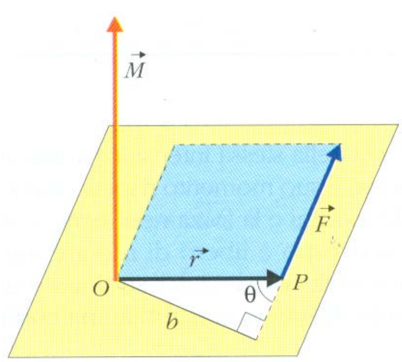
Unità Didattica N° 10: I momenti delle forze

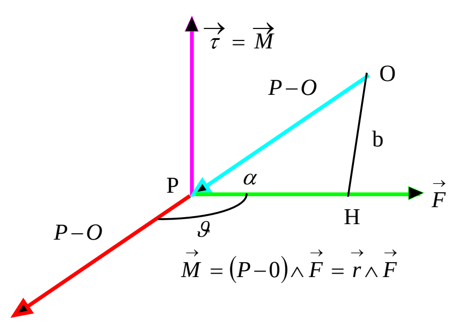
Momento di una forza rispetto ad un punto

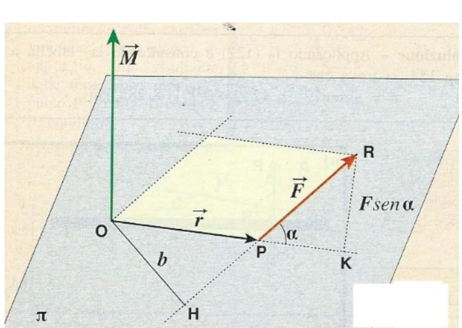
Data una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P [Simbolo usato $\left(P,\vec{F}\right)$] ed un punto **O** non appartenente al sostegno di $\vec{F}$ definiamo momento della forza $\vec{F}$ rispetto al punto **O** il vettore libero $\vec{\mathbf{M}}$ ($\vec{\tau}$) completamente individuato dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{\mathbf{M}} = (\mathbf{P}-\mathbf{O})\wedge\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}}\wedge\vec{\mathbf{F}}$ con $\vec{\mathbf{r}} = (\mathbf{P}-\mathbf{O})$ Chiamiamo braccio della forza $\vec{F}$ rispetto al punto **O** il segmento di perpendicolare $OH = b$ condotto dal punto **O** al sostegno della forza $\vec{F}$. Risulta:

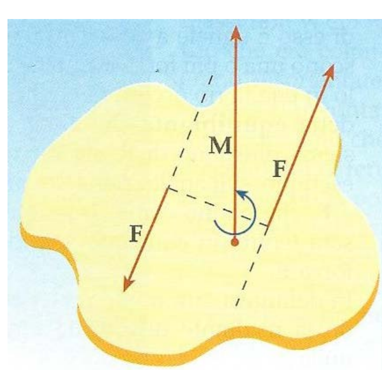
$$OH = OP\cdot\sin\alpha = OP\cdot\sin(\pi-\vartheta) = OP\cdot\sin\vartheta = b \qquad \mathbf{M} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{OP}\cdot\sin\vartheta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}$$

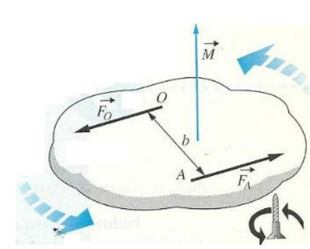
$\vec{M}$ è nullo quando: 1) è nulla la forza $\vec{F}$ 2) quando il ponto O appartiene al sostegno di $\vec{F}$ .Il momento della forza $\vec{F}$ rispetto al punto **O** non dipende dal punto di applicazione P della forza $\vec{F}$. Questo significa che il momento di una forza rispetto ad un punto **O** non varia se spostiamo il punto di applicazione della forza lungo il suo sostegno.











Momento risultante di un sistema di forze

Definiamo **momento risultante** di un sistema di forze $\left(P_1,\vec{F}_1\right)$, $\left(P_2,\vec{F}_2\right)$, $\left(P_3,\vec{F}_3\right)\cdots$ rispetto allo stesso **polo O** la somma vettoriale dei momenti di ciascuna forza rispetto allo stesso punto $\mathbf{O}$, cioè il vettore $\vec{M}$ così definito:

$$\vec{\mathbf{M}}=\vec{\mathbf{M}}_1+\vec{\mathbf{M}}_2+\vec{\mathbf{M}}_2+\cdots=\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{0}\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_1+\left(\mathbf{P}_2-\mathbf{0}\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_2+\left(\mathbf{P}_3-\mathbf{0}\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_3+\cdots$$

$\vec{\mathbf{M}}$ varia al variare del punto $\mathbf{O}$ ed è un **vettore libero**, cioè un vettore che ha indeterminati il sostegno ed il punto di applicazione. Il punto $\mathbf{O}$ è detto **polo** o **centro di riduzione** dei momenti.

La somma vettoriale delle forze $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\cdots,\vec{F}_n$ rappresenta il **risultante** e viene indicato col simbolo $\vec{\mathbf{R}}$ $\quad \vec{\mathbf{R}}=\vec{\mathbf{F}}_1+\vec{\mathbf{F}}_2+\vec{\mathbf{F}}_3+\cdots+\vec{\mathbf{F}}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{\mathbf{F}}_i$

Cioè il **risultante** $\vec{\mathbf{R}}$ di un sistema di $\mathbf{n}$ forze è la somma vettoriale delle $\mathbf{n}$ forze.

Osservazione

- Un **risultante** è collegato ad una **traslazione**, un **momento risultante** è collegato ad una **rotazione**.

Teorema N° 1: Se le forze $\vec{F}_i$ sono tutte applicate in uno stesso punto $\mathbf{O}$ vale il **teorema di Varignon**: **il momento risultante** $\vec{\mathbf{M}}$ delle n forze date rispetto ad un qualsiasi polo $\mathbf{O}$ è uguale al momento rispetto al punto $\mathbf{O}$ del risultante $\vec{R}$ applicato in P. **Teorema N° 2**: **il momento risultante** $\vec{\mathbf{M}}$ di un sistema di $\mathbf{n}$ forze a risultante nullo si mantiene costante al variare del polo $\mathbf{O}$.

Dimostreremo questa proprietà nel caso semplice di un sistema costituito da due forze parallele aventi la stessa intensità e versi opposti. (**coppia di forze**)

Momento di una coppia di forze

Definiamo **coppia di forze** un sistema costituito da due forze complanari $\left(P_1;\vec{F}_1\right)$ e $\left(P_2;\vec{F}_2\right)$ aventi la stessa direzione, lo stesso modulo, versi opposti e sostegni diversi.

Il piano α individuato dalle due forze è detto piano della coppia, mentre la distanza b dei rispettivi sostegni è detta braccio della coppia. Una coppia di forze applicata ad un corpo rigido libero di muoversi gli imprime una rotazione.

Il momento $\vec{M}$ della coppia di forze è uguale alla somma vettoriale dei momenti delle due forze rispetto ad un punto qualsiasi O del piano individuato dalla coppia, cioè :

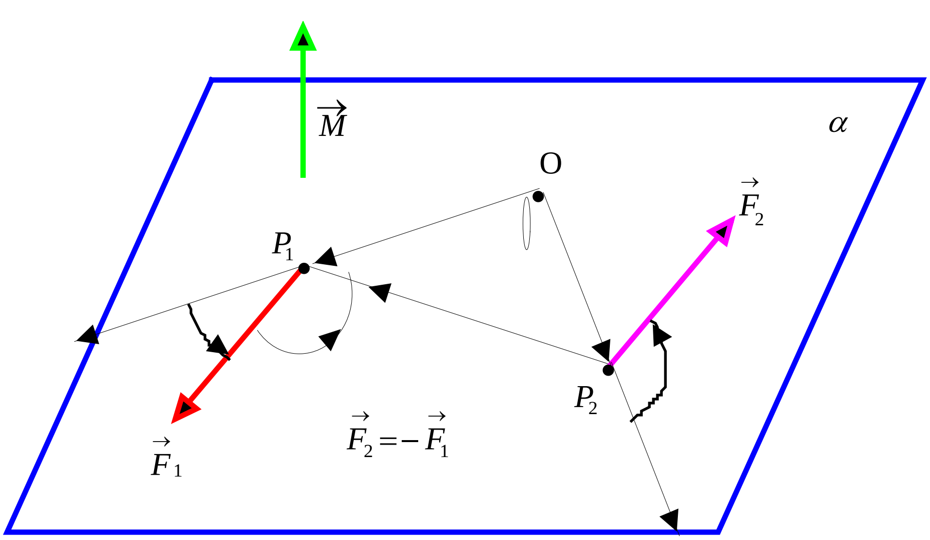
$$\vec{\mathbf{M}}=\vec{\mathbf{M}}_1+\vec{\mathbf{M}}_2=\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{0}\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_1+\left(\mathbf{P}_2-\mathbf{0}\right)\wedge\left(-\vec{\mathbf{F}}_1\right)=\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{0}-\mathbf{P}_2+\mathbf{0}\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_1=\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)\wedge\vec{\mathbf{F}}_1$$

Questa relazione ci dice che il momento della coppia di forze è uguale al momento della forza $\vec{F}_1$ rispetto al punto P_2. Si dimostra che:

$$\left(P_2-P_1\right)\wedge\vec{F}_2=\textbf{momento di } \vec{F}_2 \textbf{ rispetto a } P_1 =$$

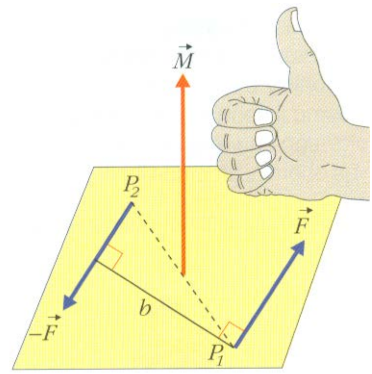
$$\left(P_2-P_1\right)\wedge\left(-\vec{F}_1\right)=\left(P_1-P_2\right)\wedge\vec{F}_1=\vec{M}$$

Possiamo concludere affermando che il momento di una coppia di forze è uguale al momento di una di esse rispetto al punto di applicazione dell'altra.



Questo è uno dei casi in cui il **momento risultante** non dipende dal polo perché $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{o}$ Il momento $\vec{M}$ di una coppia di forze è un vettore libero, cioè un vettore avente indeterminati il sostegno ed il punto di applicazione .

Il momento $\vec{M}$ di una coppia di forze $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, di braccio b, è il vettore $\vec{M}$ di modulo $M = F \cdot b$, perpendicolare al piano della coppia, orientato come il pollice della mano destra quando le altre dita si avvolgono nel verso della rotazione prodotta dalla coppia.



Momento di una forza rispetto ad un asse

Sia $\left(P,\vec{F}\right)$ una forza $\vec{F}$ applicata in un punto P ed $\vec{r}$ una retta orientata di versore $\vec{e}$.

Definiamo momento della forza $\vec{F}$ rispetto alla retta orientata $\vec{r}$ la componente secondo $\vec{r}$ del momento $\vec{M}$ della forza $\vec{F}$ rispetto ad un qualsiasi punto O di $\vec{r}$.

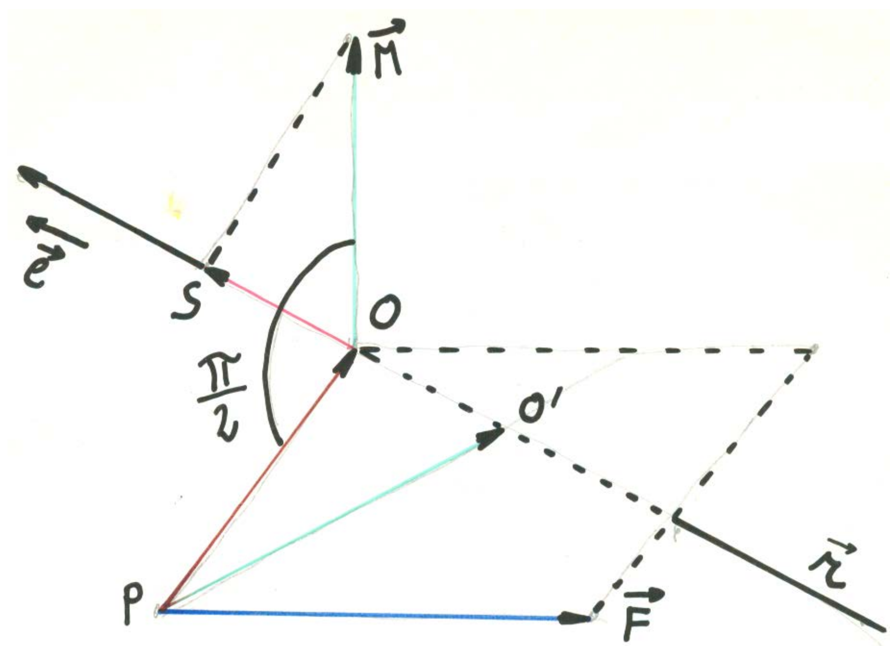
In formule abbiamo: $\mathbf{M_r} = \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{e}} = (\mathbf{S} - \mathbf{O}) \times \vec{\mathbf{e}} = \left[(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \vec{\mathbf{F}}\right] \times \vec{\mathbf{e}}$

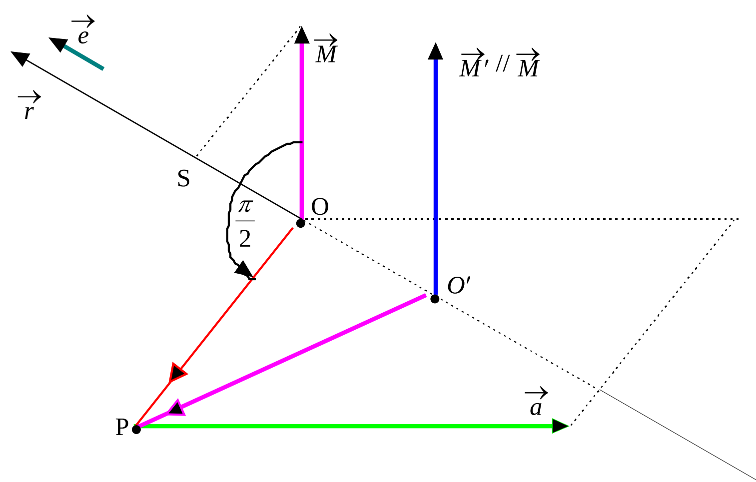
M_r non varia al variare di O su $\vec{r}$. Infatti, se O' è un altro punto di $\vec{r}$, abbiamo:

$$M_r(O') = \left[(P-O') \wedge \vec{F}\right] \times \vec{e} = \left\{\left[(P-O) + (O-O')\right] \wedge \vec{F}\right\} \times \vec{e} = \left[(P-O) \wedge \vec{F}\right] \times \vec{e} + \left[(O-O') \wedge \vec{F}\right] \times \vec{e}$$

$$M_r(O') = = M_r(O) + 0 = M_r(O)$$

In quanto risulta : $(O-O') \wedge \vec{F} \perp \vec{e}$.





Se $\left(P,\vec{F}\right)$ ed $\vec{r}$ sono complanari (in questo caso il sostegno di $\vec{F}$ o incontra la retta $\vec{r}$ o è ad essa

parallela) allora M_r è nullo e viceversa. Infatti in questo caso risulterebbe:

$$(P-O)\wedge\vec{F}\perp\vec{e} \ .$$

Sistemi equivalenti di forze

Dal punto di vista della meccanica due sistemi di forze si dicono **equivalenti** se, applicati ad uno stesso corpo rigido , producono gli stessi effetti statici e dinamici.

Dal punto di vista vettoriale due sistemi di forze si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso **risultante** (che è la somma vettoriale di tutte le forze del sistema considerato) ed **uguale momento risultante** rispetto ad un qualsiasi (ma comune) polo O. Se spostiamo il polo dal punto O al punto O_1 i due sistemi continuano ad avere momenti risultanti uguali fra loro , ma essi sono uguali da quelli ricavati precedentemente. Si dimostra che se due sistemi di forza hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un particolare (ad esempio O), allora essi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualsiasi altro polo.

- Si dimostra che un qualsiasi sistema di forze è equivalente ad una sola forza $\vec{R}$ (risultante) somma vettoriale di tutte le forze del sistema applicato in un punto O scelto arbitrariamente e da una **coppia di forze** di momento $\vec{M}$ uguale al momento risultante di tutte le forze del sistema rispetto al punto O .

Teorema: **Un qualsiasi sistema di n forze è equivalente al proprio risultante $\vec{R}$ applicato in un punto O arbitrariamente scelto, più una qualsiasi delle infinite coppie di forze aventi momento uguale al momento risultante (rispetto al polo O) del sistema di forze considerato**.

Lezione N° 11: Statica del corpo rigido

Corpi rigidi e loro movimenti

Definizione di corpo rigido

● In meccanica definiamo corpo rigido un sistema di N punti materiali le cui reciproche distanze restano invariate nel tempo e nello spazio qualunque sia il moto del corpo e qualunque sia il sistema di forze ad esso applicato. Nella meccanica classica per punti materiali non intendiamo atomi o molecole, ma le microscopiche particelle che si potrebbero teoricamente ottenere suddividendo il corpo considerato. Come spesso accade in fisica si tratta di un modello ideale, quello di corpo indeformabile, al quale si avvicinano i corpi solidi ordinari. [2]

Lo studio del moto di un corpo rigido verrà normalmente fatto in un sistema di riferimento inerziale.

● Il moto di un corpo rigido è più complesso di quello di un punto materiale. Il numero ℓ di parametri necessari per descrivere il moto di un sistema di punti materiali si chiama numero di gradi di libertà di un sistema.

Mentre la posizione di un punto nello spazio è determinata quando si danno le tre coordinate rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano, per individuare la posizione di un corpo rigido è necessario conoscere tre coordinate (x_P, y_P, z_P), che individuano la posizione di un punto P del corpo, e tre angoli α, β, γ, che individuano l'orientazione del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento. Questo significa che il movimento di un corpo esteso rigido è di due tipi: moto di traslazione, che descrive il cambio di posizione di un punto del corpo [2 A] e moto di rotazione che descrive il cambio di orientazione del corpo.

---

[2] Si tratta di un modello teorico di **corpo rigido** che è assolutamente incapace di deformazioni sotto l'azione di forze esterne. Nella meccanica classica il corpo rigido è immaginato come un insieme continuo di punti materiali. Si comprende che il moto di un corpo rigido, pur risultando più complesso di quello del punto materiale, non può essere molto complicato perché i molteplici punti materiali che lo compongono debbono muoversi conservando le loro reciproche distanze e soddisfare alla **condizione di indeformabilità**.

[2 A] ad esempio il **centro di massa**

Possiamo concludere affermando che il moto più generale di un corpo rigido è sempre esprimibile come combinazione di un puro moto di traslazione e un puro moto di rotazione.

- La descrizione dei moti di rotazione, detta cinematica rotazionale, comprende la definizione delle variabili fisiche legate al moto rotatorio e la determinazione delle leggi orarie del moto.

La dinamica rotazionale studia le cause che determinano il moto rotatorio.

