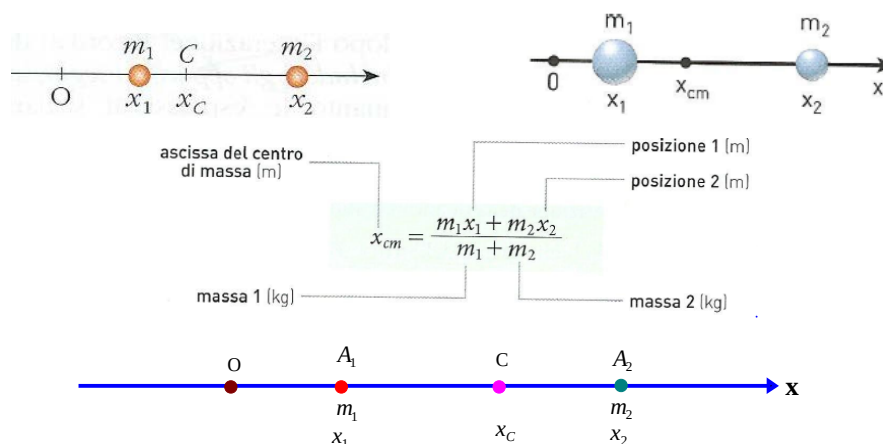


Unità Didattica N°12

- 01) Centro di massa di un sistema di particelle
- 02) Moto del centro di massa 03) Momento angolare
- 04) Conservazione del momento angolare 05) Momenti d'inerzia
- 06) Momento rotore ed accelerazione angolare
- 07) Relazione tra momento meccanico e momento angolare
- 08) Le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi
- 09) Moto rigido di pura rotazione 10) Moto rigido di pura traslazione
- 11) Energia cinetica di un corpo rigido ruotante
- 12) Energia cinetica di un corpo rigido qualsiasi
- 13) Lavoro compiuto da un sistema di forze su un corpo rigido
- 14) Obiettivi dell'unità didattica
- 15) Introduzione alla dinamica dei corpi rigidi
- 16) Energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso
- 17) Energia cinetica di un corpo rigido che ruota e trasla
- 18) La seconda legge della dinamica per le rotazioni attorno ad un asse fisso, ovvero la seconda equazione cardinale per un corpo rigido che ruota
- 19) La seconda legge della dinamica per un corpo rigido che trasla , ovvero la prima equazione cardinale per un corpo rigido che trasla
- 20) La seconda legge della dinamica per un corpo rigido che ruota e trasla
- 21) Il lavoro e l'energia di rotazione: teorema di variazione dell'energia cinetica per un corpo rigido che ruota
- 22) Momento angolare o momento della quantità di moto o momento cinetico
- 23) La conservazione del momento angolare
- 24) Confronto fra quantità lineari e quantità angolari
- 25) Corpo rigido che rotola sopra un piano orizzontale
- 26) Corpo rigido che rotola sopra un piano inclinato

Centro di massa di un sistema di particelle

Finora abbiamo rivolto la nostra attenzione al moto di una singola particella. Ci occupiamo ora dei **sistemi materiali**, cioè dei sistemi costituiti o da un numero discreto di particelle distinte o da corpi estesi non assimilabili a punti materiali. Per ogni sistema di punti materiali esiste un punto particolare detto **centro di massa** (o **baricentro**) il quale gode di proprietà particolari che lo rende estremamente utile per lo studio della **dinamica dei sistemi di punti materiali**. Infatti lo studio del moto di un sistema di particelle è piuttosto complesso. Il **principio di conservazione della quantità di moto** ci permette di avere qualche informazione sul moto di un sistema isolato. Spesso si rinuncia allo studio del moto delle singole particelle del sistema e si focalizza l'attenzione sul **moto del centro di massa**. Per definire il **centro di massa** di un sistema di punti materiali cominciamo col considerare il caso più semplice, cioè quello di un **sistema costituito da due particelle** A_1 ed A_2 , rispettivamente di masse m_1 ed m_2 . Introdotta una retta orientata $\vec{x}$ come indicato in figura, definiamo **centro di massa** del sistema formato dalle particelle A_1 ed A_2 il punto C , situato sulla retta A_1A_2 , di ascissa:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad [1] \text{ essendo } x_1 \text{ ed } x_2 \text{ le ascisse dei punti } A_1 \text{ ed } A_2.$$


E' facile fare vedere che il punto **C** divide il segmento A_1A_2 in parti inversamente proporzionali alle masse m_1 ed m_2 , cioè in parti tali che sia verificata la relazione:

$$[2] \quad \frac{A_1C}{CA_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad [m_1 \cdot A_1C = m_2 \cdot CA_2]$$

$$(\overline{A_1C} = x_C - x_1 \quad \overline{CA_2} = x_2 - x_C \quad \frac{A_1C}{CA_2} = \frac{m_2}{m_1}) \Rightarrow \frac{x_C - x_1}{x_2 - x_C} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow$$

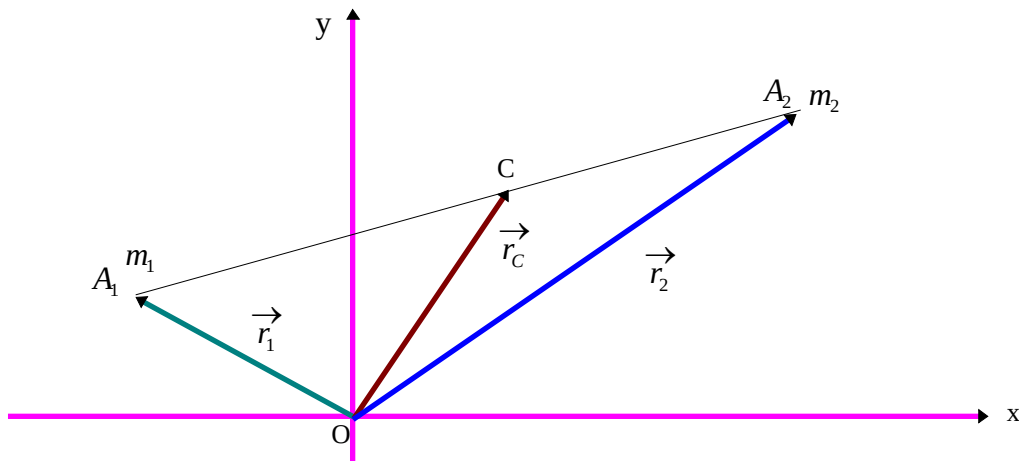
$$m_1(x_C - x_1) = m_2(x_2 - x_C) \Rightarrow m_1x_C - m_1x_1 = m_2x_2 - m_2x_C \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)x_C = m_1x_1 + m_2x_2 \Rightarrow x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Se il sistema è formato da n particelle $A_1, A_2, \dots, A_n$ aventi rispettivamente masse $m_1, m_2, \dots, m_n$ abbiamo:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad [3]$$

Adesso consideriamo il caso di due particelle A_1 ed A_2 e riferiamo il piano che le contiene ad un sistema ortogonale di assi cartesiani Oxy .



Il **centro di massa** C è il punto completamente individuato dalla seguente relazione vettoriale $(m_1 + m_2)\vec{r}_C = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$ [4]

Se $\vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j}$, $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ otteniamo:

⁽¹⁾ Se le due particelle hanno la stessa massa $m_1 = m_2 = m$, il centro di massa è il punto medio del segmento A_1A_2 :

$x_C = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Se le particelle hanno masse diverse, il centro di massa è più vicino alla particella avente massa maggiore.

La definizione di **centro di massa** si può estendere ai **sistemi continui**, cioè ai corpi estesi non assimilabili a punti materiali, nei quali la massa non è localizzata in un numero finito di particelle distinte, ma è distribuita con continuità in un volume non piccolo. Detta $\rho = \frac{m}{dV}$ la **massa volumica** del corpo continuo,

abbiamo:
$$\vec{r}_C = \frac{\int \rho \vec{r} dV}{M} \quad \mathbf{M} = \text{massa del corpo}$$

$$x_C = \frac{\int x dm}{M} = \frac{\int \rho x dV}{M} \quad y_C = \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int \rho y dV}{M} \quad z_C = \frac{\int z dm}{M} = \frac{\int \rho z dV}{M} \quad [9]$$

dove $\vec{r} = P - O$ è il **raggio vettore** che ha per estremo un generico punto P che identifica l'elemento dV e come origine **O**: $\vec{r}_C = C - O$

Osservazione N°1

- a) Il **centro di massa** di un sistema di particelle non risente dell'azione delle forze interne, ma soltanto di quelle esterne
- b) Il **centro di massa** di un sistema di particelle si muove sempre come un corpo puntiforme fittizio in cui è concentrata tutta la massa del sistema ed a cui è applicato il **risultante** di tutte le forze esterne applicate ai corpi del sistema
- c) In assenza di forze esterne (**sistema isolato**) il **centro di massa** si muove di **moto rettilineo uniforme**.

Osservazione N°2

Date due particelle m_1 ed m_2 si chiama **massa ridotta** μ del sistema la grandezza

$$\mu \text{ definita da: } \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Osservazione N°3

Per corpi estesi risulta: $\sum m_i x_i = \int_M x dm \quad \rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV \quad \text{con } \rho \text{ costante}$
se il corpo esteso è **omogeneo**

$$\sum m_i x_i = \int_M x dm = \int_V \rho x dV = \rho \cdot \int_V x dV \quad x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{\int x dm}{M} = \frac{\rho \cdot \int x dm}{\rho \cdot V} = \frac{\int x dm}{V}$$

Moto del centro di massa

Per calcolare la velocità del centro di massa basta derivare la [6] rispetto al tempo.

Otteniamo:

$$m \cdot \frac{d\vec{r}_C}{dt} = m_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + m_n \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad m \cdot \vec{v}_C = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{v}_n = \vec{Q} \quad [11]$$

Si ha così il teorema del centro di massa: <<La quantità di moto totale $\vec{Q}$ del sistema di n particelle è uguale alla quantità di moto del centro di massa nel quale si suppone concentrata la massa totale m del sistema>>

La velocità $\vec{v}_{cm}$ del centro di massa è data dalla seguente formula: $\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{Q}_{tot}}{m_{tot}}$

Derivando la [11] rispetto al tempo otteniamo: $m \cdot \vec{a}_C = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{a}_n \quad [12]$

Se con $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ indico il **risultante** di tutte le forze applicate rispettivamente alle particelle $m_1, m_2, \dots, m_n$ ottengo: $m \cdot \vec{a}_C = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad [13]$

Ma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{R}^{(e)}$ è il **risultante di tutte le forze esterne** (forze derivanti da corpi che non fanno parte del sistema di n punti materiali) essendo **nullo** il risultante delle forze interne (forze derivanti dalla interazione fra i corpi che costituiscono il sistema di n punti materiali) in quanto quest'ultime (per la terza legge della dinamica) sono in numero pari ed a due a due opposte.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_1^{(i)} + \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(i)} + \vec{F}_2^{(e)} + \dots + \vec{F}_n^{(i)} + \vec{F}_n^{(e)} = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} + \dots + \vec{F}_n^{(e)} = \vec{R}^{(e)}$$

essendo $\vec{F}_1^{(i)} + \vec{F}_2^{(i)} + \dots + \vec{F}_n^{(i)} = \vec{0}$ in quanto le forze interne sono, per il terzo principio della dinamica, a due a due uguali ed opposte.

La [13] può essere scritta nella seguente maniera: $m \cdot \vec{a}_C = \vec{R}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad [14]$

Prima equazione cardinale del moto o **teorema della quantità di moto**

<<La derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale $\vec{Q}$ di un sistema di n punti materiali è uguale al risultante delle forze esterne agenti sulle particelle del sistema>>

Con parole diverse possiamo dire che:

<<Il centro di massa di un sistema di particelle si muove come una singola particella nella quale è concentrata tutta la massa $m = M = \sum_1^n m_i$ del sistema e nella quale sono applicate tutte le forze esterne agenti sul sistema>>

Conclusione

Ad ogni sistema di punti materiali possiamo associare un punto caratteristico detto **centro di massa** indicato col la lettera **C** e caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1) la sua posizione è individuata dalla seguente equazione vettoriale:

$$m \cdot \vec{r}_C = M \cdot \vec{r}_C = \sum_1^n m_i \cdot \vec{r}_i$$

2) in **C** immaginiamo di concentrare la massa totale $m = M$ del sistema di n punti materiali

3) la **quantità di moto del centro di massa** è la somma delle quantità di moto delle singole particelle:

$$\vec{q}_C = m \cdot \vec{v}_C = M \cdot \vec{v}_C = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{v}_n = \vec{Q}$$

Questo ci consente di calcolare la velocità del **centro di massa**

$$4) \quad m \cdot \vec{a}_C = M \cdot \vec{a}_C = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} + \dots + \vec{F}_n^{(e)} = \vec{R}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

il **centro di massa** possiede un'accelerazione $\vec{a}_C$ dovuta all'azione di tutte le forze esterne applicate in **C**

5) Le **forze interne** non hanno alcuna influenza sul moto del centro di massa.

Conservazione della quantità di moto

Quantità di moto di un sistema di particelle

La quantità di moto totale $\vec{Q}$ di un sistema di particelle di massa totale $\mathbf{M}$ è data dal prodotto di $\mathbf{M}$ per la velocità $\vec{v}_c$ del suo centro di massa: $\vec{Q} = \mathbf{M} \vec{v}_c$. Questo significa che la quantità di moto di un sistema di particelle coincide con quella del suo centro di massa dove è concentrata tutta la massa

Un caso particolare, ma molto importante, del **teorema della quantità di moto** si ha quando il sistema di punti materiali è **isolato**, cioè quando è soggetto a sole forze interne.

$$\vec{R}^{(e)} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow d\vec{Q} = \vec{0} \Rightarrow \quad \vec{Q} = \text{costante}$$

teorema di conservazione della quantità di moto [15]

<<La quantità di moto di un sistema non soggetto a forze esterne è costante nel tempo>> cioè <<quando il risultante di tutte le forze esterne agenti su di un sistema di particelle è nullo, il vettore quantità di moto totale $\vec{Q}$ del sistema rimane costante nel tempo>> ⁽²⁾

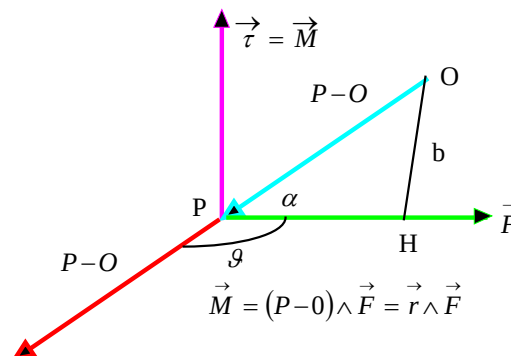
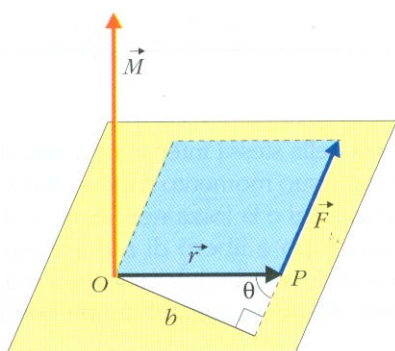
$$\vec{R}^{(e)} = \vec{0} \Rightarrow m \cdot \vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{0} \Rightarrow d\vec{v}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_c = \text{costante}$$

<<Il centro di massa di un sistema isolato, cioè non soggetto a forze esterne, si muove di moto rettilineo uniforme.>>

⁽²⁾ La quantità di moto di un sistema può essere variata soltanto da forze esterne agenti sul sistema. Le forze interne, essendo a due a due uguali ed opposte, producono variazioni uguali e di segno opposto delle quantità di moto, che si annullano a vicenda

Momento angolare o momento della quantità di moto o momento cinetico

Data una forza $\vec{F}$, applicata in un punto P, definiamo **momento della forza** $\vec{M}$ rispetto ad un generico polo **O** la grandezza vettoriale $\vec{M}$ (o $\vec{\tau}$) definita dalla seguente relazione vettoriale: **$\vec{M} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$** [16]



Il **momento angolare** è una grandezza di notevole importanza in fisica ed è, per un moto rotatorio, l'equivalente della **quantità di moto** per un moto lineare e per questo motivo, spesso, la quantità di moto è detta **momento lineare**.

B = **braccio della forza** $\vec{F}$ = distanza del polo O dal sostegno della forza $\vec{F}$.

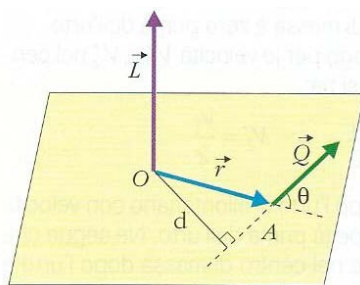
Sia $\vec{q} = m \cdot \vec{v}$ la **quantità di moto** di una particella di massa **m** occupante la posizione **P** e distante **r** da un punto **O** (origine di un riferimento cartesiano).

Definiamo **momento angolare** (o **momento della quantità di moto** o **momento cinetico**) rispetto ad un punto fisso **O** il vettore $\vec{\ell}$ definito dalla

seguente relazione vettoriale: **$\vec{\ell} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \vec{q} = \vec{q} \wedge (\mathbf{O} - \mathbf{P}) = \vec{r} \wedge m \vec{v} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$** [17]

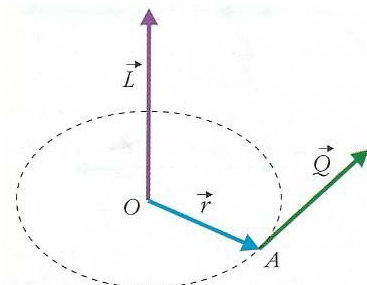
essendo $\vec{r} = \mathbf{P} - \mathbf{O}$ il **vettore posizione** del punto P rispetto al punto O.

Il vettore $\vec{\ell}$ è il **momento angolare**, rispetto al punto O, di una particella con quantità di moto $\vec{Q}$



momento angolare

di una particella rotante.



