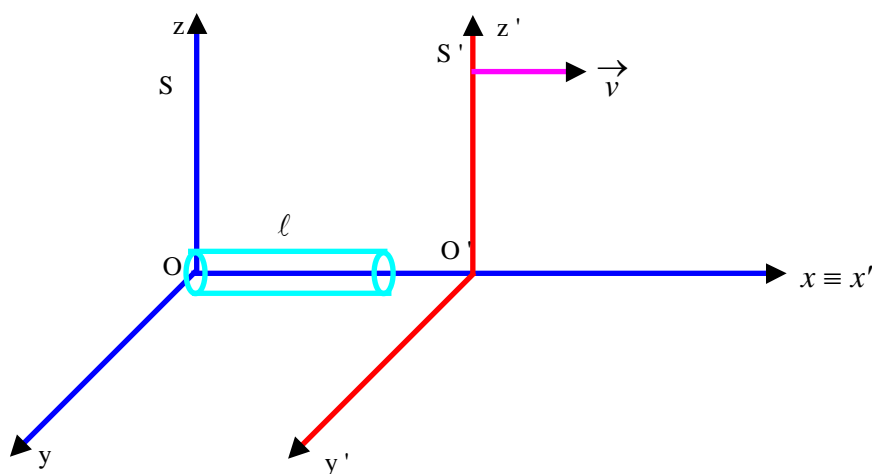
Poiché nella nostra esperienza quotidiana incontriamo di rado velocità confrontabili con la velocità della luce, il nostro mondo è sostanzialmente newtoniano e gli effetti relativistici direttamente osservabili sono in generale trascurabili.

Stabilito che le corrette trasformazioni di coordinate sono quelle di Lorentz, è ragionevole attendersi che nei fenomeni in cui sono in giuoco velocità paragonabili a quella della luce, compaiono effetti del tutto sconosciuti alla fisica classica; fra questi effetti, i più noti sono la **dilatazione dei tempi** e la **contrazione delle lunghezze**.

Osservazione: Dalle trasformazioni di Lorentz segue che <<nessun oggetto può muoversi con una velocità maggiore di  $c$ >>. Infatti, se esistesse un oggetto più veloce della luce, nel **S.R.** in cui questo oggetto è in quiete le coordinate spaziali e temporali perderebbero di significato, in quanto per  $v > c$  è  $1 - \beta^2 < 0$  e quindi le radici  $\sqrt{1 - \beta^2}$  diventano immaginarie. Uno studio più approfondito della relatività mostrerebbe che in teoria non è esclusa la possibilità di particelle che si muovono con velocità maggiori di quella della luce. La velocità di tali particelle non potrebbe, però, scendere al di sotto di  $c$ . In altre parole la velocità  $c$ , che costituisce per le particelle note un limite superiore, costituirebbe per queste ipotetiche particelle, denominate tachioni, un limite inferiore invalicabile.

Per tali particelle sono previste però dalla teoria proprietà alquanto singolari, tanto che molti fisici mettono in dubbio la loro esistenza.

### (E) La contrazione delle lunghezze



Consideriamo un'asta di lunghezza  $\ell$ , giacente lungo l'asse  $x$  del sistema usato dall'osservatore  $S$ , con un estremo nell'origine  $O$ . Quale sarà la lunghezza  $\ell'$  di questa asta misurata da un osservatore  $S'$  solidale con un **S.R.I** avente velocità vettoriale  $\vec{v}$  costante rispetto ad  $S$ .

Applicando le trasformazioni di Lorentz si trova l'inatteso risultato:

$$\ell' = \ell \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \ell \sqrt{1 - \beta^2}$$

Cioè <<l'osservatore  $S'$  che misura l'asta in movimento trova che ha una lunghezza  $l'$  minore di quella misurata dall'osservatore  $S$ , che vede la sbarra in quiete>>.

E' questo l'effetto relativistico detto di **contrazione delle lunghezze**. Si conclude dicendo che l'osservatore  $S'$  in moto rispetto all'asta trova una lunghezza più piccola (cioè contratta) rispetto alla lunghezza determinata dall'osservatore  $S$  in quiete rispetto all'asta. La situazione è simmetrica rispetto ai due **S.R.** in moto. L'osservatore  $S'$  vede una contrazione dell'asta in quiete in  $S$ , e l'osservatore  $S$  vede anch'egli una contrazione di un'asta simile in quiete nel **S.R.**  $S'$ .

**La contrazione della lunghezza di un'asta in moto è un effetto reale, perché i due osservatori usano metri rigidi identici (che hanno confrontato quando erano in quiete) e misurano realmente lunghezze diverse dell'asta.** Le sole grandezze con significato fisico (cioè le **grandezze reali**) sono quelle che si possono misurare.

#### (F) La dilatazione del tempo

Gli osservatori in moto ed in quiete non solo trovano una differenza fra le loro misure della lunghezza di un oggetto, ma sono anche in disaccordo sulla rapidità con cui funzionano gli orologi nei due sistemi. ♦ Consideriamo un orologio fermo nel **S.R.**  $S$  ed un altro fermo in  $S'$ . Consideriamo un fenomeno che rispetto ad  $S'$  avvenga nell'intervallo di tempo  $\Delta t'$ . Lo stesso fenomeno osservato nel sistema  $S$ , rispetto al quale  $S'$  si muove di **moto traslatorio rettilineo uniforme** con velocità vettoriale  $\vec{v}$  costante, dura l'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Risulta:

$$[\S*\S] \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{cioè} \quad \Delta t > \Delta t' \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \Delta t \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

♦ Usato nel senso comune, il verbo **dilatare** significa << **ampliare oltre le dimensioni normali** >>; riferito ad un orologio, significa allungare un intervallo di tempo

Si vede che, mentre l'orologio mobile misura l'intervallo di tempo  $\Delta t'$ , per l'osservatore solidale col sistema fisso S è passato un intervallo di tempo maggiore. In altri termini l'orologio dell'osservatore  $S'$  è più lento di quello dell'osservatore S.

