Unità Didattica N° 12 :

Dinamica del corpo rigido

Unità didattica N° 12 La dinamica del corpo rigido

Obiettivi dell'unità didattica

- **In questa unità didattica vedremo che per il moto rotatorio esiste un'equazione angolare equivalente a $\vec{F} = m\vec{a}$. Essa stabilisce una relazione tra il momento della forza applicato ad un corpo ed il prodotto tra la sua accelerazione angolare ed una grandezza , detta momento d'inerzia , che ne misura l'inerzia di rotazione . Vedremo inoltre che un corpo in moto rotatorio possiede un'energia di rotazione ed un momento angolare .**
- **Il termine momento viene utilizzato in fisica per indicare diverse grandezze , tutte collegate alla rotazione .**

Il vettore $\vec{M} = \vec{\tau}$, momento di una forza introdotto per le rotazioni ,è l'equivalente della forza $\vec{F} = m\vec{a}$; esso è la causa della rotazione : la sua presenza o meno determina l'esistenza o meno di una rotazione .

- **La grandezza scalare I , momento d'inerzia di un corpo rigido , è l'equivalente della massa e , quindi , esprime la misura della resistenza di un corpo ad essere messo in rotazione .**

Il momento d'inerzia I lega la causa della rotazione , il momento della forza $\vec{M} = \vec{\tau}$, con il suo effetto , l'accelerazione angolare α .

- **Il momento angolare $\vec{L}$ descrive il modo nel quale in natura avvengono le rotazioni dei corpi rigidi . Il momento angolare o momento della quantità di moto è associato alla tendenza di un corpo a rimanere in rotazione .**
- **In questa unità didattica introdurremo le seguenti grandezze fisiche :**

$$\vec{\ell} = (P - O) \wedge \vec{q} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \qquad \ell = mr\text{v} = mr^2\omega = I\omega \qquad \vec{\ell} = mr^2\vec{\omega} = I \cdot \vec{\omega}$$

$\vec{\ell}$ **= momento angolare di un corpo di massa m avente momento d'inerzia I e velocità angolare $\vec{\omega}$**

Il momento angolare obbedisce ad una legge di conservazione simile a quella seguita dalla quantità di moto .

Legge di conservazione del momento angolare : Se su un corpo non agisce alcun momento meccanico allora il suo momento angolare rimane costante in modulo , direzione e verso .

$\vec{M} = (P-O) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} =$ **momento della forza $\vec{F}$ rispetto al punto O**

Unità didattica N° 12 La dinamica del corpo rigido

$I = m \cdot r^2$ = **momento d'inerzia** di un punto materiale P di massa **m** , rispetto ad una retta **a** , dalla quale dista **r**

$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$ = **momento d'inerzia di un sistema di punti materiali rispetto ad una retta a**

Il teorema dell'asse parallelo o Teorema di Huygens-Steiner

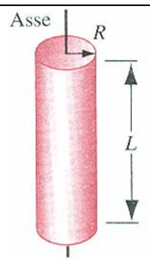
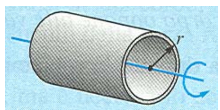
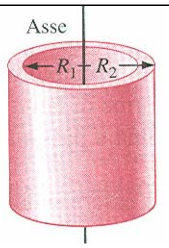
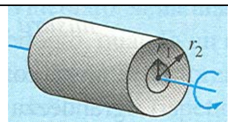
Il **momento d'inerzia** di un corpo rigido rispetto ad un asse di rotazione **z** è uguale al **momento d'inerzia** dello stesso corpo rigido rispetto ad una retta z' parallela a **z** e passante per il centro di massa **C** del corpo rigido più il termine $m \cdot d^2$. $\boxed{I_z = I_{z'} + m \cdot d^2}$

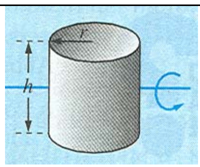
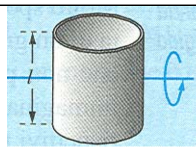
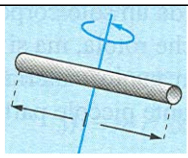
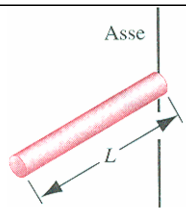
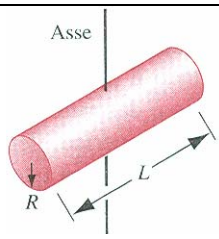
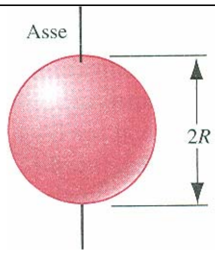
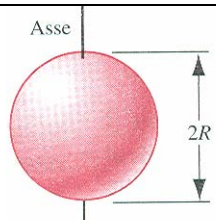
I_z = momento d'inerzia del corpo rigido di massa **m** rispetto all'asse di rotazione **z**

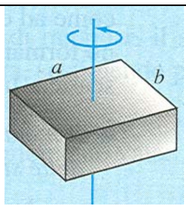
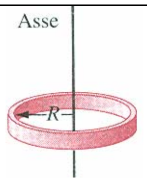
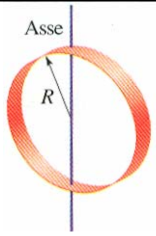
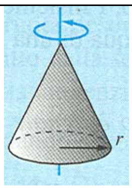
$I_{z'}$ = momento d'inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse z' parallelo a **z** e passante per il centro di massa del corpo rigido

d = distanza tra le due rette parallele **z** e z'

Momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi

 $I = \frac{1}{2} m R^2$ **Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse del cilindro**	 **Strato cilindrico sottile** **Cilindro Cavo rispetto all'asse del cilindro** $I = m r^2$
 **Guscio cilindrico rispetto all'asse del cilindro** $I = \frac{1}{2} m \left(R_1^2 + R_2^2\right)$	 **Cilindro Cavo** $I = \frac{1}{2} m \left(r_1^2 + r_2^2\right)$

 **cilindro pieno** (o **disco**) rispetto ad un asse diametrale passante per il centro di massa $I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$	 **Tubo sottile** $I = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$
 **Sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m con asse di rotazione perpendicolare alla sbarra nel suo centro** $I = \frac{1}{12}m\ell^2$	 $I = \frac{1}{3}m\ell^2$ **Sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m con asse di rotazione perpendicolare alla sbarra in uno degli estremi**
 **Cilindro pieno** (o **disco**) rispetto ad un asse diametrale passante per il centro di massa $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$	**Cilindro pieno con asse di rotazione coincidente con una generatrice del cilindro .** $I = \frac{3}{2}mr^2$
 $I = \frac{2}{5}mR^2$ **Sfera piena di raggio r e massa m con asse di rotazione coincidente con un qualsiasi diametro**	 $I = \frac{2}{3}mR^2$ **Sfera cava con guscio sottile con asse di rotazione coincidente con un qualsiasi diametro**

Sfera piena di raggio r e massa m una qualsiasi retta tangente alla sfera $$I = \frac{7}{5} m r^2$$	 **Parallelepipedo o lastra rispetto ad un asse perpendicolare passante per il centro** $$I = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$$
 $$I = m r^2$$ **Anello** di raggio r con asse di rotazione coincidente con l'asse di simmetria dellè'anello	 **Anello** rispetto ad un asse diametrale $$I = \frac{1}{2} m R^2$$
 $$I = \frac{3}{10} m r^2$$ **Cono circolare retto con la base di raggio r con l'asse di rotazione coincidente con asse del cono**	

Unità didattica N° 12 La dinamica del corpo rigido

Per i corpi rigidi che ruotano e traslano valgono le seguenti leggi :

La seconda legge della dinamica per le rotazioni attorno ad un asse fisso , ovvero la seconda equazione cardinale per un corpo rigido che ruota

$$\tau = M = I \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I \cdot \alpha$$

$M = \tau$ = **momento risultante** rispetto all'asse di rotazione di tutte le forze che agiscono sul corpo rigido

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$ = **accelerazione angolare** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione = **accelerazione angolare** di un punto qualsiasi del corpo rigido

Questa legge stabilisce che per produrre un'accelerazione angolare α è necessario un momento meccanico ed il valore di questo momento meccanico è direttamente proporzionale al momento d'inerzia I .

