Le macchine semplici

Generalmente col nome di macchina semplice indichiamo un qualsiasi dispositivo capace di equilibrare una data forza $\vec{\mathbf{F}}_R = \vec{\mathbf{R}}$, detta resistenza, con un'altra forza $\vec{\mathbf{F}}_M = \vec{\mathbf{P}}$ chiamata forza motrice (detta impropriamente potenza) che differisce dalla prima per qualche suo elemento (per intensità, per direzione, per retta d'azione). E' discutibile il numero delle macchine semplici. Forse esso si riduce a tre; la fune, la leva, il piano inclinato; ma è comodo considerarne un numero maggiore, ad esempio, la vite, il cuneo, il verricello, il paranco, l'argano. Spesso la forza da equilibrare è detta resistenza e viene indicata col simbolo $\vec{\mathbf{R}}$ oppure col simbolo $\vec{\mathbf{F}}_R$, quella che serve per ottenere l'equilibrio è detta potenza o forza motrice e viene indicata col simbolo $\vec{P}$ oppure con $\vec{F}_m$.

$\vec{\mathbf{F}}_R = \vec{\mathbf{R}}$ = resistenza = forza da equilibrare

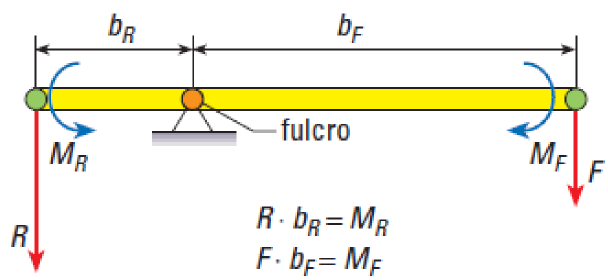
$\vec{\mathbf{F}}_M = \vec{\mathbf{P}}$ = potenza = forza che determina l'equilibrio

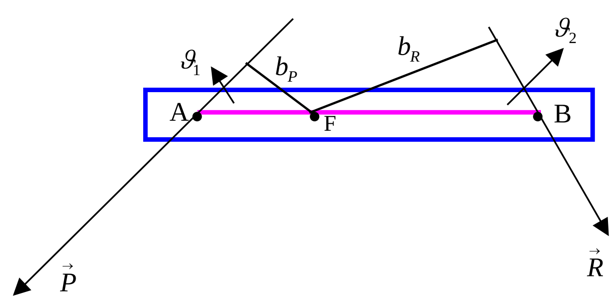
Definiamo vantaggio **V** di una macchina semplice il rapporto tra la resistenza e la potenza, cioè: $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{F}_R}{\mathbf{F}_M} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{P}}$ = vantaggio della macchina semplice

La macchina è vantaggiosa se $V > 1$ $(R > P)$, indifferente se $V = 1$ $(R = P)$, svantaggiosa se $V < 1$ $(\mathrm{R} < \mathrm{P})$.

La leva

La leva è un'asta rigida che può ruotare attorno ad un punto fisso **F** (detto fulcro). Nel piano della figura, dove è schematizzata la leva, **F** è la traccia del fulcro. Agli estremi A e B della sbarra sono applicate due forze: una $\vec{\mathbf{F}}_M = \vec{\mathbf{P}}$ detta potenza o forza motrice, l'altra $\vec{R}$ detta resistenza. $\vec{\mathbf{F}}_R = \vec{\mathbf{R}}$ è la forza da equilibrare mediante la forza $\vec{\mathbf{F}}_M = \vec{\mathbf{P}}$.





La leva soggetta alle forze $\vec{R}$ e $\vec{P}$ è in equilibrio quando è nullo il momento risultante $\vec{M}$ delle forze $\vec{F}_R = \vec{R}$ e $\vec{F}_M = \vec{P}$ rispetto ad un punto qualsiasi (ad esempio rispetto al fulcro **F**), cioè la **condizione di equilibrio si ha quando è nullo il momento risultante delle forze applicate rispetto al fulcro F**, cioè quando il momento della forza motrice è uguale, in modulo, al momento della forza resistente. In simboli abbiamo: $F_M : F_R = b_R : b_M$

Per la condizione di equilibrio dobbiamo avere: $\boxed{\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{o}}$ cioè: $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$

$\vec{M}_1 = (A - F) \wedge \vec{P}$, $\vec{M}_2 = (B - F) \wedge \vec{R}$ $\quad M_1 = M_2 \quad M_1 = \overline{AF} \cdot P \cdot \sin\vartheta_1 = P \cdot b_P$

$M_2 = \overline{BF} \cdot R \cdot \sin\vartheta_2 = R \cdot b_R$

b_P = braccio della potenza = distanza del fulcro F dal sostegno di $\vec{P}$

b_R = braccio della resistenza = distanza del fulcro F dal sostegno di $\vec{R}$

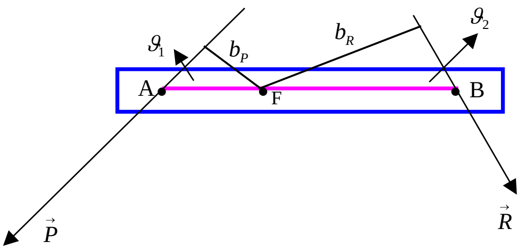
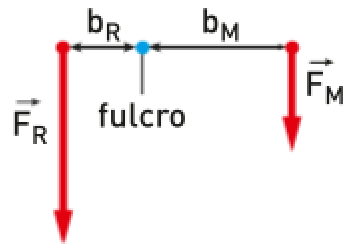
$M_1 = M_2 \quad \Rightarrow \quad P \cdot b_P = R \cdot b_R$ $\quad$ cioè : $\quad \boxed{P : R = b_R : b_P}$

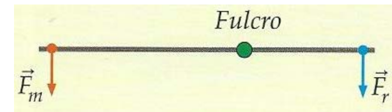
Una leva è in equilibrio quando i moduli della potenza e della resistenza sono inversamente proporzionali ai rispettivi bracci.

Si distinguono tre tipi di leve a seconda della posizione del fulcro, della resistenza, della potenza.