Un intervallo di tempo  $\Delta t'$  per  $S'$  viene, rispetto ad S, dilatato secondo il fattore  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

L'intervallo di tempo  $\Delta t'$ , misurato nel sistema in moto  $S'$  è più corto dell'intervallo di tempo  $\Delta t$  misurato nel sistema S. Questo effetto viene chiamato **dilatazione del tempo**. Gli orologi in moto sembrano avanzare più lentamente degli orologi in quiete. La durata di un fenomeno visto in movimento risulta dilatata di un fattore

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

rispetto alla durata dello stesso fenomeno visto in quiete.

Concludendo possiamo dire che l'osservatore S trova che l'orologio dell'osservatore di  $S'$  va più adagio del proprio orologio. Naturalmente, se l'osservatore  $S'$  vede l'orologio di S, conclude che l'orologio di S marcia più lentamente del suo. Pertanto, si può dire che ogni osservatore troverà che un orologio in moto va più adagio di un orologio identico in quiete nel proprio **S.R.**. Gli orologi di S e di  $S'$  sono identici e sincronizzati quando sono reciprocamente in quiete.

L'intervallo di tempo  $\Delta t'$  misurato dall'osservatore  $S'$  nel proprio **S.R.** in cui l'orologio è in quiete, si chiama **tempo proprio**. Il corrispondente intervallo di tempo  $\Delta t$  misurato dall'osservatore S rispetto al quale  $S'$  è in moto con velocità  $\vec{v}$ , si chiama **tempo non proprio**.

### (G) Il paradosso dei gemelli

La dilatazione del tempo è stata oggetto di molte controversie, in quanto sembra condurre ad un curioso paradosso, cui è stato dato il nome di *paradosso dei gemelli*. Paride ed Ulisse sono due gemelli, di cui il secondo è anche astronauta. All'età di 30 anni Ulisse parte per un viaggio spaziale verso una stella distante **10 anni luce** e ritorna mentre Paride rimane sulla Terra. Quando sono di nuovo insieme,

quale gemello è più vecchio, o hanno ancora la stessa età? la risposta corretta è Paride, il gemello rimasto a casa, è **più vecchio**.

Il problema è un **paradosso** per i ruoli in apparenza simmetrici svolti dai gemelli, con il risultato asimmetrico del loro invecchiamento. Il paradosso è chiarito quando è colta l'asimmetria dei ruoli dei gemelli. Considereremo un caso particolare con qualche valore numerico che, sebbene irrealizzabile, facilita i calcoli.

La stella P e Paride siano fissi in un **S.R.** Se distanti l'una dall'altro  $\ell_o = 10a.l.$  (si trascura il moto della Terra).

I **S.R.**  $S'$  ed  $S''$  si avvicinano (allontanano) alla (dalla) stella P con una velocità scalare pari a  $v=0,99c$ . Ulisse accelera rapidamente fino ad acquistare la velocità  $v$ , poi procede senza propulsione in  $S'$  fino a raggiungere la stella P, poi accelera per ruotare attorno alla stella e ritorna sulla Terra muovendosi in  $S''$  con velocità  $v$ . • Secondo Paride, che resta sulla terra, il viaggio di andata e ritorno dura 20 anni e quindi durante il viaggio di Ulisse Paride invecchia di 20 anni rispetto al tempo misurato sulla Terra. Quindi quando Ulisse torna sulla Terra Paride ha, secondo il suo orologio, 50 anni.

$$\Delta t = \frac{s}{t} = \frac{10a.l.}{0,99c} = \frac{10}{0,99}a \cong 10 \text{ anni} = \text{tempo di andata} = \text{tempo di ritorno} \quad \frac{10}{0,99} \cong 10$$

L'intervallo di tempo  $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10\sqrt{1 - (0,99)^2} = 1,4 \text{ anni}$

Poiché occorre lo stesso intervallo di tempo per il viaggio di ritorno, Ulisse avrà registrato  $2,8 \text{ anni}$  per il viaggio di andata e di ritorno e sarà  $17,2 \text{ anni}$  più giovane di Paride. Dal punto di vista di Ulisse il calcolo di questo intervallo di tempo non è difficile. La distanza fra la Stella e la Terra si è contratta e vale:

$$\ell = \ell_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1,4 a.l.$$

\* Si può supporre che gli intervalli di tempo durante i quali sono impresse le accelerazioni siano trascurabili rispetto agli intervalli di tempo in cui si muove con velocità costante

Alla velocità di  $v=0,99c$  occorrono  $1,4\text{anni}$  per ciascun viaggio. Quando i due gemelli si ritroveranno sulla Terra alla fine del viaggio constateranno che Paride ha  $50\text{anni}$  ed Ulisse  $32,8\text{anni}$  anni.

Questo risultato non ha nulla di paradossale, in quanto è coerente con i principi della teoria. Infatti la difficoltà reale di questo problema sta nel fatto che ad Ulisse riesce difficile capire perché il suo gemello è invecchiato di  $20\text{anni}$  durante la sua assenza. Infatti, per il principio di reciprocità del moto, Ulisse potrà a sua volta giudicare se stesso <<**in quiete**>> e ritenere che Paride abbia compiuto un viaggio di andata e ritorno alla velocità  $v=0,99c$ . Poiché la dilatazione del tempo è un effetto simmetrico, in quanto ciascuno dei due sistemi in moto relativo vede il tempo scorrere più lentamente sull'altro sistema, applicando lo stesso ragionamento ad Ulisse <<**in quiete**>> e Paride <<**in viaggio**>> perveniamo alla conclusione opposta che alla fine del viaggio Ulisse dovrebbe essere più vecchio di Paride. **Il paradosso poggia sul fatto che si fa appello alla simmetria della situazione: non dovrebbe importare quale gemello compie il viaggio e quale resta a casa.**