La seconda equazione cardinale per un corpo che ruota può essere scritta anche nella seguente maniera : $M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$

Il **rapporto tra la variazione del momento angolare ed il tempo in cui si verifica è uguale al momento meccanico della forza (o del sistema di forze) applicata al corpo** .

L = **momento angolare totale** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione

La seconda legge della dinamica per un corpo rigido che trasla , ovvero la prima equazione cardinale per un corpo rigido che trasla

$$\vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t}$$

$\vec{R}^{(e)}$ = **risultante** di tutte le forze che agiscono sul corpo rigido ed immaginate applicate nel centro di massa del corpo rigido

$\vec{a}_c$ =**accelerazione** del centro di massa del corpo rigido

$\vec{Q}$ = **quantità di moto** del corpo rigido = **quantità di moto** del centro di massa del corpo nel quale immaginiamo di applicare l'intera massa del corpo

m = **massa** del corpo rigido

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

I =momento d'inerzia del corpo che ruota

ω = velocità angolare del corpo che ruota rispetto all'asse di rotazione

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota e trasla

$$E_c = T = K = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$ **teorema di KÖnig**

L'energia cinetica totale di un corpo rigido che compie sia un moto traslatorio che un moto rotatorio intorno all'asse passante per il proprio centro di massa è data dalla somma dell'energia cinetica di traslazione della massa di tutto il corpo rigido supposta concentrata nel centro di massa e dell'energia di rotazione rispetto all'asse passante per il centro di massa .

M = massa del corpo rigido

V_C = velocità del centro di massa del corpo = velocità di traslazione dell'asse di rotazione

I_C = momento d'inrezia del corpo rispetto all'asse passante per il centro di massa .

Introduzione alla dinamica dei corpi rigidi

Corpo rigido è un sistema continuo di punti materiali le cui reciproche distanze rimangono invariate durante l'applicazione su di esso di un sistema qualsiasi di forze esterne . Un corpo rigido conserva la sua forma durante il moto . Per un corpo rigido possiamo distinguere due tipi di moto : **1) moto di pura traslazione 2) moto di pura rotazione attorno ad un asse** .

- **Moto di pura traslazione**

Un corpo si muove di **moto traslatorio** quando tutti i suoi punti subiscono spostamenti **equipollenti** , cioè aventi la **stessa direzione** , lo **stesso verso** e la **stessa lunghezza** .

In un moto di pura traslazione tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità vettoriale $\vec{v}$. Tutte le particelle che costituiscono il corpo rigido descrivono traiettorie fra loro parallele .

- **Moto di pura rotazione**

Un corpo rigido si muove di **moto rotatorio** quando tutti i suoi punti descrivono traiettorie circolari aventi i centri su di una retta **r** (detta **asse di rotazione**) e giacenti su piani ortogonali ad **r** .

In un **moto di pura rotazione** tutti i punti materiali costituenti il corpo rigido percorrono con la stessa velocità angolare ω circonferenze di raggio diverso a seconda della loro distanza dall'asse di rotazione . Le circonferenze giacciono su piani perpendicolari all'asse di rotazione che può essere fisso o può cambiare la sua direzione rispetto al corpo durante il moto .

Il moto più generale di un corpo rigido si può sempre considerare come la combinazione di una opportuna rotazione e di una opportuna traslazione . Questo significa che è sempre possibile trovare un sistema di riferimento che trasli e non ruoti rispetto al quale il moto del corpo rigido sia esclusivamente rotatorio . Si definisce **velocità angolare** di un corpo rigido la velocità angolare di un suo punto qualsiasi . La velocità angolare di un corpo rigido può essere rappresentata da un vettore $\vec{\omega}$ parallelo all'asse di rotazione ed orientato come un osservatore che , disposto nello stesso verso , vede ruotare il corpo rigido in senso antiorario .

Ciò premesso , possiamo affermare che la velocità lineare $\vec{v}$ e quella angolare $\vec{\omega}$ di un punto P del corpo rigido sono legate tra loro dalla seguente relazione vettoriale :

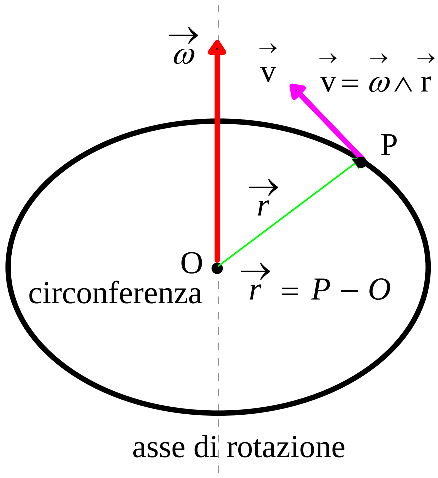
$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge (P - O) \qquad [*]$$

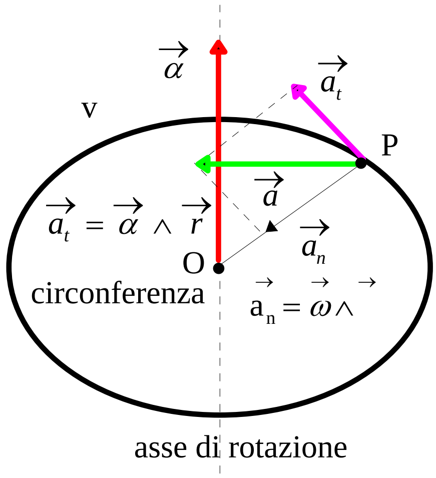
dove **O** è il piede della perpendicolare condotta dal punto P all'asse di rotazione .

- Il moto di un corpo rigido si dice **rototraslatorio** quando il carpo si muove simultaneamente di moto rotatorio e traslatorio .
- Il moto di un corpo rigido può essere sempre considerato come risultante di un moto traslatorio di un suo punto O , comunque preso , e di un moto rotatorio attorno al punto stesso . Questo significa che un sistema di forze agenti su un corpo rigido è equivalente ad un'unica forza $\vec{R}$ applicato in O uguale al **risultante** $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, più una coppia di momento $\vec{M}_O$ uguale al **momento risultante** del sistema di forze rispetto ad **O** .
- Se assumiamo il centro di riduzione **O** coincidente col centro di massa **C** del corpo rigido , la forza $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ imprime al corpo rigido un moto traslatorio regolato dalla legge $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_C$ (**m**= massa del corpo rigido) identica alla **legge fondamentale** della dinamica del punto materiale . . Il momento risultante $\vec{M}_O = \vec{M}_C$ determina un moto rotatorio del corpo rigido attorno ad un asse passante per il centro di massa .
- Posiamo attribuire alle grandezze angolari ω ed α una forma vettoriale ammettendo che i vettori $\vec{\omega}$ ed $\vec{\alpha}$ abbiano come direzione l'asse di rotazione (cioè la retta perpendicolare al piano della circonferenza e passante per il suo centro O) e verso tale da verificare le seguenti relazioni vettoriali :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}} \qquad \boxed{\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}} \qquad \boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}}$$