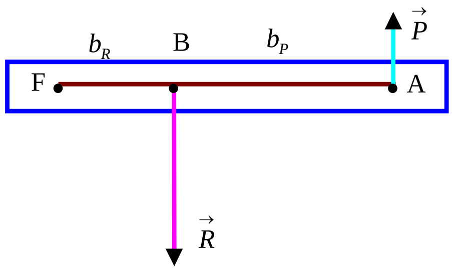
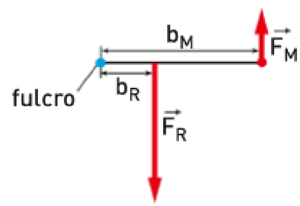
1) Leva di primo genere o interfulcrata o interfissa

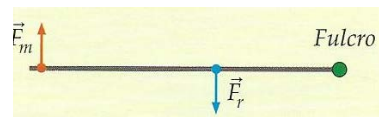
Nelle leve di primo genere il fulcro F si trova tra la resistenza e la potenza. Queste leve possono essere vantaggiose, indifferenti, svantaggiose secondo che: $\quad V = \dfrac{R}{P} = \dfrac{b_P}{b_R} \gtreqless 1$ $\quad$ cioè se : $\quad \boxed{b_P \gtreqless b_R}$



2) Leva di secondo genere o interesistente

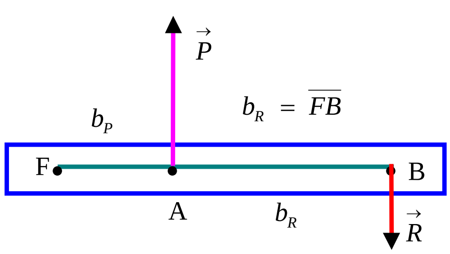
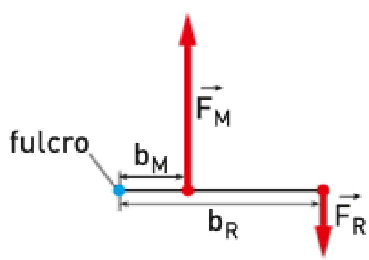



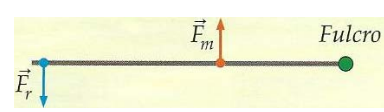


In questo tipo di leva il punto di applicazione della resistenza è tra il fulcro ed il punto di applicazione della potenza. La leva di secondo genere è sempre vantaggiosa in quanto è sempre:

$$b_P > b_R \quad \text{e quindi} \quad \boxed{P < R}$$

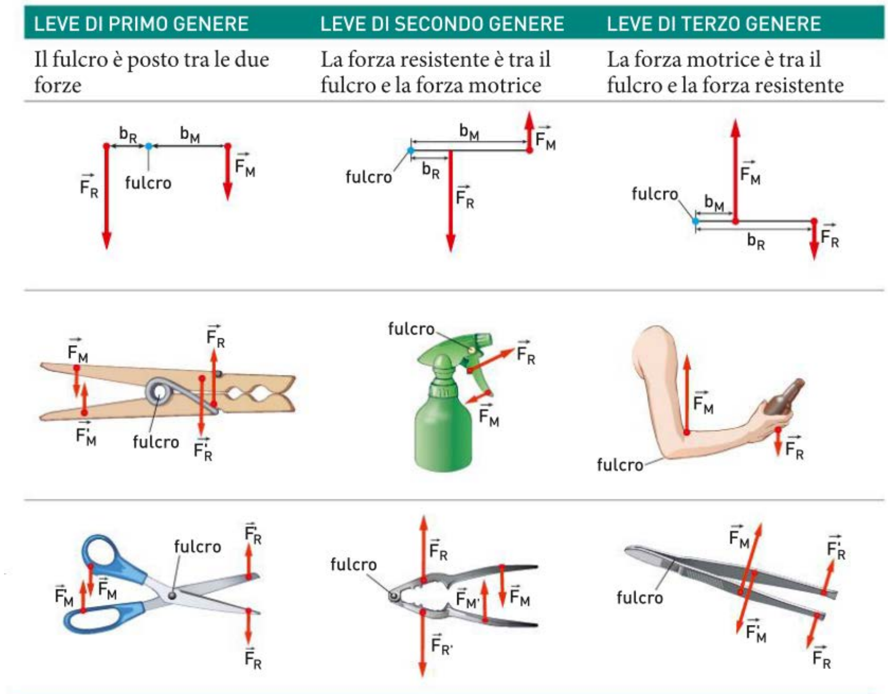
3) Leva di terzo genere o interpotente



Qui il punto di applicazione della potenza si trova tra il fulcro ed il punto di applicazione della resistenza. $\boxed{V = \frac{R}{P} = \frac{b_P}{b_R} < 1}$ in quanto risulta sempre $b_P < b_R$

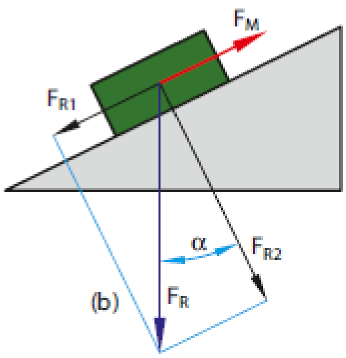
Si tratta di una macchina svantaggiosa ma utile in molte applicazioni.



Il piano inclinato

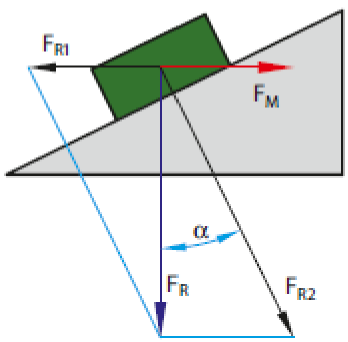
Il piano inclinato è un piano rigido, liscio, che forma un angolo ϑ col piano orizzontale. Schematicamente un piano inclinato viene rappresentato mediante un triangolo rettangolo ABC in cui l'ipotenusa $BC = \ell$ rappresenta la lunghezza, il cateto verticale $AB = h$ rappresenta l'altezza, il cateto orizzontale $AB = b$ rappresenta la base del piano inclinato. Sull'ipotenusa AB poggiamo il corpo che vogliamo mantenere in equilibrio. Il peso di tale corpo $(\vec{P} = m\vec{g})$ rappresenta la resistenza, mentre la forza che mantiene in equilibrio il corpo rappresenta la potenza. Per trovare le condizioni di equilibrio del corpo poggiato sul piano inclinato occorre decomporre il peso $\vec{P}$ lungo due opportune direzioni. Di solito è conveniente decomporre il peso $\vec{P}$ nei due modi seguenti:

1) un componente perpendicolare e l'altro parallelo al piano inclinato BC



forza motrice $\mathbf{F_M}$ parallela al piano inclinato

2) un componente perpendicolare e l'altro parallelo al piano orizzontale AC



forza motrice $\mathbf{F_M}$ parallela alla base

Forza motrice parallela al piano inclinato

Consideriamo un corpo di massa m, libero di muoversi senza attrito sotto l'azione della forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ lungo il piano inclinato BC. Possiamo sempre pensare decomposta la forza $\vec{P}$ in un componente $\vec{F}_n$ normale al piano inclinato BC ed in un componente $\vec{F}_t$ ad esso parallelo. Risulta sempre: $\boxed{\vec{P} = \vec{F}_t + \vec{F}_n}$.