- Moto traslatorio

Tutti i punti del corpo rigido, durante il movimento, subiscono spostamenti equipollenti. Tutti i punti materiali del corpo rigido descrivono traiettorie uguali e parallele. Affinché il moto di un corpo rigido risulti traslatorio è necessario che le velocità dei suoi punti abbiano, in ogni momento del moto, la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo. Ogni retta tracciata idealmente attraverso il corpo rigido si muove spostandosi parallelamente a se stessa. Si dice brevemente che il corpo rigido si muove restando parallelo a se stesso.

- Moto rotatorio

Il moto di un corpo rigido si dice rotatorio se tutti i suoi punti descrivono delle traiettorie circolari attorno ad una stessa retta fissa detta asse di rotazione. Tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità angolare ω, mentre le velocità lineari dipendono dalla distanza dall'asse di rotazione. Tutti i punti del corpo rigido descrivono delle traiettorie circolari aventi i centri su una retta (asse di rotazione) e giacenti su piani normali ad essa. Se $\vec{r}$ è la distanza orientata di un punto P del corpo rigido dall'asse di rotazione, la velocità lineare $\vec{v}$ del punto P è normale ad $\vec{r}$ ed all'asse di rotazione ed è legata alla velocità angolare $\vec{\omega}$ del punto P dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{r}}$

• Moto rototraslatorio

Il corpo rigido si muove simultaneamente di moto rotatorio e di moto traslatorio

• Moto elicoidale

E' il moto risultante dalla composizione di un moto rotatorio attorno ad un asse z e di un moto traslatorio lungo l'asse di rotazione

• Moto generale

Il moto più generale di un corpo rigido è un problema studiato in meccanica razionale. Si dimostra che ogni spostamento infinitesimo di un corpo rigido si può sempre decomporre in una rotazione ed in una traslazione infinitesime simultanee. In generale l'asse di rotazione varia istante per istante e per questo motivo è detto asse istantaneo di rotazione.

• Abbiamo detto che un corpo rigido è formato da N punti materiali. Tali punti possono essere un insieme discreto oppure essere distribuiti con continuità. Si tratta, in ogni caso, di un corpo esteso**.** Il suo moto è determinato dalle forze esterne che, in generale, sono più di una e sono applicate in punti diversi del corpo. Si tratta di sistemi di forze caratterizzate da un risultante $\vec{R}^{(e)}$ e da un momento risultante $\vec{M}^{(e)}$, grandezze indipendenti tra loro. Ricordiamo che il lavoro delle forze interne è nullo in un sistema rigido, dove i punti mantengono invariate le distanze mutue. Pertanto la variazione dell'energia cinetica di un corpo rigido è uguale al lavoro delle sole forze esterne.

Moto di un corpo rigido

Per arrivare a stabilire quale sia il moto più generale di un corpo rigido cominciamo coll'esaminare due tipi di moto, molto semplici da descrivere, che possono essere compiuti da un corpo rigido. Il primo tipo è il moto traslazione: tutti i punti descrivono traiettorie uguali e parallele, in generale curvilinee, percorse con la stessa velocità $\vec{v}$, che può variare nel tempo in direzione modulo e verso. $\vec{v}$ coincide con $\vec{v}_{CM}$, velocità del centro di massa. Pertanto, nel moto di traslazione, che può essere uniforme o vario, se è noto il moto del centro di massa è noto anche quello di un qualsiasi altro punto. Le grandezze significative in una traslazione sono:

quantità di moto	$\vec{q} = m \cdot \vec{v}_{CM}$	Energia cinetica	$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$
Equazione del moto del centro di massa		$\vec{R} = m \cdot \vec{a}_{CM}$	

Il secondo tipo di moto è la rotazione: tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che giacciono su piani tra loro paralleli ed hanno il centro su uno stesso asse, l'asse di rotazione. La rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano in un dato istante la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$, che è parallela all'asse di rotazione. Le velocità lineari $\vec{v}_i$ dei singoli punti materiali sono diverse a seconda della distanza r_i dall'asse di rotazione ($v_i = \omega \cdot r_i$). Se l'asse di rotazione è fisso nel tempo, $\vec{\omega}$ può cambiare solo in modulo e verso ed abbiamo un moto circolare vario, in particolare uniforme se ω è costante. Nel caso più generale $\vec{\omega}$ può cambiare anche in direzione (asse di rotazione variabile)

● I due moti considerati. traslazione e rotazione, sono gli unici da studiare in dettaglio, in quanto si dimostra che il **moto rigido più generale è una rototraslazione: ogni spostamento infinitesimo del corpo rigido può essere considerato sempre come la somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime, individuate da $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$ variabili nel tempo.**

La rototraslazione che descrive il moto del corpo rigido ad un certo istante è caratterizzata dai vettori $\vec{v}$ **e** $\vec{\omega}$, ma mentre $\vec{\omega}$ è unico il vettore $\vec{v}$ dipende dall'asse di rotazione considerato.

In una generica rototraslazione i parametri $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$ sono indipendenti tra loro. Solo in particolari situazioni, tipicamente in presenza di qualche vincolo, la velocità di traslazione e la velocità di rotazione sono legate da una relazione analitica.

● La schematizzazione di un corpo rigido come un sistema di punti materiali necessita di un approfondimento. Un corpo esteso reale appare avere una struttura continua rispetto a qualsiasi suddivisione macroscopica; d'altra parte sappiamo che è costituito da atomi e molecole. Il singolo punto materiale va pensato come un piccolo volume dV contenente una massa dm. dV è piccolo nella scala macroscopica (potrebbe essere un cubetto elementare avente lato $\ell = 10^{-6}\,m$), ma molto grande nella scala atomica (dove le dimensioni lineari sono dell'ordine di $10^{-9} \div 10^{-10}\,m$), così da contenere un grandissimo numero di atomi: ad esempio in un $1\,\mu m^3$ di alluminio ci sono circa 10^{10} atomi.

Riepilogo

● Riassumiamo gli argomenti più importanti della dinamica di un corpo rigido. Il **moto più generale** di un corpo rigido è **rototraslatorio**. Nella **traslazione** tutti i punti hanno lo stesso moto pari a quello del centro di massa, e pertanto possiamo utilizzare le relazioni fisiche introdotte nello studio del moto di un punto materiale. L'**energia cinetica** è $\mathbf{K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2}$, mentre il **momento angolare** è dato da $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}}_{CM} \wedge m \vec{\mathbf{v}}_{CM}$.

● Nella **rotazione** tutti i punti ruotano con la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno all'asse di rotazione, parallelo a $\vec{\omega}$. Il **momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione** è dato da $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$ (oppure utilizzando l'espressione per un corpo continuo $\mathcal{J} = \int r^2\, dm$), il **momento angolare** rispetto all'asse di rotazione o **momento assiale** è $L_z = \mathcal{J}\omega$ e l' **energia cinetica** è $K = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2$.

● Se l'asse di rotazione è fisso in un sistema di riferimento inerziale e si identifica con un asse principale d'inerzia, allora risulta $\mathbf{L} = \mathcal{J}\boldsymbol{\omega}$ e l'equazione del moto di rotazione è: $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \mathcal{J}\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \mathcal{J}\vec{\boldsymbol{\alpha}}$

Se invece l'asse di rotazione non è un asse principale di inerzia, nell'equazione del moto compaiono i momenti assiali: $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\boldsymbol{\tau}}_z = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_z}{dt} = \mathcal{J}_z\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \mathcal{J}_z\vec{\boldsymbol{\alpha}}$

Il problema si complica se l'asse di rotazione è variabile nel tempo.

● Un caso interessante di moto di rototraslazione è il moto di puro rotolamento. Richiamiamo adesso alcune regole di opportunità nella scelta del polo per $\vec{\mathbf{L}}$ e per $\vec{\mathbf{M}}$, utili soprattutto nella risoluzione di problemi. Se il moto di rotazione avviene rispetto ad un asse fisso il polo viene scelto di norma tra i punti dell'asse. Se un punto P del corpo è mantenuto fisso conviene sceglierlo come **polo**, in modo tale da annullare il momento delle forze che sono applicate in P (**forze vincolari** in genere).

I postulati fondamentali della statica del corpo rigido

In precedenza abbiamo detto che per corpo rigido intendiamo un qualsiasi sistema di punti materiali le cui mutue distanze rimangono invariate sotto l'azione di qualsiasi forza esterna e per qualsiasi spostamento d'insieme del corpo.[2]

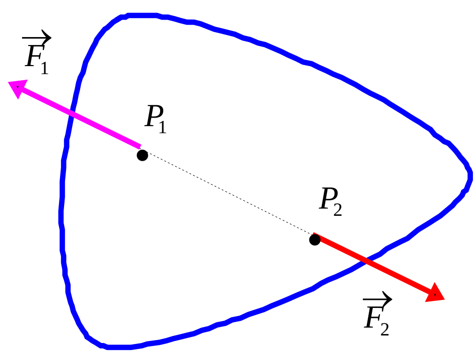
Immediata conseguenza della indeformabilità dei corpi rigidi è la introduzione del seguente postulato: possiamo aggiungere o sopprimere due

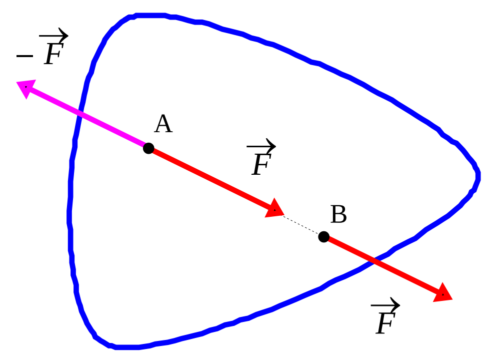
[2] In realtà tutti i corpi solidi soggetti ad azioni meccaniche abbastanza rilevanti subiscono deformazioni ma non subiscono variazioni di forma. Lo studio delle deformazioni e delle forze interne che si generano in un copro solido ordinario sottoposto all'azione di forze esterne è l'oggetto della **teoria matematica dell'elasticità**. Nella statica pura si prescinde dal comportamento elastico della materia ; si idealizza la realtà e si sviluppa una teoria limite che si applica indistintamente a tutti i solidi, fino a quando è possibile trascurare gli effetti dovuti alla deformazione.

qualsiasi forze uguali e contrarie, aventi lo stesso sostegno, anche se applicati in punti diversi.

Questa **operazione vettoriale** altera l'eventuale preesistente sistema di forze applicate al corpo, ma se questi è perfettamente rigido gli effetti statici o dinamici non mutano se effettuiamo la suddetta operazione. Questo significa che, **senza alterare lo stato di quiete o di moto di un corpo rigido, è possibile applicare a due suoi punti A e B, arbitrariamente scelti, due forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ direttamente opposte, oppure sopprimere due tali forze se agiscono già sul corpo rigido**.

In base al sopra citato postulato, **in un corpo rigido possiamo spostare una forza $\vec{F}$ lungo la sua retta d'azione senza alterare lo stato di quiete o di moto del corpo rigido**.





Infatti se B è un punto del sostegno di $\vec{F}$ distinto da A , per il postulato precedente posso immaginare di applicare in B le forze direttamente opposte $(B,-\vec{F})$ e $(B,\vec{F})$, ottenendo un sistema equivalente di forze:

$(A,\vec{F})$, $(B,-\vec{F})$, $(B,\vec{F})$ dal quale, sempre per il predetto postulato, posso sopprimere le forze direttamente opposte $(B,-\vec{F})$ ed $(A,\vec{F})$. Rimane l'unica forza $(B,\vec{F})$ che è equivalente alla forza $(A,\vec{F})$.

L'esperienza mostra che in un qualsiasi corpo (sia esso rigido o puntiforme) senza alterarne lo stato di quiete o di moto è possibile sostituire a due o più forze applicate in uno stesso punto il loro risultante $\vec{R}$ nello stesso punto. Queste **operazioni vettoriali** si rivelano fondamentali per la riduzione di un sistema di **n** forze applicate ad un corpo rigido. Ridurre un sistema di **n** forze applicate ad un corpo rigido significa sostituire questo sistema di forze con un altro che, applicato al corpo, è capace di produrre gli stessi effetti statici e dinamici.

Riferendoci ai soli corpi rigidi, possiamo affermare che, senza alterarne lo stato di quiete o di moto, si possono eseguire le seguenti quattro operazioni elementari:

1) Sostituzione di più forze applicate in uno stesso punto con il loro risultante applicato nello stesso punto

2) Decomposizione di una forza applicata in un punto in più forze applicate nello stesso punto aventi la forza precedente come risultante.

3) Aggiunta di una coppia di forze avente braccio nullo, cioè aggiunta di due forze direttamente opposte

4) Soppressione di una coppia di braccio nullo, cioè soppressione di due forze direttamente opposte.

- Un qualsiasi sistema di forze applicate ad un corpo rigido è equivalente al proprio risultante applicato in un punto O arbitrariamente scelto, e ad una coppia avente momento uguale al momento risultante del sistema di forze rispetto al punto O.
- Due sistemi di forza si dicono equivalenti quando hanno lo stesso risultante $\vec{R}$ e uguale momento risultante $\vec{M}$ rispetto ad un qualsiasi punto.

Un corpo rigido è in equilibrio statico in una certa posizione sotto l'azione di un sistema di n forze quando esso è, in quella posizione, in equilibrio e in quiete.

Quando un sistema di n forze agisce su un corpo rigido è necessario distinguere due effetti: uno di traslazione e l'altro di rotazione. La traslazione del corpo è determinata dalla somma vettoriale delle forze, cioè dal risultante:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots\cdots + \vec{\mathbf{F}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i$$

In questo caso il punto di applicazione di $\vec{R}$ non è determinato. L'effetto della rotazione sul corpo è determinato dalla somma vettoriale dei momenti delle forze, valutati tutti rispetto al medesimo punto:

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_1 + \vec{\mathbf{M}}_2 + \cdots\cdots + \vec{\mathbf{M}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{M}}_i$$

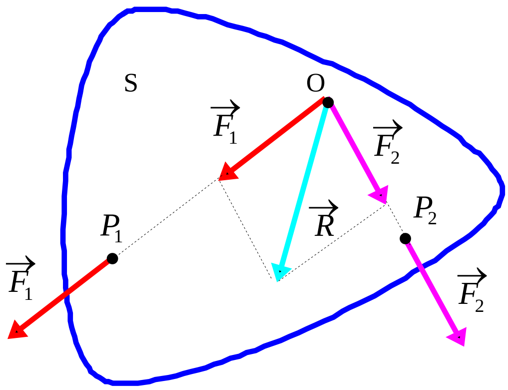
In generale un sistema di n forze agenti su un corpo rigido non può essere ricondotto ad una sola forza (**risultante**) $\vec{R}$ somma vettoriale di tutte le n forze.

Condizioni di equilibrio per un corpo rigido

Affinché un corpo rigido non trasli, il risultante $\vec{R}$, somma vettoriale di tutte le forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots\cdots, \vec{F}_n$ ad esso applicate deve essere nullo: $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots\cdots + \vec{\mathbf{F}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{o}}$ e affinché non ruoti deve essere nullo il momento risultante $\overrightarrow{M}$ dei momenti $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \cdots\cdots, \vec{M}_n$ delle singole forze, calcolate rispetto ad un punto qualsiasi dello spazio: $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_1 + \vec{\mathbf{M}}_2 + \cdots\cdots + \vec{\mathbf{M}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{M}}_i = \vec{\mathbf{o}}$

Un corpo rigido con un punto fisso non può traslare, può solo ruotare attorno ad un asse passante per il punto fisso.

La composizione di forze concorrenti



Due o più forze si dicono **concorrenti** quando i loro sostegni passano per uno stesso punto. Un sistema di due o più forze applicate ad un corpo rigido **S** e concorrenti in un punto O è equivalente al sistema delle stesse forze applicate al punto O, potendosi trasportare ciascuna forza lungo la propria retta d'azione .

Tutte queste forze applicate allo stesso punto O possono essere sostituite con il loro **risultante** $\vec{R}$ costruito con la regola del parallelogramma. Se il punto O non appartiene al corpo rigido, si fa scorrere il risultante $\vec{R}$ lungo la sua retta d'azione e si applica in un punto del corpo stesso.

La composizione di forze parallele ed equiverse

Siano $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ due forze parallele ed equiverse applicate ai punti P_1 e P_2 di un corpo rigido **S**. Si aggiungano due forze $\vec{S}_1$ ed $\vec{S}_2$ (la prima applicata in P_1 e la seconda in P_2) uguali, opposte ed aventi P_1P_2 per comune retta di azione. Le forze $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{S}_1$ ed $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{S}_2$ sono equivalenti alle quattro forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ e quindi alle due forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ essendo $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{o}$. Ma $\vec{R}_1$ ed $\vec{R}_2$ sono concorrenti in O e quindi si possono somma re con la regola del parallelogramma. $\vec{R}$ è il risultante di $\vec{R}_1$ ed $\vec{R}_2$ ed è, agli effetti dell'equilibrio, equivalente ad $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$. Da semplici considerazioni geometriche risulta che $\vec{R}$:

1) è parallelo e concorde alle forze componenti $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$

2) ha come modulo la somma dei moduli di $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ cioè $R = F_1 + F_2$

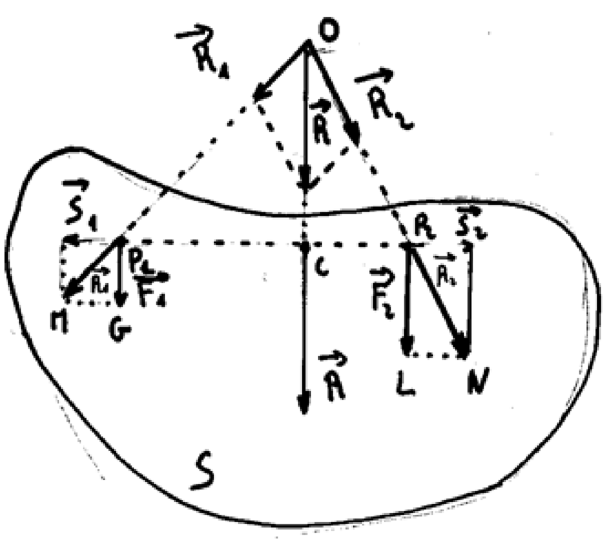
3) ha come sostegno una retta che taglia P_1P_2 in un punto **C** interno al segmento P_1P_2 tale che risulti $F_1 : F_2 = \overline{CP_2} : \overline{CP_1}$ cioè $F_2 \cdot \overline{CP_2} = F_1 \cdot \overline{CP_1}$ Infatti:

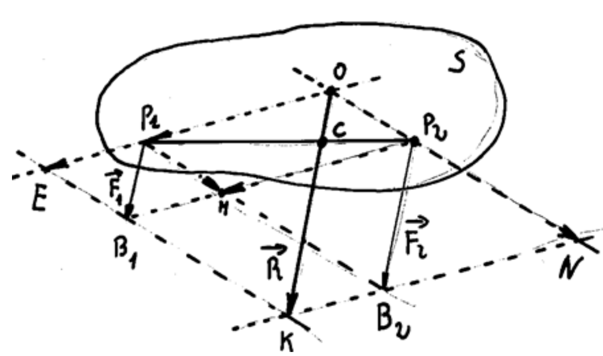
$\overset{\Delta}{MCP_1}\ [s]\ \overset{\Delta}{OCP_1} \quad \Rightarrow \quad F_1 : S_1 = \overline{OC} : \overline{P_1C}$ $\qquad \overset{\Delta}{LNP_2}\ [s]\ \overset{\Delta}{OCP_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 : S_2 = \overline{OC} : \overline{P_2C}$