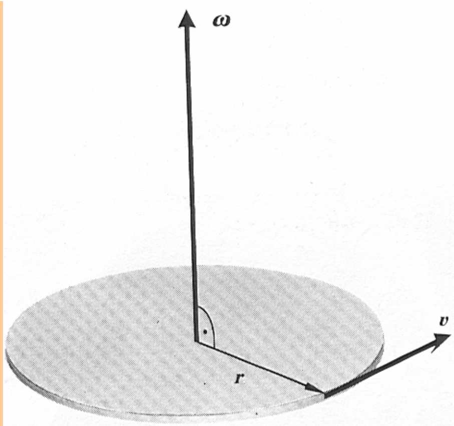
$\vec{\omega}$ ed $\vec{\alpha}$ possono essere pensati applicati in **P** in quanto sono vettori liberi .

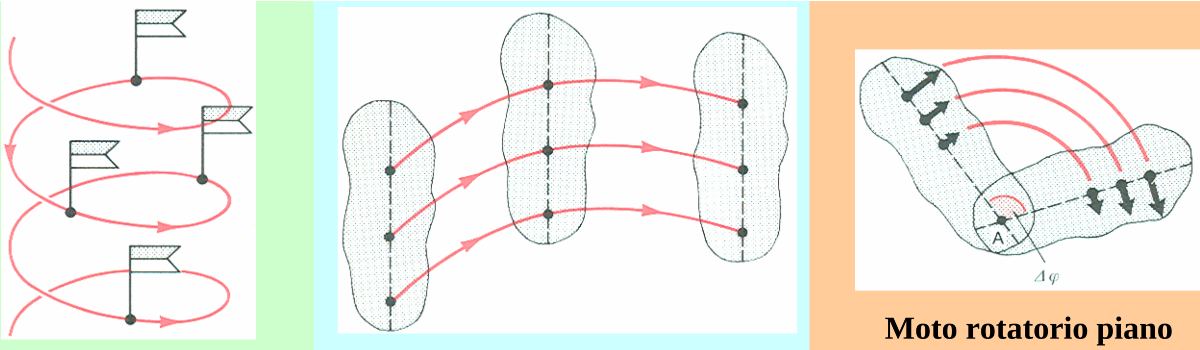




Velocità angolare e velocità lineare .

La **velocità lineare** aumenta con il raggio , mentre la **velocità angolare** è sempre la stessa per tutti i punti del corpo rigido che ruota .

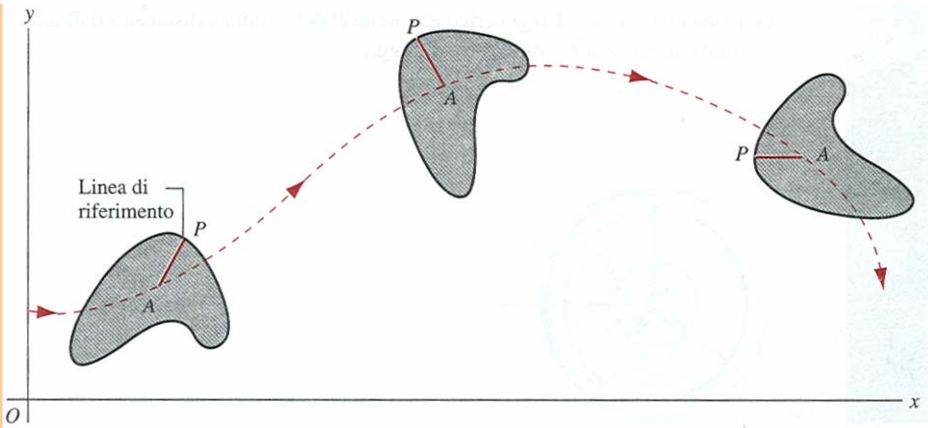




Moto traslatorio spaziale

Moto traslatorio piano

Moto rotatorio piano



Rappresentazione del moto rototraslatorio di un generico corpo rigido . In questo caso particolare il moto traslatorio è confinato nel piano *xy* . In ogni istante l'asse di rotazione è parallelo all'asse z ed il suo punto d'intersezione con il piano *xy* si muove lungo la linea tratteggiata . Il moto rotatorio è messo in evidenza per mezzo del segmento *AP* .

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso

Consideriamo un corpo rigido che ruota con **velocità angolare costante** attorno ad un asse fisso rispetto ad un sistema di riferimento inerziale . Tutte le particelle in cui possiamo pensare suddiviso il corpo , ruotano con la stessa velocità angolare ω ma con **diversa velocità lineare** . Infatti le singole particelle del corpo rigido considerate puntiformi descrivono traiettorie circolari concentriche con l'asse di rotazione e giacenti su piani perpendicolari all'asse di rotazione .
Tutte queste particelle ruotano attorno all'esse con la stessa velocità angolare ω del corpo rigido ruotante , ma con **velocità tangenziali** $v = \omega r$ variabili con la distanza **r** dall'asse di rotazione ; ne segue che le più vicine all'asse di rotazione sono le più lente , mentre le più lontane sono le più veloci . Per calcolare l ' **energia cinetica** del corpo rigido basta effettuare la somma delle energie cinetiche delle singole particelle (assimilabili a punti materiali aventi rispettivamente masse $m_1, m_2, m_3 \cdots$,velocità lineari $v_1, v_2, v_3 \cdots$ e velocità angolare ω) di cui è composto il corpo rigido .
Se $r_1, r_2, r_3 \cdots$ sono le distanze delle singole particelle del corpo rigido l'energia cinetica del corpo rigido dovuta alla sua rotazione è data da :

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_3^2 + \cdots = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_3^2 + \cdots =$$

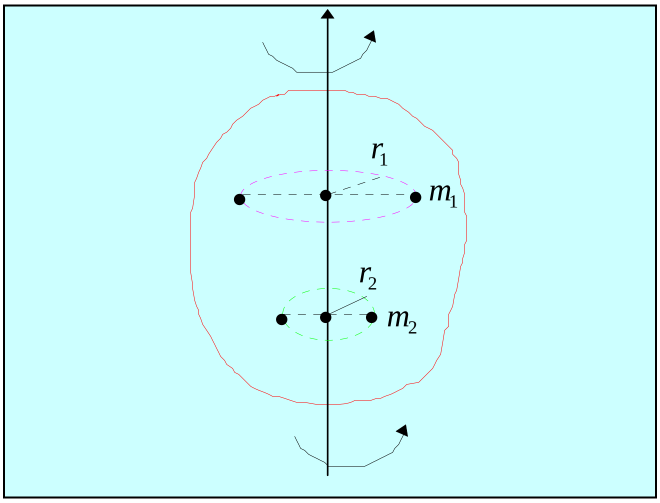
$$= \frac{1}{2} \omega \left(m_1 r_1^2 + m_1 r_2^2 + m_1 r_3^2 + \cdots \right)$$

La quantità $I = m_1 r_1^2 + m_1 r_2^2 + m_1 r_3^2 + \cdots$ prende il nome di **momento d'inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione .

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Il **momento d'inerzia** di un corpo rigido ruotante dipende dall'asse di rotazione , dalla sua forma geometrica e dalla distribuzione delle singole particelle nel corpo stesso .
Si noti che il **momento d'inerzia** di un corpo **non è una sua proprietà intrinseca** come la sua massa . Nel moto rotatorio il momento d'inerzia ha **la stessa funzione** che ha la massa nel moto traslatorio di un punto materiale .
Come abbiamo visto per il **moto traslatorio** , la massa di una particella **è una misura della sua inerzia** , cioè della difficoltà che presenta il corpo a subire accelerazioni . Nel moto rotatorio di un corpo non è soltanto la massa che conta , ma il prodotto della massa per il quadrato della distanza fra tale massa e l'asse di rotazione .

Il valore del momento d'inerzia può essere variato senza alterare la massa totale del corpo . L'energia cinetica rotazionale $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ è semplicemente la somma delle energie cinetiche di traslazione delle singole parti del corpo . L ' energia cinetica rotazionale è solo un modo più conveniente per esprimere l'energia cinetica di un corpo rigido in moto rotatorio .



L'**energia cinetica** di un **corpo rigido che ruota** attorno ad un asse fisso è uguale alla somma delle energie cinetiche dei vari punti materiali che compongono il corpo .

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota e trasla

Consideriamo un corpo rigido che ruota con velocità angolare ω attorno ad un asse fisso **z** . La sia **energia cinetica** ci viene fornita dalla seguente relazione : $E_c = T = K = \frac{1}{2} I \omega^2$

Tuttavia può capitare che il corpo rigido durante il suo moto effettui contemporaneamente una rotazione ed una traslazione , come avviene per un ruota di automobile . Se l'asse di rotazione passa per il centro di massa del corpo rigido e durante il moto si mantiene sempre parallelo a se stesso , allora vale il seguente **teorema di KÖnig** :

$$E_c = T = K = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

dove **m** è la massa del corpo rigido , v_C la velocità del centro di massa , I_C il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa . Quindi :

l'energia cinetica totale di un corpo rigido è la somma dell'energia cinetica di traslazione della massa di tutto il corpo rigido e dell'energia di rotazione rispetto all'asse passante per il centro di massa .

$E_c = T = K =$ **energia cinetica** del corpo rigido rispetto ad un **S.R.I.** Oxyz

v_C = velocità del centro di massa del corpo rigido rispetto al **S.R.I.** Oxyz

$Cx'y'x'$ si muove di moto traslatorio rispetto al **S.R.I.** Oxyz

I_C = momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione z' passante per il centro di massa C

ω = velocità angolare del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione z'

m = massa del corpo rigido

$\frac{1}{2} I_C \omega^2 =$ **energia cinetica rotazionale** del corpo rigido rispetto al centro di massa , cioè rispetto ad un asse z' , parallelo a **z** , e passante per il centro di massa **C**

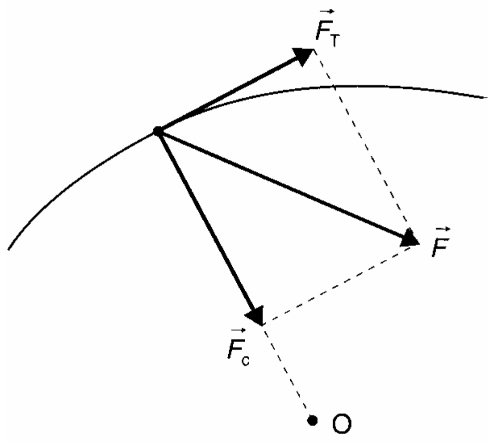
Il corpo rigido ruota attorno ad un asse (z') passante per il centro di massa **C** mentre il centro di massa **C** trasla rispetto all'osservatore solidale col **S.R.I.** Oxyz

La seconda legge della dinamica per le rotazioni attorno ad un asse fisso , ovvero la seconda equazione cardinale per un corpo rigido che ruota

Supponiamo che un punto materiale di massa m ruoti attorno ad un asse fisso descrivendo una circonferenza di centro O e raggio r . Supponiamo che il moto sia **circolare uniformemente accelerato** . La forza $\vec{F}$ che agisce sul punto materiale di massa m non è perpendicolare alla traiettoria . Poiché risulta $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t$, possiamo affermare che il punto materiale è soggetto all'azione di due forze : una , la $\vec{F}_t$, tangente alla traiettoria e , quindi , variabile in direzione ma costante in modulo , l'altra , la $\vec{F}_n$, sempre centripeta ma variabile in modulo .

$$F_t = m \cdot a_t = m \cdot (\alpha \cdot r) \quad \Rightarrow$$

$$F_t \cdot r = m \cdot (\alpha \cdot r) \cdot r = m r^2 \cdot \alpha$$



Rappresentazione istantanea delle forze centripeta $\vec{F}_c$ e tangenziale $\vec{F}_T$ agenti in un moto circolare uniformemente accelerato . Si noti che il risultante $\vec{F}$ delle due forze non è perpendicolare alla traiettoria .

a_t = **accelerazione tangenziale** del punto materiale , α = **accelerazione angolare** del punto materiale ; $m r^2$ = **momento d'inerzia** del punto materiale rispetto all'asse di rotazione

La formula precedente può essere scritta nella seguente maniera : $M = \tau = I \cdot \alpha = F \cdot r$

Che esprime la legge fondamentale della dinamica per un punto materiale che ruota attorno ad un asse fisso .

$$M = \tau = F \cdot r = I \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M} = \mathrm{I} \cdot \alpha = \mathrm{I} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta \mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M} \cdot \Delta \mathrm{t} = \mathrm{I} \cdot \Delta\omega = \mathrm{I}\omega_2 - \mathrm{I}\omega_1$$

La legge , espressa dalla relazione $M = \tau = F \cdot r = I \cdot \alpha$, dimostrata per un punto materiale , è valida per un qualsiasi corpo solido che ruota attorno ad un asse fisso . Essa prende il nome di **seconda legge della dinamica per le rotazioni attorno ad un asse fisso** e è detta anche seconda equazione cardinale per un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso .

Questa legge stabilisce che per produrre un'accelerazione angolare α è necessario un momento meccanico ed il valore di questo momento meccanico è direttamente proporzionale al momento d'inerzia I .

La seconda legge della dinamica per un corpo rigido che trasla , ovvero la prima equazione cardinale per un corpo rigido che trasla

Consideriamo un corpo rigido che trasla . Il suo centro di massa si muove come una singola particella nella quale è concentrata tutta la massa del corpo rigido e nella quale sono applicate tutte le forze esterne agenti sul corpo rigido . Il centro di massa C del corpo rigido possiede un'accelerazione $\vec{a}_c$ dovuta all'azione di tutte le forze esterne immaginate applicate in C . Il moto del centro di massa è regolato dalla seguente relazione :

$$\boxed{\vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t}}$$

detta **I equazione cardinale** per un corpo rigido che trasla

Tale relazione può essere scritta nella seguente maniera : $\boxed{\Delta t \cdot \vec{R}^{(e)} = \Delta\vec{Q}}$ e prende il nome di **teorema della quantità di moto** .