Per la terza legge della dinamica, il componente $\vec{F}_n$ è equilibrato dalla reazione vincolare $\vec{\Phi}$.

L'unica forza che determina il moto del corpo sul piano inclinato è il componente tangenziale (e per questo motivo prende il nome di forza motrice) della forza peso. $\begin{cases} F_n = P \cdot \cos\vartheta \\ F_t = P \cdot \sin\vartheta \end{cases}$ $\begin{cases} h = \ell \cdot \sin\vartheta \\ b = \ell \cdot \cos\vartheta \end{cases}$

Per avere equilibrio si deve applicare al corpo una forza $\vec{E}$ (detta forza equilibrante) direttamente opposta alla forza motrice $\vec{F}_t$.

$$V = \frac{P}{E} = \frac{mg}{mg\sin\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{\ell}{h} > 1$$

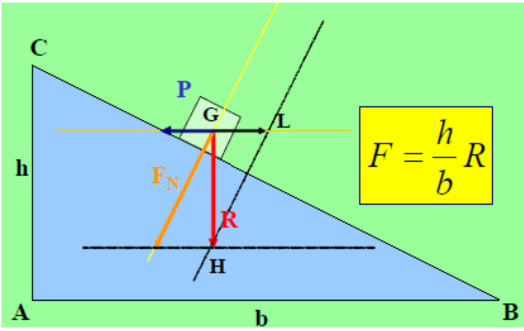
In questo caso il piano inclinato rappresenta una macchina vantaggiosa. Studiamo il fenomeno da un punto di vista dinamico. Il corpo di massa **m** parte da fermo dalla posizione **B** (che assumiamo come origine della traiettoria BC che orientiamo da B verso C) ed è soggetto alla forza motrice $F_t = mg\sin\vartheta$ che gli imprime l'accelerazione **a**. $F = ma \Rightarrow ma = mg\sin\vartheta \Rightarrow \boxed{a = g \cdot \sin\vartheta}$ Si tratta di un moto rettilineo uniformemente accelerato.

$$\begin{cases} a = g \cdot \sin\vartheta = \dfrac{h}{\ell} \cdot g \\ v = a \cdot t = g \cdot \sin\vartheta \cdot t = \dfrac{h}{\ell} \cdot g \cdot t = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\ell\sin\vartheta} \\ s = \dfrac{1}{2} g \cdot \sin\vartheta \cdot t^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h}{\ell} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Forza motrice parallela alla base

Scomponiamo il peso $\vec{P}$ nei componenti $\vec{F}_n$ perpendicolare al piano inclinato BC ed $\vec{F}_t$ parallelo al piano orizzontale AC. Risulta sempre: $\boxed{\vec{P} = \vec{F}_t + \vec{F}_n}$

Per la terza legge della dinamica, il componente $\vec{F}_n$ è equilibrato dalla reazione vincolare $\vec{\Phi}$. Risulta: $\begin{cases} F_t = P \cdot tg\vartheta = mg\,tg\vartheta \\ F_n = \dfrac{P}{\cos\vartheta} = \dfrac{mg}{\cos\vartheta} \end{cases}$

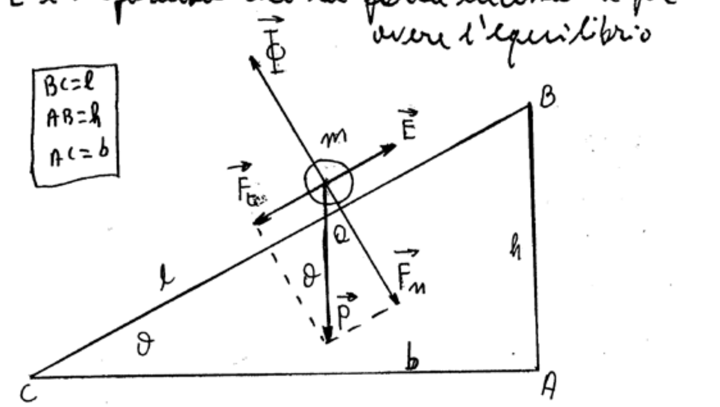


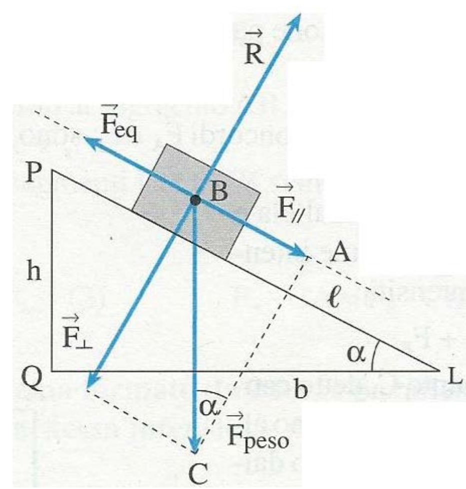
Per avere equilibrio bisogna applicare al corpo una forza (detta equilibrante) direttamente opposta ad $\vec{F}_t$. $\quad E = F_t = m\,g\,tg\,\vartheta$

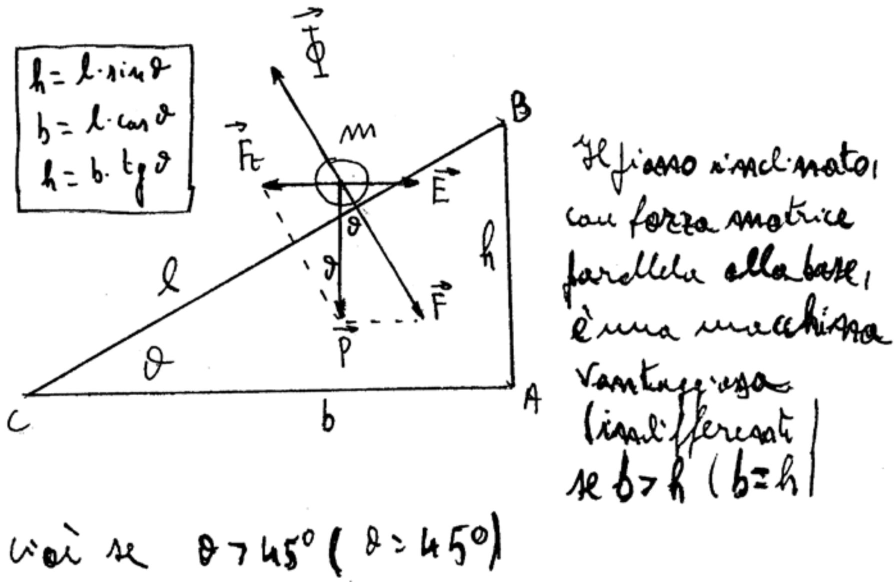
$$\boxed{V = \frac{P}{E} = \frac{m\,g}{m\,g\,tg\,\vartheta} = \frac{1}{tg\,\vartheta} = \frac{b}{h} \gtrless 1 \quad se \quad \vartheta \gtrless 45°} \qquad \boxed{P : E = b : h}$$

Nel piano inclinato con potenza parallela alla base si ha equilibrio quando il rapporto fra l'intensità della resistenza e della potenza è uguale a quello fra la base e l'altezza.