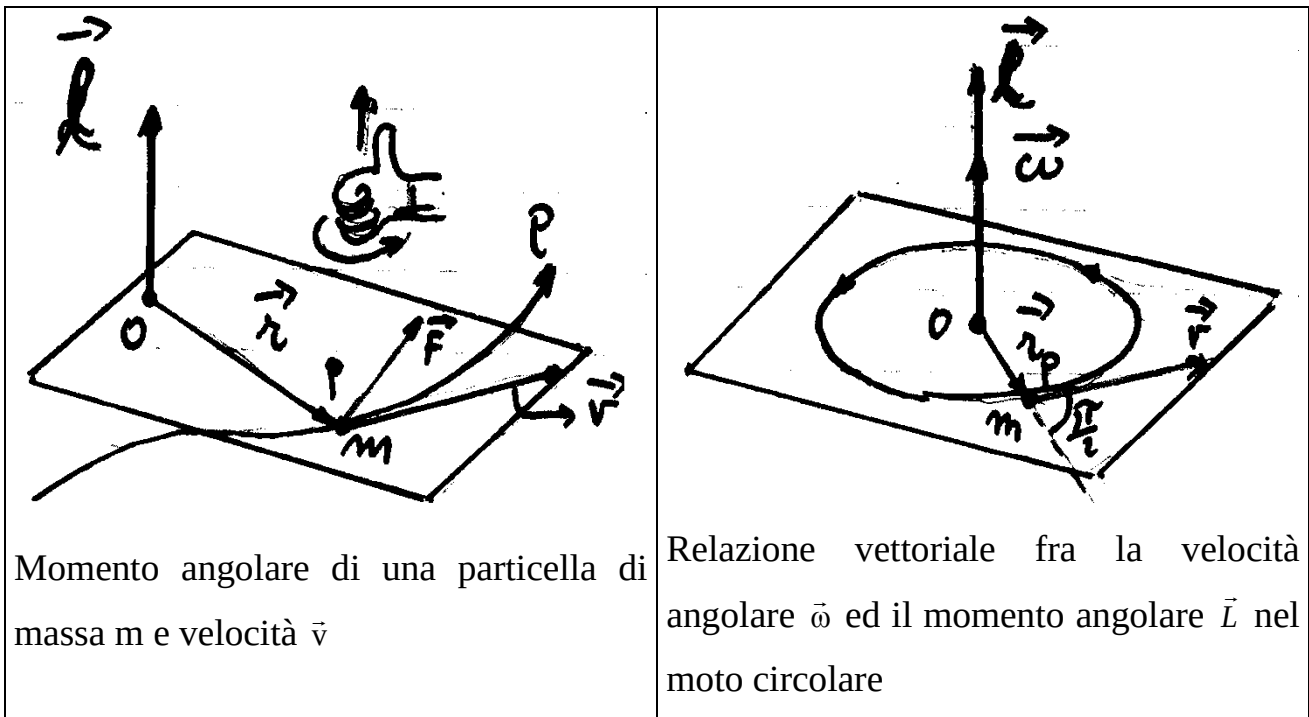
Il momento angolare di un punto materiale è uguale al prodotto vettoriale tra il suo vettore posizione $\vec{r}=P-O$ e la sua quantità di moto $\vec{p}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

momento angolare [kg · m²/s] quantità di moto [kg · m/s]
vettore posizione [m]

Il vettore $\vec{L}$ ha: • ha come **direzione** la perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{r}=P-O$ e $\vec{p}$ • **verso** diretto come il pollice della mano destra, se il pollice il pollice è disposto perpendicolarmente alle altre dita piegate secondo il verso della rotazione che porta il vettore $\vec{r}=P-O$ sul vettore $\vec{p}$ (regola della mano destra) • modulo $L = r m v \sin \vartheta = m v d$ dove d è il braccio del vettore $\vec{Q}$ rispetto al punto O, cioè la distanza del punto dal sostegno del vettore $\vec{Q}$.

Per un moto circolare abbiamo: $L = r p \sin 90^\circ = r p = r m v$



Consideriamo un sistema di n punti materiali $P_1, P_2, \dots, P_n$ aventi rispettivamente masse $m_1, m_2, \dots, m_n$ e velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Per tale sistema il **momento angolare** $\vec{L}$ dato dalla somma vettoriale dei singoli momenti angolari $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3, \dots, \vec{L}_n$ tutti calcolati rispetto allo stesso punto O:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n$$

$$\vec{L} = (P_1 - O) \wedge \vec{q}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{q}_2 + \dots + (P_n - O) \wedge \vec{q}_n = \vec{r}_1 \wedge \vec{q}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{q}_2 + \dots + \vec{r}_n \wedge \vec{q}_n \quad [18]$$

Relazione tra momento meccanico e momento angolare

La derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto di una particella di massa m e velocità $\vec{v}$ è uguale al momento delle forze applicate alla particella. $\vec{M} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad [19]$

Dimostrazione : $\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt}$ (ho moltiplicato vettorialmente ambo i

membri per il vettore $\vec{r}$) $\Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt}$

$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{q}$ Derivando ambo i membri rispetto al tempo otteniamo :

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{q} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{v} \wedge m \cdot \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt} \quad \boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{M}} \quad \text{essendo } \vec{v} \wedge m \vec{v} = \vec{0}$$

Applicando la [19] alle n particelle di un sistema e sommando membro a membro

otteniamo: $\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad [20]$

La derivata rispetto al tempo del momento risultante ($\vec{L}$) della quantità di moto di un sistema di n punti materiali rispetto ad un punto fisso O (momento angolare risultante) è uguale in ogni istante al momento risultante rispetto ad O delle forze esterne applicate al sistema.

La legge di variazione del momento angolare

Se, per un certo intervallo di tempo Δt , su un sistema di punti materiali agiscono forze che hanno un momento meccanico $\vec{M}$ rispetto ad un punto O, la variazione del momento angolare $\Delta \vec{L}$ è data dall'equazione: $\Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$

Diagram illustrating the equation $\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t$. The terms are labeled as follows:

- $\Delta \vec{L}$: variazione del momento angolare ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$)
- $\vec{M}$: momento della forza ($\text{N} \cdot \text{m}$)
- Δt : intervallo di tempo [s]

La variazione del momento angolare totale $\Delta \vec{L}$ è uguale al prodotto del momento risultante $\vec{M}^{(e)}$ di tutte le forze applicate al sistema di punti materiali per il tempo Δt durante il quale esse agiscono.

Possiamo, quindi, separare in generale il moto di un sistema di n punti materiali in un moto traslatorio del suo centro di massa ($m \cdot \vec{a}_C = \vec{R}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$) e in un moto rotatorio attorno al suo centro di massa ($\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$).

Se il **sistema è isolato** risulta $\vec{M}^{(e)} = \vec{0}$ e quindi $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$

Tale relazione esprime il **principio di conservazione del momento angolare**:

Il momento angolare di un sistema di punti materiali rimane costante, in modulo direzione e verso, se è nullo il momento risultante delle forze esterne cui il sistema è sottoposto.

Altra dimostrazione della [19]

Se alla massa m posta nel punto P viene applicata la forza $\vec{F}$ abbiamo visto che la forza $\vec{F}$ possiede un **momento meccanico** $\vec{M}$ dato da :

$$\vec{M} = (P - O) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad [22]$$

Vogliamo trovare la relazione che intercorre tra il **momento angolare** $\vec{L}$ ed il **momento meccanico** $\vec{M}$.

$$[23] \quad \vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge m \cdot \vec{a} = \vec{r} \wedge m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad [24]$$

Derivo la [24] rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{0} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad [25]$$

Confrontandole relazioni [23] e [25] otteniamo: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ [19]

Il momento meccanico di una forza $\vec{F}$ rispetto ad un polo O è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare rispetto ad O .

Momenti d'inerzia

Per **momento d'inerzia** di un punto materiale P di massa **m**, rispetto ad una retta **a**, dalla quale dista **r**, si intende lo scalare $\mathcal{J} = m r^2$ [1]

Sia dato un sistema Σ di n punti materiali $P_1, P_2, \dots, P_n$ aventi rispettivamente masse $m_1, m_2, \dots, m_n$. Se r_i è la distanza del generico punto P_i dalla retta **a**, dicesi **momento d'inerzia** del sistema Σ rispetto alla retta **a** lo scalare: $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ [2]

Se il sistema è omogeneo di densità ρ il **momento d'inerzia** si riduce al calcolo di un integrale: $\mathcal{J} = \int_{\mathbf{m}} r^2 d\mathbf{m}$ [3]

Il **momento d'inerzia** di un corpo dipende dalla retta **a**, dalla forma del corpo e dalla distribuzione delle masse nel corpo stesso. ^(§)

$$[I] = [M \cdot L^2] \qquad \{I\} = \{m\} \cdot \{r^2\} = kg \cdot m^2$$

$\rho = \frac{dm}{d\ell}$ = massa lineare (**densità lineare**) di un corpo

$\rho = \frac{dm}{dS}$ = massa superficiale (**densità superficiale**) di un corpo

$\rho = \frac{dm}{dV}$ = massa volumica (**densità volumica**) di un corpo

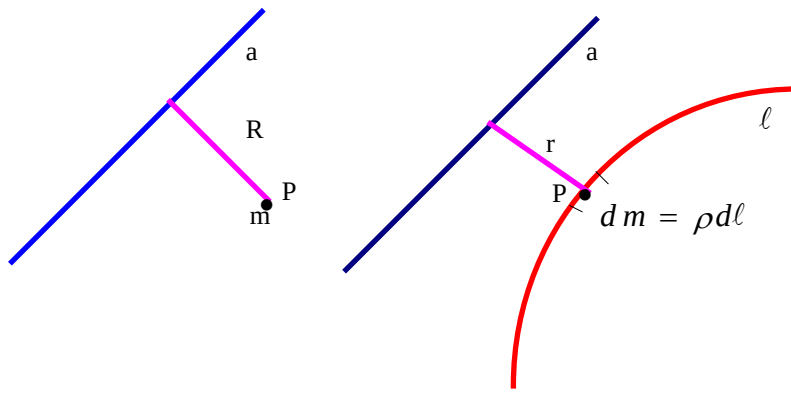
$$dm = \rho \cdot dV \quad dm = \rho \cdot dS \quad dm = \rho \cdot d\ell \quad m = \int_V \rho dV \quad m = \int_S \rho dS \quad m = \int_{\ell} \rho d\ell$$

• Sistema dato da una linea ℓ $\mathcal{J} = \rho \int_{\ell} r^2 d\ell$

• Sistema omogeneo dato da una superficie S: $\mathcal{J} = \rho \iint_S r^2 dS$

• Sistema omogeneo dato da un volume V: $\mathcal{J} = \rho \iiint_V r^2 dV$

^(§) Confrontando il moto traslatorio e quello rotatorio, si deduce che alla massa m del moto traslatorio corrisponde il momento d'inerzia $\mathcal{J}$ del moto rotatorio. Si noti però che mentre m non dipende dalla posizione del corpo, $\mathcal{J}$ dipende invece dalla particolare retta attorno alla quale avviene la rotazione.



Questi tre momenti d'inerzia sono stati calcolati rispetto ad una retta **a**.

r = distanza del generico punto P dalla retta a

$d\ell$ = elemento generico di linea

dS = elemento generico di superficie , dV = elemento generico di volume

- **Momento d'inerzia rispetto ai piani coordinati**

$$\mathcal{J}_{yz} = \int_C x^2 dC \quad \mathcal{J}_{xz} = \int_C y^2 dC \quad \mathcal{J}_{xy} = \int_C z^2 dC$$

- **Momento d'inerzia rispetto agli assi coordinati**

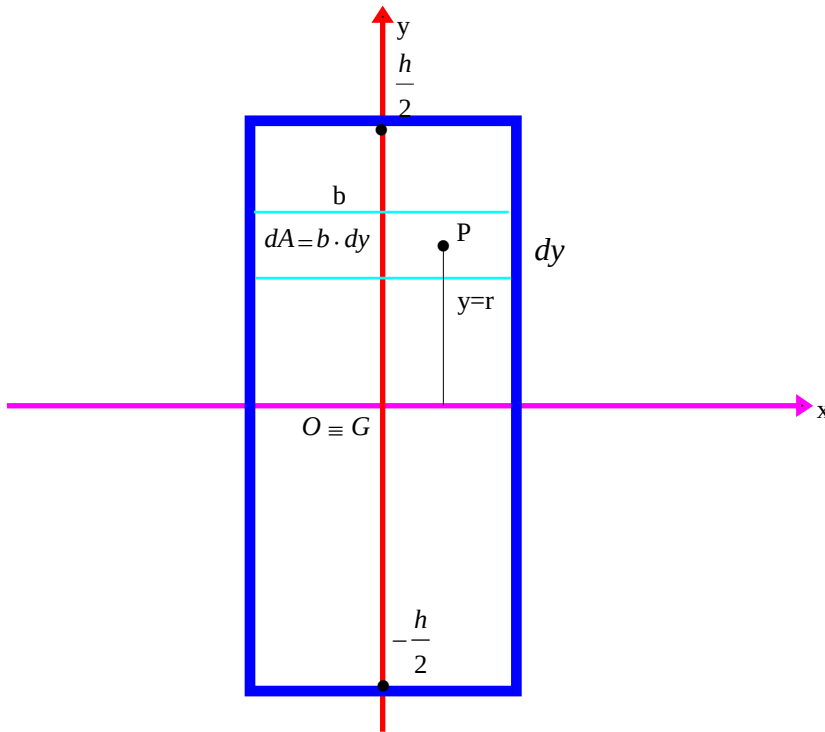
$$\mathcal{J}_x = \int_C (y^2 + z^2) dC \quad \mathcal{J}_y = \int_C (x^2 + z^2) dC \quad \mathcal{J}_z = \int_C (x^2 + y^2) dC$$

- **Momento d'inerzia rispetto all'origine O** $\mathcal{J}_O = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) dC$

dove **C** può rappresentare una linea, una superficie, un volume ed allora gli integrali diventano di linea, doppi, tripli.

Esempi di calcolo di momenti d'inerzia

1) Momento d'inerzia di una superficie rettangolare rispetto all'asse x



Si abbia una superficie rettangolare (di dimensioni **b** ed **h**) di massa superficiale ρ costante. Vogliamo calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x. Il **baricentro** della superficie rettangolare è il punto $G \equiv O$ intersezione delle diagonali.

$bh = A$ = area del rettangolo

$\rho A = m$ = massa della superficie rettangolare

$$\mathcal{J} = \rho A \frac{h^2}{12} = m \frac{h^2}{12} = \text{momento d'inerzia della superficie rettangolare rispetto all'asse x}$$

$$\mathcal{J} = \rho \int_S r^2 dA = \rho \int_S y^2 dA = \rho \int_S y^2 b dy = \rho b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \rho b \left[\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right] = \rho A \frac{h^2}{12} = m \frac{h^2}{12}$$

2) Momento d'inerzia di una sfera rispetto ad un asse passante per il suo centro

$$\mathcal{J} = \frac{2}{5} m r^2 \quad R = \text{raggio della sfera}$$

3) Momento d'inerzia di un cilindro circolare omogeneo rispetto al suo asse z

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} m r^2 \quad R = \text{raggio del cilindro}$$

4) Momento d'inerzia di una sbarra omogenea di lunghezza ℓ e di massa totale m rispetto ad un asse normale alla sbarra in un suo estremo $\mathcal{J} = m \cdot \frac{\ell^2}{3}$

Se l'asse z è normale alla sbarra nel suo punto medio, avremo: $\mathcal{J} = m \cdot \frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{3} = m \cdot \frac{\ell^2}{12}$

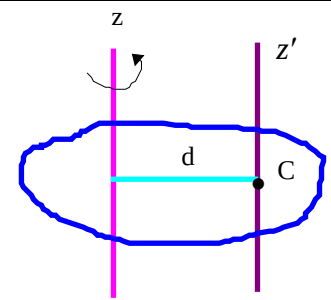
Teorema di Huygens-Steiner o del trasporto dei momenti d'inerzia

• Il **momento d'inerzia** di un corpo rigido rispetto ad un asse di rotazione z è uguale al **momento d'inerzia** dello stesso corpo rigido rispetto ad una retta z' parallela a z e passante per il centro di massa C del corpo rigido più il termine $m \cdot d^2$.

$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{z'} + m d^2$$

$\mathcal{J}_z$ = momento d'inerzia del corpo rigido di massa m rispetto all'asse di rotazione z

$\mathcal{J}_{z'}$ = momento d'inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse z' parallelo a z e passante per il centro di massa del corpo rigido d = distanza tra le due rette parallele z e z'



• Il **momento d'inerzia** di un sistema di particelle rispetto ad un qualsiasi asse è uguale al **momento d'inerzia** rispetto ad un asse parallelo passante per il centro di massa più il termine $m \cdot d^2$ dove $m = \sum m_i$ è la massa totale (del sistema di particelle) e d è la distanza tra i due assi. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_C + m d^2$

Dimostrazione: Noi abbiamo dimostrato che: $T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_C \omega^2$ e che $T = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$

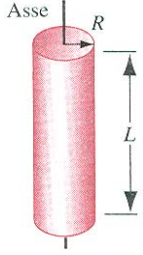
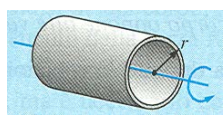
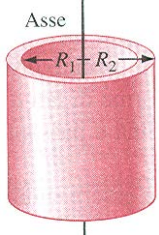
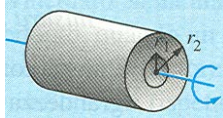
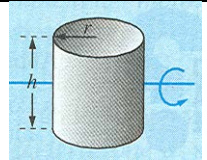
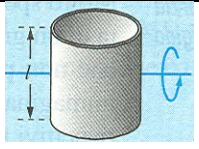
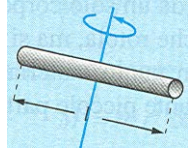
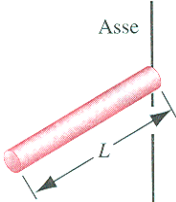
Supponiamo che il corpo rigido ruoti con velocità angolare ω rispetto ad un asse z posto ad una distanza d da un asse parallelo z' passante per il centro di massa C .

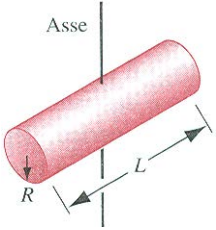
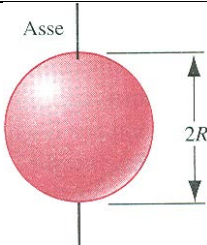
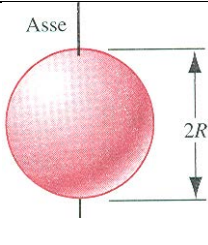
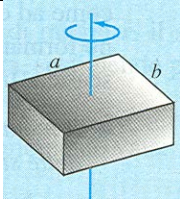
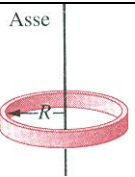
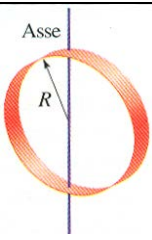
La velocità lineare del centro di massa rispetto a qualunque punto fisso dell'asse z è:

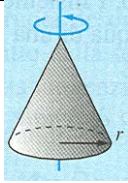
$$v_C = \omega d, \quad T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_C \omega^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_C \omega^2$$

Dividendo ambo i membri per $\frac{1}{2} \omega^2$ otteniamo: $\mathcal{J} = \mathcal{J}_C + m d^2$

Momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi

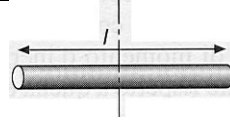
 $I = \frac{1}{2} m R^2$ Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse del cilindro	 Strato cilindrico sottile Cilindro Cavo rispetto all'asse del cilindro $I = m r^2$
 Guscio cilindrico rispetto all'asse del cilindro $I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$	 Cilindro Cavo $I = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$
 cilindro pieno (o disco) rispetto ad un asse diametrale passante per il centro di massa $I = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m h^2$	 Tubo sottile $I = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{12} m \ell^2$
 Sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m con asse di rotazione perpendicolare alla sbarra nel suo centro $I = \frac{1}{12} m \ell^2$	 Sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m con asse di rotazione perpendicolare alla sbarra in uno degli estremi $I = \frac{1}{3} m \ell^2$

 Cilindro pieno (o disco) rispetto ad un asse diametrale passante per il centro di massa $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$	Cilindro pieno con asse di rotazione coincidente con una generatrice del cilindro . $I = \frac{3}{2}mr^2$
 $I = \frac{2}{5}mR^2$ Sfera piena di raggio r e massa m con asse di rotazione coincidente con un qualsiasi diametro	 $I = \frac{2}{3}mR^2$ Sfera cava con guscio sottile con asse di rotazione coincidente con un qualsiasi diametro
Sfera piena di raggio r e massa m una qualsiasi retta tangente alla sfera $I = \frac{7}{5}mr^2$	 Parallelepipedo o lastra rispetto ad un asse perpendicolare passante per il centro $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
 $I = mr^2$ Anello di raggio r con asse di rotazione coincidente con l'asse di simmetria dell'anello	 Anello rispetto ad un asse diametrale $I = \frac{1}{2}mR^2$



$$I = \frac{3}{10} m r^2$$

Cono circolare retto con la base di raggio r con l'asse di rotazione coincidente con l'asse del cono



$$I = \frac{1}{12} m \cdot \ell^2$$

Asta sottile rispetto ad un asse di rotazione perpendicolare all'asse dell'asta e passante per il suo centro di massa.