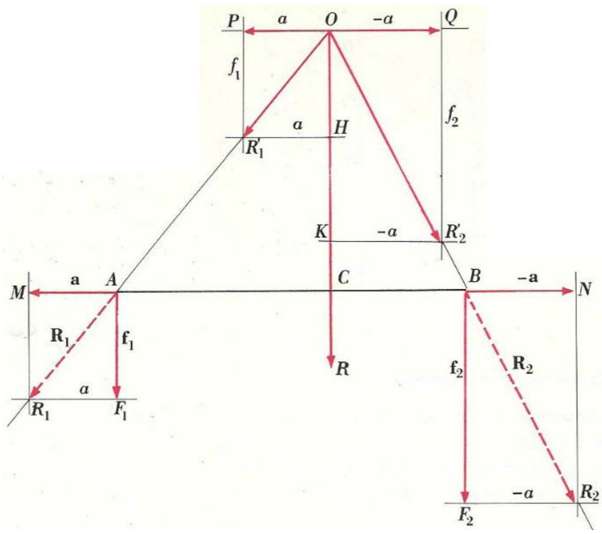
Dividendo membro a membro otteniamo: $\dfrac{F_2 : S_2}{F_1 : S_1} = \dfrac{\overline{OC} : \overline{CP_2}}{\overline{OC} : \overline{CP_1}}$ cioè $\mathbf{F_2 : F_1 = \overline{CP_2} : \overline{CP_1}}$

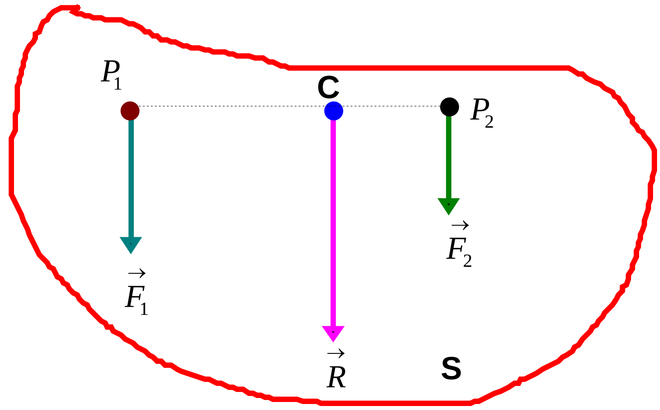
Il punto **C** di applicazione del risultante $\vec{R}$ è detto centro delle forze parallele nel senso che se le forze $\vec{F_1}$ ed $\vec{F_2}$ ruotano attorno ai loro punti di applicazione conservando il loro modulo e restando fra loro parallele e concordi , **C** resta immutato. **C** dipende solo dalla posizione P_1 e P_2 e dal rapporto dei moduli delle due forze ma non dipende dalla loro direzione. Una forza $\vec{E}$, uguale ed opposta ad $\vec{R}$, avente la stessa retta d'azione di $\vec{R}$, può fare equilibrio alle forze $\vec{F_1}$ ed $\vec{F_2}$.

Se le forze parallele sono più di due il loro risultante si può ottenere con successive applicazioni del metodo precedente.









La costruzione della figura precedente è quella classica. Elegante e più semplice è la seguente dovuta al fisico Cattaneo. Se $\overrightarrow{F_1} = B_1 - P_1$ ed $\overrightarrow{F_2} = B_2 - P_2$ rappresentano le forze parallele e concordi, si traccino i segmenti $\overline{P_1B_2}$ e $\overline{P_2B_1}$, indi si disegni il parallelogramma avente una coppia di lati opposti paralleli a P_1B_2 e passanti rispettivamente per P_2 e B_1 e l'altra coppia di lati opposti paralleli a P_2B_1 e passanti rispettivamente per P_1 e B_2 . Si ha subito il risultante $\vec{R}$ ed il punto **C**.

$$\overrightarrow{F_1} = (M - P_1) + (E - P_1) \quad , \quad \overrightarrow{F_2} = (N - P_2) + (M - P_2)$$

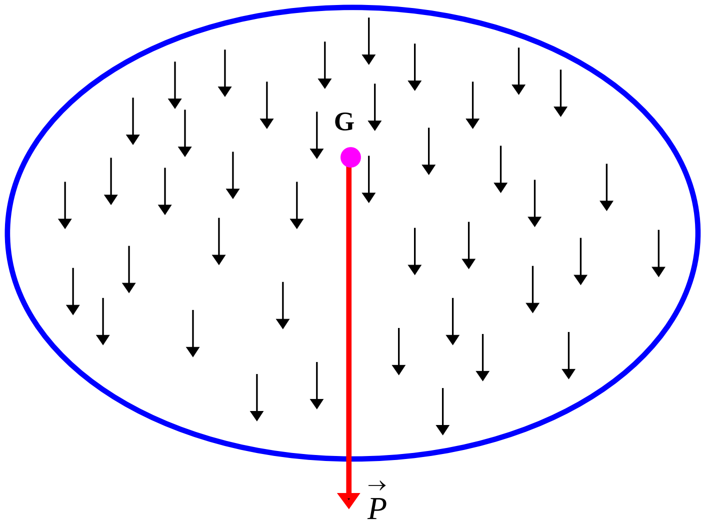
$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = (E - P_1) + (M - P_2)\ (M - P_1) + (N - P_2) =$$

$$= (E - P_1) + (P_1 - O) + (P_2 - O) + (N - P_2) = (E - O) + (N - O) = K - O = \vec{R}$$

Il baricentro di corpo rigido

Spesso si parla di peso di un corpo come di un'unica forza applicata in un punto del corpo detto **baricentro** o centro di gravità. In realtà per un corpo esteso non si tratta di una singola forza, bensì del risultante di un grandissimo numero di forze. Ciascuna particella del corpo è sollecitata da una forza gravitazionale. Se immaginiamo il corpo di massa **m** suddiviso in un gran numero, diciamo n, di particelle, la forza di gravità esercitata dalla terra sulla $i-esima$ particella vale $m_i \cdot \vec{g}$.

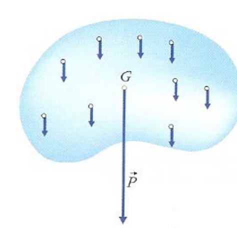
Questa forza è diretta verso il centro della terra. Se l'accelerazione $\vec{g}$ dovuta alla gravità è la stessa in ogni punto di un certo volume, noi diciamo che ivi esiste un campo gravitazionale uniforme. Questo equivale a dire che in quel volume $\vec{g}$ è un vettore costante. Per un corpo rigido in un campo gravitazionale uniforme, l'accelerazione vettoriale $\vec{g}$ deve essere la stessa per ciascuna particella e le forze peso agenti su queste particelle devono essere parallele e concordi. Se facciamo l'ipotesi che il campo gravitazionale terrestre sia uniforme, possiamo dimostrare che tutte le forze peso che agiscono sulle singole particelle del corpo sono equivalenti ad una singola forza $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ applicata al punto **G** del corpo detto baricentro del corpo. Cioè equivale a dimostrare che l'effetto di accelerazione dovuto alle singole forze peso, dirette verso il basso , può venire controbilanciato da un'unica forza $\vec{F} = -\vec{P} = -m \cdot \vec{g}$ diretta verso l'alto , purché tale forza sia applicata nel baricentro del corpo. Quindi le forze gravitazionali che agiscono sulle singole masse elementari che costituiscono un corpo rigido sono equivalenti, per quanto riguarda il loro effetto sulla traslazione e sulla rotazione del corpo, ad un'unica forza $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, peso totale del corpo, applicata nel baricentro **G** del corpo. Possiamo ottenere lo stesso risultato se il corpo è corpo è continuo e si immagina di suddividerlo in un numero infinito di parti elementari infinitesime.



Il baricentro (detto anche centro di gravità) del corpo coincide col suo centro di massa soltanto quando $\vec{g}$ è costante. In quasi tutti i problemi pratici le dimensioni degli oggetti che intervengono sono piccole rispetto alla distanza necessaria per avvertire un apprezzabile cambiamento in $\vec{g}$: allora si può assumere che $\vec{g}$ sia uniforme nel volume interessato da tali oggetti.

Il centro di massa ed il baricentro possono quindi essere considerati coincidenti. Anzi si può approfittare di questa coincidenza per individuare sperimentalmente il centro di massa dei corpi aventi forma irregolare.

Il baricentro G di un corpo rigido è il punto nel quale si può pensare applicato il peso del corpo.



La composizione di forze parallele e discordi

Ad un corpo rigido **S** sia applicate due forze ($\vec{F}_1$ applicata in P_1 ed $\vec{F}_2$ applicata in P_2) parallele e discordi. Il risultante $\vec{R}$ è una forza:

1) parallela alle forze date

2) ha il verso concorde con la forza di intensità maggiore

3) ha come modulo la differenza dei moduli, precisamente:

$$R = F_2 - F_1 \text{ se } F_2 > F_1 \quad , \quad R = F_1 - F_2 \text{ se } F_2 < F_1$$

4) ha come **punto di applicazione** un punto **C**, esterno al segmento P_1P_2 congiungente i due punti di applicazione, per il quale si verifica la relazione:

$$F_1 : F_2 = \overline{P_2C} : \overline{P_1C} \quad .$$

Il punto **C** è più vicino alla forza avente modulo maggiore. La costruzione della figura che segue e quindi la regola precedente cadono in difetto se le due forze $\overrightarrow{F_1}$ ed $\overrightarrow{F_2}$ formano una **coppia**, sono cioè uguali ed opposte ed hanno sostegni diversi. Il **risultante** dovrebbe avere modulo nullo ed essere applicato nel punto improprio della retta P_1P_2. Fisicamente ciò non ha alcun significato: il risultante non esiste.

Non è possibile equilibrare una coppia con una sola forza. La coppia non ammette risultante equivalente, cioè la coppia è un sistema elementare di due forze non ulteriormente riducibile.

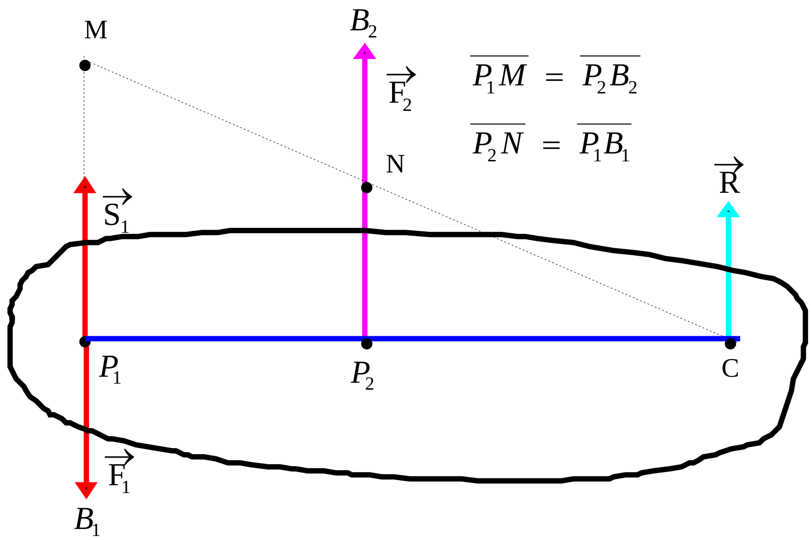
Dimostrazione : Scomponiamo $\overrightarrow{F_2}$ in due forze $\overrightarrow{S_1}$ ed $\vec{R}$ tale che risulti $\vec{F}_2 = \vec{S}_1 + \vec{R}$.

Se scegliamo $\vec{S}_1 = -\vec{F}_1$ allora $\vec{R}$ dovrà essere parallela ad $\overrightarrow{F_1}$ ed $\overrightarrow{F_2}$, dovrà avere modulo $R = F_2 - F_1$ ed essere applicata in un punto **C** (esterno al segmento P_1P_2 e dalla parte di $\overrightarrow{F_2}$ essendo $F_2 > F_1$) tale che : $S_1 : R = \overline{CP_2} : \overline{P_1P_2}$ cioè : $F_1 : (F_2 - F_1) = \overline{CP_2} : \overline{P_1P_2}$

Componendo otteniamo: $\mathbf{F_2 : F_1 = \overline{CP_1} : \overline{CP_2}}$

Dico che $\vec{R}$ è il **risultante** delle forze $\overrightarrow{F_1}$ ed $\overrightarrow{F_2}$.

Infatti : $\vec{F}_2 = \vec{S}_1 + \vec{R}$, $\vec{R} = \vec{F}_2 - \vec{S}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$



Osservazione

Nel caso generale che il sistema di forze parallele sia costituito da più di due forze, alcune dirette in un verso ed altre in verso opposto, si compongono prima le forze aventi lo stesso verso e si determina il loro risultante $\vec{R}_1$.

Poi quelle aventi verso contrario e si determina il loro **risultante** $\vec{R}_2$. Indi si sommano vettorialmente $\vec{R}_1$ ed $\vec{R}_2$. Si ottiene così o un risultante $\vec{R}$ se $R_1 \neq R_3$ o , eccezionalmente , una **coppia** se risulta $R_1 = R_3$.

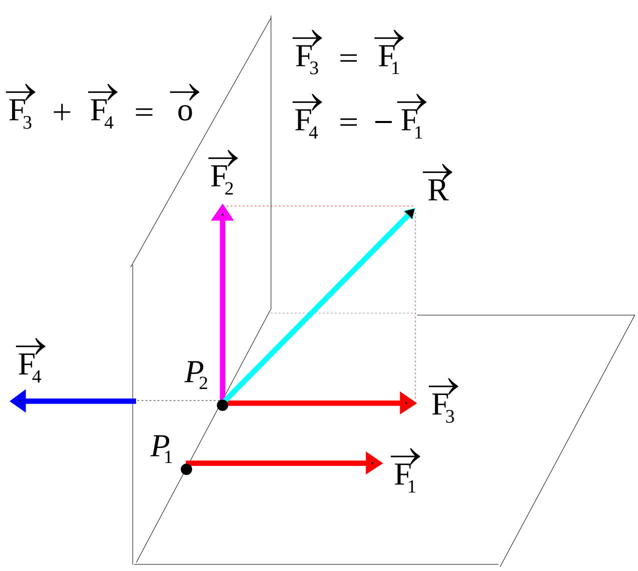
La composizione delle coppie di forze

Ad ogni coppia di forze possiamo associare un momento meccanico. Le coppie si compongono sommando vettorialmente i loro momenti meccanici che, essendo vettori liberi, possono essere applicati ad uno stesso punto O del corpo rigido. Supponiamo che ad un corpo rigido **S** siano applicate **n** coppie di forze. A ciascuna di esse corrisponde un momento. Scelto un punto O qualsiasi del corpo rigido, applichiamo ad esso gli n momenti delle n copie e sommiamo con la regola del parallelogramma ottenendo il vettore: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n$. Una qualsiasi coppia di forze avente $\vec{M}$ come momento risultante è equivalente alle n coppie di forze date applicate al corpo rigido.

La composizione di due forze sghembe

Due forze sghembe applicate ad un corpo rigido esercitano l'azione combinata di una forza e di una coppia di forze, grandezze fisiche meccaniche non componibili tra loro in quanto di natura diversa Per l'equilibrio di due forze sghembe occorre applicare una opportuna forza ed una opportuna coppia. Infatti, siano $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ due forze sghembe applicate ad un corpo rigido. Nel punto P_2 applico due forze $\vec{F}_3$ ed $\vec{F}_4$ direttamente opposte , parallele ad $\vec{F}_1$ ed aventi lo stesso modulo di $\vec{F}_1$.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_4 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_4 + \vec{R}$$



Sul corpo rigido rimangono attive la forza $\vec{R}$ e la coppia di momento $\vec{M}$ formata dalle forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_4$.

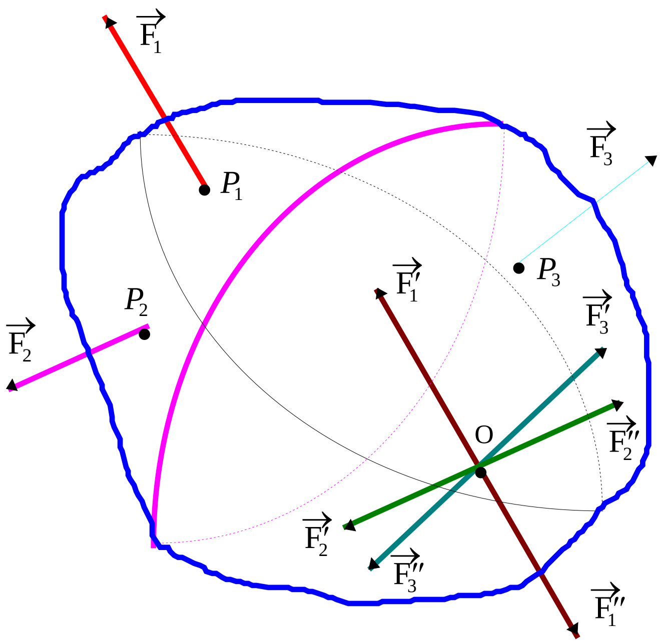
La forza $\vec{R}$ e la coppia forze di momento $\vec{M}$ sono equivalenti alle forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$.

La composizione di un numero qualsiasi di forze

Consideriamo ora il caso più generale, cioè il caso di un sistema Σ di n forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots, \vec{F}_n$ applicate ai punti $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ (nel caso nostro $n = 3$) di un corpo rigido **S**. Il sistema di Σ di n forze è equivalente:

1) ad una forza $\vec{R}$ (risultante) somma vettoriale di tutte le n forze immaginate applicate in O

2) e ad una coppia di forze il cui momento $\vec{M}$ è il momento risultante di tutte le n forze di Σ rispetto ad O.



Il risultante $\vec{R}$ non dipende dalla scelta del punto O, mentre il momento risultante $\vec{M}$ dipende dalla scelta di O. Dunque il sistema dato di n forze si può sempre ridurre ad una sola forza (il risultante $\vec{R}$) e ad una sola coppia di forze di momento $\vec{M}$: questo, in generale, varia con O, a differenza di $\vec{R}$ che non dipende da O.

Se come centro di riduzione scegliamo il baricentro del corpo rigido, allora possiamo fare le seguenti considerazioni sul moto di S.

La forza $\vec{R}$, applicata al baricentro del corpo, determina una traslazione del corpo rigido S. (9) La coppia di momento $\vec{M}$ provocherà contemporaneamente una rotazione del corpo rigido attorno ad una retta passante per il baricentro di S. (9 bis)

Riassumendo possiamo affermare che il moto di un qualsiasi corpo rigido al quale è applicato un sistema di n forze è la sovrapposizione di due moti, uno di traslazione del baricentro ed uno di rotazione attorno ad una retta passante per il baricentro.