$\vec{P} = m\vec{g}$ è la resistenza, cioè la forza da equilibrare
$\vec{E}$ è la potenza cioè la forza necessaria per avere l'equilibrio







Carrucola fissa

La carrucola è costituita da un disco rigido girevole attorno ad un asse passante per il suo centro **O**. Sul bordo è praticata una scanalatura, detta gola, attorno alla quale è avvolta una fune. La staffa **SO** che mantiene la carrucola è fissata, per esempio, ad un soffitto. La fune $\mathbf{A_1A_2}$ si avvolge sulla gola (che è una scanalatura) della carrucola; ad $\mathbf{A_1}$ è applicato il corpo **K** di peso $\vec{\mathbf{P}}=\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{r}}$ che si vuole tenere sollevato. Ad $\mathbf{A_2}$ è applicata la forza equilibrante $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}$. Possiamo considerare la carrucola fissa come un corpo libero se teniamo conto delle forze di reazione $\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ applicate nel punto **O**. Supponiamo che $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{r}}$ ed $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}$ siano fra loro parallele ed equiverse. Se la carrucola è in equilibrio avremo: $\begin{cases} \vec{F}_r+\vec{F}_m+\vec{\Phi}=\vec{o} \\ \vec{M}+\vec{M}'=\vec{v} \end{cases}$

$\vec{M}'$ = momento di $\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ rispetto ad **O** = vettore nullo in quanto il suo sostegno passa per il punto **O**

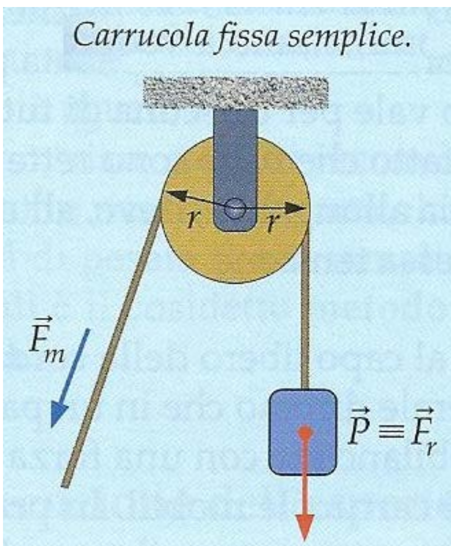
$\vec{\Phi}=-\left(\vec{F}_r+\vec{F}_m\right) \quad \Rightarrow \quad \Phi=F_r+F_m \qquad \vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2=\vec{o}$ in quanto la carrucola è in equilibrio

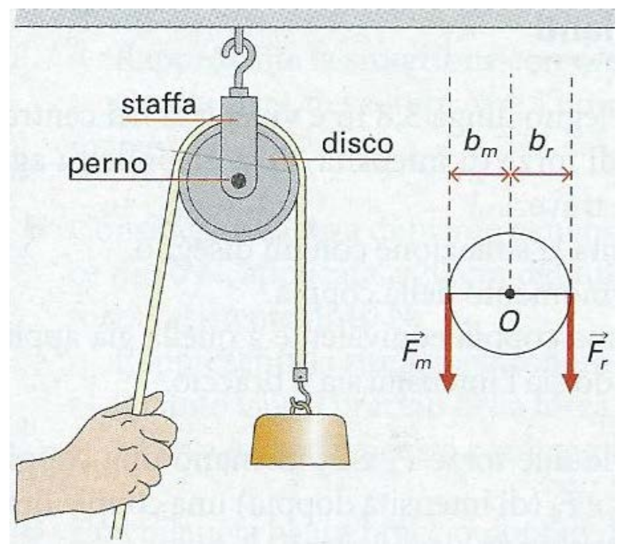
Considero come centro di riduzione (polo) il punto **O**

$\vec{M}_1 = (A_1 - O) \wedge \vec{F}_r \qquad \vec{M}_2 = (A_2 - O) \wedge \vec{F}_m \qquad (A_1 - O) \wedge \vec{F}_r + (A_2 - O) \wedge \vec{F}_m = \vec{o}$

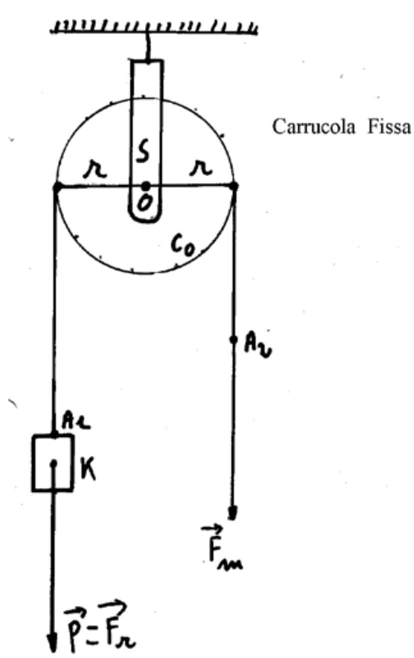
$(A_1 - O) \wedge \vec{F}_r = -(A_2 - O) \wedge \vec{F}_m \quad \Rightarrow \quad r \cdot F_r = r \cdot F_m \qquad \mathbf{F_r = F_m}$

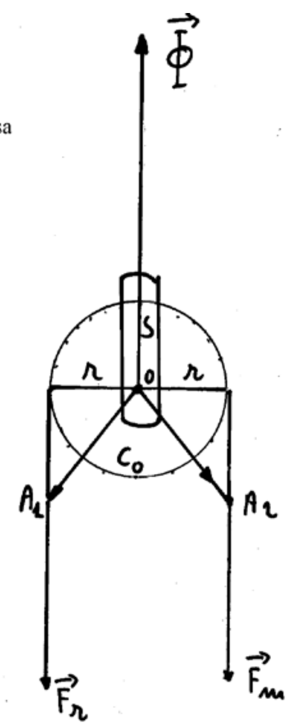
Nella carrucola fissa si ha equilibrio quando la potenza e la resistenza hanno lo stesso modulo. La carrucola fissa, che ha vantaggio **1**, serve soltanto a variare la direzione di una forza senza cambiarne l'intensità.