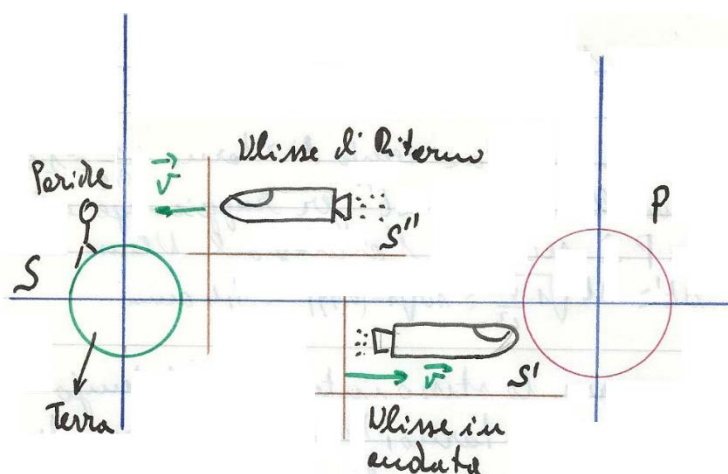
In realtà questa simmetria non è rispettata, perché Paride (il gemello che resta a casa) è sempre solidale con un **S.R.I.**, mentre Ulisse (il viaggiatore) ha subito delle accelerazioni. Nel lasciare la Terra Ulisse ha accelerato fino a portarsi alla velocità costante  $v=0,99c$ ; ha accelerato quando ha girato intorno alla Stella; ha accelerato di nuovo quando è ritornato sulla terra ed è atterrato. Quindi la situazione non è simmetrica rispetto a Paride ed Ulisse. Ogni argomento fondato sulla reciprocità del moto non è pertanto applicabile; la reciprocità del moto è valida solo per **S.R.I.**

A causa di questa dissimmetria, l'analisi richiede maggiore attenzione. E' possibile, restando nell'ambito della relatività ristretta, eseguire il calcolo esatto del moto di Ulisse, dal quale risulta che il tempo di Ulisse scorre più lentamente di quello di Paride. Si deve concludere che il paradosso non esiste e che il minore <<**invecchiamento**>> di Ulisse, che si muove di moto accelerato rispetto a Paride,

è un effetto reale e non illusorio. **Il gemello che viaggia invecchia meno rapidamente del fratello legato alla Terra.** D'altra parte, il viaggiatore non può sfruttare la sua longevità perché tutti i suoi processi biologici si svolgono con minore rapidità (rispetto alla rapidità con cui si svolgono sulla Terra) ed egli deve lavorare, pensare ed agire a questo ritmo ridotto.

### Paradosso dei gemelli

La Terra ed una Stella P sono fissi nel **S.R.** S Ulisse viaggia senza propulsione nel riferimento  $S'$  fino alla stella P e quindi viaggia senza accelerazione nel sistema  $S''$  facendo ritorno sulla Terra.



Il suo gemello Paride rimane sulla Terra. Quando torna Ulisse è più giovane di Paride. I ruoli svolti dai gemelli non sono simmetrici: Paride rimane sempre in un **S.R.I** mentre Ulisse deve accelerare tre volte per partire e poi tornare.

Secondo l'orologio di Paride, Ulisse raggiunge la Stella muovendosi nel riferimento  $S'$  dopo:  $t = \frac{\ell_o}{v} = \frac{10 a.l.}{0,99c} = \frac{10}{0,99} \cdot \frac{a.l.}{c} = \frac{10}{0,99} \cdot 1 anno = \approx 10a$  e impiega lo stesso tempo  $10a$

muovendosi nel sistema  $S''$  per tornare sulla Terra. Quindi Paride è invecchiato di  $20a$  quando Ulisse torna sulla Terra ed ha  $50a$  ed ha  $30a + 20a = 50a$ .

A causa della dilatazione del tempo il tempo impiegato da Ulisse risulta più breve se misurato con l'orologio di Ulisse. Infatti risulta:

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10 \sqrt{1 - (0,99)^2 \cdot \frac{c^2}{c^2}} = 10 \sqrt{1 - 0,98} = 10 \sqrt{0,02} = 10 \cdot 0,14 = 1,4a \quad \text{tempo impiegato da}$$

Ulisse per andare dalla Terra alla Stella; lo stesso tempo impiega per tornare sulla Terra. Ulisse per il viaggio di andata e ritorno impiega  $2,8a$ .



Quando Ulisse, ritorna sulla Terra incontrando nuovamente Paride scopre il suo gemello è più vecchio di lui di  $20 - 2,8 = 17,2a$ . Quindi i due gemelli non hanno più la stessa età. Quando i due gemelli si ritrovano sulla Terra alla fine del viaggio constatano che Paride ha  $50anni$  ed Ulisse  $32,8anni$  anni. Siamo in presenza di un fenomeno che può sembrare un paradosso ma che si giustifica osservando che Paride misura il tempo trascorso in un sistema inerziale mentre Ulisse misura il tempo trascorso in un sistema accelerato. Infatti Paride si trova in quiete in un **S.R.I** mentre Ulisse subisce delle accelerazioni quando deve invertire la rotta per tornare sulla Terra. Ulisse deve accelerare per raggiungere la velocità  $v=0,99c$ ; accelera quando gira attorno alla stella, accelera nuovamente quando si ferma per atterrare.

In fisica il termine paradosso significa “contrario alla opinione comune” e non indica un risultato errato ma vuole solo esprimere che contrasta con il “senso comune”.

Effettivamente il paradosso dei due gemelli è al di fuori della nostra logica consueta proprio per il significato assoluto che siamo abituati ad attribuire allo scorrere del tempo. Concludendo possiamo affermare che il problema dei due gemelli non è simmetrico e, per trattarlo in maniera corretta, tenendo conto delle fasi di accelerazione dell’astronave, è necessario ricorrere alla teoria della relatività generale.