---

(9) $\vec{R} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt}$ $\quad \vec{Q}$ = quantità di moto del corpo rigido

(9 bis) $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ $\quad \vec{L}$ = **momento angolare** o **momento della quantità di moto** del corpo rigido

Condizioni per l'equilibrio dei corpi rigidi

Sia S un corpo rigido libero soggetto all'azione di un sistema Σ di n forze esterne. **C.N.S.** per l'equilibrio di S è che risultino nulli sia il risultante $\vec{R}$ (cioè la somma vettoriale delle n forze) che il momento risultante $\vec{M}$ (cioè la somma vettoriale dei momenti delle n forze di Σ rispetto ad un punto qualsiasi O di S), cioè:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{o}} \qquad \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{o}}$$

Spesso, per motivi di opportunità, conviene scegliere come centro di riduzione **O**, il centro di massa (o il baricentro) del corpo rigido.

Condizioni per l'equilibrio di un corpo rigido posto in un campo di forze conservative; il caso dei corpi pesanti

L 'introduzione dell'energia potenziale permette di individuare le posizioni di equilibrio per un corpo soggetto ad un vincolo privo di attrito.

Chiamiamo posizioni di equilibrio statico di un corpo quelle in cui esso ha velocità nulla e non è sottoposto a forze o è sottoposto ad un sistema di forze a risultante nullo ed a momento risultante nullo. Possiamo distinguere tre tipi di equilibrio:

1) equilibrio instabile caratterizzato dal fatto che se il corpo si allontana anche di poco da una tale posizione, tende ad allontanarsene sempre di più. L'energia potenziale di un corpo posto in un punto di equilibrio instabile di un campo di forze conservative presenta un massimo relativo. Interpretiamo fisicamente questo risultato. Il corpo in esame sia soggetto all'azione di un campo conservativo di forze ed occupi la posizione B di equilibrio instabile. Mediante una forza esterna $\vec{f}_e$ spostiamo, anche di poco, il corpo e poi lo abbandoniamo a se stesso. Il corpo, soggetto adesso all'azione delle sole forze del campo, si allontanerà sempre di

più dalla posizione B e si porterà verso quei punti dove l'energia potenziale è minore.

Quando la forza $\vec{f}_e$ sposta il corpo, le forze del campo compiono un lavoro positivo.

2) equilibrio stabile caratterizzato dal fatto che se il corpo si allontana di poco da una tale posizione , tende a ritornarvi. L'energia potenziale di un corpo posto in un punto A di equilibrio stabile di un campo di forze conservative presenta un minimo relativo.

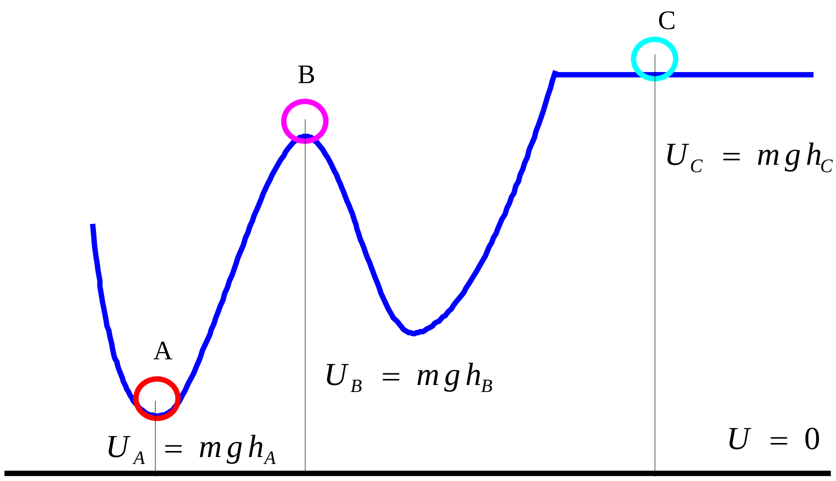
Interpretiamo fisicamente questo risultato. Il corpo in esame sia soggetto all'azione di un campo di forze conservative ed occupi la posizione A di equilibrio stabile.

Mediante una forza esterna $\vec{f}_e$ spostiamo di poco il corpo e poi lo abbandoniamo a se stesso . Il corpo , soggetto adesso alle sole forze del campo , torna nella posizione A . Quando la forza esterna $\vec{f}_e$ sposta il corpo , le forze del campo compiono un lavoro negativo e l'energia potenziale del corpo aumenta.

3) equilibrio indifferente caratterizzato dal fatto che se il corpo si allontana di poco da una tale posizione viene a trovarsi in una nuova posizione di equilibrio. L'energia potenziale di un corpo posto in un punto C di equilibrio indifferente di un campo conservativo di forze presenta un valore costante in un intorno di tale posizione. Interpretiamo fisicamente questo risultato, supponendo una situazione simile a quella dei due casi precedenti.

Quando la forza esterna $\vec{f}_e$ sposta il corpo, questi si porta in una nuova posizione di equilibrio e la sua energia potenziale rimane la stessa.

Durante lo spostamento del corpo dovuto alla forza esterna $\vec{f}_e$ le forze del campo non compiono lavoro.



Questa classificazione è facilmente spiegabile se la **forza conservativa** è la **forza peso** per la quale si ha la **conservazione dell'energia meccanica totale** .

Infatti, nel caso 1), quando il corpo si sposta dalla posizione di equilibrio B esso viene a trovarsi in un punto posto più in basso e quindi con minore energia potenziale. Ciò implica che l'energia potenziale perduta si converta in energia cinetica, cioè che il corpo acquisti una velocità che lo faccia allontanare dal punto di equilibrio. Nel caso 2) è evidente che il corpo non può acquistare una velocità che lo faccia allontanare dalla posizione di equilibrio. Infatti all'equilibrio, esso ha velocità zero (e quindi energia cinetica nulla) ed una certa energia potenziale. I punti di equilibrio vicini a quello di equilibrio hanno tutti una energia potenziale maggiore e potrebbero essere raggiunti solo riducendo l'energia cinetica (e quindi la velocità) del corpo che non ne possiede. Nel caso 3) è evidente che il corpo, fermo originariamente in una posizione C , può essere spostato da C in qualsiasi punto D vicino , senza che venga modificata l'energia totale, poiché nelle due posizioni l'energia potenziale è la stessa (i punti si trovano alla stessa quota) come pure l'energia cinetica (il corpo sta fermo).

Conclusione per l'equilibrio di un corpo rigido: (a) Un corpo rigido è in equilibrio stabile quando, spostato di poco dalla sua posizione, tende a ritornarci (b) Un corpo rigido è in equilibrio instabile quando, spostato di poco dalla sua posizione, si allontana sempre di più (c) Un corpo rigido è in equilibrio indifferente quando spostato dalla sua posizione rimane in equilibrio.

Le condizioni per l'equilibrio dei corpi rigidi vincolati

Se un corpo rigido S non è libero, ma è soggetto a vincoli esterni, fanno parte delle forze esterne le forze attive direttamente applicate e le reazioni vincolari $\vec{Z}$.

Per determinare le condizioni di equilibrio di S si applica il metodo delle reazioni vincolari. Questo metodo consiste nel trattare il corpo rigido come libero, introducendo come incognite ausiliarie le reazioni vincolari $\vec{Z}$.

Indicando con $\vec{R}'$ ed $\vec{M}'$ il risultante ed il momento risultante (rispetto ad il centro di riduzione O) delle reazioni vincolari $\vec{Z}$, le **C.N.S.** per l'equilibrio di un corpo rigido vincolato si scrivono: $\vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{R}}' = \vec{\mathbf{o}}$ $\quad \vec{\mathbf{M}} + \vec{\mathbf{M}}' = \vec{\mathbf{o}}$ **[1]**

Le [1] possono servire per calcolare le reazioni vincolari (incognite) $\vec{Z}$, note le altre forze applicate.

Equilibrio di un corpo rigido con un punto fisso

Sia S un corpo rigido fissato per un punto O . Se la reazione vincolare è priva di attrito, è nullo il momento ($\vec{M}'$) rispetto ad O delle forze $\vec{Z}$ di reazione provenienti dal dispositivo atto a realizzare il supposto vincolo. Sia Σ il sistema delle forze attive applicate ad S. Denotiamo con $\vec{Z}$ il risultante delle reazioni provenienti dal punto fisso O. **Il corpo rigido può essere considerato come libero sotto l'azione del sistema di forze attive e della reazione** $(O,\vec{Z})$.

Assumiamo il punto O come centro di riduzione e denotiamo con $\vec{R}$ ed $\vec{M}$ il risultante ed il momento risultante rispetto ad O delle forze attive.

Essendo nullo il momento $\vec{M}'$ rispetto ad O della reazione vincolare $\vec{Z}$, le **C.N.S.** per l'equilibrio del corpo rigido sono: $\begin{cases} \vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{Z}} = \vec{\mathbf{o}} \\ \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{o}} \end{cases}$

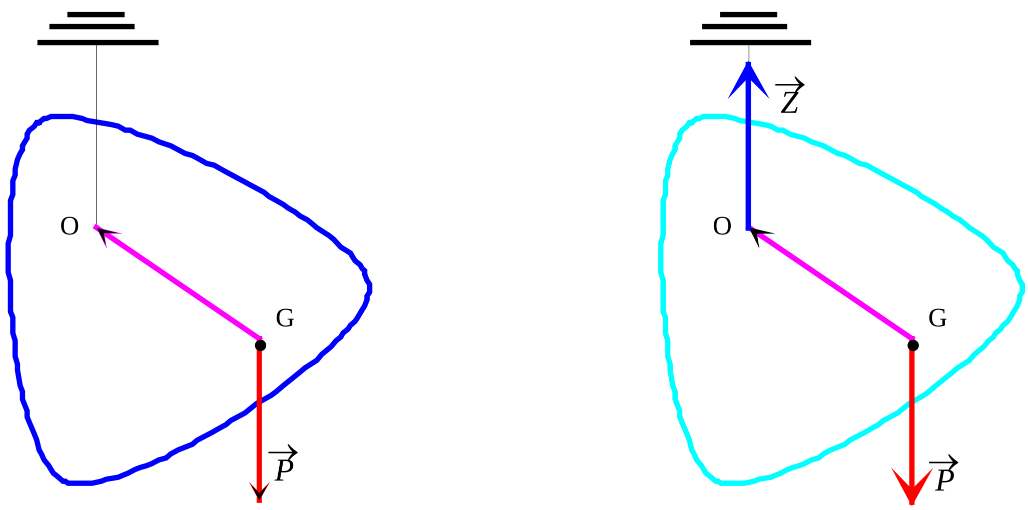
La prima equazione vettoriale ci consente di calcolare l'incognita reazione vincolare $\vec{Z}$. La seconda equazione vettoriale, poiché non contiene le incognite reazioni, è condizione di equilibrio per S. In questo caso il sistema delle forze attive applicate al corpo rigido ammette un risultante unico $\vec{R}$ il cui sostegno passa per O. Questa condizione è anche sufficiente perché, se essa è verificata, possiamo sostituire al sistema Σ di forze attive il loro risultante $\vec{R}$ applicato in O e tale forza è certamente equilibrata dalla reazione in O (questo punto resta immobile sotto qualsiasi sollecitazione). Il corpo rigido S non subisce traslazioni. Il momento $\vec{M}$ di $\vec{R}$ rispetto ad O è nullo. Il corpo rigido non subisce rotazioni. S è in equilibrio.

Conclusione

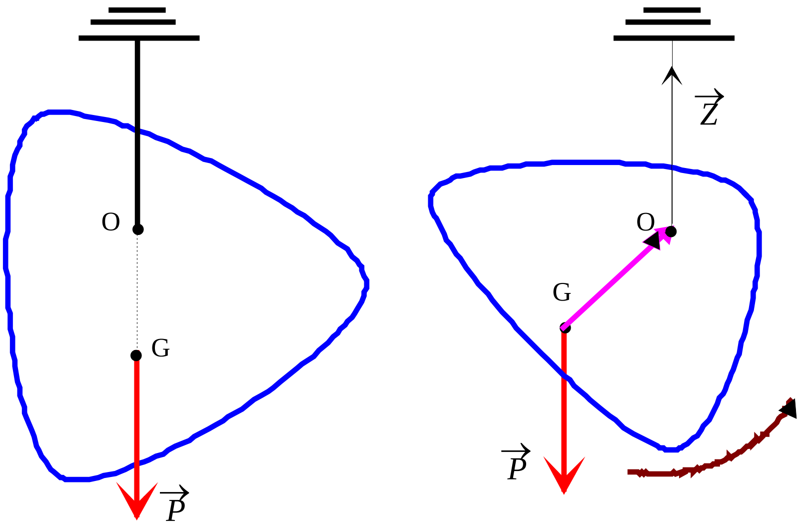
C.N.S. per l'equilibrio di un corpo rigido con un punto fisso O è che il momento risultante $\vec{M}$ delle forze attive agenti sul corpo rispetto al punto fisso sia nullo. Questo si verifica quando il risultante $\vec{R}$ delle forze attive esiste e la sua retta d'azione passa per O.

Diversamente

Siano n le forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots, \vec{F}_n$ applicate ad S e siano $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, \cdots, \vec{M}_n$ i relativi momenti rispetto al punto fisso O. L'equilibrio si ha quando il risultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n$ delle forze attive applicate esiste e la sua retta d'azione passa per O, oppure , ed è la stessa cosa, quando: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots + \vec{M}_n$.

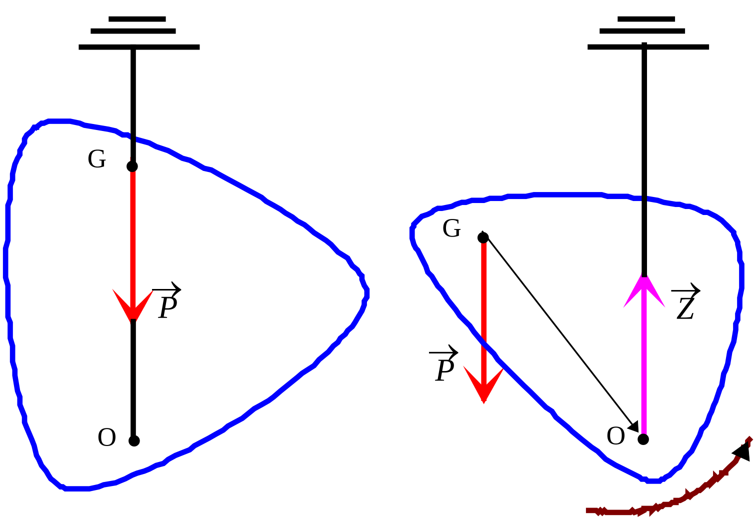


Consideriamo adesso un corpo rigido sospeso per un punto O (punto fisso) e soggetto soltanto all'azione del suo peso $\vec{P}$ applicato nel suo baricentro **G**. La condizione di equilibrio in questo caso è: $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{P}} \wedge (\mathbf{O} - \mathbf{G}) = \vec{\mathbf{o}}$ da cui deduciamo che per l'equilibrio di un corpo rigido pesante con un punto fisso occorre e basta che il sostegno della forza peso passi per il punto di sospensione. Diversamente possiamo dire che **un corpo pesante sospeso ad un punto è in equilibrio quando il suo baricentro giace sulla verticale passante per il punto di sospensione**. Dalla relazione $\vec{P} + \vec{Z} = \vec{o}$ deduco $\vec{Z} = -\vec{P}$. Il corpo rigido sospeso per il punto O può essere considerato un corpo rigido libero se immaginiamo che su di esso agiscano la forza peso $\vec{P}$ applicata in **G** e la reazione vincolare $\vec{Z}$ applicata in O. Il corpo rigido, soggetto alla coppia di forze $\left(\vec{P}, \vec{Z}\right)$, è in equilibrio quando il momento della coppia è nullo. Ma il momento di tale coppia vale: $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{P}} \wedge (\mathbf{O} - \mathbf{G})$ come avevamo già visto. Si possono presentare tre casi di equilibrio:



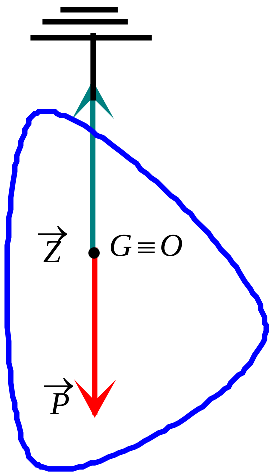
1) Equilibrio stabile

Il baricentro **G** si trova al di sotto del punto di sospensione O. Il corpo spostato di poco dalla sua posizione di equilibrio, tende a tornarvi per effetto della coppie di forze $\left(\vec{P},\vec{Z}\right)$ cui è soggetto .



2) Equilibrio instabile

Il baricentro si trova al di sopra del punto di sospensione. Il corpo spostato di poco dalla posizione di equilibrio non torna mai nella spontaneamente posizione iniziale di equilibrio, in quanto la coppia di forze $\left(\vec{P},\vec{Z}\right)$ cui viene ad essere soggetto tende a farlo ruotare abbassando la posizione del suo baricentro.



3) Equilibrio indifferente

Il baricentro coincide col punto di sospensione. Ogni spostamento lascia il corpo in equilibrio.

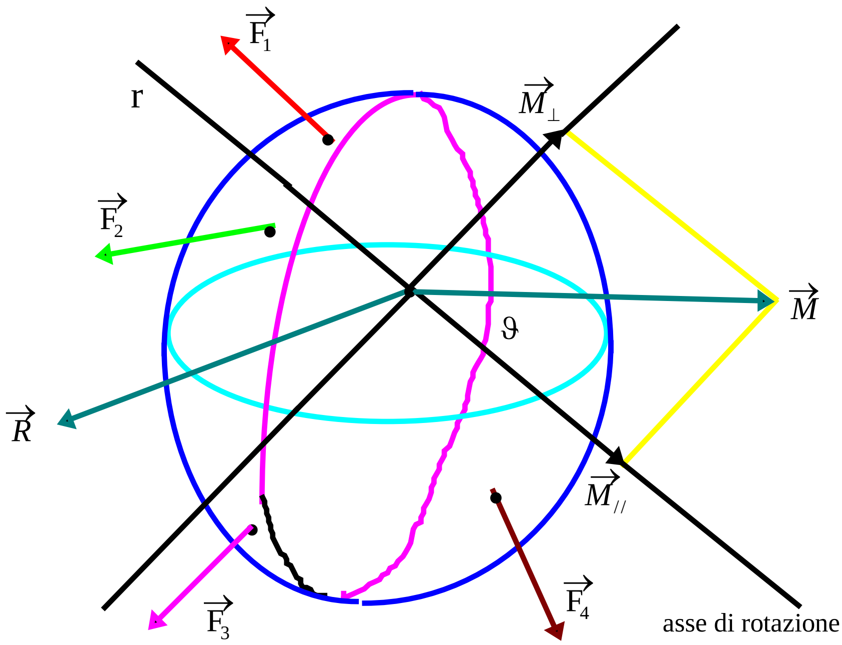
Osservazione

L'equilibrio di un corpo rigido (pesante oppure no) può essere dedotto in base alle seguenti considerazioni: il corpo sospeso al punto O può essere considerato libero se immaginiamo di applicare in O la forza $\vec{Z} = -\vec{P}$ dovuta al vincolo. Le due forze $\vec{P}$ e $\vec{Z}$ formano una coppia di momento $\vec{M} = \vec{P} \wedge (O - G)$. Per l'equilibrio, tale momento deve essere nullo e questo accade se il sostegno di $\vec{P}$ passa per il punto di sospensione.