La carrucola fissa equivale ad una leva di primo genere. Il suo vantaggio è **1** in quanto risulta: $\mathbf{F_r = F_m}$

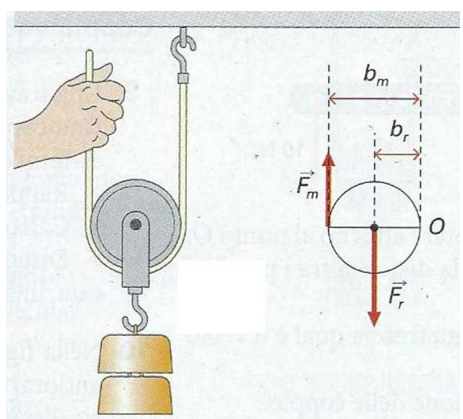
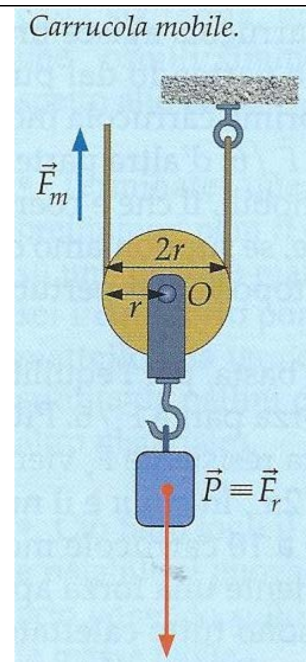


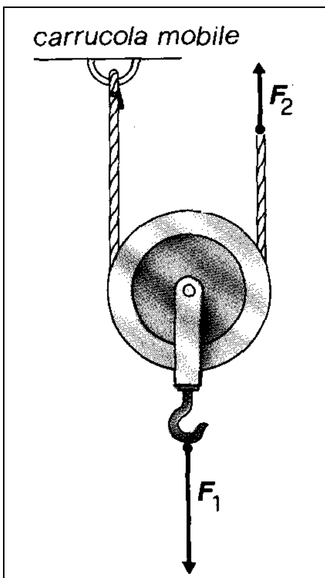
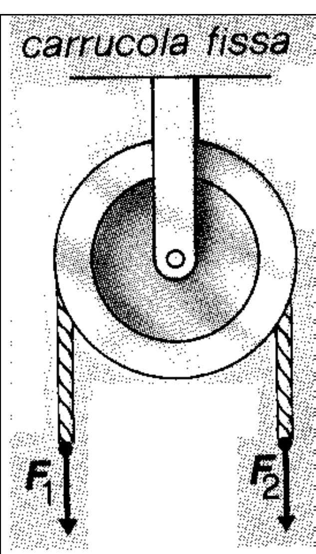
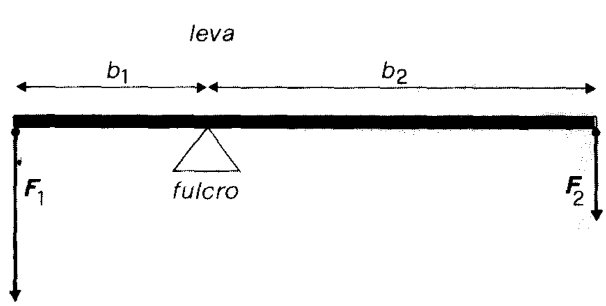


Carrucola mobile

E' una carrucola con le seguenti caratteristiche:

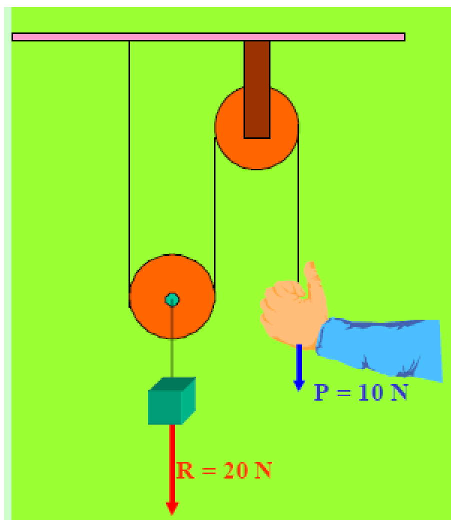
- Un estremo della fune che avvolge la gola della carrucola è fissato rigidamente, ad esempio ad un soffitto.
- La **resistenza** è applicata alla staffa della carrucola mobile, mentre la **forza motrice** equilibrante è applicata all'estremo libero della fune.

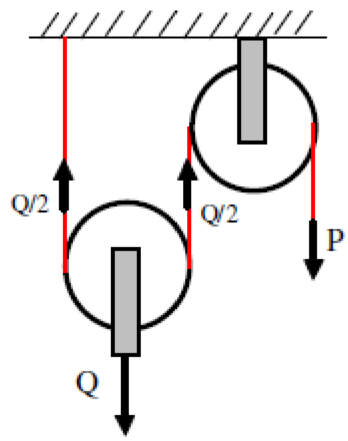
La carrucola mobile equivale ad una leva di secondo genere. Il suo vantaggio è maggiore di 1 in quanto risulta $F_m < F_r$ Il punto fisso è costituito da un estremo della fune. La ruota della carrucola sale e scende con il carico. $F_m = \frac{1}{2} F_r$	 

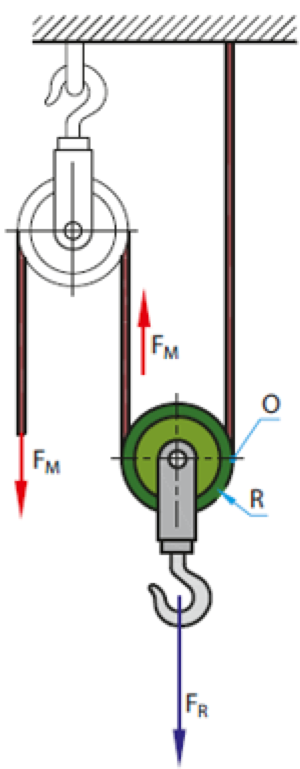
		

Paranco

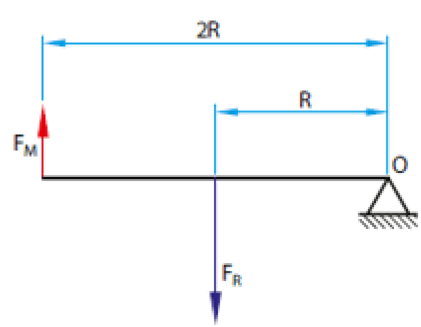
Il paranco è costituito da una carrucola mobile e da una fissa. Con la carrucola mobile si applica una forza di valore pari alla metà della forza peso (resistenza) da sollevare, mentre la carrucola fissa serve per sollevare il peso, come appoggio per la fune, come mostrato in figura. La condizione di equilibrio è: $\mathbf{F = \frac{1}{2} R}$