Dinamica del corpo rigido

Obiettivi dell'unità didattica

• In questa unità didattica vedremo che per il moto rotatorio esiste un'equazione angolare equivalente a $\vec{F} = m\vec{a}$. Essa stabilisce una relazione tra il momento della forza applicato ad un corpo ed il prodotto tra la sua accelerazione angolare ed una grandezza, detta **momento d'inerzia**, che ne misura l'inerzia di rotazione. Vedremo inoltre che un corpo in moto rotatorio possiede un'**energia di rotazione** ed un **momento angolare**.

• Il termine **momento** viene utilizzato in fisica per indicare diverse grandezze, tutte collegate alla rotazione.

Il vettore $\vec{M} = \vec{r}$, **momento di una forza** introdotto per le rotazioni, è l'equivalente della **forza** $\vec{F} = m\vec{a}$; esso è la causa della rotazione: la sua presenza o meno determina l'esistenza o meno di una rotazione.

• La grandezza scalare I, **momento d'inerzia** di un corpo rigido, è l'equivalente della massa e, quindi, esprime la misura della resistenza di un corpo ad essere messo in rotazione. Il **momento d'inerzia** $\mathcal{J}$ lega la causa della rotazione, il momento della forza $\vec{M} = \vec{r}$, con il suo effetto, l'accelerazione angolare α .

• Il **momento angolare** $\vec{L}$ descrive il modo nel quale in natura avvengono le rotazioni dei corpi rigidi. Il **momento angolare** o **momento della quantità di moto** è associato alla tendenza di un corpo a rimanere in rotazione.

• In questa unità didattica introdurremo le seguenti grandezze fisiche:

$$\vec{L} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \vec{q} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad \mathbf{L} = m\mathbf{r}\mathbf{v} = m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} = \mathcal{J}\boldsymbol{\omega} \quad \vec{L} = m\mathbf{r}^2\vec{\omega} = \mathcal{J}\cdot\vec{\omega}$$

$\vec{L}$ = **momento angolare** di un corpo di massa m avente **momento d'inerzia** $\mathcal{J}$ e **velocità angolare** $\vec{\omega}$

Il verso del momento angolare $\vec{L}$ può essere calcolato applicando la regola della mano destra. Se pieghiamo le dita della mano destra nel verso della rotazione del corpo, il pollice della mano destra ci fornisce il verso del momento angolare $\vec{L}$. Il momento angolare obbedisce ad una legge di conservazione simile a quella seguita dalla quantità di moto.

Legge di conservazione del momento angolare: Se su un corpo non agisce alcun momento meccanico $\vec{M}=\vec{\tau}$ allora il suo momento angolare rimane costante in modulo, direzione e verso. In simboli abbiamo:

$$L = \text{costante} \quad \text{se} \quad \sum \vec{M} = \sum \vec{\tau} = \vec{0}$$

$\vec{M}=(\mathbf{P}-\mathbf{O})\wedge\vec{F}=\vec{r}\wedge\vec{F}$ = **momento della forza** $\vec{F}$ rispetto al punto O

Con parole diverse possiamo dire che se il momento risultante delle forze esterne è nullo, il momento angolare $\vec{M}=\vec{\tau}$ si conserva, ossia nel prodotto $\mathcal{J}\cdot\vec{\omega}$ non variano $\mathcal{J}$ ed $\vec{\omega}$. Per i corpi rigidi che ruotano e traslano valgono le seguenti leggi:

$\mathcal{J}=\mathbf{m}\mathbf{r}^2$ = **momento d'inerzia** di un punto materiale P di massa $\mathbf{m}$, rispetto ad una retta $\mathbf{a}$, dalla quale dista $\mathbf{r}$

$$\mathcal{J}=\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{r}_i^2 = \text{momento d'inerzia di un sistema di punti materiali}$$

rispetto ad una retta $\mathbf{a}$

Il teorema dell'asse parallelo o Teorema di Huygens-Steiner o del trasporto dei momenti d'inerzia

Il **momento d'inerzia** di un corpo rigido rispetto ad un asse di rotazione $\mathbf{z}$ è uguale al **momento d'inerzia** dello stesso corpo rigido rispetto ad una retta $\mathbf{r}$ parallela a $\mathbf{z}$ e passante per il centro di massa $\mathbf{C}$ del corpo rigido più il termine $m\cdot d^2$:

$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_z' + m\mathbf{d}^2 \quad \mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{\text{cdm}} + m\mathbf{d}^2$$

Con parole diverse possiamo dire che Il **momento d'inerzia** di un corpo rigido rispetto ad un asse di rotazione $\mathbf{z}$ è uguale al **momento d'inerzia** $m\mathbf{d}^2$ che avrebbe

rispetto allo stesso asse se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa, più il suo momento d'inerzia $\mathcal{J}_C$ rispetto ad un asse parallelo passante per il centro di massa del corpo.

$\mathcal{J}_z$ = momento d'inerzia del corpo rigido di massa m rispetto all'asse di rotazione z

$\mathcal{J}_{cdm}$ = momento d'inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse z' parallelo a z e passante per il centro di massa del corpo rigido

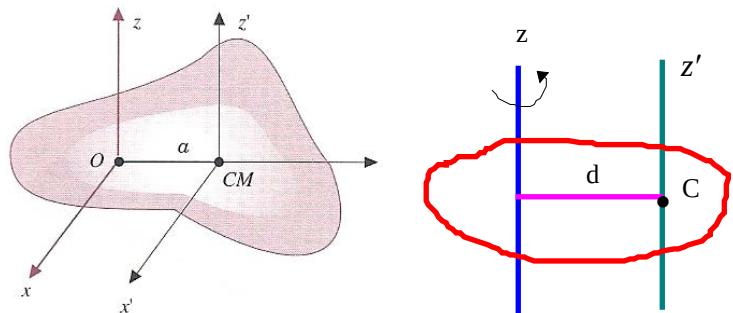
d = distanza tra le due rette parallele z e z'

$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{z'} + m \cdot a^2$$

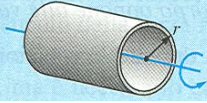
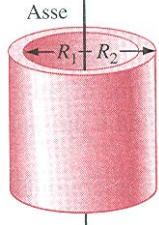
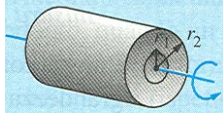
$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{cdm} + m \cdot a^2$$

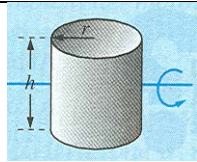
$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{z'} + m \cdot d^2$$

$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{cdm} + m \cdot d^2$$

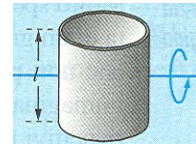


Momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi

 $I = \frac{1}{2} m R^2$ Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse del cilindro	 Strato cilindrico sottile Cilindro Cavo rispetto all'asse del cilindro $I = m r^2$
 Guscio cilindrico rispetto all'asse del cilindro $I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$	 Cilindro Cavo $I = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$

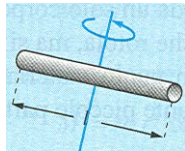


cilindro pieno (o **disco**) rispetto ad un asse diametrale passante per il centro di massa

$$I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$$


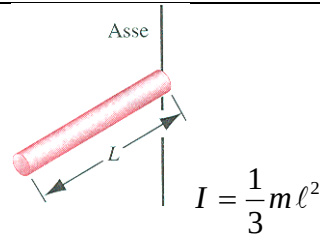
Tubo sottile

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$$

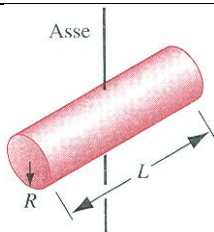


Sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m con asse di rotazione perpendicolare alla sbarra nel suo centro

$$I = \frac{1}{12}m\ell^2$$



Sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m con asse di rotazione perpendicolare alla sbarra in uno degli estremi

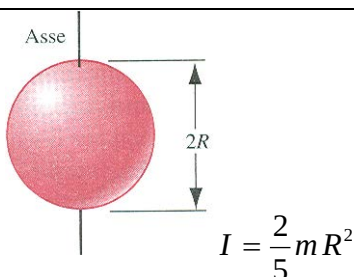
$$I = \frac{1}{3}m\ell^2$$


Cilindro pieno (o **disco**) rispetto ad un asse diametrale passante per il centro di massa

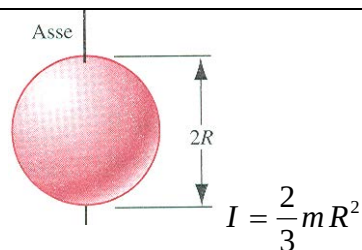
$$I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

Cilindro pieno con asse di rotazione coincidente con una generatrice del cilindro.

$$I = \frac{3}{2}mr^2$$

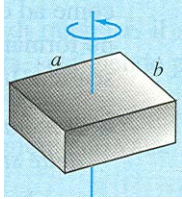
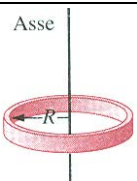
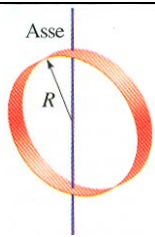
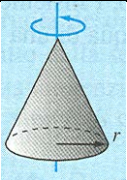
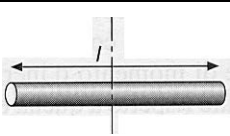


Sfera piena di raggio r e massa m con asse di rotazione coincidente con un qualsiasi diametro

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$


Sfera cava con guscio sottile con asse di rotazione coincidente con un qualsiasi diametro

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$

Sfera piena di raggio r e massa m rispetto ad una qualsiasi retta tangente alla sfera $I = \frac{7}{5}mr^2$	 Parallelepipedo o lastra rispetto ad un asse perpendicolare passante per il centro $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
 Anello di raggio r con asse di rotazione coincidente con l'asse di simmetria dell'anello $I = mr^2$	 Anello rispetto ad un asse diametrale $I = \frac{1}{2}mR^2$
 Cono circolare retto con la base di raggio r con l'asse di rotazione coincidente con asse del cono $I = \frac{3}{10}mr^2$	 Asta sottile rispetto ad un asse di rotazione perpendicolare all'asse dell'asta e passante per il suo centro di massa. $I = \frac{1}{12}m \cdot \ell^2$

Per i corpi rigidi che ruotano e traslano valgono le seguenti leggi:

- La seconda legge della dinamica per le rotazioni attorno ad un asse fisso, ovvero la **seconda equazione cardinale** per un corpo rigido che ruota

$$\tau = M = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \alpha$$

$M = \tau =$ **momento risultante** rispetto all'asse di rotazione di tutte le forze che agiscono sul corpo rigido

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \text{accelerazione angolare del corpo rigido rispetto all'asse di}$$

rotazione = **accelerazione angolare** di un punto qualsiasi del corpo rigido

Questa legge stabilisce che per produrre un'accelerazione angolare α è necessario un momento meccanico ed il valore di questo momento meccanico è direttamente proporzionale al momento d'inerzia I .

La seconda equazione cardinale per un corpo che ruota può essere scritta anche nella seguente maniera: $\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}$ con $\mathbf{L} = \mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$

Il rapporto tra la variazione del momento angolare ed il tempo in cui si verifica è uguale al momento meccanico della forza (o del sistema di forze) applicata al corpo .

$\mathbf{L}$ = **momento angolare totale** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione

La seconda legge della dinamica per un corpo rigido che trasla, ovvero la **prima equazione cardinale** per un corpo rigido che trasla

$$\bar{\mathbf{R}}^{(e)} = \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{a}}_c = \frac{\Delta \bar{\mathbf{Q}}}{\Delta t}$$

$\bar{\mathbf{R}}^{(e)}$ = **risultante** di tutte le forze che agiscono sul corpo rigido ed immaginate applicate nel centro di massa del corpo rigido

$\bar{\mathbf{a}}_c$ = **accelerazione** del centro di massa del corpo rigido

$\bar{\mathbf{Q}}$ = **quantità di moto** del corpo rigido = **quantità di moto** del centro di massa del corpo nel quale immaginiamo di applicare l'intera massa del corpo

$\mathbf{m}$ = **massa** del corpo rigido

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso

$$K = \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega^2$$

$\mathcal{J}$ = momento d'inerzia del corpo che ruota

ω = velocità angolare del corpo che ruota rispetto all'asse di rotazione

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota e trasla

$$E_c = T = K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_c \omega^2 \quad \text{teorema di König}$$

L'energia cinetica totale di un corpo rigido che compie sia un moto traslatorio che un moto rotatorio intorno all'asse passante per il proprio centro di massa è data dalla somma dell'energia cinetica di traslazione della massa di tutto il corpo rigido supposta concentrata nel centro di massa e dell'energia di rotazione rispetto all'asse passante per il centro di massa.

M = massa del corpo rigido

v_c = velocità del centro di massa del corpo = velocità di traslazione dell'asse di rotazione

$\mathcal{J}_c$ = momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse passante per il centro di massa

Introduzione alla dinamica dei corpi rigidi

Corpo rigido è un sistema continuo di punti materiali le cui reciproche distanze rimangono invariate durante l'applicazione su di esso di un sistema qualsiasi di forze esterne. Un corpo rigido conserva la sua forma durante il moto. Per un corpo rigido possiamo distinguere due tipi di moto: **1) moto di pura traslazione** **2) moto di pura rotazione attorno ad un asse.**

• Moto di pura traslazione

Un corpo si muove di **moto traslatorio** quando tutti i suoi punti subiscono spostamenti **equipollenti**, cioè aventi la **stessa direzione**, lo **stesso verso** e lo **stesso modulo**. In un moto di pura traslazione tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità vettoriale $\vec{v}$. Tutte le particelle che costituiscono il corpo rigido descrivono traiettorie fra loro parallele.

• Moto di pura rotazione

Un corpo rigido si muove di **moto rotatorio** quando tutti i suoi punti descrivono traiettorie circolari aventi i centri su di una retta **r** (detta **asse di rotazione**) e giacenti su piani ortogonali ad **r**.

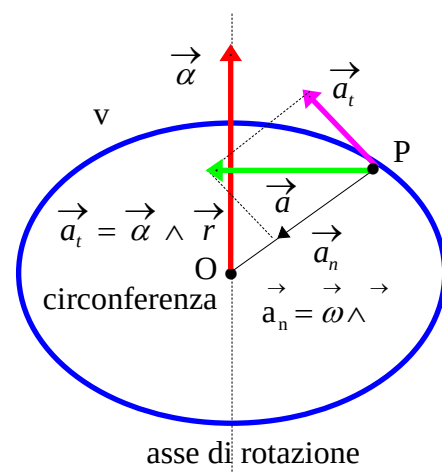
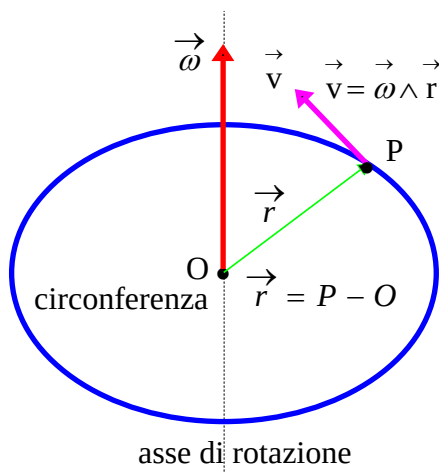
In un **moto di pura rotazione** tutti i punti materiali costituenti il corpo rigido percorrono con la stessa velocità angolare ω circonferenze di raggio diverso a seconda della loro distanza dall'asse di rotazione. Le circonferenze giacciono su piani perpendicolari all'asse di rotazione che può essere fisso o può cambiare la sua direzione rispetto al corpo durante il moto. Il moto più generale di un corpo rigido si può sempre considerare come la combinazione di una opportuna rotazione e di una opportuna traslazione. Questo significa che è sempre possibile trovare un sistema di riferimento che trasli e non ruoti rispetto al quale il moto del corpo rigido sia esclusivamente rotatorio. Si definisce **velocità angolare** di un corpo rigido la velocità angolare di un suo punto qualsiasi. La velocità angolare di un corpo rigido può essere rappresentata da un vettore $\vec{\omega}$ parallelo all'asse di rotazione ed orientato come un osservatore che, disposto nello stesso verso, vede ruotare il corpo rigido in senso antiorario. Ciò premesso, possiamo affermare che la velocità lineare $\vec{v}$ e quella angolare $\vec{\omega}$ di un punto P del corpo rigido sono legate tra loro dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$ [*] dove $\mathbf{O}$ è il piede della perpendicolare condotta dal punto P all'asse di rotazione.

- Il moto di un corpo rigido si dice **rototraslatorio** quando il corpo si muove simultaneamente di moto rotatorio e traslatorio.
- Il moto di un corpo rigido può essere sempre considerato come risultante di un moto traslatorio di un suo punto O, comunque preso, e di un moto rotatorio attorno al punto stesso. Questo significa che un sistema di forze agenti su un corpo rigido è equivalente ad un'unica forza $\vec{R}$ applicato in O uguale al **risultante** $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, più una coppia di momento $\vec{M}_O$ uguale al **momento risultante** del sistema di forze rispetto ad O.
- Se assumiamo il centro di riduzione $\mathbf{O}$ coincidente col centro di massa $\mathbf{C}$ del corpo rigido, la forza $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ imprime al corpo rigido un moto traslatorio regolato dalla

legge $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_C$ (m = massa del corpo rigido) identica alla **legge fondamentale** della dinamica del punto materiale. Il momento risultante $\vec{M}_O = \vec{M}_C$ determina un moto rotatorio del corpo rigido attorno ad un asse passante per il centro di massa.

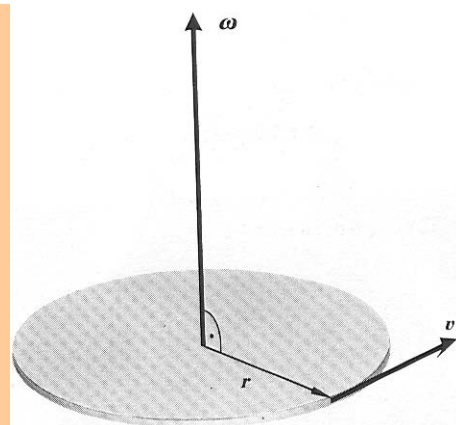
• Posiamo attribuire alle grandezze angolari ω ed α una forma vettoriale ammettendo che i vettori $\vec{\omega}$ ed $\vec{\alpha}$ abbiano come direzione l'asse di rotazione (cioè la retta perpendicolare al piano della circonferenza e passante per il suo centro O) e verso tale da verificare le seguenti relazioni vettoriali: $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$ $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$

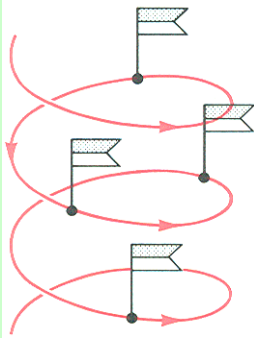
$\vec{\omega}$ ed $\vec{\alpha}$ possono essere pensati applicati in **P** in quanto sono vettori liberi.



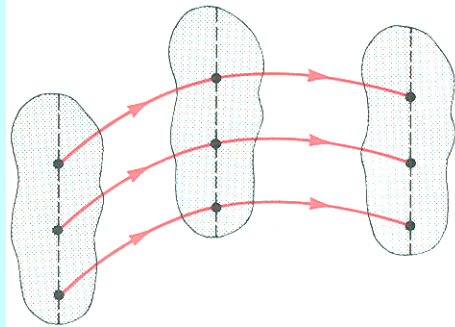
Velocità angolare e velocità lineare.

La **velocità lineare** aumenta con il raggio, mentre la **velocità angolare** è sempre la stessa per tutti i punti del corpo rigido che ruota.