#### (H) Variazione della massa con la velocità

Il primo postulato della teoria ristretta della relatività afferma che tutte le leggi fisiche debbono essere le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Una di queste leggi è la **conservazione della quantità di moto**. l’invariabilità di questa legge impone per la massa di un corpo la seguente relazione:

$$[A\&] \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

cioè la massa di una particella cresce con la sua velocità.  $m_0$ , detta **massa a riposo** o **massa propria**, è la massa misurata da un osservatore rispetto al quale la particella è in quiete e coincide con la **massa della fisica newtoniana**.

La nuova massa  $m$ , detta **massa in moto** o **massa relativistica**, è misurata da un osservatore rispetto al quale la particella ha velocità  $v$ .

Viene così a cadere un altro postulato della fisica classica; in particolare l'aumento relativistico della massa ci impone di abbandonare il concetto newtoniano di massa come <<quantità di materia>>. Tenendo presente la [A§] dobbiamo concludere che nessuna particella materiale può raggiungere o superare la velocità della luce perché, se  $v=c$ , il termine  $\sqrt{1-\beta^2}$  si annulla ed  $m$  diventa infinita. Una massa infinita è un concetto privo di significato e si è quindi costretti ad accettare la conclusione che le particelle materiali si muovono sempre con velocità minori della velocità della luce. Nella meccanica relativistica la seconda legge della dinamica scritta nella forma  $\vec{F} = m\vec{a}$  non è più valida. Questa legge mantiene la propria validità se è espressa per mezzo della quantità di moto  $\vec{q}$ :

$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \frac{d\vec{q}}{dt}$  dove la quantità di moto  $\vec{q}$  è così

definita:  $\vec{q} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

(I) equivalenza tra la massa e l'energia

Noi abbiamo visto che risulta  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$  Se  $\frac{v}{c} \ll 1$ , cioè se:  $v \ll c$  abbiamo:

$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$  per cui la precedente relazione diventa

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0 + m_0 \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} : \quad \text{cioè : } mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

La relazione trovata ci suggerisce che c'è equivalenza tra la massa e l'energia di una particella .

$E = mc^2 =$  **energia relativistica totale della particella**

$E_0 = m_0 c^2 =$  **energia di riposo della particella**

$$K = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \text{energia cinetica della particella}$$

$E = mc^2$  rappresenta la famosa relazione massa-energia di Einstein. Questa equazione afferma che l'energia contenuta in ogni quantità di materia è uguale al prodotto fra la massa del corpo stesso ed il quadrato della velocità della luce nel vuoto. Prima della nascita della teoria della relatività i fisici pensavano all'universo come ad un involucro contenente due distinti elementi: la **materia** e l'**energia**. La prima inerte, tangibile e caratterizzata da una proprietà chiamata massa, l'altra attiva e priva di massa. Si deve ad Einstein l'aver dimostrato l'**equivalenza fra massa ed energia**. La massa è energia concentrata, essendo massa ed energia semplicemente due diverse manifestazioni della medesima realtà. Einstein ebbe il merito di trarre questa ardua conseguenza, molto prima che vi fosse una qualsiasi prova sperimentale di essa. Secondo la relazione  $E = mc^2$ , alla perdita di  $1g_r$  di massa corrisponde una energia pari a  $9 \cdot 10^{13} J$ . Nella relazione  $E = mc^2$  la massa  $m$  è quella corrispondente alla velocità  $v$  con cui si sta muovendo il corpo. Se una particella partendo dalla quiete raggiunge la velocità  $v$ , la sua massa passa dal valore  $m_0$  al valore  $m$  ed acquista, contemporaneamente, l'energia cinetica  $K = \frac{1}{2} m_0 v^2$ .

Abbiamo visto che risulta:  $mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$  [AB]

**Energia totale della particella = energia di quiete + energia cinetica della particella**

L'uguaglianza [AB] esprime, in forma relativistica, l'energia totale della particella, pari alla somma della sua energia di riposo e della sua energia cinetica. In generale le equazioni relativistiche debbono essere usate tutte le volte che la velocità di una particella è tale che l'energia cinetica raggiunta ( $\frac{1}{2} m_0 v^2$ ) superi il 10% circa del valore della sua energia di riposo  $m_0 c^2$ .

La validità dell'equazione [AB] comporta la sostituzione dei principi di conservazione dell'energia e della massa con la **legge di conservazione della massa-energia**.

In un sistema isolato non si conservano più separatamente l'energia totale  $E$  e la massa a riposo totale  $m_0$ , ciò che rimane costante nel tempo è la somma:  **$E = m_0 v^2 = \text{costante}$**  che tiene conto del fatto che anche la massa a riposo può trasformarsi in energia e viceversa.

### Osservazione

Dimostriamo che se  $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$  abbiamo:  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$ .

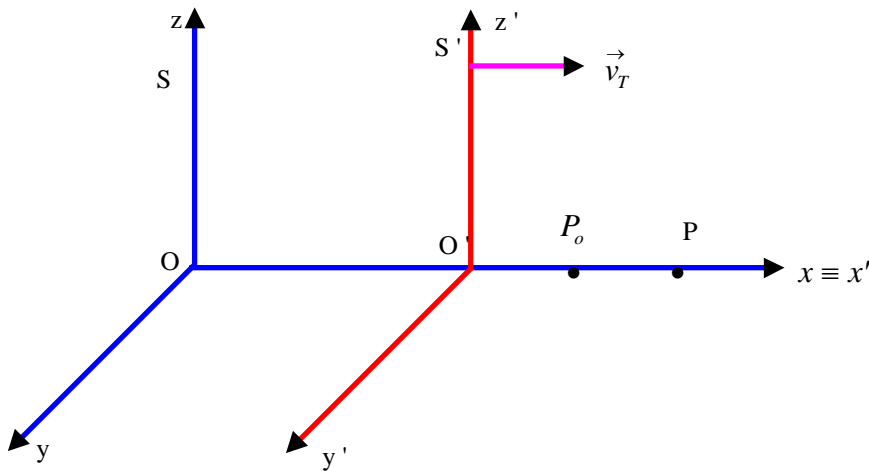
Partiamo dalla considerazione che  $\beta \ll 1 \Rightarrow \beta^2 \ll \beta$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cong \frac{1}{\sqrt{1 - x + \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 + \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cong 1 + \frac{x}{2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{c^2} \end{aligned}$$

