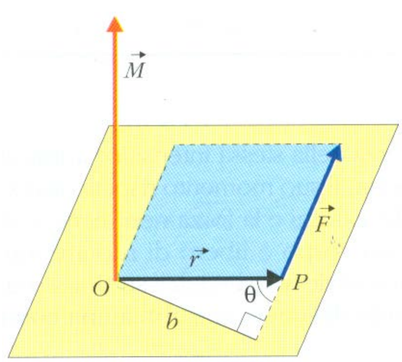
Unità Didattica N° 10: I momenti delle forze

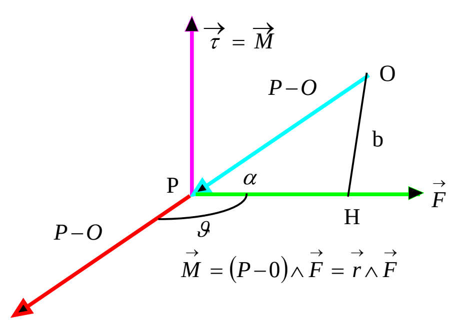
Momento di una forza rispetto ad un punto

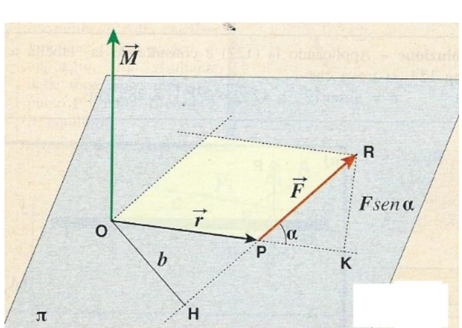
Data una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P [Simbolo usato $\left(P,\vec{F}\right)$] ed un punto **O** non appartenente al sostegno di $\vec{F}$ definiamo **momento della forza** $\vec{F}$ rispetto al punto **O** il vettore libero $\vec{\mathbf{M}}$ ($\vec{\tau}$) completamente individuato dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{\mathbf{M}} = (\mathbf{P}-\mathbf{O})\wedge\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}}\wedge\vec{\mathbf{F}}$ con $\vec{\mathbf{r}} = (\mathbf{P}-\mathbf{O})$ Chiamiamo **braccio della forza** $\vec{F}$ rispetto al punto **O** il segmento di perpendicolare $OH = b$ condotto dal punto **O** al sostegno della forza $\vec{F}$. Risulta:

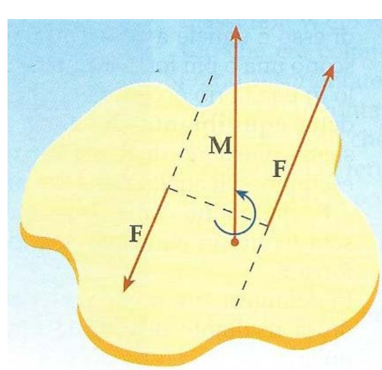
$$OH = OP\cdot\sin\alpha = OP\cdot\sin(\pi-\vartheta) = OP\cdot\sin\vartheta = b \qquad \mathbf{M} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{OP}\cdot\sin\vartheta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}$$

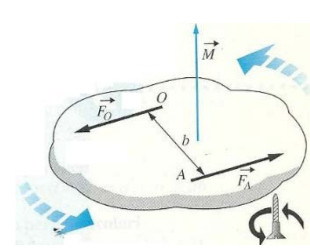
$\vec{M}$ **è nullo** quando: 1) è nulla la forza $\vec{F}$ 2) quando il ponto O appartiene al sostegno di $\vec{F}$ .Il momento della forza $\vec{F}$ rispetto al punto **O** non dipende dal punto di applicazione P della forza $\vec{F}$. Questo significa che il momento di una forza rispetto ad un punto **O** non varia se spostiamo il punto di applicazione della forza lungo il suo sostegno.