$\vec{R}^{(e)}$ = **risultante** di tutte le forze che agiscono sul corpo rigido ed immaginate applicate nel centro di massa del corpo rigido

$\vec{a}_c$ =**accelerazione** del centro di massa del corpo rigido

$\vec{Q}$ = **quantità di moto** del corpo rigido **m** = **massa** del corpo rigido

La seconda legge della dinamica per un corpo rigido che ruota e trasla

• Come abbiamo visto un **corpo rigido** è caratterizzato dal fatto che , qualunque siano le forze ad esso applicate , le distanze tra i punti del corpo rimangono invariate . Pertanto un **corpo rigido conserva la sua forma durante il moto** . I due moti più semplici che posiamo considerare per un corpo rigido sono :

1) **Moto di pura traslazione** in cui tutti i punti del corpo rigido si muovono con la stessa velocità vettoriale $\vec{v}$. Questo significa che tutte le particelle di cui risulta costituito il corpo rigido descrivono **traiettorie parallele** . Tutti i punti del corpo rigido percorrono traiettorie uguali con la stessa legge oraria del moto . Lo studio del moto traslatorio di un corpo rigido si identifica non lo studio del moto del suo centro di massa (baricentro) nel quale si immagina concentrata tutta la massa del corpo rigido . Se un corpo rigido è soggetto soltanto ad un moto traslatorio allora il sistema di forze ad esso applicato si riduce ad un risultante $\vec{R}$ il cui sostengo passa per il centro di massa del corpo rigido . Il momento risultante del sistema di forze applicato al corpo , rispetto al centro di massa , è nullo . Il moto del corpo rigido può essere sostituito da moto di quel singolo punto che è il suo **centro di massa** C . La legge del moto verrà espressa dalla seguente equazione vettoriale :

$$\vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t}$$

2) **Moto di pura rotazione** attorno ad un asse , in cui tutti i punti del corpo rigido descrivono con la **stessa velocità angolare** ω circonferenze di raggio diverso a seconda della loro distanza dall'asse di rotazione . tali circonferenze sono concentriche con l'asse di rotazione e giacciono su piani perpendicolari all'asse di rotazione , il quale può essere **fisso** o mutare la sua direzione rispetto al corpo rigido durante il moto . Il risultante di tutte le forze applicate al corpo è nullo , mentre il momento risultante del sistema di forze applicato al corpo , rispetto al centro di massa , è diverso da zero . La legge del moto verrà espressa dalla seguente equazione :

$$\tau = M = F \cdot r \cdot \sin\vartheta = F \cdot b = I \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I \cdot \alpha$$

Il moto più generale di un corpo rigido si può sempre considerare come la combinazione di una opportuna rotazione e di una opportuna traslazione . Questo significa che è sempre possibile trovare un **sistema di riferimento che trasli** (e non ruoti) rispetto al quale il **corpo ruota solamente** .

Adesso vogliamo studiare il moto di un corpo rigido supponendo che su di esso agisca un sistema di forze riducibile ad un **risultante** $\vec{R}^{(e)}$ applicante nel centro di massa del corpo rigido e ad un **momento risultante** $\vec{M}$ calcolato rispetto al centro di massa del corpo rigido .

Il risultante $\vec{R}^{(e)}$ determinerà un moto traslatorio regolato dalla prima equazione cardinale del moto espressa dalla relazione : $\vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \dfrac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t}$

Il momento risultante $\vec{M}$ determinerà , contemporaneamente al moto traslatorio , un moto rotatorio attorno ad un asse passante per il centro di massa regolato dalla seconda equazione cardinale del moto espressa dalla relazione : $\tau = M = F \cdot r \cdot \sin\vartheta = F \cdot b = I \cdot \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = I \cdot \alpha$

Si capisce così perché queste due equazioni , in quanto descrivono completamente il moto di un **corpo rigido** , sono dette **equazioni cardinali** del moto **.**

Riassumendo possiamo affermare che il moto di un qualsiasi corpo rigido al quale è applicato un sistema di forze è la sovrapposizione di due moti , uno di **traslazione del suo centro di massa** ed uno di **rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa** .

L ' **energia cinetica** del corpo rigido sarà la somma dell'energia cinetica (di **traslazione**) del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione del corpo attorno all'asse passante per il centro di massa . In formule abbiamo : $E_c = T = K = \dfrac{1}{2} m \mathrm{v}_C^2 + \dfrac{1}{2} I_C \omega^2$

v_C = **velocità del centro di massa** del corpo rigido

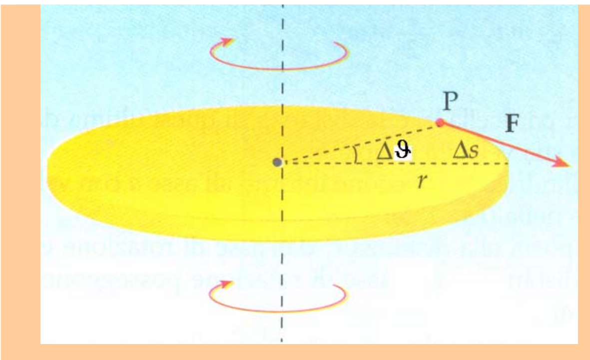
I_C = **momento d'inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa C

ω = **velocità angolare** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione

m = **massa del corpo rigido**

Il lavoro e l'energia di rotazione : teorema di variazione dell'energia cinetica per un corpo rigido che ruota

Il disco indicato in figura è messo in rotazione da una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P e tangente al disco . Sia Δs lo spostamento lineare di P per effetto della forza $\vec{F}$ e $\Delta\vartheta$ il corrispondente angolo di rotazione del disco .



Consideriamo uno spostamento Δs abbastanza piccolo , per cui $\vec{F}$ possa essere considerata costante e lo spostamento approssimativamente rettilineo . In tal caso il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ per fare ruotare il disco di un angolo di rotazione $\Delta\vartheta$ è espresso dalla relazione :

$$L = F \cdot \Delta s \quad [\ \sigma\ ]$$

Ma per angoli $\Delta\vartheta$ abbastanza piccoli è lecita l'approssimazione : $\Delta s = r \cdot \Delta\vartheta$

Questo ci consente di scrivere la [σ] nella seguente maniera :

$$L = F \cdot \Delta s = F \cdot r \cdot \Delta\vartheta = M \cdot \Delta\vartheta = M \cdot \left(\vartheta_f - \vartheta_i\right)$$

Dove M rappresenta il modulo del momento della forza $\vec{F}$ rispetto all'asse di rotazione .
Dimostriamo adesso che vale la seguente relazione :

$$L = M \cdot \Delta\vartheta = M \cdot \left(\vartheta_f - \vartheta_i\right) = \frac{1}{2} I \left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right) = \frac{1}{2} I \cdot \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \cdot \omega_i^2 \quad [\ \delta\ ]$$

cioè il lavoro compiuto sul corpo rigido che ruota dalla forza esterna $\vec{F}$ è uguale alla variazione dell'energia cinetica rotazionale del corpo che ruota (Teorema della variazione dell'energia cinetica per corpi rigidi che ruotano attorno ad un asse fisso) .