Ho posto  $x = \beta^2$ ,  $\frac{x^2}{4}$  è piccolo rispetto ad  $1 - x$ ,  $\frac{x^2}{4}$  è trascurabile rispetto ad 1.

### (L) La composizione delle velocità

Sappiamo che se una particella in moto viene osservata da due diversi **S.R.**, uno  $S$  fermo, l'altro  $S'$  in moto con velocità  $\vec{v}_T$  rispetto ad  $S$ , la velocità della particella è diversa nei due sistemi di riferimento, ha cioè il valore  $\vec{v}$  nel sistema  $S$  ed il valore  $\vec{v}_R$  nel sistema  $S'$ .



Il punto P si muove rispetto ad entrambi i S.R. che, a loro volta, sono in moto relativo fra loro

Sappiamo che secondo la trasformazione classica di Galileo queste due velocità sono legate dalla relazione semplice  $\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_T$ . Se si ha a che fare con velocità relativistiche e si applicano le trasformazioni di Lorentz si ottiene la seguente relazione:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_T}{1 + \frac{\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{v}_T}{c^2}}$$

Si ottiene questa formula perché abbiamo supposto  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_T$  con la stessa direzione (se hanno pure lo stesso verso  $v_R$  e  $v_T$  sono positive)

Per una trasformazione galileiana avremmo trovato:  $v_G = v_R + v_T > v$

Nel caso in cui  $v_R$  e  $v_T$  sono piccole rispetto alla velocità della luce (come accade in tutte le situazioni meccaniche), il termine  $\frac{\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{v}_T}{c^2} \ll 1$  è trascurabile e si ottiene  $\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_T$  identica al risultato che si otterrebbe applicando il ragionamento newtoniano.

Se una delle velocità è la velocità della luce,  $\mathbf{v}_R = \mathbf{c}$  allora:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{v}_T}{1 + \frac{\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{v}_T}{c^2}} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{v}_T}{1 + \frac{\mathbf{v}_T}{c}} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{v}_T}{c + \mathbf{v}_T} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

Questo risultato ci assicura che la velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori, perché, qualunque velocità venga sommata a  $c$ , la regola per la somma fornisce sempre, come risultato finale, il valore  $c$ . In particolare, se  $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_T = \mathbf{c}$  si avrà ancora:  $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ .

Supponiamo adesso che il **S.R.**  $S'$  si muova rispetto ad  $S$  con velocità  $\vec{v}_T = v_T \cdot \vec{i}$  ed una particella si muova rispetto ad  $S$  con velocità  $\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$  e rispetto ad  $S'$  con velocità  $\vec{v}_R = v'_x \cdot \vec{i} + v'_y \cdot \vec{j} + v'_z \cdot \vec{k}$ . Risulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + v_T}{1 + \frac{v'_x \cdot v_T}{c^2}} \\ v_y = \frac{v'_y + v_T}{1 + \frac{v'_x \cdot v_T}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}} \\ v_z = \frac{v'_z + v_T}{1 + \frac{v'_x \cdot v_T}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - v_T}{1 - \frac{v_x \cdot v_T}{c^2}} \\ v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{v_x \cdot v_T}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}} \\ v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{v_x \cdot v_T}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}} \end{array} \right.$$

### Sommario

(1) La **teoria ristretta della relatività** (o *teoria della relatività ristretta*) fu formulata da Albert Einstein nel 1905. Essa ebbe origine dal tentativo di spiegare un risultato sperimentale, che appariva in contrasto non i risultati della meccanica classica. L'esperienza aveva verificato che la velocità della luce nel vuoto aveva sempre lo stesso valore  $c = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  rispetto ad un qualsiasi **S.R.I.**, cioè comunque si muovano di moto traslatorio rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro, la sorgente che emette la luce e l'osservatore che ne misura la velocità.

(2) La teoria ristretta della relatività poggia su due postulati.

**Primo postulato: le leggi fondamentali della fisica sono invarianti rispetto a tutti i S.R.I.**

Un osservatore che limiti le sue osservazioni ad un unico **S.R.I.** non può mettere in evidenza il moto di tale sistema e ciò equivale ad affermare che non esiste nessun **S.R.** che possa essere considerato **assoluto** o **privilegiato**.

**Secondo postulato: le leggi fondamentali della fisica debbono essere formulate in modo tale che la velocità  $c$  della luce nel vuoto sia sempre costante ed indipendente sia dal moto della sorgente luminosa che dalla direzione di propagazione della luce.**

(3) Nel formulare la teoria ristretta della relatività, Einstein abbandonò tre concetti fondamentali della teoria newtoniana:

(a) il concetto di spazio e di tempo assoluto (b) il principio classico dell'addizione delle velocità (c) la legge di conservazione della massa che sostituì con la legge di conservazione della massa-energia.

(4) Nessuna particella materiale può avere, rispetto a qualsiasi S.R., una velocità uguale o maggiore della velocità della luce. La successione temporale degli eventi percepita da due osservatori dipende dal moto relativo degli osservatori. Ma nessun osservatore, qualunque sia il suo stato di moto, può percepire un effetto prima di percepire la causa di quest'effetto.