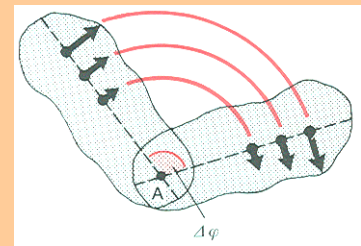




**Moto traslatorio
spaziale**

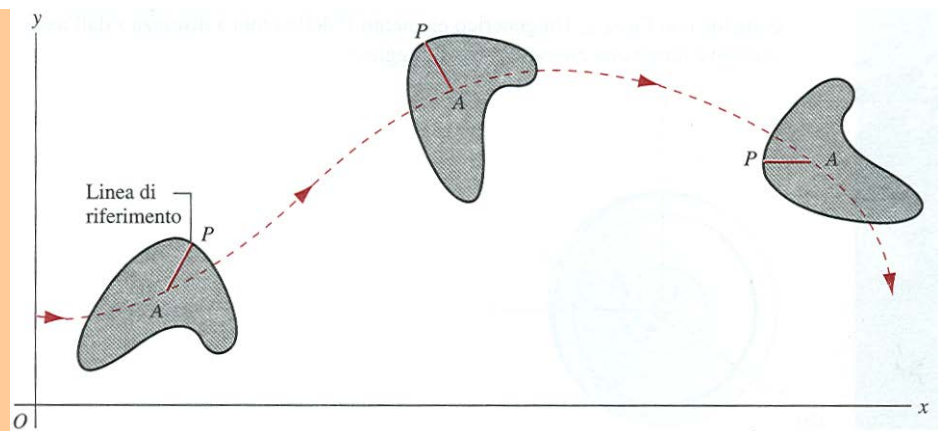


Moto traslatorio piano



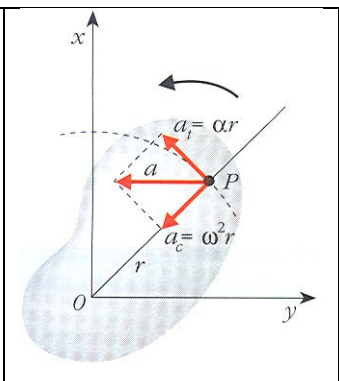
Moto rotatorio piano

**Rappresentazione
del moto
rototraslatorio di
un generico corpo
rigido. In questo
caso particolare il
moto traslatorio è
confinato nel
piano xy . In ogni
istante l'asse di**



**rotazione è parallelo all'asse z ed il suo punto d'intersezione con il piano xy si
muove lungo la linea tratteggiata. Il moto rotatorio è messo in evidenza per
mezzo del segmento AP .**

Quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso passante per O , con accelerazione angolare α e velocità angolare istantanea ω , l'accelerazione $\vec{a}$ di un punto P a distanza r da O ha una componente tangenziale $a_t = \alpha \cdot r$ ed una componente centripeta $a_c = \omega^2 \cdot r$.



Energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso

Consideriamo un corpo rigido che ruota con **velocità angolare costante** attorno ad un asse fisso rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Tutte le particelle in cui possiamo pensare suddiviso il corpo, ruotano con la stessa velocità angolare ω ma con **diversa velocità lineare**. Infatti le singole particelle del corpo rigido considerate puntiformi descrivono traiettorie circolari concentriche con l'asse di rotazione e giacenti su piani perpendicolari all'asse di rotazione. Tutte queste particelle ruotano attorno all'asse con la stessa velocità angolare ω del corpo rigido ruotante, ma con **velocità tangenziali** $v = \omega r$ variabili con la distanza r dall'asse di rotazione; ne segue che le più vicine all'asse di rotazione sono le più lente, mentre le più lontane sono le più veloci. Per calcolare l'**energia cinetica** del corpo rigido basta effettuare la somma delle energie cinetiche delle singole particelle (assimilabili a punti materiali aventi rispettivamente masse $m_1, m_2, m_3 \dots$, velocità lineari $v_1, v_2, v_3 \dots$ e velocità angolare ω) di cui è composto il corpo rigido. Se $r_1, r_2, r_3 \dots$ sono le distanze delle singole particelle del corpo rigido l'energia cinetica del corpo rigido dovuta alla sua rotazione è data da:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r_3^2 + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} \omega (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots)$$

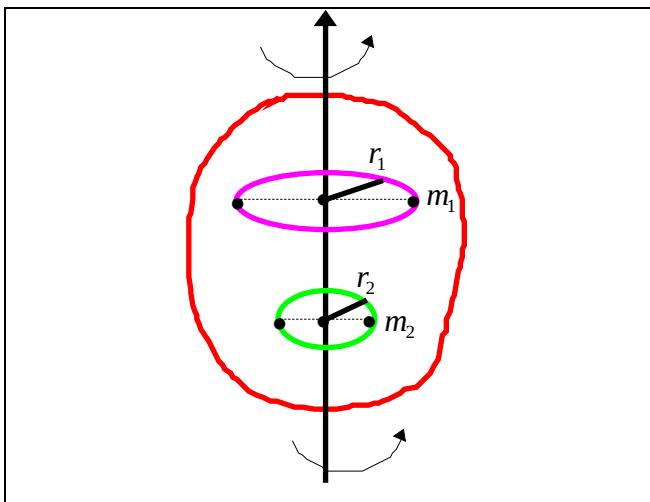
La quantità $\mathcal{J} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$ prende il nome di **momento d'inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione.

$$K = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$$

Il **momento d'inerzia** di un corpo rigido ruotante dipende dall'asse di rotazione, dalla sua forma geometrica e dalla distribuzione delle singole particelle nel corpo stesso.

Si noti che il **momento d'inerzia** di un corpo **non è una sua proprietà intrinseca** come la sua massa. Nel moto rotatorio il momento d'inerzia ha **la stessa funzione** che ha la massa nel moto traslatorio di un punto materiale.

Come abbiamo visto per il **moto traslatorio**, la massa di una particella è **una misura della sua inerzia**, cioè della difficoltà che presenta il corpo a subire accelerazioni. Nel moto rotatorio di un corpo non è soltanto la massa che conta, ma il prodotto della massa per il quadrato della distanza fra tale massa e l'asse di rotazione. Il valore del momento d'inerzia può essere variato senza alterare la massa totale del corpo. L'energia cinetica rotazionale $K = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$ è semplicemente la somma delle energie cinetiche di traslazione delle singole parti del corpo. L'energia cinetica rotazionale è solo un modo più conveniente per esprimere l'energia cinetica di un corpo rigido in moto rotatorio.



L'**energia cinetica** di un **corpo rigido che ruota** attorno ad un asse fisso è uguale alla somma delle energie cinetiche dei vari punti materiali che compongono il corpo.

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota e trasla

Consideriamo un corpo rigido che ruota con velocità angolare ω attorno ad un asse fisso **z**. La sua **energia cinetica** ci viene fornita dalla seguente relazione:

$$E_c = T = K = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$$

Tuttavia può capitare che il corpo rigido durante il suo moto effettui contemporaneamente una rotazione ed una traslazione, come avviene per una ruota di automobile. Se l'asse di rotazione passa per il centro di massa del corpo rigido e durante il moto si mantiene sempre parallelo a se stesso, allora vale il seguente **teorema di König**:

$$E_c = T = K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_c \omega^2$$

dove m è la massa del corpo rigido, v_c la velocità del centro di massa, $\mathcal{J}_c$ il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa. Quindi :

l'energia cinetica totale di un corpo rigido è la somma dell'energia cinetica di traslazione della massa di tutto il corpo rigido e dell'energia di rotazione rispetto all'asse passante per il centro di massa.

$E_c = T = K$ = energia cinetica del corpo rigido rispetto ad un **S.R.I.** $Oxyz$

v_c = velocità del centro di massa del corpo rigido rispetto al **S.R.I.** $Oxyz$

$C_{x'y'z'}$ si muove di moto traslatorio rispetto al **S.R.I.** $Oxyz$

$\mathcal{J}_c$ = momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione z' passante per il centro di massa C

ω = velocità angolare del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione z'

m = massa del corpo rigido

$\frac{1}{2} \mathcal{J}_c \omega^2$ = energia cinetica rotazionale del corpo rigido rispetto al centro di

massa, cioè rispetto ad un asse z' , parallelo a z , e passante per il centro di massa C

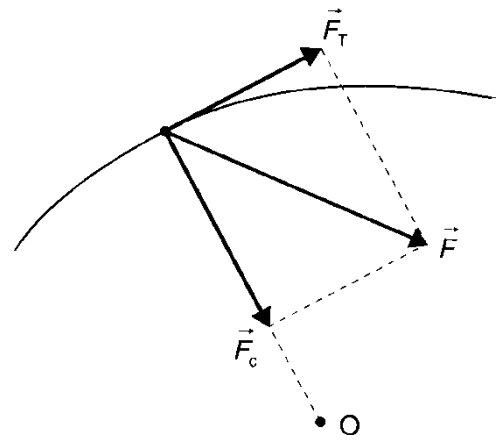
Il corpo rigido ruota attorno ad un asse (z') passante per il centro di massa C mentre il centro di massa C trasla rispetto all'osservatore solidale col **S.R.I.** $Oxyz$

La seconda legge della dinamica per le rotazioni attorno ad un asse fisso, ovvero la seconda equazione cardinale per un corpo rigido che ruota

Supponiamo che un punto materiale di massa m ruoti attorno ad un asse fisso descrivendo una circonferenza di centro O e raggio r . Supponiamo che il moto sia **circolare uniformemente accelerato**. La forza $\vec{F}$ che agisce sul punto materiale di massa m non è perpendicolare alla traiettoria. Poiché risulta $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t$, possiamo affermare che il punto materiale è soggetto all'azione di due forze: una, la $\vec{F}_t$, tangente alla traiettoria e, quindi, variabile in direzione ma costante in modulo, l'altra, la $\vec{F}_n$, sempre centripeta ma variabile in modulo.

$$F_t = m \cdot a_t = m \cdot (\alpha \cdot r) \Rightarrow$$

$$F_t \cdot r = m \cdot (\alpha \cdot r) \cdot r = mr^2 \cdot \alpha$$



Rappresentazione istantanea delle forze centripeta $\vec{F}_c$ e tangenziale $\vec{F}_t$ agenti in un moto circolare uniformemente accelerato. Si noti che il risultante $\vec{F}$ delle due forze non è perpendicolare alla traiettoria.

a_t = **accelerazione tangenziale** del punto materiale, α = **accelerazione angolare** del punto materiale; mr^2 = **momento d'inerzia** del punto materiale rispetto all'asse di rotazione. La formula precedente può essere scritta nella seguente maniera: **$M = \tau = \mathcal{J} \cdot \alpha = F \cdot r$**

Che esprime la legge fondamentale della dinamica per un punto materiale che ruota attorno ad un asse fisso.

$$\mathbf{M = \tau = \mathcal{J} \cdot \alpha = F \cdot r} \Rightarrow \tau = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow \tau \cdot \Delta t = \mathcal{J} \cdot \Delta \omega = \mathcal{J} \omega_2 - \mathcal{J} \omega_1 \quad [\mathbf{A}]$$

$\tau \cdot \Delta t$ = **impulso di un momento** $\mathcal{J} \omega$ = **quantità di moto angolare**

La [A] afferma quanto segue: <<**L'impulso di un momento è uguale alla variazione della quantità di moto angolare.**>> La legge, espressa dalla relazione $\mathbf{M} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, dimostrata per un punto materiale, è valida per un qualsiasi corpo solido che ruota attorno ad un asse fisso. Essa prende il nome di **seconda legge della dinamica per le rotazioni attorno ad un asse fisso**, detta anche **seconda equazione cardinale per un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso**.

Questa legge stabilisce che per produrre un'accelerazione angolare α è necessario un momento meccanico ed il valore di questo momento meccanico è direttamente proporzionale al momento d'inerzia $\mathcal{J}$.

La seconda legge della dinamica per un corpo rigido che trasla, ovvero la prima equazione cardinale per un corpo rigido che trasla

Consideriamo un corpo rigido che trasla. Il suo centro di massa si muove come una singola particella nella quale è concentrata tutta la massa del corpo rigido e nella quale sono applicate tutte le forze esterne agenti sul corpo rigido. Il centro di massa C del corpo rigido possiede un'accelerazione $\vec{a}_c$ dovuta all'azione di tutte le forze esterne immaginate applicate in C. Il moto del centro di massa è regolato dalla seguente relazione:

$$\vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$$

detta **I equazione cardinale** per un corpo rigido che trasla

Tale relazione può essere scritta nella seguente maniera: $\Delta t \cdot \vec{R}^{(e)} = \Delta \vec{Q}$ e prende il nome di **teorema della quantità di moto**.

$\vec{R}^{(e)}$ = **risultante** di tutte le forze che agiscono sul corpo rigido ed immaginate applicate nel centro di massa del corpo rigido

$\vec{a}_c$ = **accelerazione** del centro di massa del corpo rigido

$\vec{Q}$ = **quantità di moto** del corpo rigido m = **massa** del corpo rigido

La seconda legge della dinamica per un corpo rigido che ruota e trasla

• Come abbiamo visto un **corpo rigido** è caratterizzato dal fatto che, qualunque siano le forze ad esso applicate, le distanze tra i punti del corpo rimangono invariate. Pertanto un **corpo rigido conserva la sua forma durante il moto**. I due moti più semplici che possiamo considerare per un corpo rigido sono:

1) **Moto di pura traslazione** in cui tutti i punti del corpo rigido si muovono con la stessa velocità vettoriale $\vec{v}$. Questo significa che tutte le particelle di cui risulta costituito il corpo rigido descrivono **traiettorie parallele**. Tutti i punti del corpo rigido percorrono traiettorie uguali con la stessa legge oraria del moto. Lo studio del moto traslatorio di un corpo rigido si identifica non lo studio del moto del suo **centro di massa** (baricentro) nel quale si immagina concentrata tutta la massa del corpo rigido. Se un corpo rigido è soggetto soltanto ad un moto traslatorio allora il sistema di forze ad esso applicato si riduce ad un risultante $\vec{R}$ il cui sostegno passa per il centro di massa del corpo rigido. Il momento risultante del sistema di forze applicato al corpo, rispetto al centro di massa, è nullo. Il moto del corpo rigido può essere sostituito da moto di quel singolo punto che è il suo **centro di massa** C. La legge del moto

verrà espressa dalla seguente equazione vettoriale: $\vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t}$

2) **Moto di pura rotazione** attorno ad un asse, in cui tutti i punti del corpo rigido descrivono con la **stessa velocità angolare** ω circonferenze di raggio diverso a seconda della loro distanza dall'asse di rotazione. Tali circonferenze sono concentriche con l'asse di rotazione e giacciono su piani perpendicolari all'asse di rotazione, il quale può essere **fisso** o mutare la sua direzione rispetto al corpo rigido durante il moto. Il risultante di tutte le forze applicate al corpo è nullo, mentre il momento risultante del sistema di forze applicato al corpo, rispetto al centro di massa, è diverso da zero. La legge del moto verrà espressa dalla seguente equazione:

$$\tau = M = F \cdot r \cdot \sin \vartheta = F \cdot b = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \alpha$$

Il moto più generale di un corpo rigido si può sempre considerare come la combinazione di una opportuna rotazione e di una opportuna traslazione.

Questo significa che è sempre possibile trovare un **sistema di riferimento che trasli** (e non ruoti) rispetto al quale il **corpo ruota solamente**.

Adesso vogliamo studiare il moto di un corpo rigido supponendo che su di esso agisca un sistema di forze riducibile ad un **risultante** $\vec{R}^{(e)}$ applicante nel centro di massa del corpo rigido e ad un **momento risultante** $\vec{M}$ calcolato rispetto al centro di massa del corpo rigido. Il risultante $\vec{R}^{(e)}$ determinerà un moto traslatorio regolato dalla prima equazione cardinale del moto espressa dalla relazione:

$$\vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$$

Il momento risultante $\vec{M}$ determinerà, contemporaneamente al moto traslatorio, un moto rotatorio attorno ad un asse passante per il centro di massa regolato dalla seconda equazione cardinale del moto espressa dalla relazione:

$$\tau = M = F \cdot r \cdot \sin \vartheta = F \cdot b = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \alpha$$

Si capisce così perché queste due equazioni, in quanto descrivono completamente il moto di un **corpo rigido**, sono dette **equazioni cardinali** del moto.

Riassumendo possiamo affermare che il moto di un qualsiasi corpo rigido al quale è applicato un sistema di forze è la sovrapposizione di due moti, uno di **traslazione del suo centro di massa** ed uno di **rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa**

L'**energia cinetica** del corpo rigido sarà la somma dell'energia cinetica (di **traslazione**) del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione del corpo attorno all'asse passante per il centro di massa. In formule abbiamo:

$$E_c = T = K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_c \omega^2$$

v_c = **velocità del centro di massa** del corpo rigido

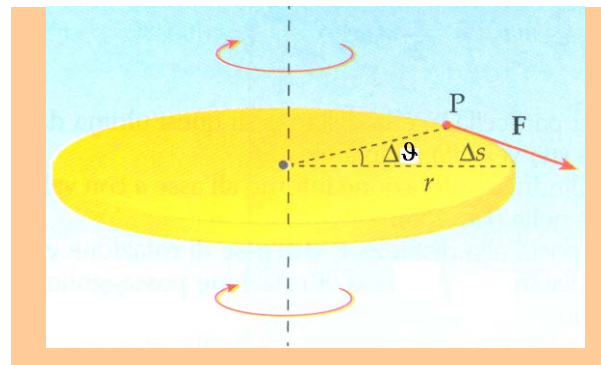
$\mathcal{J}_c$ = **momento d'inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa C

ω = **velocità angolare** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione

m = **massa del corpo rigido**

Il lavoro e l'energia di rotazione: teorema di variazione dell'energia cinetica per un corpo rigido che ruota

Il disco indicato in figura è messo in rotazione da una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P e tangente al disco. Sia Δs lo spostamento lineare di P per effetto della forza $\vec{F}$ e $\Delta\theta$ il corrispondente angolo di rotazione del disco.



Sia ℓ la lunghezza della corda che sottende l'arco di circonferenza Δs . Per uno spostamento Δs abbastanza piccolo possiamo ritenere il vettore $\vec{F}$ costante e $\ell \approx \Delta s = r \cdot \Delta\theta$, con $\Delta\theta$ angolo misurato in radianti. Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ per fare ruotare il disco di un angolo di rotazione $\Delta\theta$ è espresso dalla relazione:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = \vec{F} \cdot \ell = \vec{F} \cdot r \cdot \Delta\theta = M \cdot \Delta\theta = M \cdot (\theta_f - \theta_i) = M \cdot \omega \cdot \Delta t$$

dove M rappresenta il modulo del **momento** della forza $\vec{F}$ rispetto all'asse di rotazione. Dimostriamo adesso che vale la seguente relazione:

$$L = M \cdot \Delta\theta = M \cdot (\theta_f - \theta_i) = \frac{1}{2} \mathcal{J} (\omega_f^2 - \omega_i^2) = \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega_f^2 - \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega_i^2 \quad [\delta]$$

cioè il lavoro compiuto sul corpo rigido che ruota per effetto della forza esterna $\vec{F}$ è uguale alla variazione dell'energia cinetica rotazionale del corpo che ruota (**Teorema della variazione dell'energia cinetica per corpi rigidi che ruotano attorno ad un asse fisso**).