Noi sappiamo che per un moto rotatorio uniformemente vario vale la seguente relazione :

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\left(\vartheta_f - \vartheta_i\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2\left(\vartheta_f - \vartheta_i\right)}$$

$$L = M \cdot \left(\vartheta_f - \vartheta_i\right) = I \cdot \alpha \cdot \left(\vartheta_f - \vartheta_i\right) = I \cdot \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2\left(\vartheta_f - \vartheta_i\right)} \cdot \left(\vartheta_f - \vartheta_i\right) = \frac{1}{2} I \left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right) = \frac{1}{2} I \cdot \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \cdot \omega_i^2$$

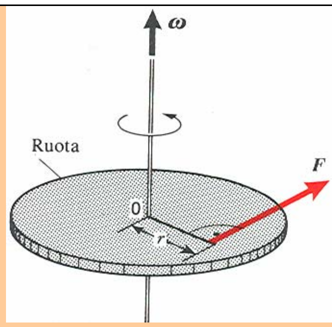
La relazione [δ] è valida in generale ; M è il **momento risultante**,rispetto all'asse di rotazione , delle forze applicate al corpo rigido , $\vartheta = \vartheta_f - \vartheta_i$ è l'angolo di cui il corpo ruota nel tempo $t = t_f - t_i$, ω_i ed ω_f sono le velocità angolari del corpo rigido all'inizio del moto ed alla fine del moto . La formula **[δ]** esprime il **teorema della variazione dell'energia cinetica** dei corpi rigidi in rotazione attorno ad un asse fisso . **Il lavoro compiuto su un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso z è uguale alla variazione dell'energia cinetica di rotazione .**

Una ruota che gira attorno ad un asse fisso è il più semplice esempio di corpo rigido in moto rotatorio piano .

Per questo corpo rigido valgono le seguenti relazioni :

$$\tau = M = F \cdot r = I \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I \cdot \alpha$$

$$L = M \cdot \Delta\vartheta = M \cdot \left(\vartheta_f - \vartheta_i\right) = \frac{1}{2} I \cdot \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \cdot \omega_i^2$$



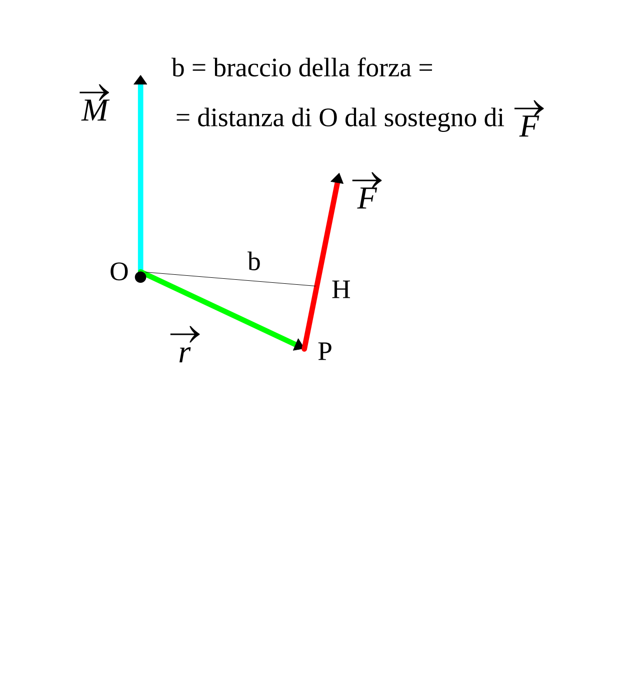
Momento angolare o momento della quantità di moto o momento cinetico

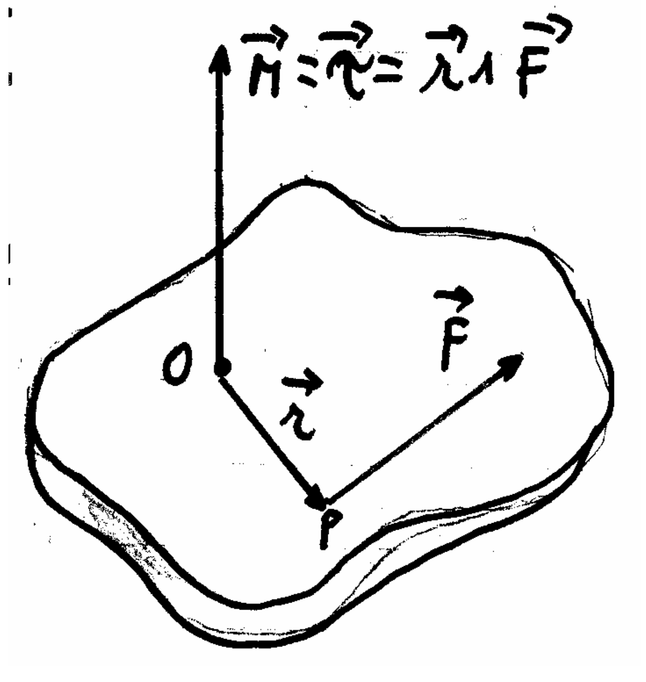
Il concetto di **momento di una forza** rispetto ad un punto può essere esteso a qualsiasi grandezza vettoriale . Se la grandezza vettoriale scelta è la **quantità di moto** otteniamo una nuova grandezza detta **momento angolare o momento della quantità di moto .** Per i moti rotatori tale grandezza , in determinate condizioni , si **conserva** .

Data una forza $\vec{F}$, applicata in un punto P , definiamo **momento della forza** $\vec{F}$ rispetto ad un generico polo **O** la grandezza vettoriale $\vec{M}$ (o $\vec{\tau}$) definita dalla seguente relazione vettoriale :

$$\vec{M} = (P - O) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad \textbf{[1]}$$

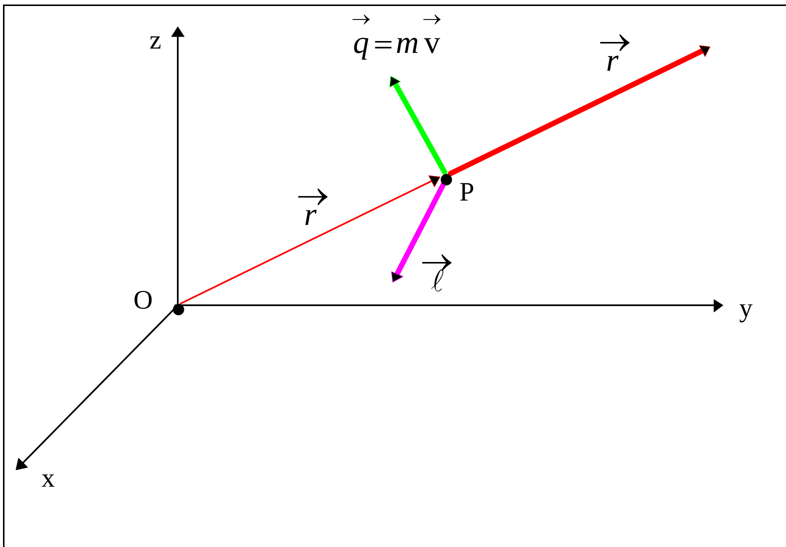
Il **momento angolare** è una grandezza di notevole importanza in fisica ed è , per un moto rotatorio , l'equivalente della **quantità di moto** per un moto lineare e per questo motivo , spesso , la quantità di moto è detta **momento lineare** .





Sia $\vec{q} = m \cdot \vec{v}$ la **quantità di moto** di una particella di massa **m** e velocità $\vec{v}$ occupante la posizione **P** e distante **r** da un punto **O** (origine di un riferimento cartesiano) .

Il **momento angolare** (o **momento della quantità di moto** o **momento cinetico**) rispetto ad un punto fisso **O** di una particella di massa m che si muove con velocità lineare $\vec{v}$ è il vettore $\vec{\ell}$ completamente definito dalla seguente relazione vettoriale :



$$\boxed{\vec{\ell} = (P - O) \wedge \vec{q} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{r} \wedge \vec{v}}$$

[2]

essendo $\vec{r} = P - o$

Il **momento angolare** è un vettore perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{r} = P - O$ e $\vec{v}$.

Il **momento angolare** di una particella in generale cambia in modulo , direzione e verso mentre la particella si muove .