equivale alla leva

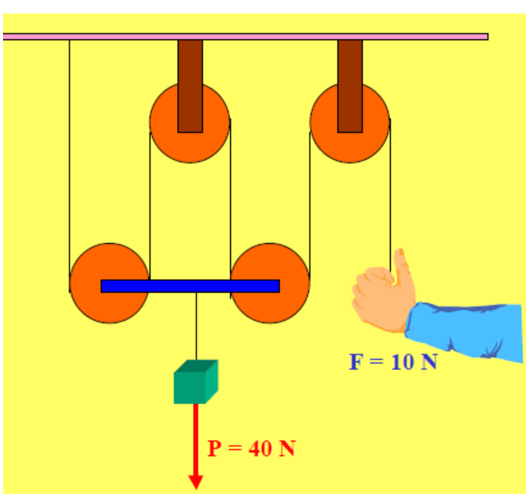


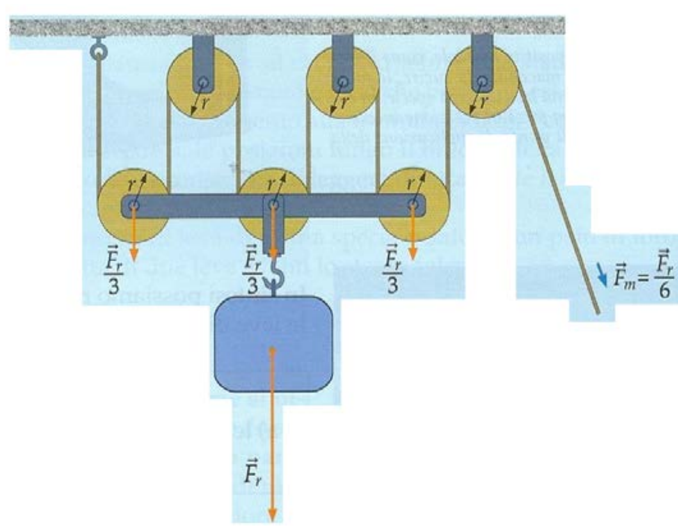
Paranco composto

E' costituito da **n** carrucole mobili e da **n** carrucole fisse e consente di sollevare un peso **P** (resistenza) con una forza motrice **F** pari a: $\mathbf{F}=\dfrac{\mathbf{P}}{2\mathbf{n}}$ essendo **n** il numero di carrucole mobili.

Infatti il numero di tratti di fune tesi tra due staffe (ovvero quella fissa alla quale sono vincolate le carrucole fisse e la carrucola mobile alla quale sono attaccate le carrucole mobili) risulta il doppio del numero delle carrucole mobili, e poiché il carico (in tal caso il peso **P**) verrà ripartito in parti uguali fra questi capi della fune, e la forza motrice **F** deve equilibrare soltanto uno di essi, si può concludere che la forza motrice è uguale alla resistenza divisa per il doppio del numero delle carrucole mobili.

$\mathbf{V}=\dfrac{R}{F}=\dfrac{R}{\dfrac{R}{2n}}=\mathbf{2n}$ vantaggio del paranco





In generale diremo che una forza resistente $P=R=F_R$ è equilibrata da una forza motrice $\mathbf{F}=\dfrac{\mathbf{P}}{2\mathbf{n}}$ essendo **n** il numero di carrucole mobili.

Carrucola mobile

Carrucola mobile

Questa volta è una estremità della fune ad essere fissata rigidamente (ad esempio ad un soffitto), mentre il disco della puleggia rotola lungo la fune senza strisciare.

C'è la carrucola mobile alla cui staffa è applicato il corpo K_1 di peso $\vec{P} = \vec{F_r}$.

La fune è fissa all'estremo A_1, all'altro estremo A_2 è applicata la forza equilibrante $\vec{F_m}$ mediante il corpo K_2 con relativa carrucola C_2.

Il vincolo A_1, agendo attraverso la fune A_1B_1, non può che applicare una reazione vincolare $\vec{\Phi}$ diretta come A_1B_1.

La carrucola mobile si trova soggetta a tre forze $\vec{F_r}$, $\vec{F_m}$, $\vec{\Phi}$.

Per l'equilibrio, le tre forze debbono essere complanari e le loro rette d'azione devono passare per uno stesso punto M.

Dunque il sistema delle tre forze deve giacere nel piano verticale perché tale è $\vec{F_r} = \vec{P}$.

OM è bisettrice dell'angolo $\alpha = A_2\hat{M}A_1$ perché risulta: $OB_1 = OB_2 = r$. Quindi è: $\Phi = F$

Infine è: $F_r = 2F_m \cos\frac{\alpha}{2}$

Il vantaggio di questa macchina è:

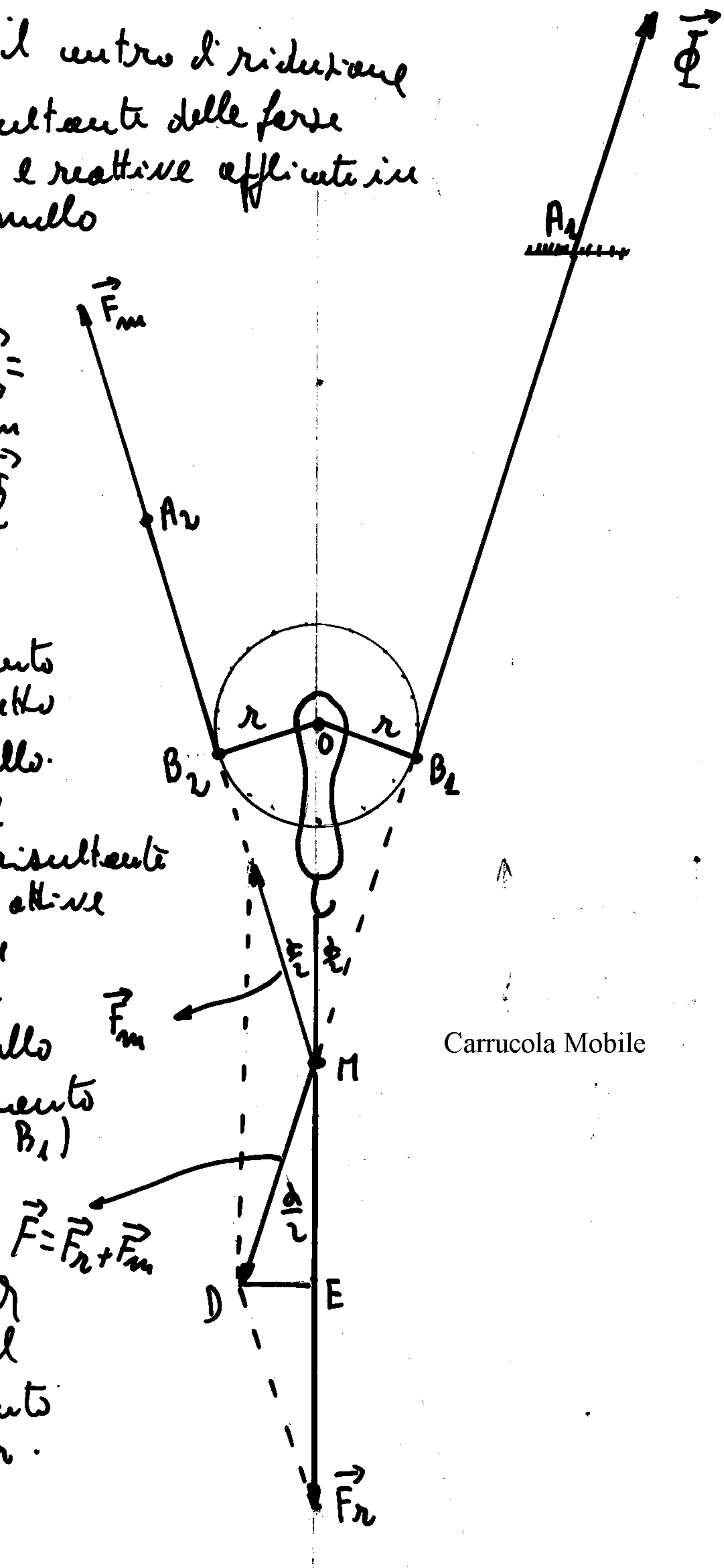
$$V = \frac{F_r}{F_m} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$$