Momento risultante di un sistema di forze

Definiamo **momento risultante** di un sistema di forze $\left(P_1, \vec{F}_1\right)$, $\left(P_2, \vec{F}_2\right)$, $\left(P_3, \vec{F}_3\right)\cdots$ rispetto allo stesso **polo** $\mathbf{O}$ la somma vettoriale dei momenti di ciascuna forza rispetto allo stesso punto $\mathbf{O}$, cioè il vettore $\vec{M}$ così definito:

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_1 + \vec{\mathbf{M}}_2 + \vec{\mathbf{M}}_2 + \cdots = \left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{0}\right) \wedge \vec{\mathbf{F}}_1 + \left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{0}\right) \wedge \vec{\mathbf{F}}_2 + \left(\mathbf{P}_3 - \mathbf{0}\right) \wedge \vec{\mathbf{F}}_3 + \cdots$$

$\vec{\mathbf{M}}$ varia al variare del punto $\mathbf{O}$ ed è un **vettore libero**, cioè un vettore che ha indeterminati il sostegno ed il punto di applicazione. Il punto $\mathbf{O}$ è detto **polo** o **centro di riduzione** dei momenti.

La somma vettoriale delle forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots, \vec{F}_n$ rappresenta il **risultante** e viene indicato col simbolo $\vec{\mathbf{R}}$ $\quad \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \cdots + \vec{\mathbf{F}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i$

Cioè il **risultante** $\vec{\mathbf{R}}$ di un sistema di $\mathbf{n}$ forze è la somma vettoriale delle $\mathbf{n}$ forze.

Osservazione

- Un **risultante** è collegato ad una **traslazione**, un **momento risultante** è collegato ad una **rotazione**.

Teorema N° 1: Se le forze $\vec{F}_i$ sono tutte applicate in uno stesso punto $\mathbf{O}$ vale il **teorema di Varignon**: **il momento risultante** $\vec{\mathbf{M}}$ delle n forze date rispetto ad un qualsiasi polo $\mathbf{O}$ è uguale al momento rispetto al punto $\mathbf{O}$ del risultante $\vec{R}$ applicato in P. **Teorema N° 2**: **il momento risultante** $\vec{\mathbf{M}}$ di un sistema di $\mathbf{n}$ forze a risultante nullo si mantiene costante al variare del polo $\mathbf{O}$.

Dimostreremo questa proprietà nel caso semplice di un sistema costituito da due forze parallele aventi la stessa intensità e versi opposti. (**coppia di forze**)

Momento di una coppia di forze

Definiamo **coppia di forze** un sistema costituito da due forze complanari $\left(P_1;\vec{F}_1\right)$ e $\left(P_2;\vec{F}_2\right)$ aventi la stessa direzione, lo stesso modulo, versi opposti e sostegni diversi.

Il piano α individuato dalle due forze è detto piano della coppia, mentre la distanza b dei rispettivi sostegni è detta braccio della coppia. Una coppia di forze applicata ad un corpo rigido libero di muoversi gli imprime una rotazione.

Il momento $\vec{M}$ della coppia di forze è uguale alla somma vettoriale dei momenti delle due forze rispetto ad un punto qualsiasi O del piano individuato dalla coppia, cioè :

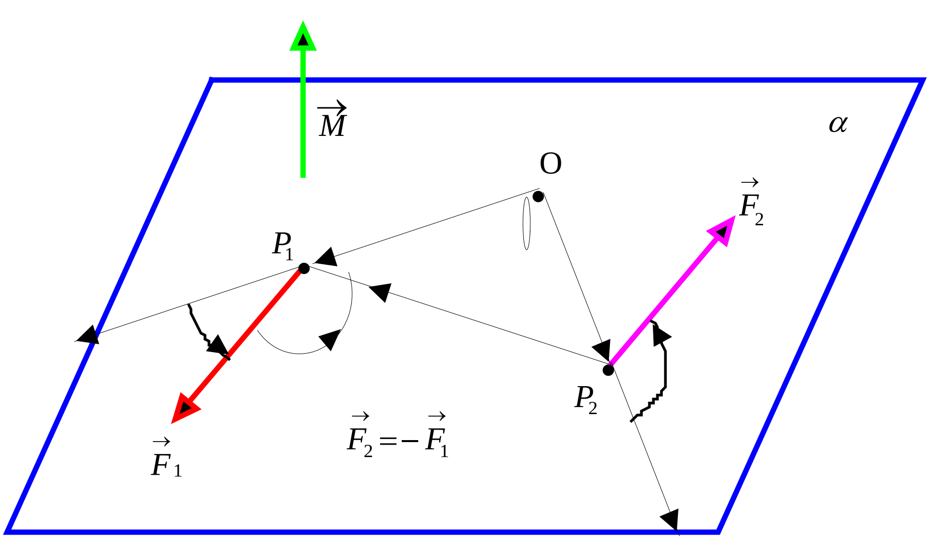
$$\vec{\mathbf{M}}=\vec{\mathbf{M}}_1+\vec{\mathbf{M}}_2=\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{0}\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_1+\left(\mathbf{P}_2-\mathbf{0}\right)\wedge\left(-\vec{\mathbf{F}}_1\right)=\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{0}-\mathbf{P}_2+\mathbf{0}\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_1=\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_1$$