Nel caso del **moto circolare** , se O è il centro della circonferenza , i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono fra loro perpendicolari , hanno moduli costanti legati tra di loro dalla relazione : $v = \omega r$.

In questo caso il vettore $\vec{\ell}$ è sempre perpendicolare al piano della circonferenza ed il suo modulo vale : $\ell = mrv = mr^2\omega = I\omega$ [3] dove $I = mr^2$ [4] è il **momento d'inerzia della particella di massa m rispetto al suo asse di rotazione .**

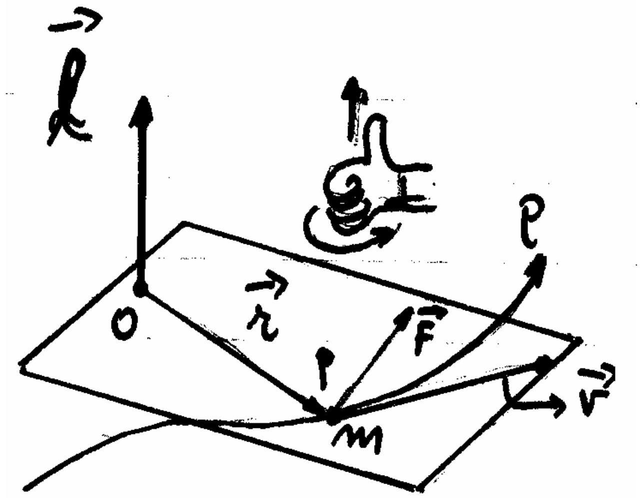
La direzione ed il verso di $\vec{\ell}$ coincidono con quelli di $\vec{\omega}$ e quindi possiamo scrivere :

$$\vec{\ell} = mr^2\vec{\omega} = I\cdot\vec{\omega} \qquad \textbf{[5]}$$

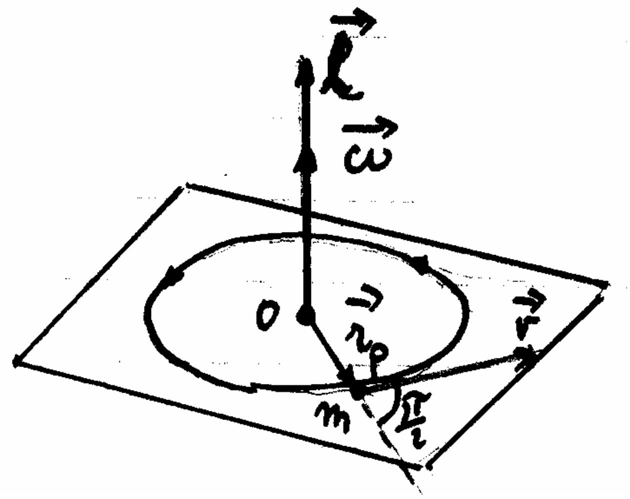
Se l'unica forza che agisce sulla particella è la forza centripeta diretta verso l'origine O il momento angolare sarà costante .

Consideriamo un pianeta di massa m che ruota attorno ad una stella di massa M . L'orbita descritta può essere una circonferenza oppure un'ellisse . In entrambi i casi i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ cambiano continuamente , almeno in direzione ; ma il vettore $\vec{\ell}$, momento angolare del pianeta rispetto alla stella , rimane costante in direzione , modulo e verso , cioè rimane costante nel tempo e quindi si conserva .

Osservazione : Sebbene il momento angolare sia associato di solito al moto rotatorio , anche una particella che si muove in linea retta ha un momento angolare rispetto ad un punto non giacente sulla retta .



Momento angolare di una particella di massa m e velocità $\vec{v}$



Relazione vettoriale fra la velocità angolare $\vec{\omega}$ ed il momento angolare $\vec{\ell}$ nel moto circolare

Unità didattica N° 12   La dinamica del corpo rigido

Come una forza produce una variazione della quantità di moto della particella alla quale è applicata , così il momento meccanico di una forza determina una variazione del momento angolare di una particella .

Se $\vec{M}$ ed $\vec{\ell}$ sono rispettivamente il momento meccanico ed il momento angolare della particella m calcolati rispetto allo stesso punto O , allora di dimostra che vale la seguente relazione :

$$\vec{M} = \vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{\ell}}{\Delta t} \qquad \textbf{[7]}$$

Questa relazione vale non solo per una singola particella ma anche per un sistema di particelle .

Tale formula viene indicata spesso con il nome di **secondo principio della dinamica** . Essa stabilisce semplicemente che il **rapporto tra la variazione del momento angolare ed il tempo in cui si verifica è uguale al momento meccanico della forza (o del sistema di forze) applicata alla particella** . La formula precedente può essere scritta anche nella seguente maniera $\Delta \vec{\ell} = \vec{M} \cdot \Delta t$ e permette di calcolare la variazione del momento angolare $\Delta \vec{\ell}$ se è noto il momento meccanico $\vec{M} = \vec{\tau}$.

Nel caso di una particella che si muove di moto circolare la [7] assume la forma :

[8] $\vec{M} = \vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{\ell}}{\Delta t} = I \cdot \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = I \cdot \vec{\alpha}$ dove $\vec{\alpha}$ è l ‘ **accelerazione angolare** della massa m

La [8] rappresenta le legge fondamentale della dinamica per un punto materiale che ruota attorno ad un asse .

Un sistema di n punti materiali $P_1, P_2, \cdots, P_n$ aventi rispettivamente masse $m_1, m_2, \cdots, m_n$ e velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ ha , per definizione , il **momento della quantità di moto** $\vec{L}$ dato dalla seguente relazione vettoriale :

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \cdots + \vec{\ell}_n = (P_1 - O) \wedge \vec{q}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{q}_2 + \cdots + (P_n - O) \wedge \vec{q}_n =$$
$$= \vec{r}_1 \wedge \vec{q}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{q}_2 + \cdots + \vec{r}_n \wedge \vec{q}_n \qquad \textbf{[8]}$$

La conservazione del momento angolare

Se il momento risultante di tutte le forze agenti su una particella di massa m è nullo ($\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{o}$) allora la [6] diventa : $\boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0}$ cioè $\boxed{\vec{\ell} = \text{vettore costante}}$

Quindi il **momento angolare di una particella è costante se il momento risultante delle forze agenti su di essa è uguale a zero .**

Ma $\vec{M} = \vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{o}$ è senz'altro vero in un sistema isolato . Questo ci permette di scrivere il secondo principio della dinamica in forma di principio di conservazione : **se un sistema è isolato , si conserva il suo momento angolare** .

Questo principio di conservazione del momento angolare è analogo a quello di conservazione della quantità di moto , ma è utile nel caso delle rotazioni .

Abbiamo ottenuto un terzo principio di conservazione per i sistemi isolati . L ' energia , la quantità di moto ed il momento angolare si conservano . Il **principio di conservazione del momento angolare** è una fondamentale legge naturale . Anche sulla scala microscopica della fisica atomica e molecolare , in cui la meccanica newtoniana non è valida , il momento angolare di un sistema isolato è costante nel tempo .

Il **momento angolare** di una particella libera , cioè non soggetta a forze o soggetta ad un sistema di forze a risultante nullo , è **costante** .

Una forza diretta sempre verso un punto fisso è detta **forza centrale** . **Quando un corpo si muove sotto l'azione di una forza centrale , il suo momento angolare rimane costante** e viceversa .