1) B_1 è il centro di riduzione

2) Il risultante delle forze attive e reattive applicate in B_1 è nullo

3) $\begin{cases} D - M = \vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_m \\ \vec{F} = -\vec{\Phi} \end{cases}$

4) Il momento di $\vec{\Phi}$ rispetto a B_1 è nullo. Quindi il momento risultante delle forze attive e reattive rispetto a B_1 è nullo se il momento (rispetto a B_1) di $\vec{F}_m$ è uguale ed opposto al momento di $\vec{F}_r$.



Carrucola Mobile

In particolare per $\alpha = 0$ [$A_1B_1 // A_2B_2$] è:

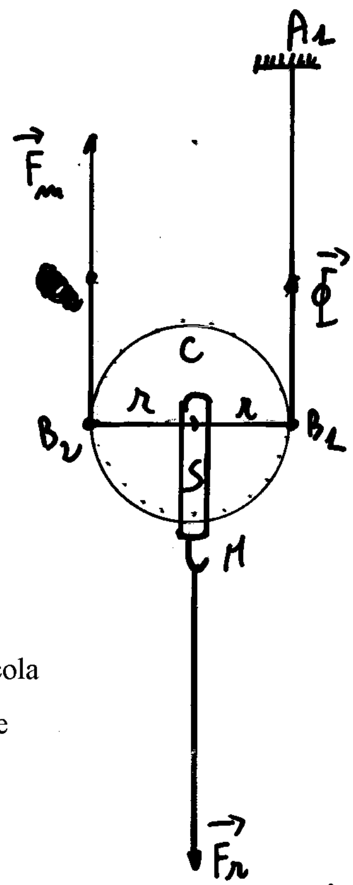
$F_r = 2F_m$ cioè $V = 2$ (Vantaggio massimo)

Un corpo pesante K_1 è equilibrato da un corpo pesante la metà.

Possiamo assumere B_1 come centro di riduzione (cioè come punto fisso) ed immaginare applicate in B_1 le forze $\vec{F}_m$, $\vec{F}_r$, $\vec{\Phi}$. Il risultante di queste tre forze è nullo.

Il momento risultante rispetto a B_1 è:

$$(M - B_1) \wedge \vec{F}_r + (M - B_2) \wedge \vec{F}_m + (A_1 - B_1) \wedge \vec{\Phi} = \vec{0} \quad \vec{0}$$



Carrucola Mobile

$$(M - B_1) \wedge \vec{F}_r = (B_2 - M) \wedge \vec{F}_m$$

Uguagliando i loro moduli abbiamo:

$$F_r \cdot \overline{B_1M} \sin\frac{\alpha}{2} = F_m \cdot \overline{B_1M} \sin\alpha =$$

$$= 2 F_m \cdot \overline{B_1M} \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$F_r = 2 F_m \cos\frac{\alpha}{2}$$

Diversamente possiamo dire che la condizione di equilibrio della carrucola mobile si ha quando il momento risultante delle forze attive (F_r ed F_m) rispetto al punto fisso B_1 è nullo.

Nel caso della fig. 1 abbiamo:

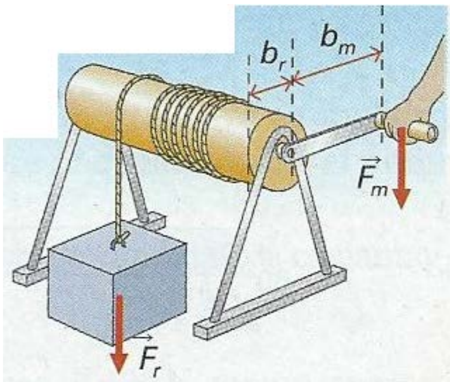
$\vec{\Phi} = \vec{F}_m + \vec{F}_r \qquad \Phi = F_r - F_m$

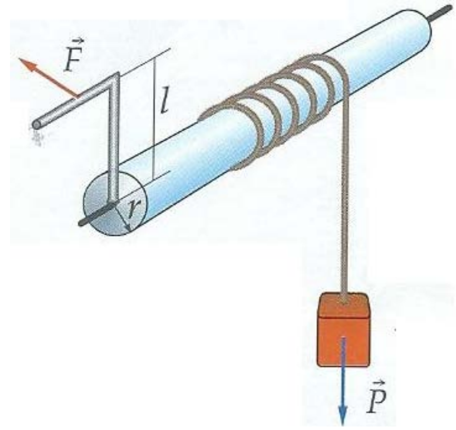
$$|(M - B_1) \wedge \vec{F}_r| = |(B_2 - M) \wedge \vec{F}_m|$$