Noi sappiamo che per un moto rotatorio uniformemente vario vale la seguente

relazione: $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\vartheta_f - \vartheta_i) \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2(\vartheta_f - \vartheta_i)}$

$$L = M \cdot (\vartheta_f - \vartheta_i) = I \cdot \alpha \cdot (\vartheta_f - \vartheta_i) = I \cdot \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2(\vartheta_f - \vartheta_i)} \cdot (\vartheta_f - \vartheta_i) = \frac{1}{2} \mathcal{J} (\omega_f^2 - \omega_i^2) = \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega_f^2 - \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega_i^2$$

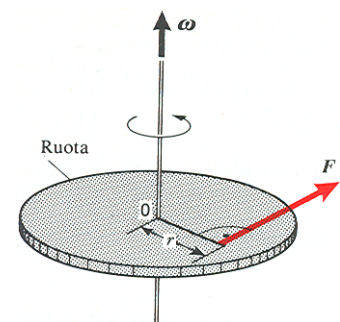
La relazione $[\delta]$ è valida in generale; $\mathbf{M}$ è il **momento risultante**, rispetto all'asse di rotazione, delle forze applicate al corpo rigido, $\vartheta = \vartheta_f - \vartheta_i$ è l'angolo di cui il corpo ruota nel tempo $t = t_f - t_i$, ω_i ed ω_f sono le velocità angolari del corpo rigido all'inizio del moto ed alla fine del moto. La formula $[\delta]$ esprime il **teorema della variazione dell'energia cinetica** dei corpi rigidi in rotazione attorno ad un asse fisso. **Il lavoro compiuto su un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso z è uguale alla variazione dell'energia cinetica di rotazione.**

Una ruota che gira attorno ad un asse fisso è il più semplice esempio di corpo rigido in moto rotatorio piano.

Per questo corpo rigido valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \Delta \vartheta = \mathbf{M} \cdot (\vartheta_f - \vartheta_i) = \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega_f^2 - \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega_i^2$$



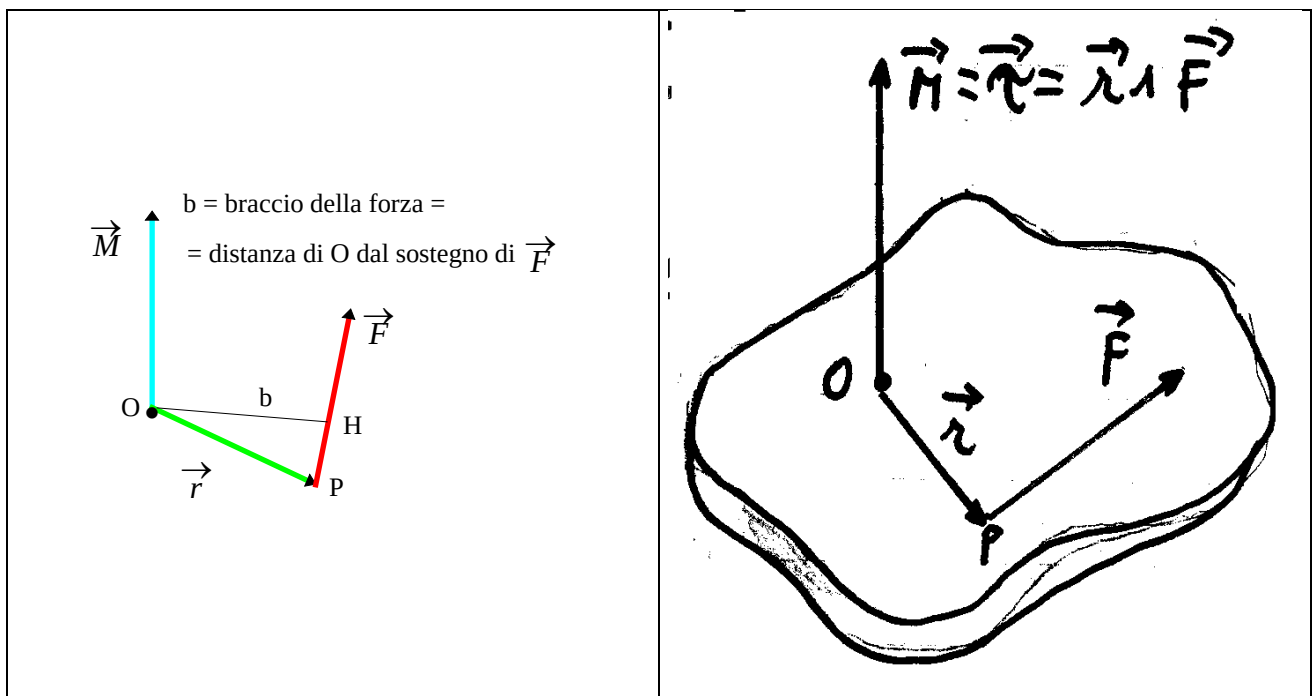
Momento angolare o momento della quantità di moto o momento cinetico

Il concetto di **momento di una forza** rispetto ad un punto può essere esteso a qualsiasi grandezza vettoriale. Se la grandezza vettoriale scelta è la **quantità di moto** otteniamo una nuova grandezza detta **momento angolare o momento della quantità di moto**.

Per i moti rotatori tale grandezza, in determinate condizioni, si **conserva**.

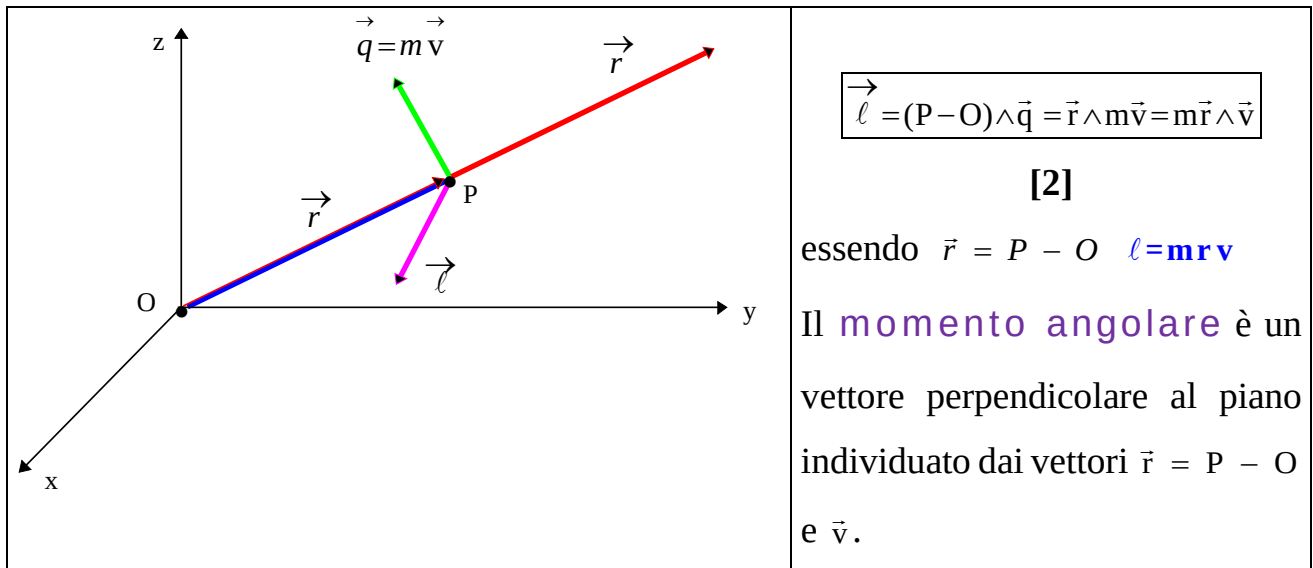
Data una forza $\vec{F}$, applicata in un punto P, definiamo **momento della forza** $\vec{F}$ rispetto ad un generico polo **O** la grandezza vettoriale $\vec{M}$ (o $\vec{\tau}$) definita dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{M} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ [1]

Il **momento angolare** è una grandezza di notevole importanza in fisica ed è, per un moto rotatorio, l'equivalente della **quantità di moto** per un moto lineare e per questo motivo, spesso, la quantità di moto è detta **momento lineare**.



Sia $\vec{q} = m \cdot \vec{v}$ la **quantità di moto** di una particella di massa **m** e velocità $\vec{v}$ occupante la posizione **P** e distante **r** da un punto **O** (origine di un riferimento cartesiano).

Il **momento angolare** (o **momento della quantità di moto** o **momento cinetico**) rispetto ad un punto fisso **O** di una particella di massa **m** che si muove con velocità lineare $\vec{v}$ è il vettore $\vec{\ell}$ completamente definito dalla seguente relazione vettoriale:



Il **momento angolare** di una particella in generale cambia in modulo, direzione e verso mentre la particella si muove. Nel caso del **moto circolare**, se O è il centro della circonferenza, i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono fra loro perpendicolari, hanno moduli costanti legati tra di loro dalla relazione: $v = \omega r$.

In questo caso il vettore $\vec{\ell}$ è sempre perpendicolare al piano della circonferenza ed il suo modulo vale: $\ell = m\mathbf{r}v = m\mathbf{r}^2\omega = \mathcal{J}\omega$ [3] dove $\mathcal{J} = m\mathbf{r}^2$ [4] è il **momento d'inerzia della particella di massa m rispetto al suo asse di rotazione**.

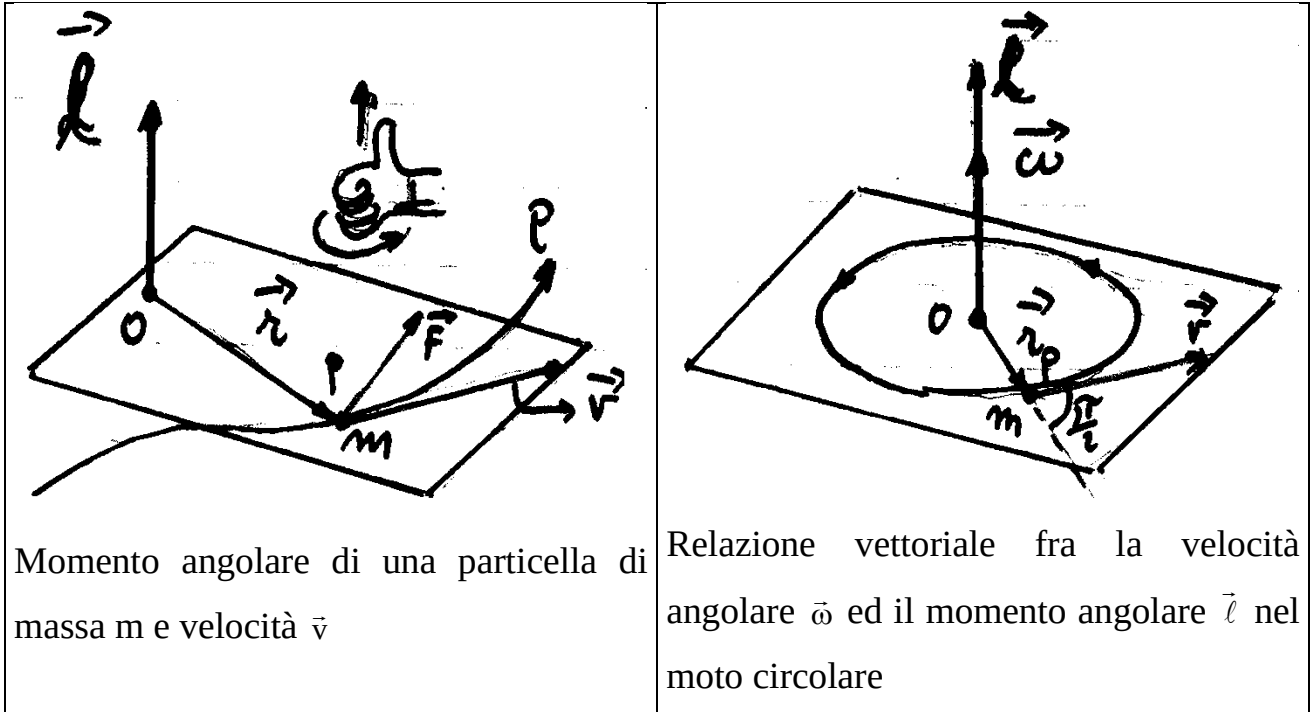
La direzione ed il verso di $\vec{\ell}$ coincidono con quelli di $\vec{\omega}$ e quindi possiamo scrivere:

$$\vec{\ell} = m\mathbf{r}\vec{v} = m\mathbf{r}^2\vec{\omega} = \mathcal{J}\vec{\omega} \quad [5]$$

Se l'unica forza che agisce sulla particella è la forza centripeta diretta verso l'origine O il momento angolare sarà costante.

Consideriamo un pianeta di massa m che ruota attorno ad una stella di massa M. L'orbita descritta può essere una circonferenza oppure un'ellisse. In entrambi i casi i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ cambiano continuamente, almeno in direzione; ma il vettore $\vec{\ell}$, **momento angolare** del pianeta rispetto alla stella, rimane costante in direzione, modulo e verso, cioè rimane costante nel tempo e quindi si conserva.

Osservazione: Sebbene il momento angolare sia associato di solito al moto rotatorio, anche una particella che si muove in linea retta ha un momento angolare rispetto ad un punto non giacente sulla retta.



Come una forza produce una variazione della quantità di moto della particella alla quale è applicata, così il **momento meccanico** di una forza determina una **variazione del momento angolare di una particella**.

Se $\vec{M}$ ed $\vec{l}$ sono rispettivamente il momento meccanico ed il momento angolare della particella m calcolati rispetto allo stesso punto O , allora si dimostra che vale la seguente relazione:

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t} \quad [7]$$

Questa relazione vale non solo per una singola particella ma anche per un sistema di particelle. Tale formula viene indicata spesso con il nome di **secondo principio della dinamica**. Essa stabilisce semplicemente che il **rapporto tra la variazione del momento angolare ed il tempo in cui si verifica è uguale al momento meccanico della forza (o del sistema di forze) applicata alla particella**.

La formula precedente può essere scritta anche nella seguente maniera $\Delta \vec{\ell} = \vec{M} \cdot \Delta t$ e permette di calcolare la variazione del momento angolare $\Delta \vec{\ell}$ se è noto il momento meccanico $\vec{M} = \vec{\tau}$.

Nel caso di una particella che si muove di moto circolare la [7] assume la forma:

$$[8] \quad \vec{M} = \vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{\ell}}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \vec{a} \quad \text{dove } \vec{a} \text{ è l'accelerazione angolare della}$$

massa m

La [8] rappresenta le **legge fondamentale della dinamica per un punto materiale che ruota attorno ad un asse.**

Un sistema di n punti materiali $P_1, P_2, \dots, P_n$ aventi rispettivamente masse $m_1, m_2, \dots, m_n$ e velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ha, per definizione, il **momento della quantità di moto** $\vec{L}$ è dato dalla seguente relazione vettoriale:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_n = (\vec{P}_1 - \vec{O}) \wedge \vec{q}_1 + (\vec{P}_2 - \vec{O}) \wedge \vec{q}_2 + \dots + (\vec{P}_n - \vec{O}) \wedge \vec{q}_n = \vec{r}_1 \wedge \vec{q}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{q}_2 + \dots + \vec{r}_n \wedge \vec{q}_n \quad [9]$$

La conservazione del momento angolare

Se il **momento risultante** di tutte le forze agenti su una particella di massa m è nullo ($\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$) allora la [7] diventa: $\frac{\Delta \vec{\ell}}{\Delta t} = \vec{0}$ cioè $\vec{\ell}$ = vettore costante

Quindi il **momento angolare di una particella è costante se il momento risultante delle forze agenti su di essa è uguale a zero.**

Ma $\vec{M} = \vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ è senz'altro vero in un sistema isolato. Questo ci permette di scrivere il secondo principio della dinamica in forma di principio di conservazione: **se un sistema è isolato, si conserva il suo momento angolare.**

Questo principio di conservazione del momento angolare è analogo a quello di conservazione della quantità di moto, ma è utile nel caso delle rotazioni.

Abbiamo ottenuto un terzo principio di conservazione per i sistemi isolati. L'energia, la quantità di moto ed il momento angolare si conservano. Il principio di conservazione del momento angolare è una fondamentale legge naturale. Anche sulla scala microscopica della fisica atomica e molecolare, in cui la meccanica newtoniana non è valida, il momento angolare di un sistema isolato è costante nel tempo. Il momento angolare di una particella libera, cioè non soggetta a forze o soggetta ad un sistema di forze a risultante nullo, è costante.

Una forza diretta sempre verso un punto fisso è detta forza centrale. Quando un corpo si muove sotto l'azione di una forza centrale, il suo momento angolare rimane costante e viceversa.

Un altro modo di enunciare questa tesi è il seguente: quando la forza è centrale, il momento angolare rispetto al centro della forza è una costante del moto. Questo risultato è molto importante, perché in natura esistono diverse forze centrali. Per esempio, la Terra si muove attorno al sole sotto l'influenza di una forza centrale, la cui direzione passa sempre per il centro della Sole. Il momento angolare della Terra rispetto al Sole è costante.

L'elettrone, in un atomo di idrogeno, si muove sotto l'azione della forza centrale dovuta all'interazione elettrostatica col nucleo.

Il momento angolare dell'elettrone rispetto al nucleo è costante.

Calcolare il momento angolare della terra rispetto al sole, e quello dell'elettrone rispetto al nucleo nell'atomo di idrogeno. Supporre per semplicità che, in entrambi i casi, l'orbita sia circolare.

$m_T = 5,58 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $d(T,S) = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$ Il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole è: $3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$. La velocità angolare media della Terra attorno al

Sole è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3,16 \cdot 10^7} = 1,98 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Il **momento angolare** della Terra rispetto al Sole è:

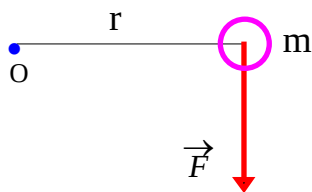
$$\ell = m r^2 \omega = 5,98 \cdot 10^{24} \cdot (1,49 \cdot 10^{11})^2 \cdot 1,98 \cdot 10^{-7} = 2,67 \cdot 10^{40} \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}}$$

Abbiamo visto che un momento torcente applicato ad un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso produce una variazione del suo momento angolare dato da: $\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}$

Quindi l'effetto di un **momento meccanico** $M = \tau$, esercitato per un intervallo di tempo Δt , è quello di fare variare il **momento angolare** di una quantità ΔL .

Il prodotto $\mathbf{M} \cdot \Delta t = \tau \cdot \Delta t$ rappresenta l'**impulso rotazionale** del momento meccanico $M = \tau$. Perché risulta $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \Delta t = \tau \cdot \Delta t$?

Consideriamo un dischetto di massa m poggiato sopra un tavolo orizzontale senza attrito. Viene fatto ruotare attorno ad un asse verticale posto all'estremità di una leggerissima asticella che unisce il dischetto al punto O intorno al quale l'asticella è libera di ruotare. Se applichiamo una forza $\vec{F}$ (tangenziale) ad angolo retto con il raggio r , per la legge fondamentale della dinamica di un punto materiale abbiamo: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione lineare del dischetto.