Le condizioni per l'equilibrio di un corpo rigido con un asse fisso

In questo caso il corpo rigido, sottoposto all'azione di forze esterne, può soltanto ruotare attorno all'asse fisso r. Sia S un corpo rigido fissato per un asse r che supponiamo privo di attrito. Tale condizione è realizzata allorché è nullo il momento rispetto ad r delle reazioni vincolari lungo l'asse r, in altri termini, possiamo supporre che le reazioni vincolari siano distribuite con continuità lungo l'asse r.

C.N.S. per l'equilibrio di un corpo rigido con un asse r fisso soggetto all'azione di n forze esterne $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots, \vec{F}_n$ è che risulti perpendicolare all'asse r il momento risultante $\vec{M}$ di tutte le forze attive , cioè che risulti nullo il <u>momento assiale</u> M_r delle forze attive .



Questo significa che il risultante delle forze attive esiste ed il suo sostegno incontra l'asse r oppure è ad esso parallelo. Infatti noi sappiamo che tutte le forze applicate al corpo rigido hanno un'azione meccanica equivalente a quella del loro risultante $\vec{R}$, applicato in un punto O qualsiasi dell'asse r, e di una opportuna coppia di momento $\vec{M}$, dove $\vec{M}$ è il momento risultante di tutte le forze attive rispetto ad O.

In generale $\vec{M}$ formerà un angolo ϑ con l'asse r. Ora , se S è in equilibrio $\vec{R}$ ha come unico effetto quello di fare sviluppare sul vincolo (l'asse r) una reazione $\vec{Z}$ (applicata in O) tale che sia sempre : $\vec{R} + \vec{Z} = \vec{o}$.

Il momento risultante $\vec{M}$ può essere decomposto in due vettori: $\vec{M}_{//}$ parallelo ad r e $\vec{M}_\perp$ perpendicolare ad r. Il componente $\vec{M}_\perp$ non è capace di fare ruotare il corpo rigido perché ad esso corrisponde una coppia costituita da due forze parallele all'asse r. L'unico componente attivo, cioè in grado di fare ruotare il corpo rigido. è $\vec{M}_{//}$.

Quindi per l'equilibrio deve essere: $\vec{M}_{//} = \vec{o} \Rightarrow \vec{M} \perp r \Rightarrow M_r = 0$

Consideriamo come caso particolare un corpo rigido pesante girevole attorno ad un asse fisso. Possiamo pensare il peso totale $\vec{P}$ applicato nel suo baricentro. Si ha equilibrio quando il momento assiale di $\vec{P}$ è nullo; questo significa che l'asse r ed il sostegno di $\vec{P}$ sono complanari (cioè paralleli o secanti). Pertanto sapendo che $\vec{P}$ è verticale e passante per il baricentro possiamo affermare che:

un corpo rigido girevole attorno ad un asse fisso e soggetto al suo peso $\vec{P}$ è in equilibrio quando il suo baricentro G si trova sul piano verticale passante per l'asse fisso r.

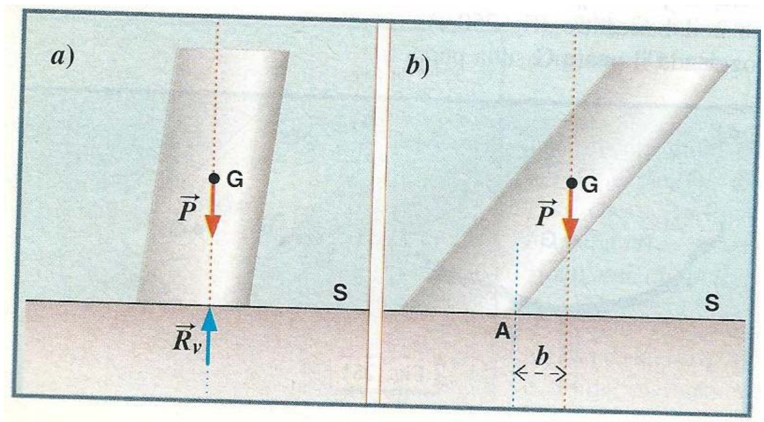
Anche in questo caso l'equilibrio può essere stabile, instabile, indifferente secondo che il suo baricentro è al di sotto, al di sopra o sull'asse di rotazione. Ecco perché (equilibrio dei corpi rigidi con un punto fisso O) il momento risultante $\vec{M}$ delle forze applicate , rispetto ad O, deve essere nullo di per sé; ma il risultante $\vec{R}$ delle forze applicate può non essere nullo, basta che la sua retta d'azione passi per O. La reazione del vincolo è capace di creare una forza $\vec{Z}$ uguale e contraria ad $\vec{R}$, ma non un momento $\vec{M}'$ che si opponga ad $\vec{M}$. Concludendo possiamo affermare che per l'**equilibrio del corpo rigido con un punto O fisso , il risultante delle forze applicate deve esistere e la sua retta d'azione deve passare per O**. Un asse fisso, attorno al quale il corpo rigido ruota, può reagire con forze i cui sostegni passane per l'asse e con coppie il cui momento è normale a tale asse. Un piano di appoggio reagisce solo con forze normali al piano e rivolte dal piano verso il corpo. In tutti i casi di equilibrio, alle forze applicate si oppongono reazioni vincolari e tutte queste forze insieme costituiscono un sistema equilibrato, un sistema cioè il cui risultante ed il cui momento risultante rispetto ad un punto qualsiasi sono nulli. Si ricade nelle condizioni di equilibrio di un corpo libero. In forma qualitativa, ma molto espressiva, può dirsi che in ogni caso vi è equilibrio quando l'azione delle forze applicate (traslazioni prodotte dal risultante, rotazioni prodotte dai momenti) tende proprio a produrre un moto che il vincolo può impedire.

Osservazione

Se l'asse fisso è verticale, il corpo rigido è certamente in equilibrio indifferente in quanto per l'asse passano infiniti piani verticali ed in particolare quello che contiene il baricentro. E' il caso di una porta; essa è sempre in equilibrio per qualsiasi posizione occupata. La direzione del vettore $\vec{M}$ indica la direzione della retta attorno alla quale avviene la rotazione.

Condizioni per l'equilibrio di un corpo rigido appoggiato ad un piano

Un corpo rigido S può poggiare su di un piano per un punto, per una linea (cilindro poggiato per una sua generatrice), per tre punti e, addirittura, per i punti di una superficie piana. Dicesi poligono di appoggio il poligono convesso i cui vertici siano punti di appoggio, tale però che nessun punto di appoggio sia esterno ad esso. Le reazioni $\left(O_i, \vec{Z}_i\right)$ provenienti dai punti di appoggio sono normali a tale piano e rivolte verso la regione consentita dal vincolo. Il sistema delle reazioni $\left(O_i, \vec{Z}_i\right)$ ammette un unico risultante $\vec{Z}$ applicato in un punto O detto centro delle reazioni che non è esterno al poligono di appoggio in quanto le reazioni vincolari $\vec{Z}_i$ sono tutte parallele e concordi. **C.N.S. per l'equilibrio di S è che il risultante $\vec{R}$ di tutte le forze attive sia direttamente opposto a $\vec{Z}$.** Questo si verifica quando $\vec{R}$ è normale al piano di appoggio, è diretto verso la regione non consentita dal vincolo, la sua retta di azione incontra il piano di appoggio in un punto non esterno al poligono di appoggio.



Osservazione

Nel caso dei corpi rigidi l'azione dei vincoli è equiparabile a quella di forze opportune dette reazioni vincolari. Ogni vincolo è capace di opporre alle forze applicate solo certi tipi di reazioni. Un punto fisso O è capace di creare delle forze di reazione passante per O, ma non è in grado di opporsi ad una rotazione attorno ad O, cioè non è in grado di reagire con un momento rispetto a tale punto.

Le macchine semplici

Generalmente col nome di macchina semplice indichiamo un qualsiasi dispositivo capace di equilibrare una data forza $\vec{F}_R = \vec{R}$, detta resistenza, con un'altra forza $\vec{F}_M = \vec{P}$ chiamata forza motrice (detta impropriamente potenza) che differisce dalla prima per qualche suo elemento (per intensità, per direzione, per retta d'azione). E' discutibile il numero delle macchine semplici. Forse esso si riduce a tre; la fune, la leva, il piano inclinato; ma è comodo considerarne un numero maggiore, ad esempio, la vite, il cuneo, il verricello, il paranco, l'argano. Spesso la forza da equilibrare è detta resistenza e viene indicata col simbolo $\vec{R}$ oppure col simbolo $\vec{F}_R$, quella che serve per ottenere l'equilibrio è detta potenza o forza motrice e viene indicata col simbolo $\vec{P}$ oppure con $\vec{F}_m$.

$\vec{F}_R = \vec{R}$ = resistenza = forza da equilibrare

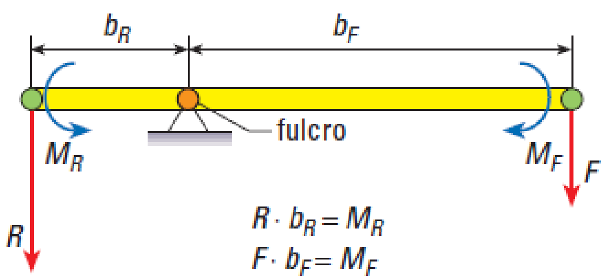
$\vec{F}_M = \vec{P}$ = potenza = forza che determina l'equilibrio

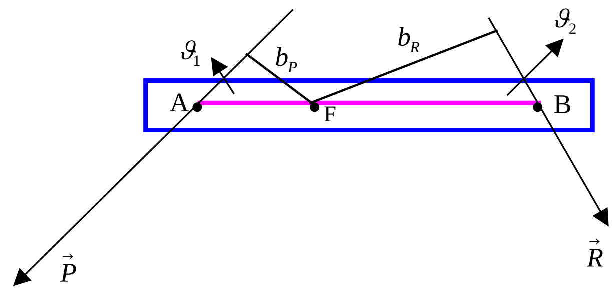
Definiamo vantaggio **V** di una macchina semplice il rapporto tra la resistenza e la potenza, cioè: $V = \frac{F_R}{F_M} = \frac{R}{p}$ = vantaggio della macchina semplice

La macchina è vantaggiosa se $V > 1$ $(R > P)$, indifferente se $V = 1$ $(R = P)$, svantaggiosa se $V < 1$ $(R < P)$.

La leva

La leva è un'asta rigida che può ruotare attorno ad un punto fisso **F** (detto fulcro). Nel piano della figura, dove è schematizzata la leva, **F** è la traccia del fulcro. Agli estremi A e B della sbarra sono applicate due forze: una $\vec{F}_M = \vec{P}$ detta potenza o forza motrice, l'altra $\vec{R}$ detta resistenza. $\vec{F}_R = \vec{R}$ è la forza da equilibrare mediante la forza $\vec{F}_M = \vec{P}$.





La leva soggetta alle forze $\vec{R}$ e $\vec{P}$ è in equilibrio quando è nullo il momento risultante $\vec{M}$ delle forze $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{R} = \vec{\mathbf{R}}$ e $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{M} = \vec{\mathbf{P}}$ rispetto ad un punto qualsiasi (ad esempio rispetto al fulcro **F**), cioè la **condizione di equilibrio si ha quando è nullo il momento risultante delle forze applicate rispetto al fulcro F**, cioè quando il momento della forza motrice è uguale, in modulo, al momento della forza resistente. In simboli abbiamo: $\mathbf{F_M : F_R = b_R : b_M}$

Per la condizione di equilibrio dobbiamo avere: $\boxed{\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{o}}$ cioè: $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$

$\vec{M}_1 = (A - F) \wedge \vec{P}$, $\vec{M}_2 = (B - F) \wedge \vec{R}$ $\quad M_1 = M_2 \quad M_1 = \overline{AF} \cdot P \cdot \sin\vartheta_1 = P \cdot b_P$

$M_2 = \overline{BF} \cdot R \cdot \sin\vartheta_2 = R \cdot b_R$

b_P = braccio della potenza = distanza del fulcro F dal sostegno di $\vec{P}$

b_R = braccio della resistenza = distanza del fulcro F dal sostegno di $\vec{R}$

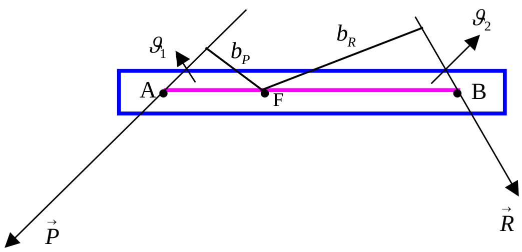
$M_1 = M_2 \Rightarrow P \cdot b_P = R \cdot b_R$ cioè : $\boxed{P : R = b_R : b_P}$

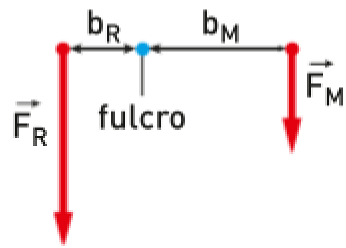
Una leva è in equilibrio quando i moduli della potenza e della resistenza sono inversamente proporzionali ai rispettivi bracci.

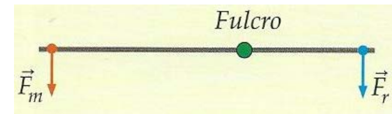
Si distinguono tre tipi di leve a seconda della posizione del fulcro, della resistenza, della potenza.

1) Leva di primo genere o interfulcrata o interfissa

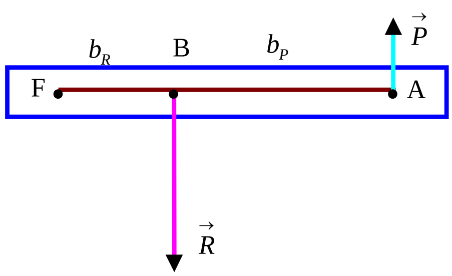
Nelle leve di primo genere il fulcro F si trova tra la resistenza e la potenza. Queste leve possono essere vantaggiose, indifferenti, svantaggiose secondo che: $V = \dfrac{R}{P} = \dfrac{b_P}{b_R} \gtreqless 1$ cioè se : $\boxed{b_P \gtreqless b_R}$

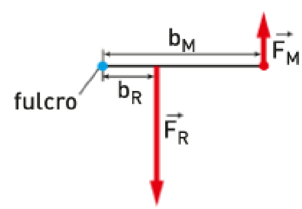


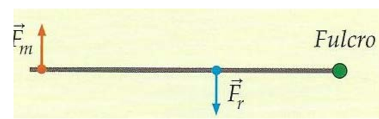




2) Leva di secondo genere o interesistente



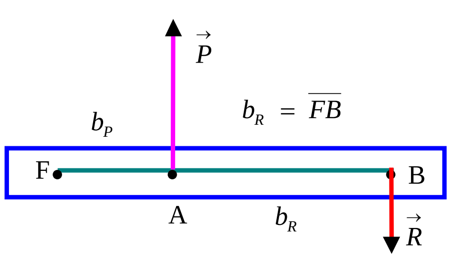


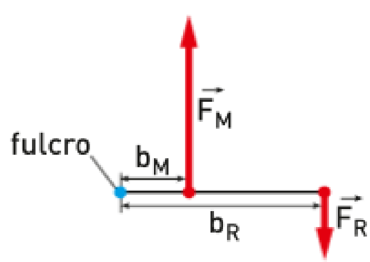


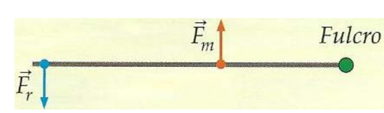
In questo tipo di leva il punto di applicazione della resistenza è tra il fulcro ed il punto di applicazione della potenza. La leva di secondo genere è sempre vantaggiosa in quanto è sempre:

$$b_P > b_R \quad \text{e quindi} \quad \boxed{P < R}$$

3) Leva di terzo genere o interpotente

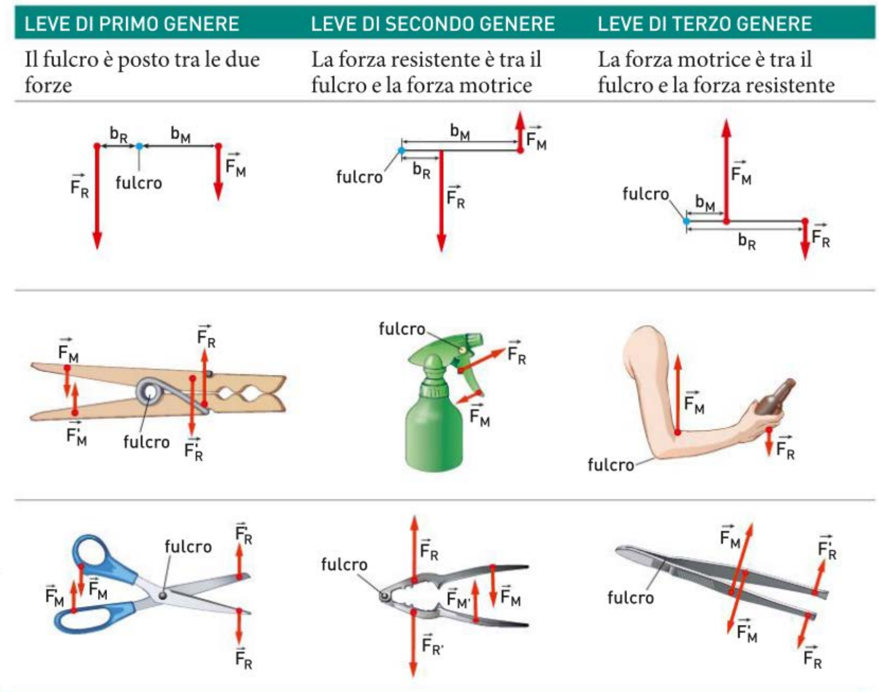






Qui il punto di applicazione della potenza si trova tra il fulcro ed il punto di applicazione della resistenza. $\boxed{V = \frac{R}{P} = \frac{b_P}{b_R} < 1}$ in quanto risulta sempre $b_P < b_R$

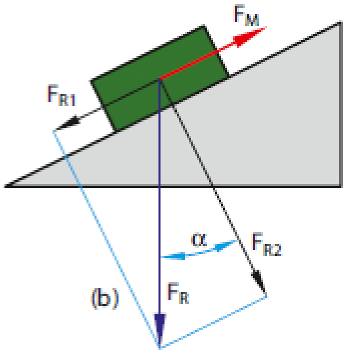
Si tratta di una macchina svantaggiosa ma utile in molte applicazioni.