(5) Le trasformazioni di Galileo sono sostituite dalle trasformazioni di Lorentz che, quando il moto relativo fra  $S$  ed  $S'$  avviene nel verso dell'asse  $x$  ( $x \equiv x'$ ), assumono la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y; \quad z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta = \frac{v}{c} \end{array} \right. \quad [§§] \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y = y'; \quad z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta = \frac{v}{c} \end{array} \right.$$

(6) vale la *contrazione delle lunghezze*, cioè un corpo ha una lunghezza tanto

minore quanto maggiore è la sua velocità:  $l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}$

$l$  ( $l'$ ) è la lunghezza di un'asta misurata da un osservatore in quiete (avente velocità  $v$ ) rispetto all'asta. La contrazione riguarda solo la dimensione lungo la direzione del moto relativo; le dimensioni trasversali non sono influenzate.

(7) Vale la *dilatazione del tempo*, cioè l'intervallo di tempo  $\Delta t$  misurato da un

orologio solidale col **S.R.** fisso è più lungo o, come si dice, dilatato del fattore  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

rispetto all'intervallo di tempo  $\Delta t'$  misurato da un orologio solidale con un **S.R.I**

mobile:  $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

(8) La *legge di composizione relativistica delle velocità*, quando queste

hanno tutte la stessa direzione, è la seguente:  $v = \frac{v_R + v_T}{1 + \frac{v_R \cdot v_T}{c^2}}$  dove  $v$  e  $v_R$  sono

le velocità della particella rispetto ad S ed  $S'$  e  $v_T$  è la velocità di  $S'$  rispetto ad S.

(9) la massa di una particella cresce con la sua velocità:  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

dove  $m_0$  è la massa della particella in quiete (*massa a riposo*) ed  $m$  la massa della particella quando ha velocità  $v$ .

(10) La quantità di moto relativistica di una particella è:  $\vec{q} = m \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

(11) L'energia totale  $E = mc^2$  di una particella è la somma della sua energia a riposo

$E_0 = m_0 c^2$  e della sua energia cinetica  $K = \frac{1}{2} m_0 v^2$ .  $E = E_0 + K$   $mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$



## Conclusione qualitativa

- La relatività ristretta einsteiniana è nata dal felice tentativo di Einstein di conferire alla meccanica ed all'elettromagnetismo un unico assetto nel cui ambito trovassero adeguata sistemazione. Le preesistenti teoria newtoniana della meccanica e teoria maxwelliana dell'elettromagnetismo, anche se potevano apparire ciascuna nel proprio campo specifico esaurienti, portavano a previsioni diverse, talora incompatibili, per quei fenomeni in cui era necessario servirsi di entrambe per cercare una giustificazione dei fatti sperimentali.
- La teoria della relatività ristretta costituì per Einstein solo una prima tappa sulla strada così aperta verso una teoria unitaria. Infatti due problemi ne restano esclusi o insoluti: il problema dei sistemi di riferimento non inerziali ed il problema gravitazionale.

Nella relatività ristretta esistono ancora, come nella meccanica newtoniana, se non il sistema di riferimento assoluto, sistemi di riferimento privilegiati: i **sistemi inerziali**. Ci possiamo domandare se non sia possibile formulare le leggi della fisica in modo che esse siano **invarianti non solo nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro pure inerziale, ma da un sistema di riferimento qualsiasi, inerziale o no, ad un altro sistema di riferimento qualsiasi**.

- Inoltre, la relatività ristretta non compendia nel suo ambito il **problema gravitazionale**, non dà, né cerca di dare, una giustificazione dell'identità sperimentale tra **massa inerziale** e **massa gravitazionale**, né tantomeno trae tutte le conclusioni alle quali tale identità potrebbe portare. Il problema dei sistemi di riferimento non inerziali e quello gravitazionale costituiscono il contenuto della successiva teoria einsteiniana della **relatività generale**, nella quale sono presentati come aspetti di un'unica realtà.

## **Conclusione qualitativa**

- La relatività ristretta einsteiniana è nata dal felice tentativo di Einstein di conferire alla meccanica ed all'elettromagnetismo un unico assetto nel cui ambito trovassero adeguata sistemazione. Le preesistenti teoria newtoniana della meccanica e teoria maxwelliana dell'elettromagnetismo, anche se potevano apparire ciascuna nel proprio campo specifico esaurienti, portavano a previsioni diverse, talora incompatibili, per quei fenomeni in cui era necessario servirsi di entrambe per cercare una giustificazione dei fatti sperimentali.

- La teoria della relatività ristretta costituì per Einstein solo una prima tappa sulla strada così aperta verso una teoria unitaria. Infatti due problemi ne restano esclusi o insoluti: il problema dei sistemi di riferimento non inerziali ed il problema gravitazionale.

Nella relatività ristretta esistono ancora, come nella meccanica newtoniana, se non il sistema di riferimento assoluto, sistemi di riferimento privilegiati: i **sistemi inerziali**.

Ci possiamo domandare se non sia possibile formulare le leggi della fisica in modo che esse siano **invarianti non solo nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro pure inerziale, ma da un sistema di riferimento qualsiasi, inerziale o no, ad un altro sistema di riferimento qualsiasi**.

- Inoltre, la relatività ristretta non compendia nel suo ambito il **problema gravitazionale**, non dà, né cerca di dare, una giustificazione dell'identità sperimentale tra **massa inerziale** e **massa gravitazionale**, né tantomeno trae tutte le conclusioni alle quali tale identità potrebbe portare. Il problema dei sistemi di riferimento non inerziali e quello gravitazionale costituiscono il contenuto della successiva teoria einsteiniana della **relatività generale**, nella quale sono presentati come aspetti di un'unica realtà.