Un dischetto di massa m viene fatto ruotare attorno ad un punto O su un tavolo senza attrito. IL **momento meccanico** necessario per imprimere un'accelerazione

angolare α è $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{L}}}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \vec{\alpha}$

Moltiplico ambo i membri per r : $F \cdot r = m r a$ $F \cdot r = M = \tau =$ **momento** di F

rispetto ad O $a = \alpha \cdot r = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \cdot r$ $\alpha =$ **accelerazione angolare** del dischetto

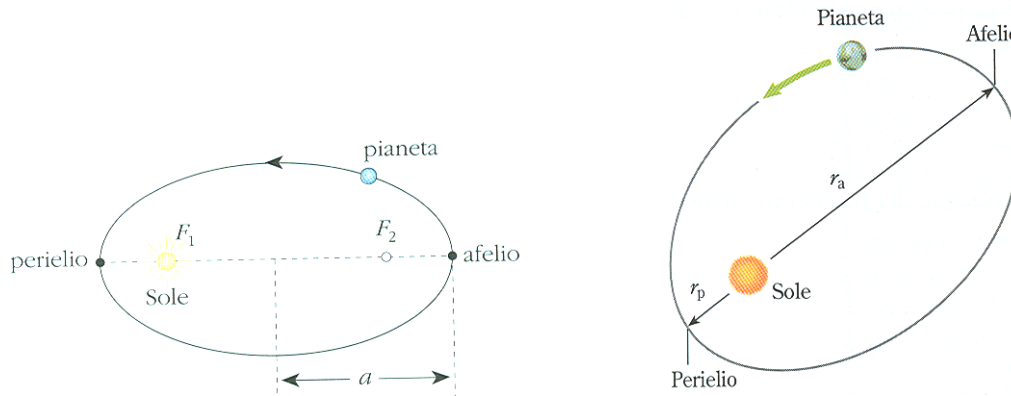
$$M = m r \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \cdot r \quad M \cdot \Delta t = m r^2 (\omega_2 - \omega_1) = m r^2 \omega_2 - m r^2 \omega_1 \quad M \cdot \Delta t = L_2 - L_1 = \Delta L$$

e quindi: $\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}$

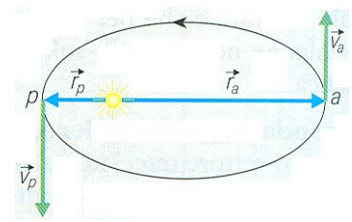
Confronto fra le grandezze dinamiche della traslazione e della rotazione	
Traslazione	Rotazione
Quantità di moto $\vec{P} = \vec{Q} = m \cdot \vec{v}$	Momento angolare $\vec{L} = \mathcal{J} \cdot \vec{\omega}$
Forza $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$	Momento meccanico $\vec{M} = \vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \mathcal{J} \cdot \vec{a}$
Impulso e quantità di moto	
$\vec{F} \cdot (t_f - t_i) = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i = \vec{q}_f - \vec{q}_i$	$\vec{\tau} \cdot (t_f - t_i) = \mathcal{J} \cdot (\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i)$
Legge di conservazione della quantità di moto $\sum \vec{q}_i = \sum m_i \cdot \vec{v}_i = \text{costante} \quad , \quad \vec{q}_f = \vec{q}_i$	Legge di conservazione del momento angolare $\tau = 0, \quad L_f = L_i, \quad \mathcal{J} \omega_f = \mathcal{J} \omega_i$ $\vec{L} = \mathcal{J} \vec{\omega}$
Lavoro compiuto dalle forze esterne	
$dL = \vec{F} \times d\vec{s}$	$dL = M d\vartheta = M \omega dt$
Teorema dell'energia cinetica	
$L(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m \vec{v}_f^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2$	$L(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega_f^2 - \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \omega_i^2 = M \cdot \Delta \vartheta$
Potenza	
$W = \vec{F} \times \vec{v}$	$W = \vec{\tau} \times \vec{\omega}$

Confronto fra quantità lineari e quantità angolari	
Spostamento $\Delta s = R \Delta \vartheta$	Velocità $v = \omega R$
Accelerazione $a = \alpha R$	v = velocità lineare, ω = velocità angolare a = accelerazione lineare, α = accelerazione angolare
Moto uniforme su traiettoria prestabilita	Moto rotatorio uniforme attorno ad un asse prestabilito
$v = \frac{s-s_0}{t} = \text{costante}$ $s = s_0 + vt$	$\omega = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{t}$ $\vartheta = \vartheta_0 + \omega \cdot t$
Moto uniformemente vario su traiettoria prestabilita	Moto rotatorio uniformemente vario attorno ad un asse fisso
$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$	$\vartheta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \vartheta_0$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$v^2 = v_0^2 + 2a(s-s_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\vartheta - \vartheta_0)$
a = accelerazione lineare	α = accelerazione angolare
m = massa	$\mathcal{J}$ = momento d'inerzia
$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ Forza	$\vec{M} = \vec{\tau} = \mathcal{J} \cdot \vec{\alpha}$ momento meccanico o momento torcente o momento rotore
$\vec{q} = \vec{p} = m \cdot \vec{v}$ quantità di moto	$L = \mathcal{J} \cdot \omega$ momento angolare
Lavoro	
$L = \vec{F} \times \vec{s}$	$L = \tau \cdot \vartheta$
Potenza	
$W = F \cdot v$	$W = \tau \cdot \omega$
Energia cinetica	
$E_c = T = K = \frac{1}{2} m v^2$	$E_c = T = K = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$

Consideriamo l'orbita ellittica descritta da un pianeta che ruota attorno al Sole. Il punto di minima distanza dal Sole è detto perielio e quello di massima distanza è detto afelio. Dimostriamo che la velocità del pianeta quando si trova nel perielio è maggiore di quella che possiede quando si trova nell'afelio.



Quando un pianeta si trova nel perielio p e nell'afelio a il suo vettore posizione rispetto al Sole è perpendicolare alla sua velocità vettoriale. Poiché il momento della forza gravitazionale che agisce sul pianeta è nullo, il momento angolare si conserva e possiamo scrivere: $mr v_a = mr v_p$ ed anche: $r v_a = r v_p$



Indichiamo $\vec{r}_a$ ($\vec{r}_p$) il vettore posizione del pianeta rispetto al centro di massa del Sole quando si trova nell'afelio (perielio) e con $\vec{v}_a$ ($\vec{v}_p$) la corrispondente velocità vettoriale. Vediamo se in questa circostanza esiste un momento di una forza risultante applicata al pianeta. Questo controllo richiede di indicare preventivamente un asse rispetto al quale calcolare il momento della forza. Come possiamo scegliere tale asse. La forza gravitazionale che il Sole esercita sul pianeta ha come direzione la retta che unisce i due corpi. Se scegliamo come asse di rotazione la retta passante per il centro di massa del Sole e perpendicolare al piano contenente l'orbita del pianeta, siamo sicuri che il momento della forza di gravità rispetto a tale asse è nullo ed il momento angolare del pianeta rispetto a tale asse si mantiene costante.

Il momento angolare del pianeta va calcolato applicando la seguente formula:

$$\vec{\ell} = (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{q} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad \text{con} \quad \ell = mrv \sin \vartheta$$

Nei punti p ed a la velocità vettoriale è perpendicolare al vettore posizione e quindi risulta:

$$\ell = mrv \sin \vartheta = mrv \sin \frac{\pi}{2} = mrv$$

Nei punti a e p abbiamo: $\ell_a = mrv_a$, $\ell_p = mrv_p$

$$\ell_a = \ell_p \Rightarrow mrv_a = mrv_p \Rightarrow rv_a = rv_p \Rightarrow v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a \Rightarrow v_p > v_a \text{ in quanto risulta } r_a > r_p$$

Sintesi finale e collegamenti tra la dinamica del punto materiale e la dinamica dei corpi rigidi

Nei moti rotatori nei quali la traiettoria descritta da un punto materiale si introducono nuove grandezze come:

- il momento della forza $\vec{F}$ definito dalla seguente relazione vettoriale $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
- il momento d'inerzia $\mathcal{J} = mr^2$ = resistenza che il corpo oppone alla rotazione
- la velocità angolare $\omega = \frac{v}{r}$ $v = \omega \cdot r$
- l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{a}{r}$ $a = \alpha \cdot r$

La **seconda legge della dinamica** $F = ma$ diventa $M = \tau = \mathcal{J} \cdot \alpha$
seconda equazione cardinale per un corpo rigido che ruota

$\vec{R}^{(e)} = m \cdot a_{c.m.}$ **prima equazione cardinale** per un corpo rigido che trasla

La quantità di moto $p = q = mv$ diventa il momento angolare $L = \mathcal{J} \cdot \omega$

L'energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$ diventa l'energia cinetica del moto rotatorio $K = \frac{1}{2}\mathcal{J} \cdot \omega^2$

$E_c = \frac{1}{2}mv_{c.m.}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}_{c.m.}\omega^2$ energia cinetica per un corpo rigido che trasla e ruota

Come nei sistemi isolati dove i corpi si muovono di moto rettilineo si conserva la quantità di moto nei sistemi isolati in rotazione vale il principio di conservazione del momento angolare $L = \mathcal{J} \cdot \omega = \text{costante}$

Quando un corpo scivola lungo un piano inclinato dall'altezza h , la sua energia potenziale $U = mgh$ si trasforma in energia cinetica $k = \frac{1}{2}mv^2$ e tocca terra con velocità $v = \sqrt{2gh}$.

Se il corpo scende rotolando lungo un piano inclinato muovendosi di moto rototraslatorio la sua velocità finale u è minore di $v = \sqrt{2gh}$ perché una parte della sua energia potenziale si trasforma in energia di rotazione

$$mgh = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J} \cdot \omega^2$$

Valgono anche le seguenti relazioni:

$$L(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}m \vec{v}_f^2 - \frac{1}{2}m \vec{v}_i^2 \quad \rightarrow \quad L(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}I \omega_f^2 - \frac{1}{2}I \omega_i^2 = \tau \cdot \Delta\theta$$

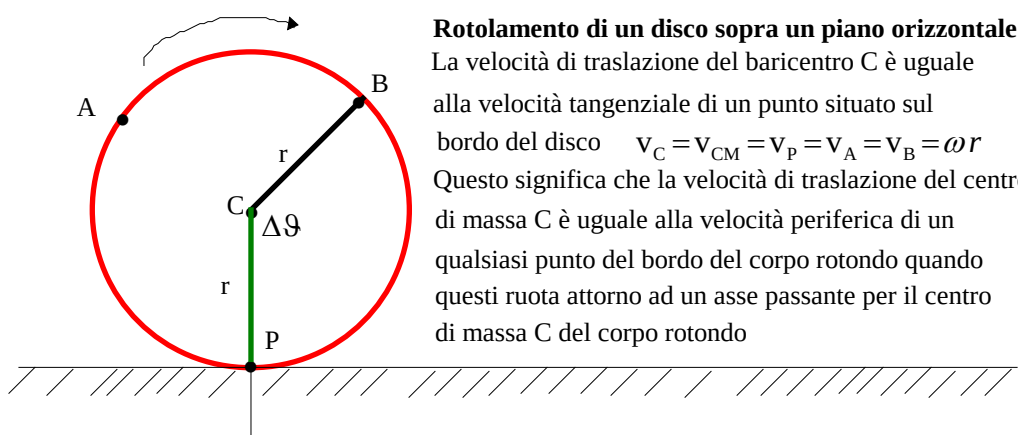
$$\vec{F} \cdot (t_f - t_i) = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i = \vec{q}_f - \vec{q}_i \quad \rightarrow \quad \vec{\tau} \cdot (t_f - t_i) = \mathcal{J} \cdot (\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i)$$

$$W = F \cdot v \quad \rightarrow \quad W = \tau \cdot \omega \quad \text{potenza}$$

Rotolamento senza slittamento di un corpo rigido

Adesso vogliamo trattare il caso di un **corpo rotondo** ⁽¹⁾ che rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale. E' bene osservare che il **rotolamento** senza slittamento si verifica soltanto quando c'è attrito tra il corpo che rotola e la superficie lungo la quale avviene il rotolamento. In caso contrario il moto del corpo rotondo lungo il piano orizzontale sarebbe soltanto traslatorio. Per semplicità consideriamo il caso di una sfera che rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale. Il moto della sfera può essere trattato come una opportuna combinazione di un moto rotatorio e di un moto traslatorio, precisamente come la combinazione di un moto di traslazione del suo centro di massa C e di un moto di rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa C. Nel caso in cui la sfera rotola senza strisciare, lo spazio percorso dal baricentro C è uguale all'arco descritto da un punto qualsiasi del bordo della sfera nella rotazione attorno all'asse passante per C durante lo stesso intervallo di tempo. Ne consegue che il modulo della velocità di traslazione di C è uguale alla velocità lineare di un punto qualsiasi della superficie esterna della sfera.

$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}$ esprime la relazione che intercorre tra la velocità lineare di C e la velocità angolare del corpo cioè la velocità angolare di un punto qualsiasi del corpo rispetto ad un asse passante per C



⁽¹⁾ Sfera omogenea, cilindro omogeneo, ruota

Dunque il **rotolamento** della sfera può essere descritto come una rotazione con velocità angolare ω attorno ad un asse passante per **C** quando l'asse trasla con velocità lineare v_{cdm} . Sotto queste ipotesi l'energia cinetica della sfera che rotola lungo un piano

orizzontale ci viene fornita dalla seguente formula:
$$K = E_c = \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2$$

dove $v_c = v_{\text{cdm}}$ è la velocità lineare del centro di massa della sfera ed ω è la velocità angolare della sfera in una rotazione attorno ad un asse passante per C.

Per una **sfera omogenea** abbiamo:
$$\mathcal{J}_{\text{cdm}} = \frac{2}{5} m r^2 \quad \omega_c = \frac{v_c}{r}$$

$$K = E_c = \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \cdot \frac{v_c^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{7}{10} m v_c^2 = \frac{7}{10} m r^2 \omega^2 \quad v_c = v_{\text{cdm}}$$

Per una **sfera cava** abbiamo:
$$\mathcal{J}_{\text{cdm}} = \frac{2}{3} m r^2 \quad \omega_c = \frac{v_c}{r}$$

$$K = E_c = \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m r^2 \cdot \frac{v_c^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{5}{6} m v_c^2 = \frac{5}{6} m r^2 \omega^2 \quad v_c = v_{\text{cdm}}$$

Per un **cilindro omogeneo** abbiamo:
$$\mathcal{J}_{\text{cdm}} = \frac{1}{2} m r^2 \quad \omega_c = \frac{v_c}{r}$$

$$K = E_c = \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{v_c^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{3}{4} m v_c^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2 \quad v_c = v_{\text{cdm}}$$

Dalle relazioni trovate deduciamo che l'energia cinetica totale per un corpo rotondo che rotola senza strisciare non dipende dal raggio del corpo che rotola.

Per una sfera cava che rotola, qual è il rapporto tra l'energia cinetica

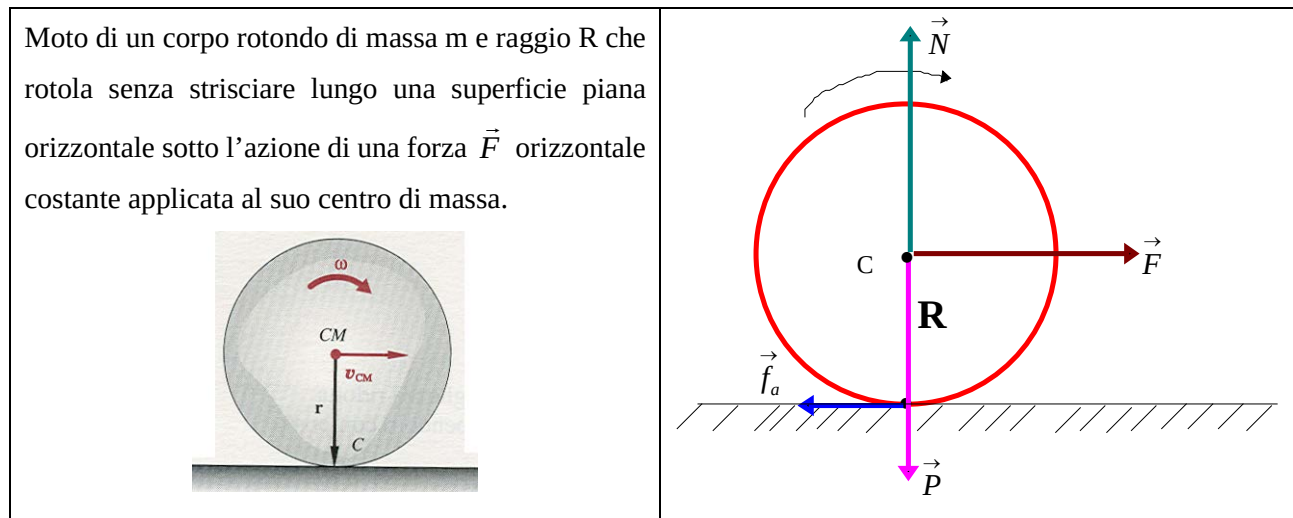
di traslazione e quella di rotazione?

$$\frac{E_{\text{ct}}}{E_{\text{cr}}} = \frac{\frac{1}{2} m \cdot v_c^2}{\frac{1}{3} m \cdot v_c^2} = \frac{3}{2}$$

Osservazione: Il rotolamento senza strisciamento è quel moto caratterizzato dal fatto che il punto di contatto con il piano (orizzontale o inclinato) è, istante per istante, fermo. Questo equivale ad affermare che la velocità del centro di massa del corpo rotondo è uguale a $R \cdot \omega$. $v_{\text{CM}} = R \cdot \omega$

Osservazione: Un corpo che rotola senza slittare può essere pensato, istante per istante, come un corpo che ruota attorno ad un asse passante per il punto di contatto, considerato fermo, del corpo che rotola.

Da questo punto di vista l'energia cinetica totale che corpo che rotola è solo quella relativa alla rotazione attorno all'asse passante per il punto di contatto.



Sul corpo rotondo agiscono: **01)** la forza $\vec{F}$ **02)** la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ **03)** la reazione vincolare $\vec{N}$ **04)** la forza di attrito statico $\vec{f}_a$. Poiché la forza $\vec{F}$ spinge il corpo rotondo verso destra, la forza di attrito $\vec{f}_a$ deve avere il verso indicato in figura per mantenere fermo il punto di contatto. La legge del moto del centro di massa è: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{f}_a + \vec{P} = m\vec{a}$

N.B. La reazione del piano $\vec{R} = \vec{f}_a + \vec{N}$ ha una componente normale $\vec{N}$ ed una componente tangenziale $\vec{f}_a$ (**forza di attrito statico**).

Passando dalla relazione vettoriale a quella scalare abbiamo: $F - f_a = m \cdot a_{\text{cdm}}$ **$N = P = m \cdot g$**

Scelto come polo per le rotazioni il centro C del corpo rotondo abbiamo:

$$\tau = M = \mathcal{J}_{\text{cdm}} \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad R \cdot f_a = \mathcal{J}_{\text{cdm}} \cdot \frac{a_{\text{cdm}}}{R} \quad \Rightarrow \quad f_a = \mathcal{J}_{\text{cdm}} \cdot \frac{a_{\text{cdm}}}{R^2}$$

$$F = f_a + m \cdot a_{\text{cdm}} = \mathcal{J}_{\text{cdm}} \cdot \frac{a_{\text{cdm}}}{R^2} + m \cdot a_{\text{cdm}}$$

$$\mathbf{F} = m \cdot \left(1 + \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{m \cdot R^2} \right) \cdot \mathbf{a}_{\text{cdm}} \quad \mathbf{a}_{\text{cdm}} = \frac{\mathbf{F}}{m \cdot \left(1 + \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{m \cdot R^2} \right)} \quad f_a = \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{R^2} \cdot a_{\text{cdm}} = \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{R^2} \cdot \frac{F}{m \cdot \left(1 + \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{m \cdot R^2} \right)}$$

$$f_a = \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}} F}{m R^2 + \mathcal{J}_{\text{cdm}}} = \frac{F}{1 + \frac{m R^2}{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}}$$

Per una **sfera omogenea** abbiamo: $\mathcal{J}_{\text{cdm}} = \frac{2}{5} m R^2$ **$F = m \left(1 + \frac{2}{5} \right) a_{\text{cdm}} = \frac{7}{5} m a_{\text{cdm}}$** **$a_{\text{cdm}} = \frac{5F}{7m}$**

Per un cilindro omogeneo abbiamo: $\mathcal{J}_{\text{cdm}} = \frac{1}{2} m R^2$ $\mathbf{F} = m \left(1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \mathbf{a}_{\text{cdm}} = \frac{3}{2} m \mathbf{a}_{\text{cdm}}$ $\mathbf{a}_{\text{CM}} = \frac{2\mathbf{F}}{3m}$

La forza di attrito f_a non può assumere qualsiasi valore; essa non può superare la massima forza di attrito statico $\mu_s \cdot N = \mu_s \cdot m \cdot g$. Per avere rotolamento senza slittamento deve essere:

$$f_a \leq \mu_s \cdot m \cdot g \quad [\mathbf{D}]$$

Poiché risulta: $F = f_a \left(1 + \frac{m R^2}{I} \right)$ deve essere $F \leq \mu \cdot m \cdot g \cdot \left(1 + \frac{m R^2}{I} \right)$ $[\mathbf{E}]$

Concludendo possiamo affermare che il moto di un corpo rotondo può essere di puro rotolamento soltanto se la forza F applicata verifica la $[\mathbf{E}]$. In caso il corpo rotondo rotola e striscia contemporaneamente.