Il piano inclinato

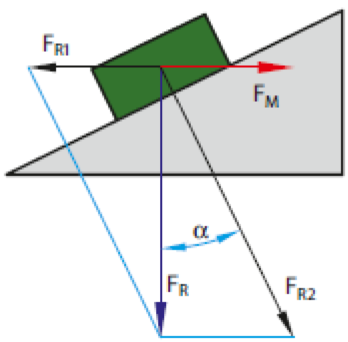
Il **piano inclinato** è un piano rigido, liscio, che forma un angolo ϑ col piano orizzontale. Schematicamente un piano inclinato viene rappresentato mediante un triangolo rettangolo ABC in cui l'ipotenusa $BC = \ell$ rappresenta la **lunghezza**, il cateto verticale $AB = h$ rappresenta l'**altezza**, il cateto orizzontale $AB = b$ rappresenta la **base** del piano inclinato. Sull'ipotenusa AB poggiamo il corpo che vogliamo mantenere in equilibrio. Il **peso** di tale corpo ($\vec{P} = m\vec{g}$) rappresenta la **resistenza**, mentre la forza che mantiene in equilibrio il corpo rappresenta la **potenza**. Per trovare le **condizioni di equilibrio** del corpo poggiato sul piano inclinato occorre decomporre il peso $\vec{P}$ lungo due opportune direzioni. Di solito è conveniente decomporre il peso $\vec{P}$ nei due modi seguenti:

1) un componente perpendicolare e l'altro parallelo al piano inclinato BC



forza motrice $\mathbf{F_M}$ parallela al piano inclinato

2) un componente perpendicolare e l'altro parallelo al piano orizzontale AC



forza motrice $\mathbf{F_M}$ parallela alla base

Forza motrice parallela al piano inclinato

Consideriamo un corpo di massa m, libero di muoversi senza attrito sotto l'azione della forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ lungo il piano inclinato BC. Possiamo sempre pensare decomposta la forza $\vec{P}$ in un componente $\vec{F}_n$ normale al piano inclinato BC ed in un componente $\vec{F}_t$ ad esso parallelo. Risulta sempre: $\boxed{\vec{P} = \vec{F}_t + \vec{F}_n}$.

Per la terza legge della dinamica, il componente $\vec{F}_n$ è equilibrato dalla reazione vincolare $\vec{\Phi}$.

L'unica forza che determina il moto del corpo sul piano inclinato è il componente tangenziale (e per questo motivo prende il nome di forza motrice) della forza peso. $\begin{cases} \mathbf{F_n = P \cdot \cos\vartheta} \\ \mathbf{F_t = P \cdot \sin\vartheta} \end{cases}$ $\begin{cases} \mathbf{h = \ell \cdot \sin\vartheta} \\ \mathbf{b = \ell \cdot \cos\vartheta} \end{cases}$

Per avere equilibrio si deve applicare al corpo una forza $\vec{E}$ (detta forza equilibrante) direttamente opposta alla forza motrice $\vec{F}_t$.

$$\mathbf{V = \frac{P}{E} = \frac{mg}{mg\sin\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{\ell}{h} > 1}$$

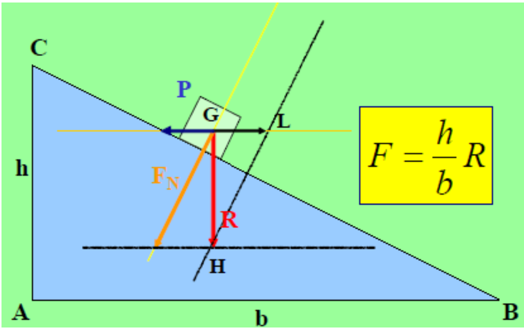
In questo caso il piano inclinato rappresenta una macchina vantaggiosa. Studiamo il fenomeno da un punto di vista dinamico. Il corpo di massa **m** parte da fermo dalla posizione **B** (che assumiamo come origine della traiettoria BC che orientiamo da B verso C) ed è soggetto alla forza motrice $F_t = mg\sin\vartheta$ che gli imprime l'accelerazione **a**. $F = ma \quad \Rightarrow \quad ma = mg\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = g \cdot \sin\vartheta}$ Si tratta di un moto rettilineo uniformemente accelerato.

$$\begin{cases} \mathbf{a = g \cdot \sin\vartheta = \frac{h}{\ell} \cdot g} \\ \mathbf{v = a \cdot t = g \cdot \sin\vartheta \cdot t = \frac{h}{\ell} \cdot g \cdot t = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\ell\sin\vartheta}} \\ \mathbf{s = \frac{1}{2} g \cdot \sin\vartheta \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\ell} \cdot g \cdot t^2} \end{cases}$$

Forza motrice parallela alla base

Scomponiamo il peso $\vec{P}$ nei componenti $\vec{F}_n$ perpendicolare al piano inclinato BC ed $\vec{F}_t$ parallelo al piano orizzontale AC. Risulta sempre: $\boxed{\vec{P} = \vec{F}_t + \vec{F}_n}$

Per la terza legge della dinamica, il componente $\vec{F}_n$ è equilibrato dalla reazione vincolare $\vec{\Phi}$. Risulta: $\begin{cases} F_t = P \cdot tg\vartheta = mg\,tg\vartheta \\ F_n = \dfrac{P}{\cos\vartheta} = \dfrac{mg}{\cos\vartheta} \end{cases}$



Per avere equilibrio bisogna applicare al corpo una forza (detta equilibrante) direttamente opposta ad $\vec{F}_t$. $E = F_t = m\,g\,tg\,\vartheta$

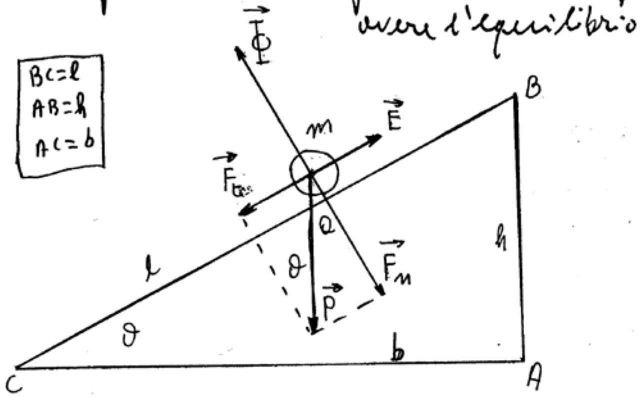
$$\boxed{V = \frac{P}{E} = \frac{m\,g}{m\,g\,tg\,\vartheta} = \frac{1}{tg\,\vartheta} = \frac{b}{h} \gtreqless 1 \quad se \quad \vartheta \lesseqgtr 45°}$$

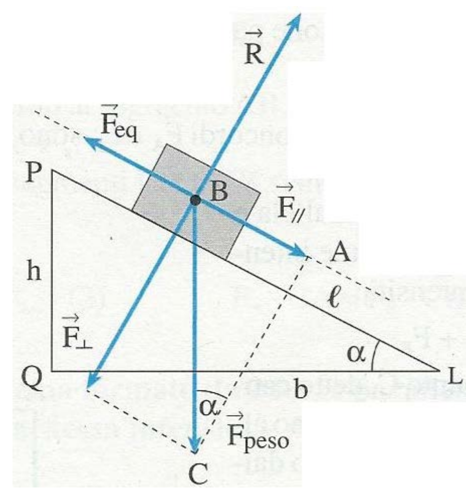
$$\boxed{P : E = b : h}$$

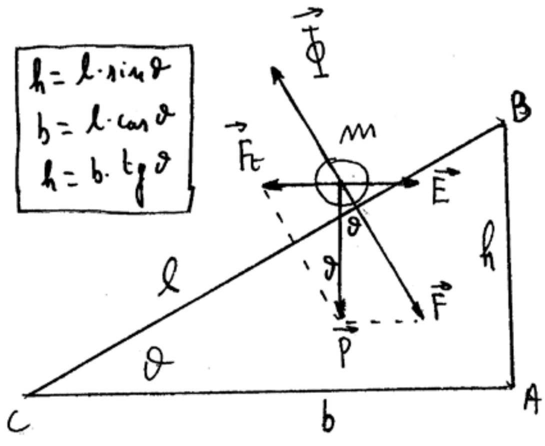
Nel piano inclinato con potenza parallela alla base si ha equilibrio quando il rapporto fra l'intensità della resistenza e della potenza è uguale a quello fra la base e l'altezza.

$\vec{P} = m\vec{g}$ è la resistenza, cioè la forza da equilibrare

$\vec{E}$ è la potenza cioè la forza necessaria per avere l'equilibrio







Il piano inclinato, con forza motrice parallela alla base, è una macchina vantaggiosa (indifferente) se $b > h$ ($b = h$)

cioè se $\vartheta > 45°$ ($\vartheta = 45°$)

Carrucola fissa

La **carrucola** è costituita da un disco rigido girevole attorno ad un asse passante per il suo centro **O**. Sul bordo è praticata una scanalatura, detta gola, attorno alla quale è avvolta una fune. La staffa **SO** che mantiene la carrucola è fissata, per esempio, ad un soffitto. La fune $\mathbf{A_1A_2}$ si avvolge sulla gola (che è una scanalatura) della carrucola; ad $\mathbf{A_1}$ è applicato il corpo **K** di peso $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{F}}_r$ che si vuole tenere sollevato. Ad $\mathbf{A_2}$ è applicata la forza equilibrante $\vec{\mathbf{F}}_m$. Possiamo considerare la carrucola fissa come un corpo libero se teniamo conto delle forze di reazione $\vec{\mathbf{\Phi}}$ applicate nel punto **O**. Supponiamo che $\vec{\mathbf{F}}_r$ ed $\vec{\mathbf{F}}_m$ siano fra loro parallele ed equiverse. Se la carrucola è in equilibrio avremo: $\begin{cases} \vec{F}_r + \vec{F}_m + \vec{\Phi} = \vec{o} \\ \vec{M} + \vec{M}' = \vec{v} \end{cases}$

$\vec{M}'$ = momento di $\vec{\mathbf{\Phi}}$ rispetto ad **O** = vettore nullo in quanto il suo sostegno passa per il punto **O**

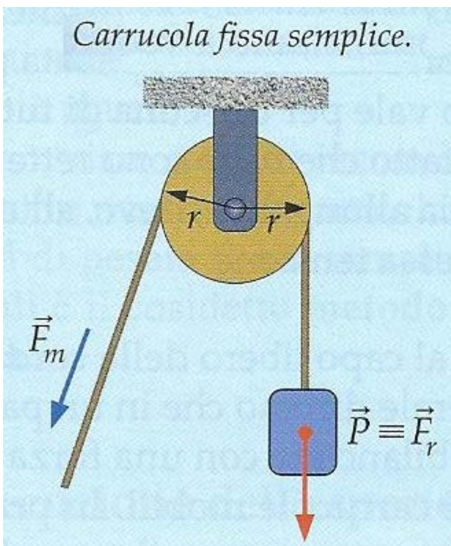
$\vec{\Phi} = -\left(\vec{F}_r + \vec{F}_m\right) \Rightarrow \Phi = F_r + F_m \quad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{o}$ in quanto la carrucola è in equilibrio

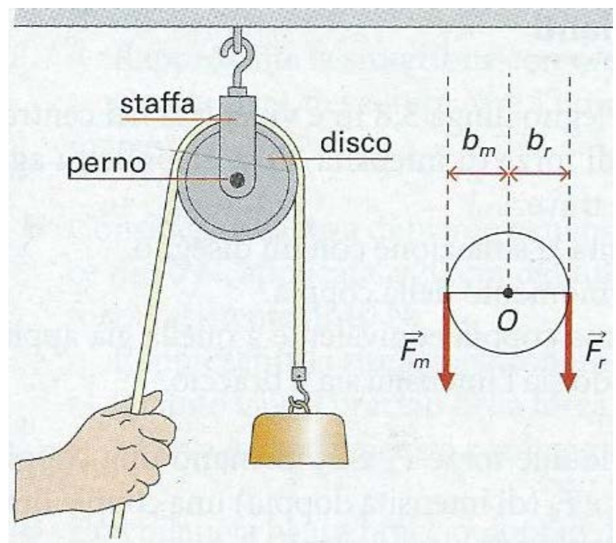
Considero come centro di riduzione (polo) il punto **O**

$\vec{M}_1 = (A_1 - O) \wedge \vec{F}_r \qquad \vec{M}_2 = (A_2 - O) \wedge \vec{F}_m \qquad (A_1 - O) \wedge \vec{F}_r + (A_2 - O) \wedge \vec{F}_m = \vec{o}$

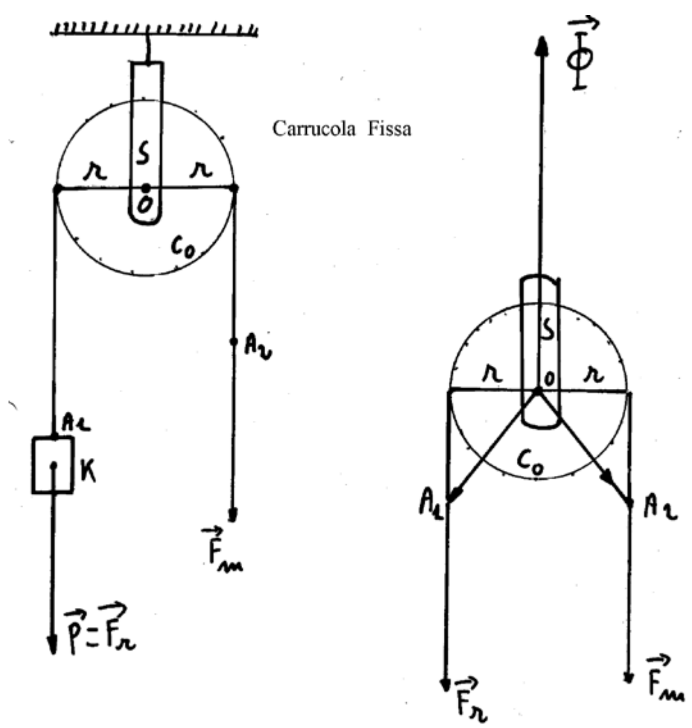
$(A_1 - O) \wedge \vec{F}_r = -(A_2 - O) \wedge \vec{F}_m \quad \Rightarrow \quad r \cdot F_r = r \cdot F_m \qquad \mathbf{F_r = F_m}$

Nella carrucola fissa si ha equilibrio quando la potenza e la resistenza hanno lo stesso modulo. La carrucola fissa, che ha vantaggio **1**, serve soltanto a variare la direzione di una forza senza cambiarne l'intensità.





La carrucola fissa equivale ad una leva di primo genere. Il suo vantaggio è **1** in quanto risulta: $\mathbf{F_r = F_m}$

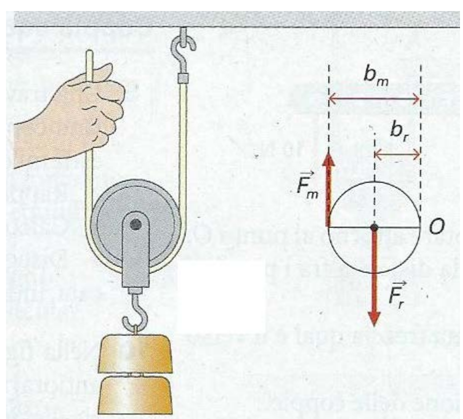


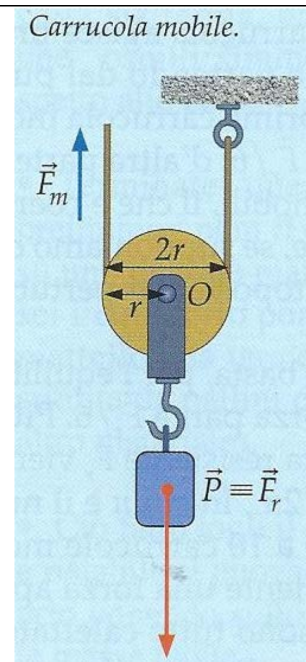
Carrucola mobile

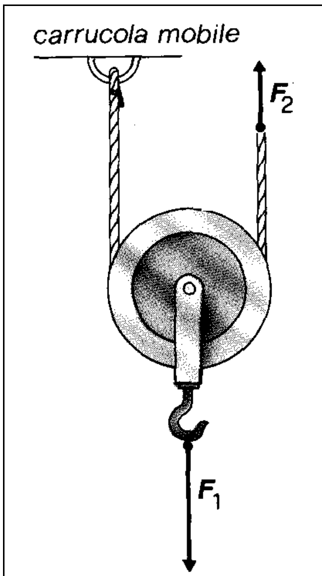
E' una carrucola con le seguenti caratteristiche:

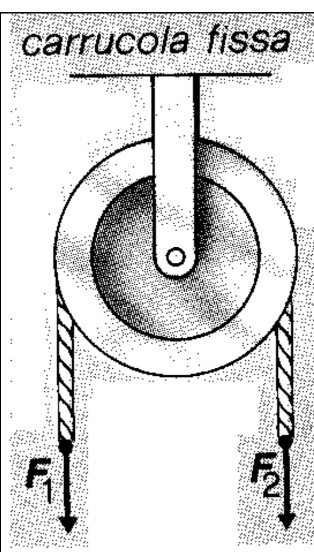
- Un estremo della fune che avvolge la gola della carrucola è fissato rigidamente, ad esempio ad un soffitto.
- La **resistenza** è applicata alla staffa della carrucola mobile, mentre la **forza motrice** equilibrante è applicata all'estremo libero della fune.