## Teoria generale della relatività

Nella meccanica classica intervengono due grandezze particolarmente importanti: la massa inerziale ( $m_i$ ) e la massa gravitazionale ( $m_g$ ). La prima è presente nella seconda legge della dinamica  $\vec{F} = m_i \cdot \vec{a}$ , la seconda nella legge della gravitazione universale

$$F = G \cdot \frac{m_{1g} \cdot m_{2g}}{r^2}. \text{ Si dimostra che risulta } \frac{m_g}{m_i} = k. \text{ Ponendo } k=1 \text{ abbiamo: } m_g = m_i \text{ in}$$

termini numerici ma non concettuali. La fisica classica aveva rinunciato a capire i motivi di una tale identità: in genere la dava per scontata in teoria e verificata sperimentalmente con sufficiente precisione. Lo studio della relatività generale presenta notevoli difficoltà sia concettuali che matematiche. Noi, allo stato attuale delle nostre conoscenze, ne daremo una semplice descrizione concettuale.

La **relatività generale** estende le leggi della **relatività ristretta** valide per i **S.R.I.** anche ai sistemi non inerziali. Come la relatività galileiana è un caso particolare della relatività ristretta, quest'ultima rappresenta un caso particolare della **relatività generale**. Il primo postulato della relatività ristretta afferma che tutte le leggi fisiche sono le stesse in tutti i **S.R.I.**. La teoria della **relatività generale** formula un postulato ancora più estensivo. Tutte le leggi della fisica possono essere formulate in modo tale che esse possano essere valide per ogni osservatore, comunque complicato sia il suo moto. La relatività generale si basa sul **principio di equivalenza** che afferma quanto segue: **ogni S.R.I. immerso in un campo gravitazionale uniforme è equivalente ad un S.R. accelerato in assenza di un campo gravitazionale**. Tale principio può essere cos' generalizzato: tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i **S.R.** compresi quelli non inerziali. Tale teoria presuppone l'uguaglianza tra la massa inerziale  $m_i$  e la massa gravitazionale  $m_g$ , cioè presuppone che sia:  $m_g = m_i$ . Supponiamo che i motori di un razzo spingano verticalmente verso l'alto un'astronave con un'accelerazione  $\vec{a} = -\vec{g}$ . Un osservatore

all'interno dell'astronave vede cadere i corpi verticalmente verso il basso con accelerazione  $\vec{a}=\vec{g}$ , ma non riesce a capire se è l'astronave che sta accelerando nello spazio o se è un effetto gravitazionale. Nessun esperimento eseguito all'interno dell'astronave può avvalorare una delle due alternative a scapito dell'altra. Se l'astronave è priva di finestre, l'osservatore presente al suo interno non può mai distinguere l'accelerazione di gravità da una accelerazione dovuta ad una spinta esercitata dall'esterno. Einstein concluse questo ragionamento nella sua teoria della relatività generale postulando il **principio di equivalenza** nella seguente forma: in un laboratorio chiuso, non si può eseguire alcun esperimento che permetta di distinguere gli effetti di un campo gravitazionale dagli effetti dovuti ad un'accelerazione rispetto alle stelle fisse.

Equivalenza tra un campo gravitazionale e un sistema di riferimento accelerato

**Ogni sistema di riferimento inerziale, immerso in un campo gravitazionale uniforme, è del tutto equivalente ad un sistema di riferimento uniformemente accelerato (rispetto al primo) nel quale non agisca alcun campo gravitazionale.**

Questa equivalenza postulata da Einstein riguarda non solo i fenomeni della meccanica ma tutti i fenomeni fisici. Con la relatività generale i **S.R.I.** perdono il loro ruolo privilegiato e tutti i **S.R.** assumono pari dignità.

Concludendo possiamo affermare che quanto segue: poiché l'universo fisico descritto da un riferimento accelerato è equivalente ad un universo soggetto ad un campo gravitazionale, la teoria della relatività generale è al tempo stesso una teoria della gravità.

## Ulteriore descrizione della teoria della relatività generale

Mentre la teoria della **relatività ristretta** trova la maggior parte delle sue applicazioni a livello atomico, la teoria della **relatività generale** è più utile nell'universo dei pianeti, delle stelle, delle galassie. La teoria della **relatività generale** si applica ai **S.R.** accelerati l'uno rispetto all'altro. Si tratta in sostanza di una teoria della gravitazione molto più complessa, anche dal punto di vista matematico, della teoria della relatività ristretta. Per questo motivo tutto quello che possiamo fare è di indicare brevemente e solo concettualmente lo scopo di questa teoria che molti fisici considerano come la più elegante e perfetta di tutte le teorie della fisica. La teoria della relatività generale si basa su due postulati:

**(1) Principio di invarianza: tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento indipendentemente dai loro moti relativi.** Questo principio è una estensione del principio di relatività ristretta per includervi non solo i **S.R.I.** ma tutti i **S.R.**, inclusi i riferimenti accelerati.

**(2) Principio di equivalenza: un riferimento accelerato uniformemente è equivalente ad un campo gravitazionale omogeneo.**

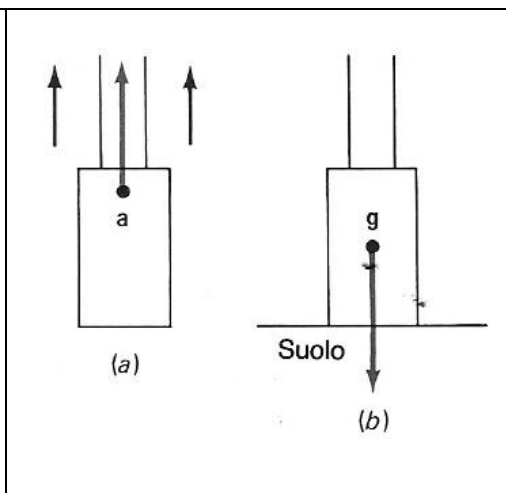
Questo principio presuppone che la massa gravitazionale e la massa inerziale siano identiche.

$$m_g = m_i$$

Per massa gravitazionale intendiamo la massa che figura nella legge di gravitazione universale, per massa inerziale intendiamo la massa che figura nella seconda legge della dinamica del punto materiale. Se le masse inerziale e gravitazionale sono le stesse, nessun esperimento di meccanica effettuato all'interno di un ascensore o di un altro ambiente chiuso è in grado di stabilire se l'ascensore è accelerato verso l'alto mediante l'accelerazione  $\vec{a}$  o se gli oggetti presenti nell'ascensore sono sottoposti ad una forza gravitazionale che produce un'accelerazione verso il basso  $\vec{g} = -\vec{a}$ .