Supponendo che la forza $\vec{F}$ abbia modulo costante. Per il centro di massa abbiamo:

$$v_{\text{cdm}} = \omega \cdot R, \quad \mathbf{a}_{\text{cdm}} = \frac{\mathbf{F}}{m \cdot \left(1 + \frac{\mathcal{J}}{R^2} \right)} \quad x_{\text{cdm}} = \frac{1}{2} a_{\text{cdm}} \cdot t^2 \quad \text{legge oraria del moto del centro di massa}$$

Il centro di massa si muove di moto rettilineo uniformemente vario. Un qualsiasi punto situato sulla superficie esterna del corpo rotondo descrive, rispetto al suolo, una cicloide.

Dimostriamo le formule precedenti utilizzando il teorema della variazione dell'energia cinetica.

L'energia cinetica di un corpo è uguale al lavoro che deve compiere una forza esterna per portare il corpo dalla quiete ad una data velocità. Nel caso nostro abbiamo:

$$L(\vec{F}) = K \quad \Rightarrow \quad F \cdot x = \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{\text{cdm}}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\text{cdm}} \cdot \frac{v_{\text{cdm}}^2}{R^2} + \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{cdm}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{R^2} + m \right) \cdot v_{\text{cdm}}^2$$

$0 \rightarrow v_{\text{cdm}}$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo abbiamo:

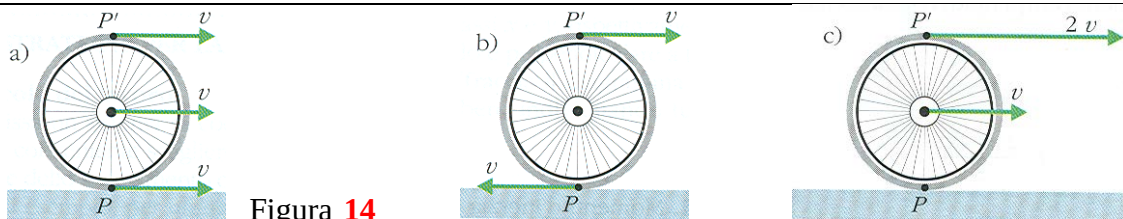
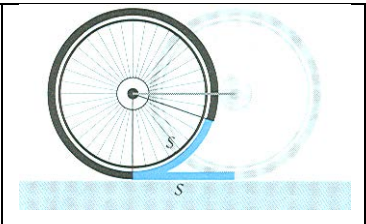
$$F \cdot \frac{d x_{\text{cdm}}}{d t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{R^2} + m \right) \cdot 2 \cdot v_{\text{cdm}} \cdot \frac{d v_{\text{cdm}}}{d t} \quad F \cdot \cancel{y_{\text{CM}}} = \left(\frac{I_{\text{CM}}}{R^2} + m \right) \cdot \cancel{y_{\text{CM}}} \cdot a_{\text{CM}}$$

$$\mathbf{a}_{\text{cdm}} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{R^2} + m}$$

Altre considerazioni sul rotolamento senza slittamento di un corpo rigido

Rotolamento di una ruota sopra una superficie orizzontale.

Lo spazio percorso dall'asse della ruota è uguale all'arco descritto da un punto del bordo. Ne consegue che la velocità di traslazione dell'asse è uguale alla velocità tangenziale con cui un qualsiasi punto del bordo ruota attorno all'asse.

**Figura 14**

La figura **a)** rappresenta un moto puramente traslatorio di velocità vettoriale $\vec{v}$.

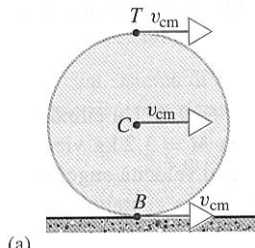
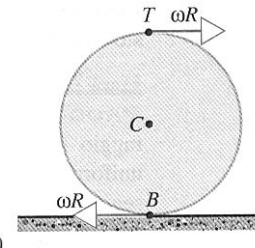
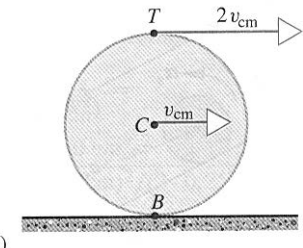
La figura **b)** rappresenta un moto puramente rotatorio attorno all'asse della ruota con velocità angolare ω e con velocità lineare di un punto qualsiasi del bordo data da $v = \omega \cdot r$ essendo r il raggio della ruota.

La figura **c)** rappresenta la combinazione del moto traslatorio e del moto rotatorio, cioè rappresenta il moto di rotolamento senza slittamento della ruota.

Nel moto complessivo di rotolamento il punto P di contatto è momentaneamente fermo, l'asse di rotazione ha velocità vettoriale $\vec{v}$ ed il punto P' più lontano dalla superficie orizzontale ha velocità vettoriale $2\vec{v}$ ed il punto avente la velocità vettoriale di intensità maggiore.

Quando un corpo rotola, il suo asse di rotazione non è fisso, ma si sposta rimanendo sempre parallelo a se stesso, cioè subisce una traslazione. Dunque il rotolamento è la combinazione di due moti simultanei: la rotazione del corpo attorno all'asse e la traslazione dell'asse. Per meglio comprendere questa proprietà del moto di rotolamento, si osservi la figura 14. Per un moto puramente traslatorio (**fig.14a**), tutti i punti della ruota si muovono verso destra con la stessa velocità $\vec{v}$. Per un moto puramente rotatorio (**fig.14b**), l'asse di rotazione è fisso e ogni punto del bordo della ruota, se ω è la velocità angolare di rotazione ed r il raggio della ruota, ha velocità angolare ωr . Se combiniamo questi due moti, la velocità risultante di un qualunque punto fissato è la somma vettoriale della velocità di traslazione e della velocità lineare che quel punto ha nel moto di rotazione. Come illustrato in **fig.14c** il punto P' , diametralmente opposto al punto di contatto P con la superficie, ha velocità $\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{v} + \omega \mathbf{r} = \mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$. Questo punto ha velocità maggiore di ogni altro punto della ruota.

L'asse di rotazione si sposta con velocità $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}$, mentre il punto di contatto **P** ha velocità nulla. Nel moto di rotolamento, per definizione, il punto di contatto **P** con la superficie non striscia, cioè, in un dato istante, tale punto è fermo rispetto alla superficie. Nell'istante immediatamente successivo il punto di contatto viene sostituito da un altro punto, contiguo al primo sul bordo del corpo rotondo. La forza che mantiene fermo il punto di contatto con la superficie mentre l'asse del corpo rotondo si muove con velocità $\mathbf{v}$, è la **forza di attrito** sviluppata dalla superficie. Su una superficie completamente liscia il rotolamento non sarebbe possibile. Poiché il punto di applicazione della forza di attrito è quello di contatto con la superficie che è momentaneamente fermo, l'attrito in questione è di tipo statico e non compie lavoro.

Il moto di rotolamento può essere pensato come la sovrapposizione di un moto puramente rotatorio attorno al centro di massa e di uno puramente traslatorio.		
 (a)	 (b)	 (c)
(a) Moto puramente traslatorio: tutti gli elementi della ruota hanno la stessa velocità vettoriale	(b) Moto puramente rotatorio: tutti i punti della ruota si muovono con la stessa velocità angolare attorno al centro di massa	(c) Moto rototraslatorio dovuto alla composizione dei moti rappresentati nei riquadri (a) e (b): le velocità degli elementi T,C,B si ottengono sommando vettorialmente le corrispondenti velocità vettoriali del moto traslatorio e del moto rotatorio.

Considerazioni generali sullo studio di un moto rototraslatorio

Primo modo di procedere per lo studio di un moto rototraslatorio

- L'asse di rotazione passa per il centro di massa del corpo, che servirà da polo nel calcolo dei momenti
- La direzione dell'asse di rotazione non varia nel tempo, ovvero due assi di rotazione relativi ad istanti diversi sono tra loro paralleli.

Sotto queste ipotesi

(a) il **moto rotatorio** sarà studiato utilizzando la seconda equazione cardinale per un corpo rigido

che ruota attorno ad un asse fisso: $\tau = M = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \alpha$ con $\tau = M$ momento risultante delle sole forze esterne

(b) il moto traslatorio sarà studiato utilizzando la prima equazione cardinale per un corpo rigido che

trasla $\vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$ dove $\vec{R}^{(e)}$ rappresenta il risultante di tutte le forze esterne che agiscono sul corpo rigido.

(c) per un corpo rigido che ruota e trasla si applicano le due equazioni cardinali per i corpi rigidi,

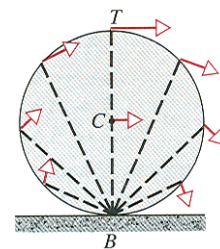
cioè: $\tau = M = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \alpha \quad \vec{R}^{(e)} = m \cdot \vec{a}_c = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$

Secondo modo di procedere per lo studio di un moto rototraslatorio

Si considera l'asse ortogonale alla ruota passante per la posizione occupata dall'elemento di contatto B e si suppone che all'istante considerato tale asse sia quello attorno al quale ruota il corpo. Si dice che tale asse è l'**asse istantaneo di rotazione**. Ad istanti diversi cambia l'elemento a contatto e cambia l'asse istantaneo di rotazione, ma in ogni istante si suppone che il moto sia rotatorio attorno all'asse istantaneo. La velocità angolare della rotazione attorno a B è uguale alla velocità alla velocità angolare ω della rotazione attorno al centro di massa. Se si osserva che la distanza che la distanza di T da B è uguale al doppio di quella di C da B, si ha che la velocità lineare di T è il doppio della velocità lineare di C. Infatti: $\mathbf{v}_T = \omega \cdot (2\mathbf{r}) = 2(\omega \mathbf{r}) = 2 \mathbf{v}_{CM}$

Un corpo che rotola sopra una superficie senza strisciare può essere pensato ad ogni istante in moto puramente rotatorio attorno all'asse passante per il punto che in quell'istante realizza il contatto col suolo.

I vettori rappresentano le velocità vettoriali di alcuni punti all'istante considerato.



Una sfera di massa m e raggio r rotola senza strisciare partendo dalla quiete lungo un piano, di lunghezza ℓ , inclinato di un angolo ϑ rispetto ad un piano orizzontale. Determinare la legge oraria del moto, la velocità della sfera e la sua energia cinetica.

Il moto di rotolamento senza strisciamento della sfera (di un corpo rotondo qualsiasi) può essere considerato come la combinazione di un moto traslatorio uguale a quello del suo centro di massa con il moto di rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa. Questo significa che in ogni posizione intermedia, il centro di massa si muove con velocità traslazionale $\vec{v}_C$ e la sfera ruota attorno ad un asse passante per il centro di massa con velocità angolare ω essendo in questo caso le due velocità legate dalla relazione $v_C = \omega r$.

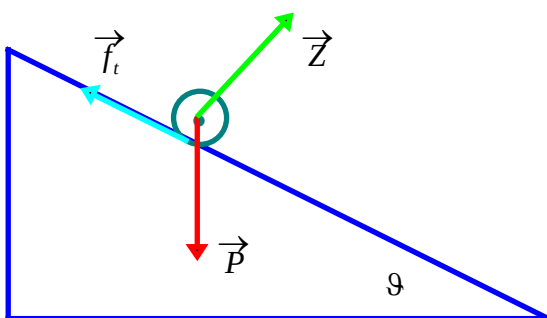
v_C = velocità lineare del centro di massa della sfera

ω = velocità angolare della sfera rispetto ad un asse $\mathbf{b}$ passante per il suo centro di massa =
= velocità angolare di un punto qualsiasi della sfera rispetto all'asse $\mathbf{b}$ = velocità angolare di un punto qualsiasi della sfera rispetto all'asse istantaneo di rotazione $\mathbf{d}$

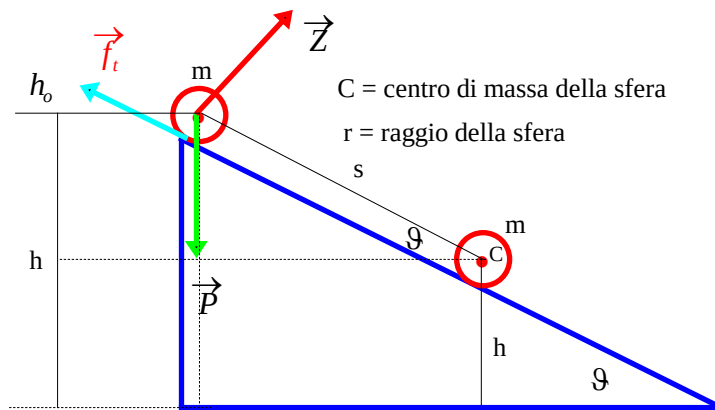
L'effetto di una traslazione del centro di massa più una rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa, è equivalente ad una pura rotazione, con la stessa velocità angolare, attorno ad un asse passante per il punto di contatto del corpo rotondo che rotola senza strisciare.

(La condizione cinematica di rotolamento senza slittamento equivale alla affermazione che è nulla la velocità del punto di contatto fra la sfera ed il piano inclinato rispetto ad un sistema di riferimento solidale col piano inclinato ed avente come origine il punto di contatto)

Risoluzione energetica



Perché vi sia **rotolamento senza slittamento** è necessario che vi sia attrito fra il piano inclinato e la sfera.



Supponiamo che la sfera parta dalla quiete ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$) e che l'altezza iniziale del centro di massa C rispetto ad un piano di riferimento orizzontale sia h_0

Vogliamo calcolare la velocità che raggiunge la sfera in funzione dell'altezza quando il suo centro di massa si trova ad una quota h rispetto al piano di riferimento. ⁽⁴⁷⁾

Durante il moto la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale delle forze che agiscono sulla sfera si mantiene costante. La forza peso è conservativa per cui ammette una energia potenziale data da: $U = mgh$. Invece la reazione vincolare $\vec{Z}$ e la forza di attrito $\vec{f}_t$ **non sono conservative** e quindi non ammettono energia potenziale.

Però nel caso nostro, né la reazione vincolare $\vec{Z}$ né la forza d'attrito $\vec{f}_t$ compiono lavoro

- 1) $\vec{Z}$ non compie lavoro perché ortogonale allo spostamento
- 2) $\vec{f}_t$ **non compie lavoro** perché è una forza applicata al punto di contatto istantaneamente fermo (**La velocità del punto di contatto è nulla e quindi è nullo anche lo spostamento**)

L'unica forza che compie lavoro è la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$. Applico il teorema di conservazione dell'energia meccanica totale:

$$U(h_0) + K(h_0) = U(h) + K(h)$$

$$U(h_0) = mgh_0 \quad K(h_0) = 0 \quad U(h) = mgh \quad \mathbf{mgh = mgh_0 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2}$$

$K(h)$ = **energia cinetica** della sfera quando il suo centro di massa si trova alla quota h

$$U(h_0) = U(h) + K(h) \quad \mathbf{K(h) = mgh_0 - mgh = mg(h_0 - h)}$$

Il moto della sfera è la sovrapposizione di un moto di traslazione del centro di massa C (lungo il piano inclinato) e di una rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa. Quindi l'energia cinetica totale $K(h)$ della sfera è uguale alla somma dell'**energia cinetica** di traslazione del centro

⁽⁴⁷⁾ Ricordiamo che ogni volta che applichiamo il **principio di conservazione dell'energia** non possiamo ricavare le grandezze fisiche che intervengono nel fenomeno in funzione del tempo ma bensì in funzione della posizione

di massa e dell'energia cinetica di rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa.

$$K(h) = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Ricordando che $v_{CM} = \omega r$ ⁽⁴⁸⁾ abbiamo:

$$K(h) = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_M \omega^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \cdot \frac{v_{CM}^2}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{r^2} + m \right) v_{CM}^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{r^2} + m \right) v_{CM}^2 = mg(h_o - h)$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2mg(h_o - h)}{m + \frac{I_{CM}}{r^2}}} = \text{velocità del centro di massa}$$

Tale formula può essere scritta anche così:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2g(h_o - h)}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}} \quad \text{Tale formula è simile a quella relativa ad un punto materiale}$$

Poiché l'espressione $\frac{I_{CM}}{mr^2}$ è sempre **positiva** deduciamo che la velocità di un corpo che rotola senza strisciare sarà sempre minore di quella che, a parità di condizioni, acquista un punto materiale: di quanto sarà minore dipende solo dalla forma del corpo rotondo e quindi dal suo momento d'inerzia.

Per una **sfera** abbiamo ($I_{CM} = \frac{2}{5} mr^2$) $v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7} g(h_o - h)}$

Per un **cilindro** abbiamo ($I_{CM} = \frac{1}{2} mr^2$): $v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3} g(h_o - h)}$

Per un **anello** abbiamo ($I_{CM} = mr^2$): $v_{CM} = \sqrt{g(h_o - h)}$

Quindi l'oggetto che cade più lentamente è l'anello.

Energia cinetica traslazionale

Per una **sfera** abbiamo ($I_C = \frac{2}{5} mr^2$): $K(h) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} mr^2 \cdot \frac{1}{r^2} + m \right) v_C^2 = \frac{7}{10} m v_C^2 = \frac{7}{10} m r^2 \omega^2$

Per un **cilindro** abbiamo ($I_C = \frac{1}{2} mr^2$): $K(h) = \frac{3}{4} m v_C^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2$

⁽⁴⁸⁾ La velocità lineare di un punto della superficie della sfera è $v_C = \omega r$; quando un corpo trasla tutti i punti hanno la stessa velocità lineare, quindi $v = v_C = \omega r$

Per un **anello** abbiamo ($I_C = mr^2$):

$$K(h) = m v_C^2 = m r^2 \omega^2$$

Energia cinetica rotazionale

Per una **sfera** abbiamo: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{5} m v_C^2 = \frac{1}{5} m r^2 \omega^2$

Per un **cilindro** abbiamo: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{4} m v_C^2 = \frac{1}{4} m r^2 \omega^2$

Per un **anello** abbiamo: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$

Da queste relazioni possiamo calcolare le percentuali di energia cinetica di natura rotazionale e di natura traslazionale:

Per una **sfera** abbiamo: $\frac{K_{\text{rot}}}{K_{\text{tras}}} = \frac{\frac{1}{5} m r^2 \omega^2}{\frac{7}{10} m r^2 \omega^2} = \frac{2}{7} = 29\%$

Per un **cilindro** abbiamo: $\frac{K_{\text{rot}}}{K_{\text{tras}}} = \frac{\frac{1}{4} m r^2 \omega^2}{\frac{3}{40} m r^2 \omega^2} = \frac{1}{3} = 33\%$

Per un **anello** abbiamo: $\frac{K_{\text{rot}}}{K_{\text{tras}}} = \frac{\frac{1}{2} m r^2 \omega^2}{m r^2 \omega^2} = \frac{1}{2} = 50\%$

E' l'anello il corpo rotondo che rotolando senza slittare lungo un piano inclinato possiede la maggiore quantità di energia cinetica rotazionale.