$$r \cdot F_r = 2r \cdot F_m$$

$$F_m = \frac{F_r}{2}$$

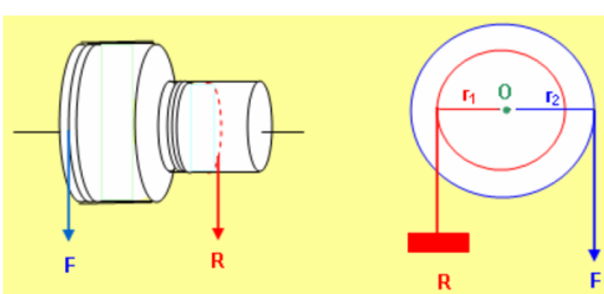
Verricello

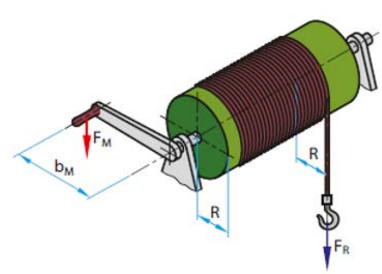




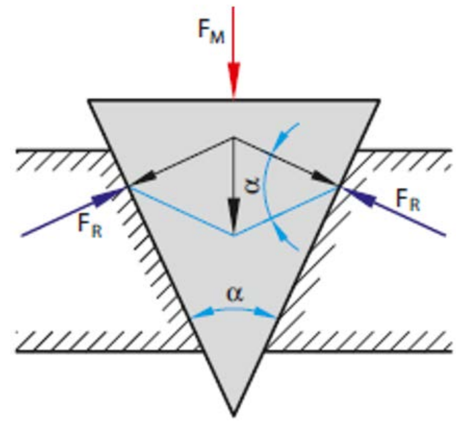
Nel verricello la forza resistente è il peso da sollevare, la forza motrice è applicata alla manovella. La forza resistente è applicata ad un estremo della fune (il suo braccio è $\mathbf{b_r}$), la forza motrice e viene applicata ad una manovella lunga $\mathbf{b_m}$ che fa girare il cilindro. Girando la manovella, la fune si arrotola sul cilindro e solleva un peso lungo la verticale. Poiché il braccio della forza motrice è maggiore di quello della forza resistente, la macchina è sempre vantaggiosa. Il verricello permette di sollevare corpi pesanti applicando piccole forze.

Si ha l'equilibrio quando sono uguali i momenti della forza resistente e della forza motrice. Questo si verifica se: $\mathbf{F_m \cdot b_m = F_r \cdot b_r}$





Cuneo

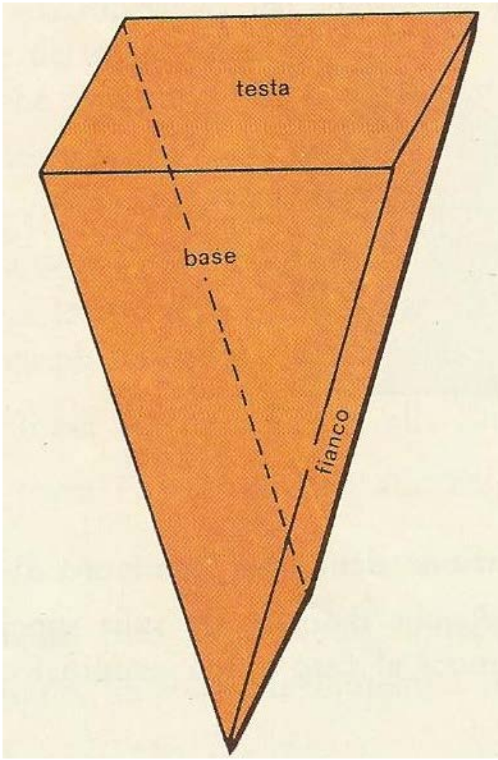


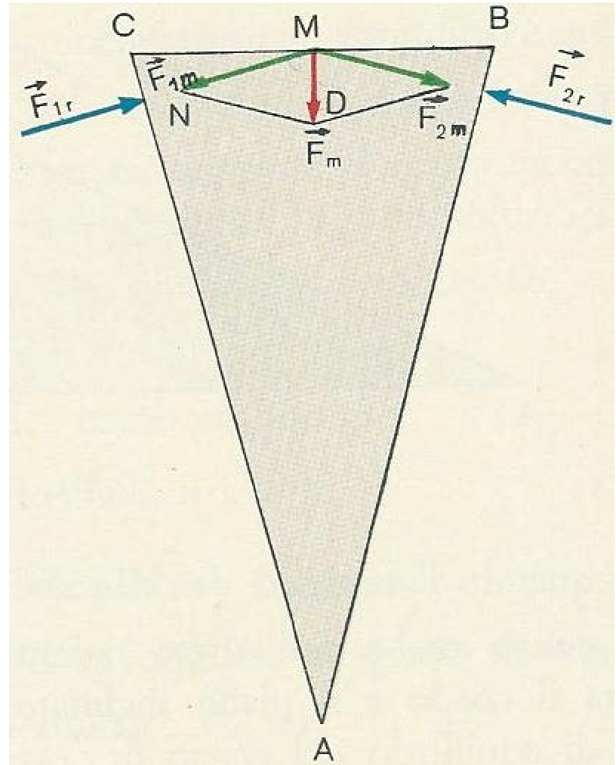
Il cuneo è un corpo rigido avente la forma di un prisma a sezione triangolare sul quale la forza motrice agisce perpendicolarmente alla testa. Si dimostra che $\mathbf{F_M = 2F_R \sin\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V = \frac{F_R}{F_M} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}}$

Da ciò si deduce che più è piccolo l'angolo α più grande sarà il vantaggio del cuneo.

Esempi di cuneo sono i coltelli, la scure, i rasoi ed altro. La teoria del cuneo può riportarsi a quella del piano inclinato. Nel caso particolare che la base abbia la forma di un triangolo rettangolo, esso si può considerare un piano inclinato. Sia **ABC** la sezione del cuneo parallela alla base e contenente il baricentro del cuneo stesso. Indichiamo con $\vec{F}_m$ il vettore che rappresenta la forza motrice applicata in direzione perpendicolare alla testa **BC** del cuneo nel suo punto medio **M**. Scomponiamo $\vec{F}_m$ in due componenti $\vec{F}_{1m}$ ed $\vec{F}_{2m}$ aventi direzioni, rispettivamente, perpendicolari ai fianchi **AB** e **AC** del cuneo. Per l'equilibrio del cuneo dobbiamo applicare le forze $\vec{F}_{1r}$ ed $\vec{F}_{2r}$ rispettivamente opposte a $\vec{F}_{1m}$ ed $\vec{F}_{2m}$. $\quad M\hat{N}D[s]A\hat{B}C \quad \Rightarrow \quad F_m : F_{1m} = BC : AC \quad \Rightarrow$

$\mathbf{F_m : F_{1m} = b : \ell}$ avendo posto: $BC = b \quad AC = \ell \quad \vec{F}_{1m} = \vec{F}_{1r}$ dalla quale si deduce che il cuneo è una macchina vantaggiosa quando la lunghezza $BC = b$ della testa è minore della lunghezza $AC = \ell$ del fianco.


testa
base
fianco


C
M
B
$\vec{F}_{1r}$
$\vec{F}_{1m}$
N
D
$\vec{F}_{2m}$
$\vec{F}_{2r}$
$\vec{F}_m$
A