Questa relazione ci dice che il momento della coppia di forze è uguale al momento della forza $\vec{F}_1$ rispetto al punto P_2. Si dimostra che:

$$\left(P_2-P_1\right)\wedge\vec{F}_2=\textbf{momento di } \vec{F}_2 \textbf{ rispetto a } P_1=$$

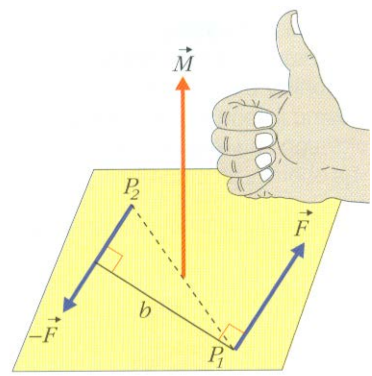
$$\left(P_2-P_1\right)\wedge\left(-\vec{F}_1\right)=\left(P_1-P_2\right)\wedge\vec{F}_1=\vec{M}$$

Possiamo concludere affermando che il momento di una coppia di forze è uguale al momento di una di esse rispetto al punto di applicazione dell'altra.



Questo è uno dei casi in cui il **momento risultante** non dipende dal polo perché $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{o}$ Il momento $\vec{M}$ di una coppia di forze è un vettore libero, cioè un vettore avente indeterminati il sostegno ed il punto di applicazione .

Il momento $\vec{M}$ di una coppia di forze $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, di braccio b, è il vettore $\vec{M}$ di modulo $M = F \cdot b$, perpendicolare al piano della coppia, orientato come il pollice della mano destra quando le altre dita si avvolgono nel verso della rotazione prodotta dalla coppia.



Momento di una forza rispetto ad un asse

Sia $\left(P, \vec{F}\right)$ una forza $\vec{F}$ applicata in un punto P ed $\vec{r}$ una retta orientata di versore $\vec{e}$.

Definiamo momento della forza $\vec{F}$ rispetto alla retta orientata $\vec{r}$ la componente secondo $\vec{r}$ del momento $\vec{M}$ della forza $\vec{F}$ rispetto ad un qualsiasi punto O di $\vec{r}$.

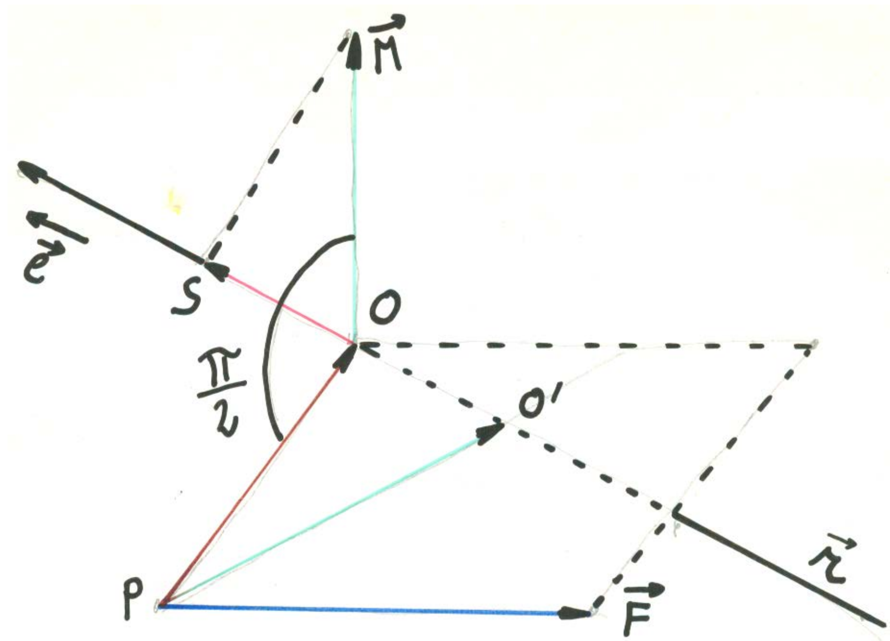
In formule abbiamo: $\mathbf{M_r} = \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{e}} = (\mathbf{S} - \mathbf{O}) \times \vec{\mathbf{e}} = \left[(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \vec{\mathbf{F}}\right] \times \vec{\mathbf{e}}$