Un altro modo di enunciare questa tesi è il seguente : **quando la forza è centrale , il momento angolare rispetto al centro della forza è una costante del moto** .

Questo risultato è molto importante , perché in natura esistono diverse forze centrali . Per esempio , la terra si muove attorno al sole sotto l'influenza di una forza centrale , la cui direzione passa sempre per il centro della Sole . **Il momento angolare della Terra rispetto al Sole è costante** .

L'elettrone , in un atomo di idrogeno , si muove sotto l'azione della forza centrale dovuta all'interazione elettrostatica col nucleo .

Il momento angolare dell'elettrone rispetto al nucleo è costante .

Calcolare il momento angolare della terra rispetto al sole , e quello dell'elettrone rispetto al nucleo nell'atomo di idrogeno. Supporre per semplicità che , in entrambi i casi , l'orbita sia circolare .

$m_T = 5{,}58 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $d(T,S) = 1{,}49 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$ Il **periodo di rivoluzione** della Terra attorno al Sole è : $3{,}16 \cdot 10^{7}\ \mathrm{s}$. La **velocità angolare media** della Terra attorno al Sole è :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3{,}16 \cdot 10^{7}} = 1{,}98 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Il **momento angolare** della Terra rispetto al Sole è :

$$\ell = m r^2 \omega = 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot \left(1{,}49 \cdot 10^{11}\right)^2 \cdot 1{,}98 \cdot 10^{-7} = 2{,}67 \cdot 10^{40}\ \frac{m^2\, kg}{s}$$

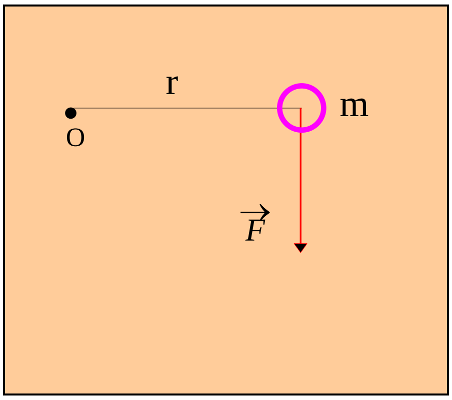
Unità didattica N° 12 La dinamica del corpo rigido

Abbiamo visto che un momento torcente applicato ad un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso produce una variazione del suo momento angolare dato da : $M = \dfrac{\Delta L}{\Delta t}$

Quindi l'effetto di un **momento meccanico** $M = \tau$, esercitato per un intervallo di tempo Δt , è quello di fare variare il **momento angolare** di una quantità ΔL . Il prodotto $\boxed{M \cdot \Delta t = \tau \cdot \Delta t}$ rappresenta l ' **impulso rotazionale** del momento meccanico $M = \tau$.

Perché risulta $\Delta L = M \cdot \Delta t = \tau \cdot \Delta t$?

Consideriamo un dischetto di massa **m** poggiato sopra un tavolo orizzontale senza attrito . Viene fatto ruotare attorno ad un asse verticale posto all'estremità di una leggerissima asticella che unisce il dischetto al punto **O** intorno al quale l'asticella è libera di ruotare . Se applichiamo una forza $\vec{F}$ (tangenziale) ad angolo retto con il raggio r , per la legge fondamentale della dinamica di un punto materiale abbiamo : $\boxed{F = ma}$ dove **a** è l'accelerazione lineare del dischetto .



Un dischetto di massa **m** viene fatto ruotare attorno ad un punto O su un tavolo senza attrito . IL **momento meccanico** necessario per imprimere un'accelerazione angolare α è $\tau = M = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} = I\alpha$

Moltiplico ambo i membri per **r** : $F \cdot r = mra$ $F \cdot r = M = \tau$ = **momento** di F rispetto ad O

$a = \alpha \cdot r = \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t} \cdot r$ α = **accelerazione angolare** del dischetto

$$M = mr \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \cdot r \quad M \cdot \Delta t = mr^2(\omega_2 - \omega_1) = mr^2\omega_2 - mr^2\omega_1 \quad M \cdot \Delta t = L_2 - L_1 = \Delta L$$

e quindi : $\boxed{M = \dfrac{\Delta L}{\Delta t}}$

Confronto fra le grandezze dinamiche della traslazione e della rotazione	
Traslazione	**Rotazione**
Quantità di moto $\vec{P} = \vec{Q} = m \cdot \vec{v}$	**Momento angolare** $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$
Forza $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt}$	**Momento meccanico** $\vec{\tau} = \vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\alpha}$
Impulso e quantità di moto	
$\vec{F} \cdot (t_f - t_i) = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i = \vec{q}_f - \vec{q}_i$	$\vec{\tau} \cdot (t_f - t_i) = I \cdot (\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i)$
Legge di conservazione della quantità di moto $\sum \vec{q}_i = \sum m_i \cdot \vec{v}_i = \text{costante} \quad , \vec{q}_f = \vec{q}_i$	**Legge di conservazione del momento angolare** $\tau = 0 \, , \, L_f = L_i \, , \, I_f \omega_f = I_i \omega_i$ $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$
Lavoro compiuto dalle forze esterne	
$dL = \vec{F} \times d\vec{s}$	$dL = M \cdot d\vartheta = M \cdot \omega \cdot dt$
Teorema dell'energia cinetica	
$\underset{A \to B}{L(\vec{F})} = \dfrac{1}{2} m \vec{v}_f^2 - \dfrac{1}{2} m \vec{v}_f^2$	$\underset{A \to B}{L(\vec{F})} = \dfrac{1}{2} I \omega_f^2 - \dfrac{1}{2} I \omega_f^2 = M \cdot \vartheta$
Potenza	
$W = \vec{F} \times \vec{v}$	$W = \vec{\tau} \times \vec{\omega}$

Confronto fra quantità lineari e quantità angolari	
Spostamento $\Delta s = R \cdot \Delta \vartheta$	**Velocità** $v = \omega R$
Accelerazione $a = \alpha R$	**v**= velocità lineare , ω = velocità angolare **a** = accelerazione lineare , α = accelerazione angolare
Moto uniforme su traiettoria prestabilita	**Moto rotatorio uniforme attorno ad un asse prestabilito**
$v = \dfrac{s - s_o}{t}$ = costante $s = s_o + \mathrm{v}t$	$\omega = \dfrac{\vartheta - \vartheta_o}{t}$ = costante $\vartheta = \vartheta_o + \omega t$
Moto uniformemente vario su traiettoria prestabilita	**Moto rotatorio uniformemente vario attorno ad un asse fisso**
$s = \frac{1}{2} a t^2 + \mathrm{v}_o t + s_o$	$\vartheta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_o t + \vartheta_o$
$\mathrm{v} = \mathrm{v}_o + at$	$\omega = \omega_o + \alpha t$
$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_o^2 + 2a(s - s_o)$	$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\vartheta - \vartheta_o)$
a = accelerazione lineare	α **= accelerazione angolare**
m = massa	**I = momento d'inerzia**
$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ **Forza**	$\vec{M} = \vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}$ **momento meccanico o momento torcente o momento rotore**
$\vec{q} = \vec{p} = m \cdot \vec{\mathrm{v}}$ **quantità di moto**	$L = I\omega$ **momento angolare**
Lavoro	
$L = F \cdot s$	$L = \tau \cdot \vartheta$
Potenza	
$W = F \cdot \mathrm{v}$	$W = \tau \cdot \omega$
Energia cinetica	
$E_c = T = K = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2$	$E_c = T = K = \frac{1}{2} I \omega^2$