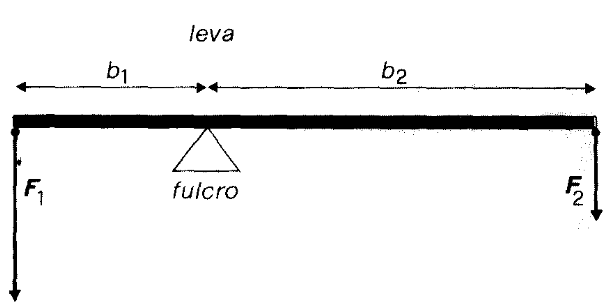
La carrucola mobile equivale ad una leva di secondo genere. Il suo vantaggio è maggiore di 1 in quanto risulta $F_m < F_r$ Il punto fisso è costituito da un estremo della fune. La ruota della carrucola sale e scende con il carico. $F_m = \frac{1}{2} F_r$





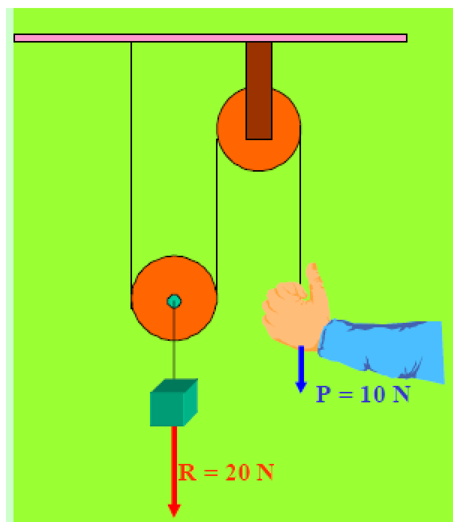


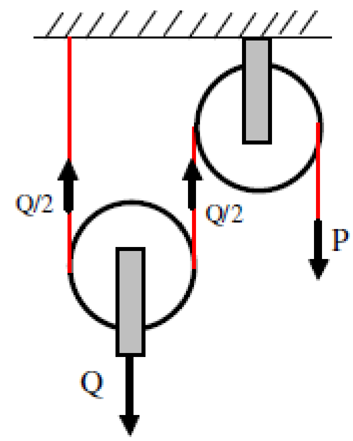


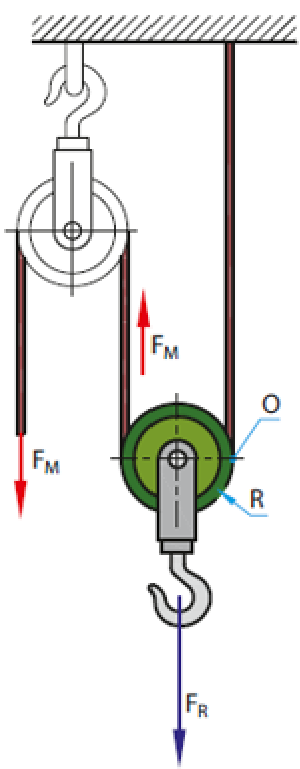


Paranco

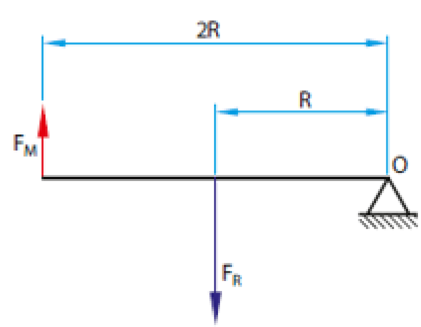
Il paranco è costituito da una carrucola mobile e da una fissa. Con la carrucola mobile si applica una forza di valore pari alla metà della forza peso (resistenza) da sollevare, mentre la carrucola fissa serve per sollevare il peso, come appoggio per la fune, come mostrato in figura. La condizione di equilibrio è: $F = \frac{1}{2}R$







equivale alla leva

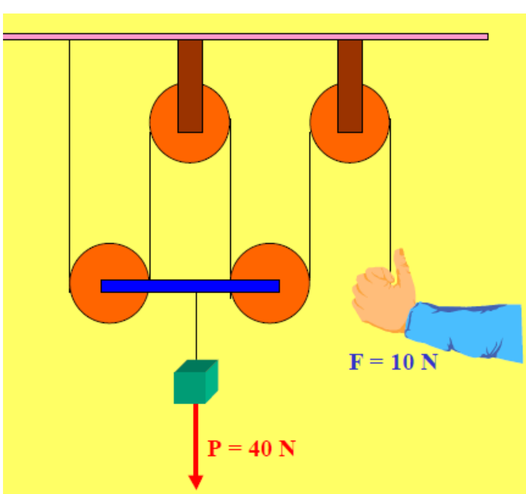


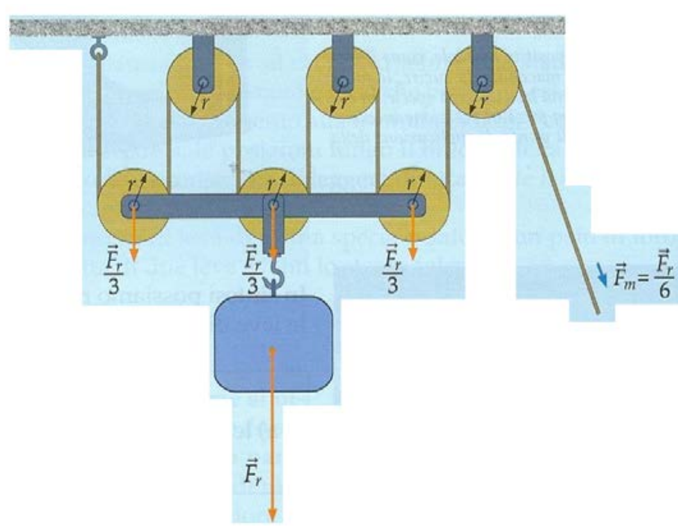
Paranco composto

E' costituito da **n** carrucole mobili e da **n** carrucole fisse e consente di sollevare un peso **P** (resistenza) con una forza motrice **F** pari a: $\mathbf{F}=\frac{\mathbf{P}}{2\mathbf{n}}$ essendo **n** il numero di carrucole mobili.

Infatti il numero di tratti di fune tesi tra due staffe (ovvero quella fissa alla quale sono vincolate le carrucole fisse e la carrucola mobile alla quale sono attaccate le carrucole mobili) risulta il doppio del numero delle carrucole mobili, e poiché il carico (in tal caso il peso **P**) verrà ripartito in parti uguali fra questi capi della fune, e la forza motrice **F** deve equilibrare soltanto uno di essi, si può concludere che la forza motrice è uguale alla resistenza divisa per il doppio del numero delle carrucole mobili.

$\mathbf{V}=\frac{R}{F}=\frac{R}{\frac{R}{2n}}=\mathbf{2n}$ vantaggio del paranco





In generale diremo che una forza resistente $P=R=F_R$ è equilibrata da una forza motrice $\mathbf{F}=\frac{\mathbf{P}}{2\mathbf{n}}$ essendo **n** il numero di carrucole mobili.

Carrucola mobile

Carrucola mobile

Questa volta è una estremità della fune ad essere fissata rigidamente (ad esempio ad un soffitto), mentre il disco della puleggia rotola lungo la fune senza strisciare.

C è la carrucola mobile alla cui staffa è applicato il corpo K_1 di peso $\vec{P} = \vec{F_r}$.

La fune è fissa all'estremo A_1, all'altro estremo A_2 è applicata la forza equilibrante $\vec{F_m}$ mediante il corpo K_2 con relativa carrucola C_2.

Il vincolo A_1, agendo attraverso la fune A_1B_1, non può che applicare una reazione vincolare $\vec{\Phi}$ diretta come A_1B_1.

La carrucola mobile si trova soggetta a tre forze $\vec{F_r}$, $\vec{F_m}$, $\vec{\Phi}$.

Per l'equilibrio, le tre forze debbono essere complanari e le loro rette d'azione devono passare per uno stesso punto M.

Dunque il sistema delle tre forze deve giacere nel piano verticale perchè tale è $\vec{F_r} = \vec{P}$.

OM è bisettrice dell'angolo $\alpha = A_2\hat{M}A_1$ perchè risulta: $OB_1 = OB_2 = r$. Quindi è: $\Phi = F$

Infine è: $F_r = 2F_m \cos\frac{\alpha}{2}$

Il vantaggio di questa macchina è:

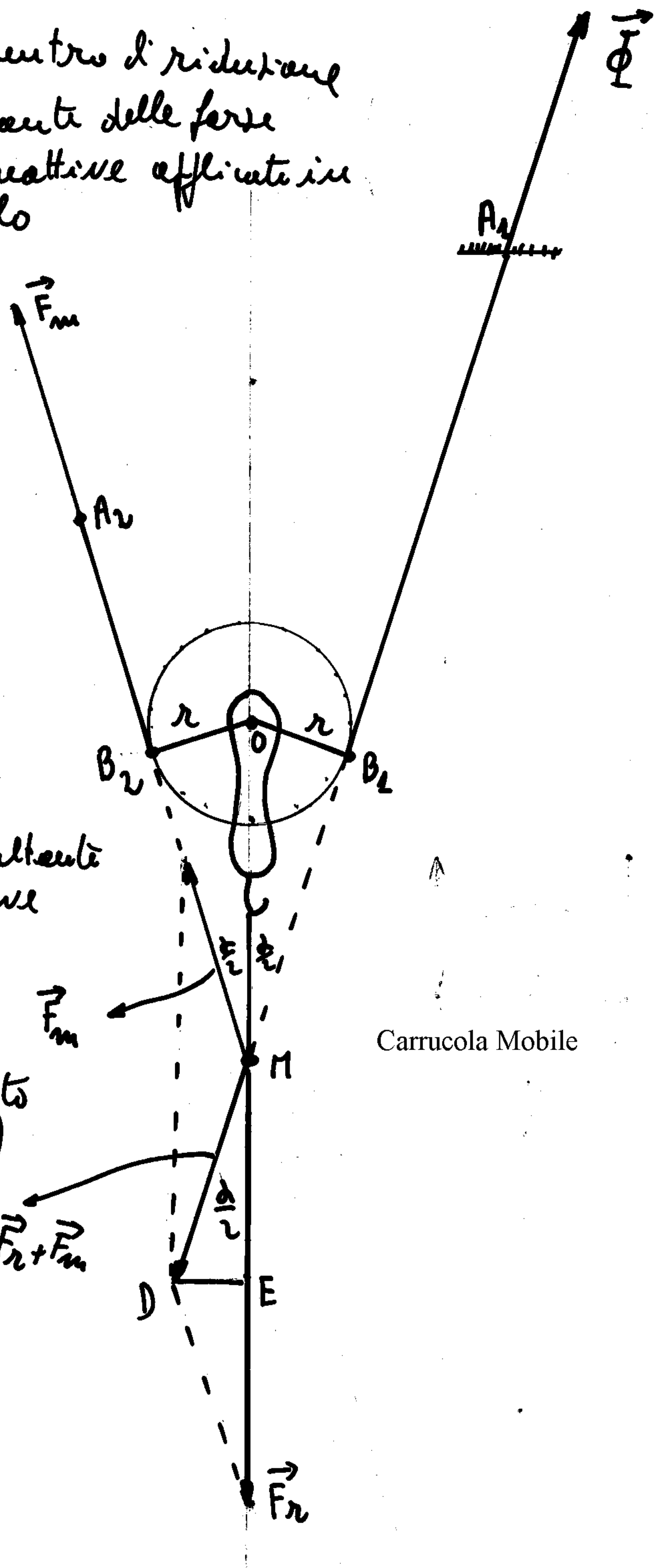
$$V = \frac{F_r}{F_m} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$$

1) B_1 è il centro di riduzione
2) Il risultante delle forze attive e reattive applicate in B_1 è nullo

3) $\begin{cases} D - M = \vec{F} = \\ = \vec{F}_r + \vec{F}_m \\ \vec{F} = -\vec{\Phi} \end{cases}$

4) Il momento di $\vec{\Phi}$ rispetto a B_1 è nullo. Quindi il momento risultante delle forze attive e reattive rispetto a B_1 è nullo se il momento (rispetto a B_1) di $\vec{F}_m$ è uguale ed opposto al momento di $\vec{F}_r$.

$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_m$



Carrucola Mobile

In particolare per $\alpha = 0$ $[A_1B_1 \parallel A_2B_2]$ è:

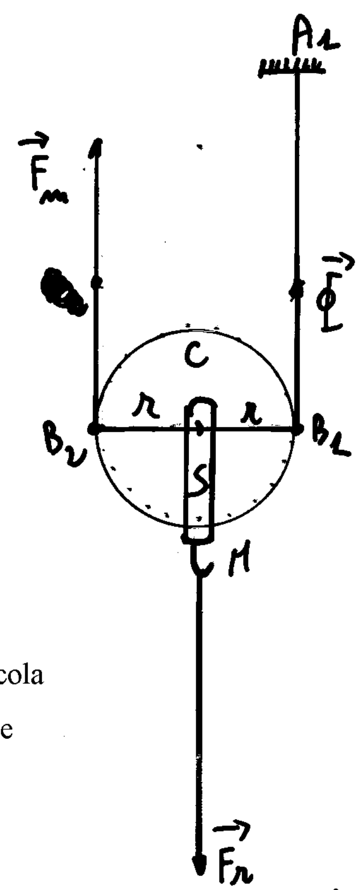
$$F_r = 2F_m \quad \text{cioè } V = 2 \text{ (Vantaggio massimo)}$$

Un corpo pesante Kg è equilibrato da un corpo pesante la metà.

Possiamo assumere B_1 come centro di riduzione (cioè come punto fisso) ed immaginare applicate in B_1 le forze $\vec{F}_m, \vec{F}_r, \vec{\Phi}$. Il risultante di queste tre forze è nullo.

Il momento risultante rispetto a B_1 è:

$$(M-B_1)\wedge\vec{F}_r + (M-B_2)\wedge\vec{F}_m + (A_1-B_1)\wedge\vec{\Phi} = \vec{0} \quad \vec{0}$$



Carrucola Mobile

$$(M-B_1)\wedge\vec{F}_r = (B_2-M)\wedge\vec{F}_m$$

Uguagliando i loro moduli abbiamo:

$$F_r \cdot \overline{B_1M}\sin\frac{\alpha}{2} = F_m \cdot \overline{B_1M}\sin\alpha =$$

$$= 2F_m \cdot \overline{B_1M}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$F_r = 2F_m\cos\frac{\alpha}{2}$$

Diversamente possiamo dire che la condizione di equilibrio della carrucola mobile si ha quando il momento risultante delle forze attive (F_r ed F_m) rispetto al punto fisso B_1 è nullo.

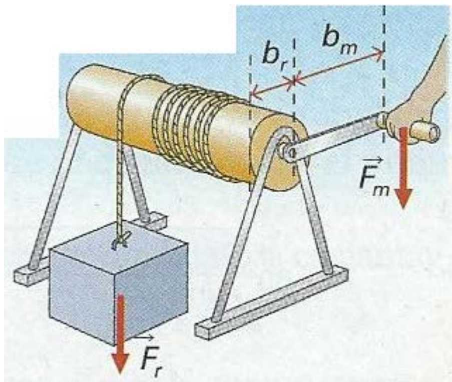
Nel caso della fig. 1 abbiamo:

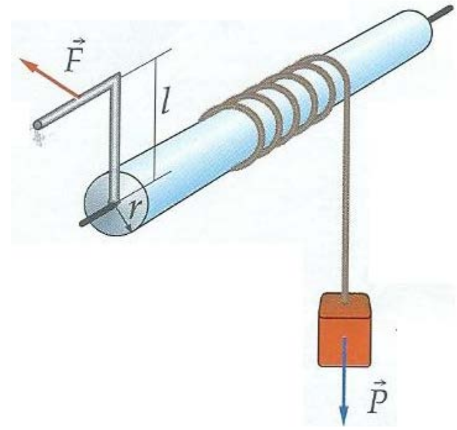
$$\vec{\Phi} = \vec{F}_m + \vec{F}_r \qquad \Phi = F_r - F_m$$

$$|(M-B_1)\wedge\vec{F}_r| = |(B_2-M)\wedge\vec{F}_m|$$

$$r\cdot F_r = 2r\cdot F_m \qquad F_m = \frac{F_r}{2}$$

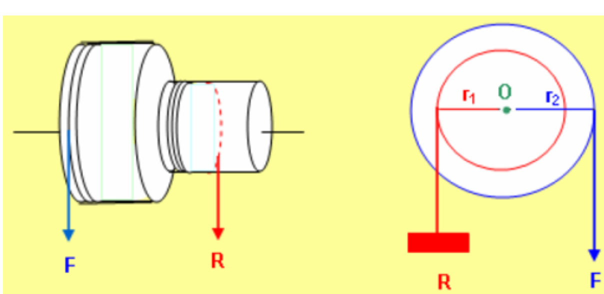
Verricello

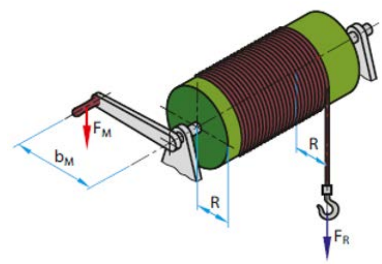




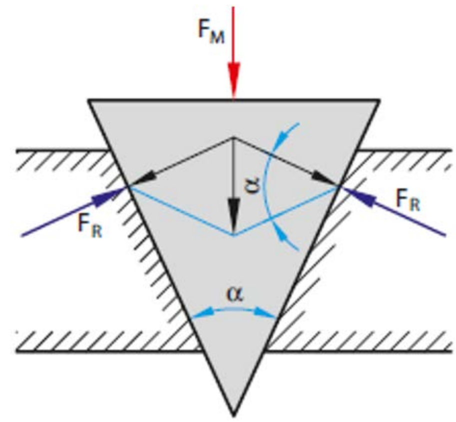
Nel verricello la forza resistente è il peso da sollevare, la forza motrice è applicata alla manovella. La forza resistente è applicata ad un estremo della fune (il suo braccio è b_r), la forza motrice e viene applicata ad una manovella lunga b_m che fa girare il cilindro. Girando la manovella, la fune si arrotola sul cilindro e solleva un peso lungo la verticale. Poiché il braccio della forza motrice è maggiore di quello della forza resistente, la macchina è sempre vantaggiosa. Il verricello permette di sollevare corpi pesanti applicando piccole forze.

Si ha l'equilibrio quando sono uguali i momenti della forza resistente e della forza motrice. Questo si verifica se: $F_m \cdot b_m = F_r \cdot b_r$





Cuneo

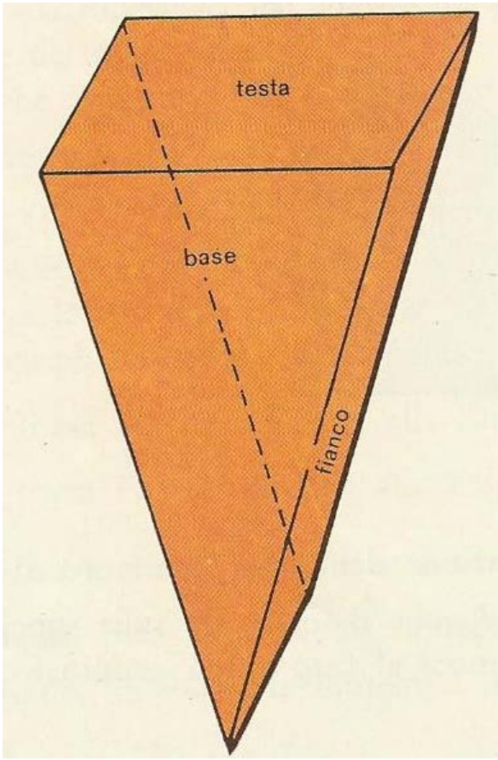


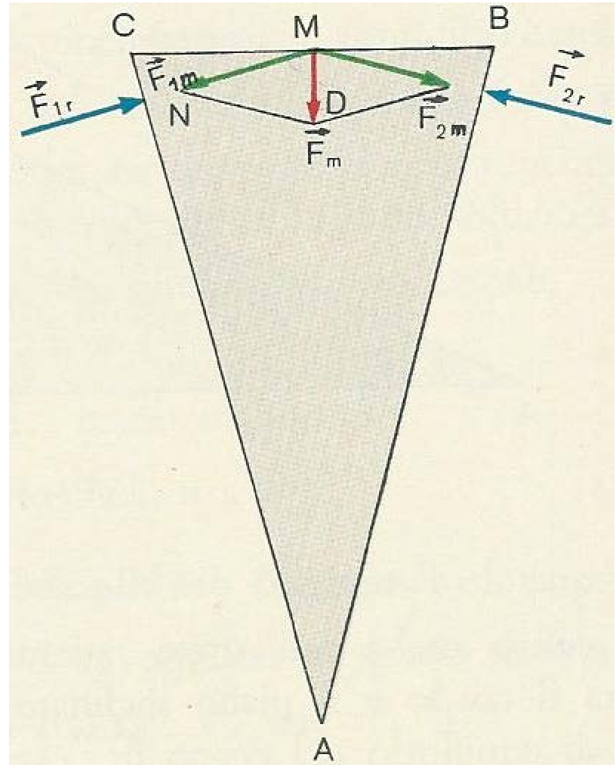
Il cuneo è un corpo rigido avente la forma di un prisma a sezione triangolare sul quale la forza motrice agisce perpendicolarmente alla testa. Si dimostra che $\mathbf{F_M = 2F_R \sin\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V = \frac{F_R}{F_M} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}}$

Da ciò si deduce che più è piccolo l'angolo α più grande sarà il vantaggio del cuneo.