Equivalenza di un riferimento accelerato con un campo gravitazionale:

(a) l'accelerazione di un ascensore che si muove verso l'alto con accelerazione  $\bar{a}$  è del tutto equivalente a (b) un campo gravitazionale che produce una accelerazione  $\bar{g}$  verso il basso all'interno dell'ascensore dove risulta  $\bar{g} = -\bar{a}$



Un osservatore presente all'interno dell'ascensore non è in grado di dire se la sua accelerazione è dovuta ad un campo gravitazionale o ad una forza esterna.

La teoria della relatività generale porta a tre previsioni che possono essere controllate sperimentalmente.

- Un raggio luminoso dovrebbe essere deflesso da un campo gravitazionale di grande intensità dovuto da una grande massa.
- La luce emessa da regioni nella quali esiste un intenso campo gravitazionale dovrebbe avere la sua lunghezza d'onda spostata verso la parte rossa dello spettro. L'espressione della variazione della frequenza dovuta allo spostamento verso il rosso è detto **red shift** gravitazionale per distinguerlo da quello **cosmologico** dovuto al moto di espansione dell'universo.

- Previsione di una addizionale precessione dell'orbita del pianeta Mercurio in aggiunta a quella causata dall'attrazione gravitazionale degli altri pianeti.

Negli anni recenti sono state effettuate delle misurazioni di alta precisione di tutti questi effetti e tutte confermano le previsioni della teoria della relatività generale di Einstein.

- Un altro fenomeno previsto dalla relatività generale è l'esistenza di **onde gravitazionali** provenienti da remote sorgenti dello spazio cosmico. Le **onde gravitazionali** sono "increspature" dello **spazio-tempo** prodotte da una massa enorme accelerata propagantesi alla velocità della luce. Allo stato attuale non disponiamo di una risposta definitiva al problema delle **onde gravitazionali**.

- La teoria della relatività generale prevede anche l'esistenza dei **buchi neri** che sono regioni dello **spazio-tempo** capaci di intrappolare masse enormi ed anche la luce.

### Asterischi di relatività

- Se si misura la velocità della luce nel vuoto si ottiene sempre lo stesso risultato  $c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Non ha importanza con quale velocità si muovano la sorgente che emette la luce o l'osservatore che la rivela.
- Le velocità assolute non possono essere misurate; si possono determinare solo velocità relative a qualche altro corpo.
- Un **S.R.I.** è un sistema di coordinate nel quale vale il principio di inerzia: un corpo non soggetto a forze o soggetto ad un sistema di forze a risultante nullo o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme.
- Le leggi fondamentali della natura sono le stesse in tutti i **S.R.I.**
- Nessun corpo materiale può muoversi ad una velocità che superi la velocità della luce nel vuoto
- Nulla che porti energia può muoversi a velocità maggiore di quella della luce
- Eventi che risultano simultanei in un **S.R.I.** non risultano simultanei in un altro **S.R.I.** in movimento rispetto al primo.
- **La dilatazione del tempo:** Consideriamo due sistemi **S** che per semplicità riteniamo fermo ed  $S'$  che rispetto ad **S** si muove con velocità vettoriale costante. Se un fenomeno rispetto al sistema fermo **S** avviene nel tempo  $\Delta t$ , lo stesso fenomeno rispetto al sistema mobile avviene nel tempo  $\Delta t' \neq \Delta t$ .

Risulta: 
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Delta t > \Delta t'$$

L'orologio dell'osservatore mobile  $S'$  è più lento di quello dell'osservatore fisso **S**. Qualunque orologio che si muove rispetto ad un osservatore fisso segna un tempo minore dell'orologio dell'osservatore fisso rispetto allo stesso fenomeno.

Il tempo segnato da un orologio che sia fermo rispetto all'osservatore è chiamato tempo proprio.

- **La contrazione della lunghezze:** Se  $L_0$  è la distanza fra due punti misurata da un osservatore in quiete, la distanza  $L$  fra gli stessi punti, misurata da un secondo osservatore in moto rettilineo uniforme vale:  $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}$  cioè per un

osservatore in movimento la lunghezza si contrae del fattore:  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Si osservi che la contrazione si verifica solo nella direzione del moto.

- **Massa relativistica:** Un corpo, la cui massa a riposo è  $m_0$ , avrà una massa maggiore  $m$  se la si misura quando si muove con una velocità  $v$ . La relazione tra  $m$  ed  $m_0$  è la seguente:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- **Energia relativistica, cioè la relazione tra la massa e l'energia:** L'energia di un corpo è legata alla sua massa dalla relazione  $E_{\text{totale}} = mc^2$ . A riposo un

corpo ha energia  $E_c = m_0 c^2$   $E_{\text{totale}} = mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$

Il termine  $\frac{1}{2} m_0 v^2$  è il risultato newtoniano per l'energia cinetica. Il termine  $m_0 c^2$  è l'energia a riposo dell'oggetto. La somma dell'energia a riposo e dell'energia cinetica è l'energia totale dell'oggetto.

$$\underbrace{mc^2}_{\text{(energia totale)}} = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{(energia a riposo)}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{(energia cinetica)}}$$