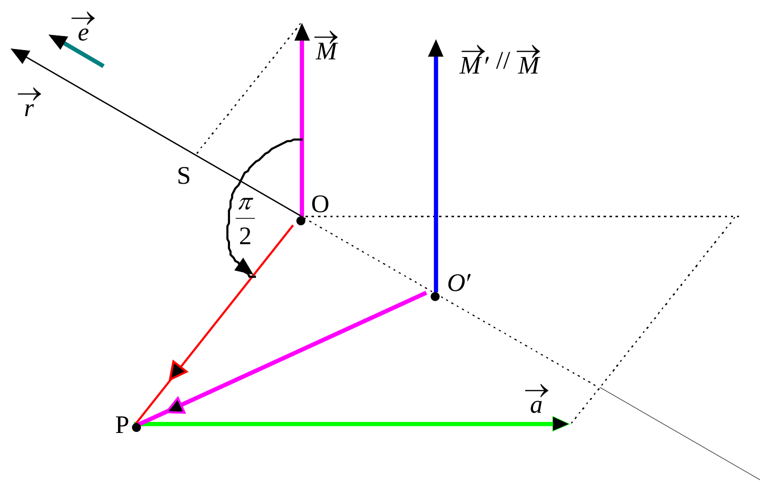
M_r non varia al variare di O su $\vec{r}$. Infatti, se O' è un altro punto di $\vec{r}$, abbiamo:

$$M_r(O') = \left[(P-O') \wedge \vec{F}\right] \times \vec{e} = \left\{\left[(P-O)+(O-O')\right] \wedge \vec{F}\right\} \times \vec{e} = \left[(P-O) \wedge \vec{F}\right] \times \vec{e} + \left[(O-O') \wedge \vec{F}\right] \times \vec{e}$$

$$M_r(O') = = M_r(O) + 0 = M_r(O)$$

In quanto risulta : $(O-O') \wedge \vec{F} \perp \vec{e}$.





Se $\left(P,\vec{F}\right)$ ed $\vec{r}$ sono complanari (in questo caso il sostegno di $\vec{F}$ o incontra la retta $\vec{r}$ o è ad essa parallela) allora M_r è nullo e viceversa. Infatti in questo caso risulterebbe:

$$(P-O)\wedge\vec{F}\perp\vec{e}\ .$$

Sistemi equivalenti di forze

Dal punto di vista della meccanica due sistemi di forze si dicono **equivalenti** se, applicati ad uno stesso corpo rigido , producono gli stessi effetti statici e dinamici.

Dal punto di vista vettoriale due sistemi di forze si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso **risultante** (che è la somma vettoriale di tutte le forze del sistema considerato) ed **uguale momento risultante** rispetto ad un qualsiasi (ma comune) polo O. Se spostiamo il polo dal punto O al punto O_1 i due sistemi continuano ad avere momenti risultanti uguali fra loro , ma essi sono uguali da quelli ricavati precedentemente. Si dimostra che se due sistemi di forza hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un particolare (ad esempio O), allora essi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualsiasi altro polo.

- Si dimostra che un qualsiasi sistema di forze è equivalente ad una sola forza $\vec{R}$ (risultante) somma vettoriale di tutte le forze del sistema applicato in un punto O scelto arbitrariamente e da una **coppia di forze** di momento $\vec{M}$ uguale al momento risultante di tutte le forze del sistema rispetto al punto O .

Teorema: **Un qualsiasi sistema di n forze è equivalente al proprio risultante $\vec{R}$ applicato in un punto O arbitrariamente scelto, più una qualsiasi delle infinite coppie di forze aventi momento uguale al momento risultante (rispetto al polo O) del sistema di forze considerato**.