Esempi di cuneo sono i coltelli, la scure, i rasoi ed altro. La teoria del cuneo può riportarsi a quella del piano inclinato. Nel caso particolare che la base abbia la forma di un triangolo rettangolo, esso si può considerare un piano inclinato. Sia **ABC** la sezione del cuneo parallela alla base e contenente il baricentro del cuneo stesso. Indichiamo con $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}$ il vettore che rappresenta la forza motrice applicata in direzione perpendicolare alla testa **BC** del cuneo nel suo punto medio **M**. Scomponiamo $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}$ in due componenti $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1m}}$ ed $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2m}}$ aventi direzioni, rispettivamente, perpendicolari ai fianchi **AB** e **AC** del cuneo. Per l'equilibrio del cuneo dobbiamo applicare le forze $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1r}}$ ed $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2r}}$ rispettivamente opposte a $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1m}}$ ed $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2m}}$. $\quad M\overset{\triangle}{N}D[s]A\overset{\triangle}{B}C \quad \Rightarrow \quad F_m : F_{1m} = BC : AC \quad \Rightarrow$

$\mathbf{F_m : F_{1m} = b : \ell}$ avendo posto: $BC = b \quad AC = \ell \quad \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1m}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1r}}$ dalla quale si deduce che il cuneo è una macchina vantaggiosa quando la lunghezza $BC = b$ della testa è minore della lunghezza $AC = \ell$ del fianco.


testa
base
fianco


C
M
B
$\vec{F}_{1r}$
$\vec{F}_{1m}$
N
D
$\vec{F}_{2m}$
$\vec{F}_{2r}$
$\vec{F}_m$
A

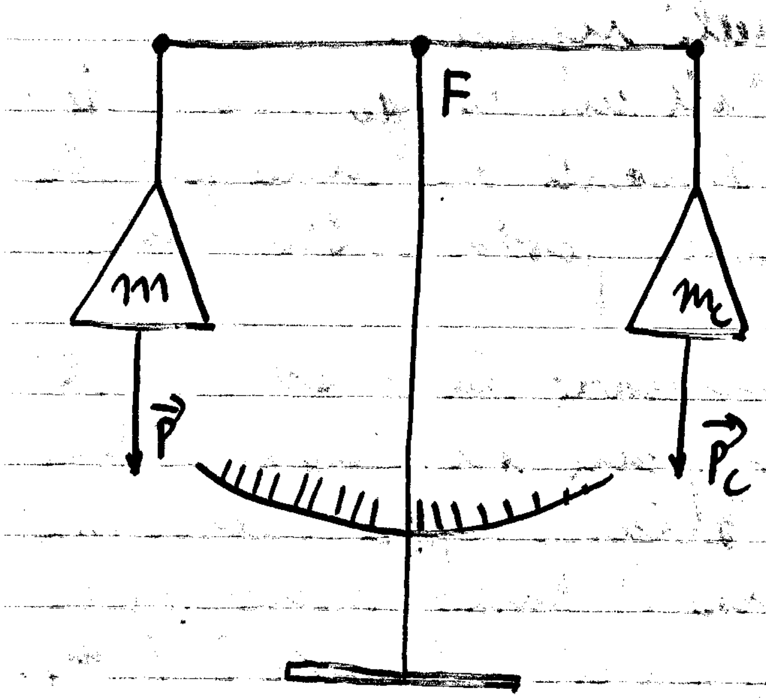
Bilancia

La bilancia serve a stabilire l'uguaglianza di due masse attraverso il confronto dei loro pesi.
Teoricamente si deve considerare la bilancia come un apparecchio che misura le masse, ed il dinamometro come un apparecchio che misura i pesi.
Essa può essere considerata come una leva di primo genere a bracci uguali col fulcro posto al centro di un'asta rigida (giogo) ai cui estremi sono appesi due piattelli uguali.
Al giogo è solidale un lungo indice che può oscillare davanti ad una piccola scala graduata posta sulla base della bilancia.
Volendo determinare la massa m di un corpo, lo si pone su uno dei due piattelli della bilancia, che viene così sollecitato verso il basso dalla forza peso del corpo, la cui intensità è $P = mg$.

Si mette quindi una massa campione m_c sull'altro piatto della bilancia. Questo viene sollecitato verso il basso dalla forza peso avente intensità $P_c = m_c g$.
Se i bracci della bilancia sono uguali, se sono pure uguali i pesi dei due piatti, l'equilibrio viene raggiunto quando: $P = P_c$; $m g = m_c g$
cioè quando:

$$m = m_c$$

La bilancia viene impiegata esclusivamente come strumento di misura della massa.



Particolarmente importante è la bilancia di precisione o bilancia analitica o bilancia per analisi. Essa viene usata nei laboratori. Risulta costituita:

1) da un'asta rigida G, detta giogo, che può ruotare attorno ad un asse orizzontale; tale asse è realizzato mediante lo spigolo di un prisma triangolare F di acciaio durissimo, detto coltello, che poggia su un piano orizzontale A di agata posto all'estremità di una colonna verticale. [l'agata è un minerale precisamente una varietà di calcedonio che è una varietà microcristallina di silice]

La base del coltello F è solidale col giogo G. Lo spigolo di F è il fulcro. Il giogo è costruito in metallo leggero: bronzo d'alluminio

2) Ai suoi estremi il giogo porta altri due coltelli (D ed E) ai quali, mediante apposite staffe (f_1 ed f_2), sono appesi

due piattelli (B e C) per l'appoggio di pesi in esame.
Gli spigoli dei tre coltelli F, D, E sono fra loro paralleli e poggiano su piani molto duri, che di solito sono di agata.
3) Al giogo è solidale un lungo indice I che può oscillare davanti ad una piccola scala graduata S a zero centrale.
4) Il baricentro del giogo G si trova sul piano verticale passante per lo spigolo del coltello centrale F ed è posto un poco al di sotto dello spigolo stesso. Questo ci assicura che a piatti scarichi la bilancia è in equilibrio stabile.
5) Le masse campione sono contenute in una scatoletta detta massiera o pesiera e di solito non superano la portata della bilancia. I pesi inferiori al centigrammo sono realizzati col cosiddetto cavalierino di Berzelius, costituito da un filo di platino o di alluminio piegato a forcella e del peso, in generale, di 10 mg$_p$;

manovrando all'esterno della custodia, si può appoggiarlo in vari punti del giogo. Quando si trova all'estremità di un braccio equivale a 10 mg_p posti sul piatto sottostante. Poichè le divisioni del giogo sono 10 per ogni braccio, il minimo valore a cui può essere equivalente il cavalierino è $\frac{1}{10}$ di 10 mg_p, cioè 1 mg_p.
Per esempio: se il cavalierino è sulla divisione 7, il suo effetto equivale a quello di un peso di 7 mg_p posto sul piatto.

6) Per avere una misura esatta della massa i due bracci b_1 e b_2 debbono essere perfettamente uguali, come uguali debbono essere i pesi dei due piattelli. Però queste condizioni non sono sempre rigorosamente verificate. I cosiddetti metodi di pesata (metodo della doppia pesata, metodo della tara) servono ad eliminare le cause d'errore derivanti da tali difetti di costruzione.

7) Una bilancia di precisione è caratterizzata da:
a) sensibilità σ
Dicesi sensibilità di una bilancia il rapporto σ tra l'angolo ϑ descritto dall'indice J ~~già~~ solidale col giogo (a partire dalla sua posizione di equilibrio) e la massa m responsabile di questa inclinazione della bilancia, cioè:

$$\sigma = \frac{\vartheta}{m}$$

[σ è il rapporto tra l'angolo ϑ di cui ruota l'indice J e la massa m di sovraccarico che produce tale spostamento dalla primitiva posizione di equilibrio]
Se corrispondentemente a quest'angolo ϑ andiamo a leggere il numero di divisioni della scala avremo che l'angolo è direttamente proporzionale a questo numero n, perchè più grande è l'angolo maggiore è il numero n di divisioni che si legge, cioè:

$\vartheta = K \cdot n$ da cui: $\sigma = K \cdot \frac{n}{m}$

Se poniamo $K=1$ otteniamo: $\sigma = \frac{n}{m}$

«La sensibilità di una bilancia è misurata dal numero n di divisioni di cui si sposta l'indice sulla scala graduata quando su uno dei piatti si aggiunge la massa di 1 milligrammo»

«La sensibilità di una bilancia rappresenta la minima massa che la bilancia è ancora in grado di sentire, cioè dal valore della massa in grado di causare lo spostamento di una divisione dalla posizione di equilibrio dell'indice I sulla scala S.»

Sperimentalmente si preferisce ~~misurare~~ definire la sensibilità come il rapporto

$\sigma = \frac{m}{n}$

tra il sovraccarico m ed il numero di divisioni di cui si sposta l'estremità dell'indice I sulla scala S. Tale rapporto non dipende da m e si misura in milligrammi/divisione

b) La prontezza è data dal tempo che impiega la bilancia a fermarsi quando è messa in oscillazione
c) La portata è il valore massimo della massa che può essere posta su ciascun piattello senza che la bilancia venga danneggiata.

sensibilità = massa che posta sopra un piatto d'una bilancia in equilibrio sposta l'indice della scala d'una divisione.
Osservazione
La sensibilità di una bilancia è direttamente proporzionale alla lunghezza dei bracci ed inversamente proporzionale alla massa del giogo, cioè: $\sigma \propto \frac{b}{m_G}$

Si nota quindi una contraddizione cioè se aumentiamo la lunghezza del braccio (aumenta la sensibilità) aumenta la massa del giogo (la sensibilità diminuisce). Per questo motivo il giogo della bilancia è forato.

Per ridurre gli errori sistematici dovuti alla disuguaglianza dei due bracci della bilancia si adoperano uno dei due seguenti metodi:
Metodo della tara o di Borda o a sensibilità costante o a carico costante.
Se vogliamo determinare la massa m_x di un corpo con questo metodo dobbiamo operare come segue:
1) Mettiamo in uno dei piatti (B) della bilancia una zavorra (ad es. pallini di piombo o altro) in quantità tale che la massa m_T della zavorra sia di poco superiore alla massa m_x da determinare, nell'altro piatto C mettiamo il corpo di cui vogliamo misurare la massa m_x. Poichè risulta $m_T > m_x$ per avere equilibrio dobbiamo mettere sul piatto C delle masse (che si traggono dalla massiera e che indichiamo complessivamente con m_c).
All'equilibrio possiamo scrivere:

$$m_T g \cdot b_1 = (m_x + m_1) g b_2 \qquad (1)$$

Ora togliamo dal piatto C le masse m_x ed m_1 ed aggiungiamo tante masserelle (~~totale m~~) fino a raggiungere nuovamente l'equilibrio. Sia la loro massa complessiva m_2. All'equilibrio otteniamo:

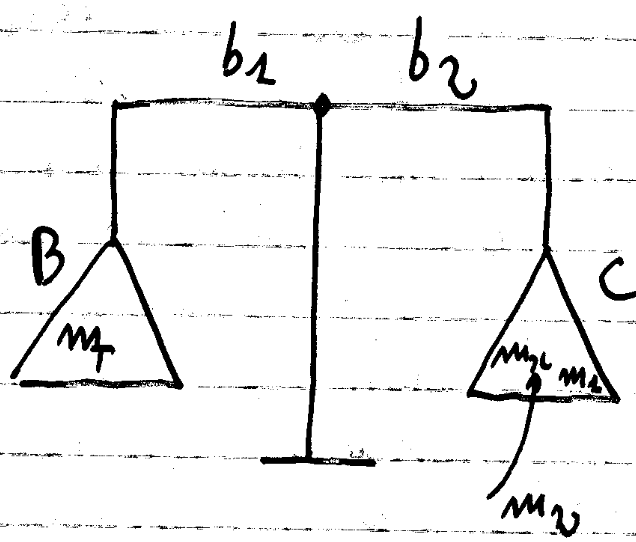
$$m_T g b_1 = m_2 g b_2 \qquad (2)$$

Dalle relazioni (1) e (2) ~~otteniamo~~ ricaviamo:

$$(m_x + m_1) g b_2 = m_2 g b_2$$

$$m_x = m_2 - m_1$$

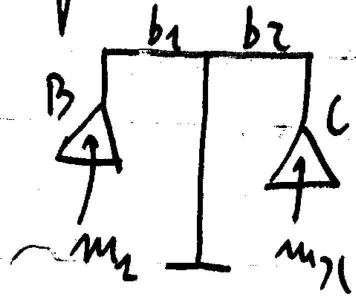
In questa maniera ovviamo alla disuguaglianza dei bracci.



Metodo della doppia pesata o di Gauss

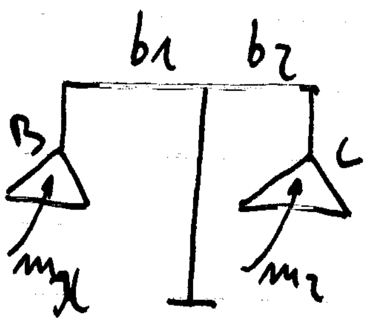
Consiste nel pesare due volte il corpo ponendolo prima sul piattello C e poi sul piattello B e nel prendere come massa del corpo la media geometrica (o la media aritmetica) dei risultati ottenuti nelle singole pesate.

Poniamo il corpo di massa m_x sul piattello C; l'equilibrio si ottiene ponendo sul piatto B le masse m_1.



$$m_1 g b_1 = m_x g b_2 \qquad (1)$$

Si ripete la pesata ponendo la massa m_x sul piatto B ed equilibrando mediante le masse m_2.



$$m_2 g b_2 = m_x g b_1 \qquad (2)$$

Moltiplicando membro a membro la ① e ② otteniamo:

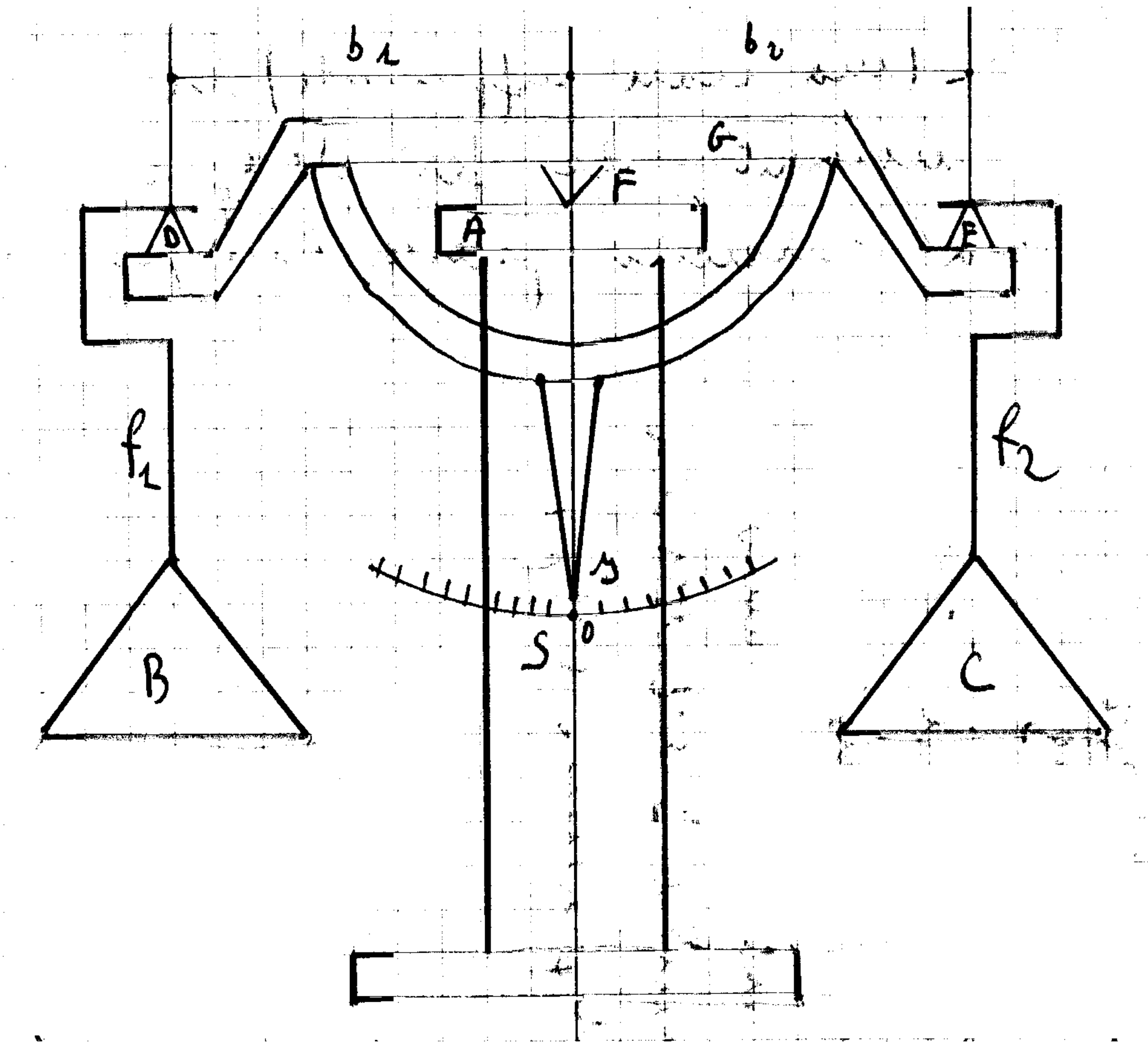
$$m_x^2 b_1 b_2 g^2 = m_1 m_2 b_1 b_2 g^2$$

$$m_x^2 = m_1 m_2 \qquad m_x = \sqrt{m_1 m_2}$$

Potremmo scegliere per m_x il valore

$$m_x = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

in quanto i valori m_1 ed m_2 non differiscono poi tanto tra loro.



• **G** = giogo della bilancia • **F** = coltello principale della bilancia . Lo spigolo di F , detto **fulcro** della bilancia , materializza l'asse orizzontale attorno al quale ruota con attrito minimo il giogo **G** della bilancia . • **S** = scala della bilancia a zero centrale • **I** = indice solidale col giogo

• Il perfetto allineamento degli spigoli dei 3 coltelli D , F , E rappresenta una condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'uguaglianza dei momenti dei pesi che agiscono sui piatti della bilancia quando questa è in equilibrio • $\sigma = \frac{\vartheta}{m} = k \cdot \frac{n}{m}$ σ si può misurare teoricamente in $\frac{rad}{g}$, ma questo non è pratico . Si usa come unità di misura : $\{\sigma\} = \frac{divisioni}{m\,g}$ in quanto l'angolo ϑ si esprime in divisioni della scala **S** lungo cui si muove l'estremo dell'indice **I** ed **m** in **milligrammi** (mg) .