Adesso ricaviamo la **legge oraria** del moto di un corpo rotondo che rotola senza slittare lungo un

piano inclinato. $K(h) = m g (h_o - h)$ $K(h) = \frac{7}{10} m v_C^2$ $h_o - h = s \cdot \sin \vartheta$

$$\frac{7}{10} m v_C^2 = m g s \cdot \sin \vartheta \quad 7 m v_C^2 = 10 g s \cdot \sin \vartheta$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo otteniamo $14 v_C \cdot \frac{d v_C}{d t} = 10 g \cdot \frac{d s}{d t} \cdot \sin \vartheta$

$$14 v_C \cdot a_C = 10 g \cdot v_C \cdot \sin \vartheta \quad a_C = \frac{5}{7} g \cdot \sin \vartheta$$

Si tratta di un moto **uniformemente accelerato** con accelerazione $a_C = \frac{5}{7} g \cdot \sin \vartheta$. La **legge oraria del moto**, con velocità iniziale nulla, è:

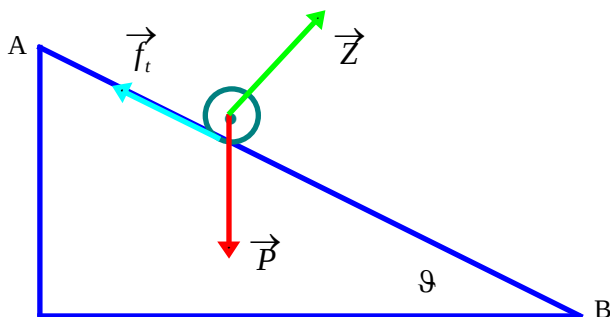
$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin \vartheta \cdot t^2 = \frac{5}{14} \cdot g \cdot \sin \vartheta \cdot t^2$$

La legge oraria della sfera che rotola senza slittare su un piano inclinato può essere calcolata anche utilizzando la seconda equazione cardinale della dinamica dei corpi rigidi. ⁽⁵⁰⁾

Osservazione: Dato che il corpo che rotola è sottoposto ad una forza di attrito, ci si può domandare perché abbiamo considerata valida la legge di conservazione dell'energia meccanica. La risposta è che **in assenza di slittamento la forza di attrito è applicata ai punti del corpo che si trovano sull'asse istantaneo di rotazione**. Poiché la velocità istantanea di questi punti è uguale a zero, **la forza d'attrito applicata non compie alcun lavoro** e non influenza il valore dell'energia cinetica totale del corpo in rotolamento. Il ruolo della forza d'attrito per adesione $\vec{f}_a$ è solo quello di mettere il corpo in rotazione ed assicurare un rotolamento senza slittamento. E' il lavoro compiuto dalla forza peso che contribuisce ad incrementare l'energia cinetica dei moti di traslazione e di rotazione del corpo.

Determinare la velocità v con cui un corpo rotondo di massa m e raggio r giunge alla base di un piano inclinato di altezza h nel caso in cui rotoli senza strisciare.

E' il caso trattato precedentemente nel caso particolare in cui risulti $h_o = h$, $h = 0$



Perché vi sia **rotolamento senza slittamento** è necessario che vi sia attrito fra il piano inclinato e la sfera .

L'energia potenziale gravitazionale posseduta dal corpo rotondo alla sommità del piano inclinato si ripartirà in energia cinetica traslazionale ed in energia cinetica rotazionale.

Applico il principio di conservazione dell'energia meccanica totale. $K(B) = U(A) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \quad , \quad \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} = mgh \Rightarrow$$

⁽⁵⁰⁾ 1) Un modo di risolvere il problema del rotolamento senza slittamento è quello di sfruttare il fatto che un corpo che rotola senza strisciare può essere pensato , in ogni istante , come ruotante attorno ad un asse istantaneo passante per il punto di contatto avente velocità nulla

2) Un altro modo di risolvere il problema (ed è quello da noi considerato) è quello di considerare il moto complessivo come risultante della traslazione del centro di massa e della simultanea rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa .

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{r^2} \right) v^2 = m g h \Rightarrow v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{\mathcal{J}}{r^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{mr^2}} \quad v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{r^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{mr^2}}}$$

Se il corpo rotondo scivola senza rotolare (mancanza di attrito tra il corpo rotondo ed il piano inclinato) la legge di conservazione dell'energia meccanica totale diventa:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h \quad \text{e quindi la velocità del corpo rotondo alla base del piano inclinato è: } \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

In assenza di attrito un corpo che scivola lungo un piano inclinato si muove più velocemente di un corpo che rotola sullo stesso piano.

Questo è dovuto al fatto che nel rotolamento l'energia potenziale iniziale del corpo rotondo si trasforma in parte in energia cinetica di traslazione ed in parte in energia cinetica di rotazione, mentre nel caso dello scivolamento senza attrito tutta l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica di traslazione.

Per una sfera abbiamo: $(\mathcal{J}_{\text{cdm}} = \frac{2}{5} m r^2) \quad v = \sqrt{\frac{10}{7} g h}$

Per un cilindro abbiamo $(\mathcal{J}_{\text{cdm}} = \frac{1}{2} m r^2): \quad v = \sqrt{\frac{4}{3} g h}$

Per un anello abbiamo $(\mathcal{J}_{\text{cdm}} = m r^2): \quad v = \sqrt{g h}$

Quindi l'oggetto che cade più lentamente è l'anello.

$$v_B^2 = v_A^2 + 2a_{\text{cdm}} \ell \quad \mathbf{v_A = 0} \quad v_B^2 = 2a_{\text{cdm}} \ell \quad \mathbf{v_B = \sqrt{\frac{10}{7} g h}} \quad \frac{10}{7} \cdot g h = 2a_{\text{cdm}} \ell \quad a_{\text{cdm}} = \frac{5}{7} g \cdot \frac{h}{\ell} = \frac{5}{7} g \cdot \sin \vartheta$$

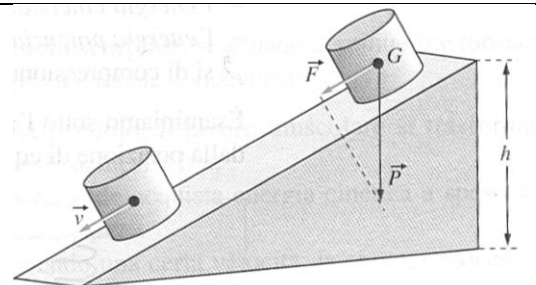
La legge oraria del moto è: $s = \frac{1}{2} a_{\text{cdm}} t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin \vartheta \cdot t^2 = \frac{5}{14} \cdot g \cdot \sin \vartheta \cdot t^2$

Determinare la velocità v con cui un cilindro di massa m e raggio r giunge alla base di un piano inclinato di altezza h nel caso in cui scivola e quando rotola senza strisciare. Calcolare l'accelerazione lineare del suo centro di massa.

Quando il cilindro scivola lungo il piano inclinato, si muove di moto traslatorio ed acquista energia cinetica pari all'energia potenziale perduta nel dislivello h :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Velocità del cilindro ai piedi del piano inclinato

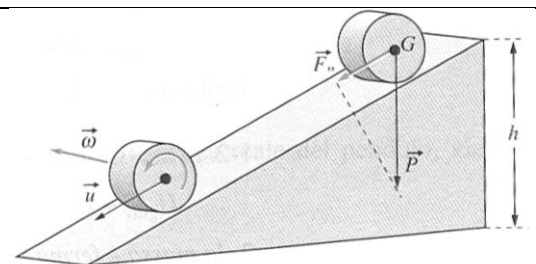


Moto traslatorio $mgh = \frac{1}{2}mv^2$

Se lo stesso cilindro rotola sul piano inclinato (moto rototraslatorio), acquista a spese dell'energia potenziale perduta sia energia traslazionale, sia energia di rotazione:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}_{\text{cdm}}\omega^2 = mgh, \quad \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}_{\text{cdm}}\frac{v^2}{r^2} = mgh \Rightarrow$$



Moto rototraslatorio:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{r^2}\right)v^2 = mgh, \quad \mathcal{J}_{\text{cdm}} = \frac{1}{2}mr^2 \Rightarrow \frac{\mathcal{J}_{\text{cdm}}}{r^2} = \frac{1}{2}m \Rightarrow \frac{3}{4}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = \frac{4}{3}gh \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Il centro di massa del cilindro si muove di moto rettilineo uniformemente vario. Risulta:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2al \quad v_i^2 = 0 \quad v_f^2 = 2al \quad v^2 = 2al \quad 2al = \frac{4}{3}gh \quad a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \frac{h}{l} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \vartheta$$

Un modo alternativo per ricavare l'accelerazione del centro di massa è quello di considerare il moto come la sovrapposizione del moto del centro di massa, la cui accelerazione è determinata dal risultante delle forze esterne e del moto di rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa governato dai momenti delle forze esterne. Le leggi da applicare sono:

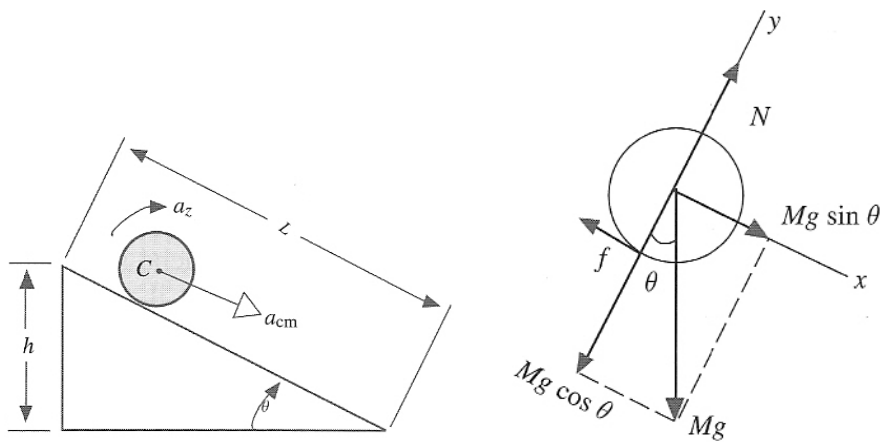
$$\vec{\tau} = \vec{M} = \mathcal{J} \cdot \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \mathcal{J} \cdot \vec{a} \quad \vec{R}^{(e)} = \mathbf{m} \cdot \vec{a}_c$$

Il diagramma delle forze è mostrato in figura. In particolare $f = f_t$ è la forza di attrito statico che impedisce al cilindro di scivolare. Le forze $\vec{Z}$ e $\vec{P}$, i cui sostegni passano per il centro di massa del cilindro, hanno momento nullo. La rotazione del cilindro è determinata dal momento di $f = f_t$.

$$m g \cdot \sin \vartheta - f_t = m \cdot a_{\text{cdm}} \quad Z - m g \cdot \cos \vartheta = 0 \quad -f_t R = \mathcal{J}_{\text{cdm}} \cdot \alpha = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \quad Z = N$$

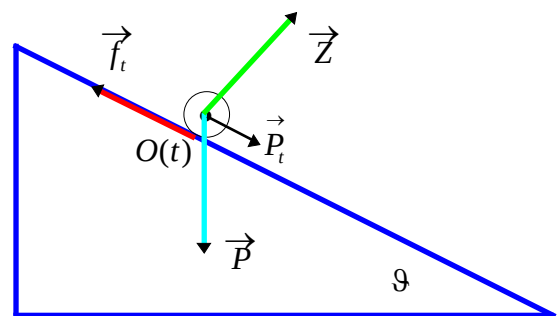
Eliminando tra la prima e la terza equazione e ricordando che $\alpha = \frac{a_{\text{cdm}}}{R}$, valida quando il cilindro

$$\text{rotola senza strisciare, otteniamo: } a_{\text{cdm}} = \frac{\alpha}{R} = \frac{2}{3} g \cdot \sin \vartheta \quad f = f_t = \frac{1}{3} M g \cdot \sin \vartheta$$



Risoluzione dinamica

Possiamo supporre il moto in considerazione come il moto di un cilindro che ruota rispetto ad un asse parallelo all'asse del cilindro passante per il punto di contatto O.



Il punto $O(t)$ può essere considerato fisso in quanto nel rotolamento puro il punto di contatto ha velocità nulla. Le forze esterne che agiscono sulla sfera sono il peso $\vec{P} = m \vec{g}$, la reazione vincolare $\vec{Z}$ e la forza d'attrito $\vec{f}_t$.

Poiché i momenti meccanici delle forze $\vec{Z}$ ed $\vec{f}_t$ rispetto all'asse istantaneo di rotazione sono nulli in quanto i sostegni di $\vec{Z}$ ed $\vec{f}_t$ passano per $O(t)$, la seconda equazione cardinale per i corpi rigidi che ruotano assume la forma: $\tau = \mathcal{J}_o \cdot \alpha$ $P_t \cdot R = \mathcal{J}_o \cdot \alpha$ $m R g \sin \vartheta = \mathcal{J}_o \cdot \alpha$

$\mathcal{J}_o$ = **momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse istantaneo di rotazione**

$$\mathcal{J}_o \cdot \alpha = m R g \sin \vartheta \quad \mathcal{J}_o \cdot \alpha \cdot R = m R^2 g \sin \vartheta \quad \mathcal{J}_o \cdot a = m R^2 g \sin \vartheta$$

Noi conosciamo il valore di $\mathcal{J}_{\text{cdm}}$ è il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse passante per il centro di massa C e parallelo all'asse istantaneo di rotazione. Per calcolare il valore di $\mathcal{J}_{\text{cdm}}$ dobbiamo applicare il **teorema di Huyghens-Steiner** $\mathcal{J}_o = \mathcal{J}_{\text{cdm}} + m \cdot R^2$.

$$(\mathcal{J}_{\text{cdm}} + m \cdot R^2) \cdot a = m R^2 g \sin \vartheta \quad \left(\frac{1}{2} m \cdot R^2 + m \cdot R^2 \right) \cdot a = m R^2 g \sin \vartheta$$

$$\left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot a = g \sin \vartheta \quad \frac{3}{2} a = g \sin \vartheta \quad a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \vartheta$$

Che è lo stesso risultato ottenuto in precedenza.

Legge oraria di un cilindro che rotola senza slittare

Basta studiare il moto del centro di massa **C** del cilindro. Il centro di massa **C** si muove lungo una retta parallela al piano inclinato. Prendiamo tale retta, orientata verso il basso, come asse delle ascisse **s**, con l'origine nella posizione iniziale del centro di massa **C**. L'unica forza che compie lavoro sul cilindro è il suo peso $\vec{P} = m \vec{g}$ che è una forza conservativa. Applico il principio di conservazione dell'energia meccanica totale quando il centro di massa **C** passa dalla quota **h_o** alla quota **h**.

$$U(h_o) + K(h_o) = U(h) + K(h) \quad K(h_o) = 0 \text{ in quanto il cilindro parte dalla quiete.}$$

$$K(h) = U(h_o) - U(h) = m g h_o - m g h = m g (h_o - h) = \text{energia cinetica posseduta dal cilindro}$$

Poiché il cilindro trasla e ruota possiamo scrivere: $K(h) = \frac{1}{2} \mathcal{J}_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2$

Il moto può essere considerato come compiuto mediante una traslazione del centro di massa ed una rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa.

$$\mathcal{J}_c = \frac{1}{2} m R^2 = \text{momento d'inerzia di un cilindro rispetto al suo asse}$$

$$\omega = \frac{v_c}{R} = \text{velocità lineare del centro di massa}$$

$$v_c = \text{velocità lineare del centro di massa} \quad h_0 - h = s \cdot \sin \vartheta$$

$$\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_c \omega^2 = m g (h_0 - h) = \text{principio di conservazione dell'energia meccanica totale}$$

$$\frac{1}{2} m v_c^2 = m g \cdot s \cdot \sin \vartheta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{v_c^2}{R^2} \quad \frac{1}{2} v_c^2 = g \cdot s \cdot \sin \vartheta - \frac{1}{4} v_c^2 \quad \frac{3}{4} v_c^2 = g \cdot s \cdot \sin \vartheta \quad v_c^2 = \frac{4}{3} g \cdot s \cdot \sin \vartheta$$

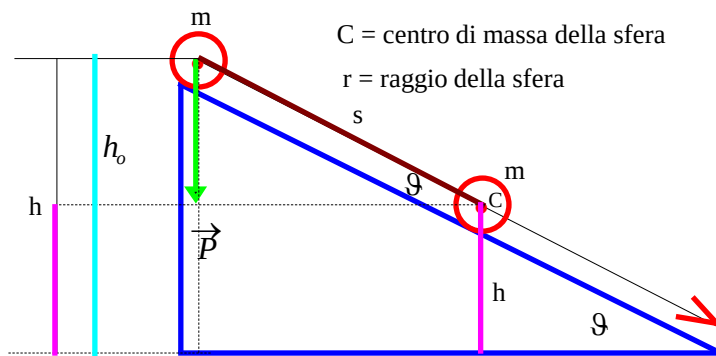
Derivo ambo i membri rispetto al tempo; ottengo:

$$2 v_c \cdot \frac{d v_c}{d t} = \frac{4}{3} g \sin \vartheta \cdot \frac{d s}{d t} \quad v_c \cdot \frac{d v_c}{d t} = \frac{2}{3} g \sin \vartheta \cdot \frac{d s}{d t} \quad \cancel{v_c} \cdot a_c = \frac{2}{3} g \sin \vartheta \cdot \cancel{v_c}$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \cdot \sin \vartheta = \text{accelerazione lineare del centro di massa del cilindro}$$

Poiché a_c è costante il centro di massa del cilindro si muove di moto rettilineo

uniformemente accelerato; la sua legge oraria è: $s = \frac{1}{2} a_c t^2$ $s = \frac{1}{3} g \sin \vartheta \cdot t^2$



Per un cilindro che rotola senza strisciare abbiamo:

$$s = \frac{1}{3} g \sin \vartheta \cdot t^2 \quad a_c = \frac{2}{3} g \cdot \sin \vartheta \quad v_c = a_c \cdot t = \frac{2}{3} g \cdot \sin \vartheta \cdot t = \sqrt{\frac{4}{3} g (h_0 - h)} \cdot t \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2} m R^2$$

Per il centro di massa del cilindro sono valide tutte le formule del moto uniformemente vario

Per un anello che rotola senza strisciare abbiamo:

$$s = \frac{1}{4} g \sin \vartheta \cdot t^2 \quad a_c = \frac{1}{2} g \cdot \sin \vartheta \quad v_c = a_c \cdot t = \frac{1}{2} g \cdot \sin \vartheta \cdot t = \sqrt{g (h_0 - h)} \cdot t \quad \mathcal{J} = m R^2$$

Per una sfera che rotola senza strisciare abbiamo:

$$s = \frac{4}{14} g \sin \vartheta \cdot t^2 \quad a_c = \frac{5}{7} g \cdot \sin \vartheta \quad v_c = a_c \cdot t = \frac{5}{14} g \cdot \sin \vartheta \cdot t = \sqrt{\frac{7}{10} g (h_0 - h)} \cdot t \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2} m R^2$$

Sintesi finale

La dinamica del corpo rigido

$$\vec{R}^{(c)} = m \cdot \vec{a}_c$$

I equazione cardinale per un corpo rigido di traslazione

$\vec{R}^{(c)}$ = risultante di tutte le forze esterne che agiscono sul corpo rigido; immaginate applicate nel centro di massa del corpo rigido = determina la traslazione del corpo rigido

$\vec{a}_c$ = accelerazione del centro di massa del corpo rigido

m = massa del corpo rigido

$M = J \cdot \alpha$ II equazione cardinale per un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso

M = momento risultante rispetto all'asse di rotazione di tutte le forze esterne che agiscono sul corpo esterno

$$M = F \cdot r \cdot \sin \vartheta = F \cdot b$$

α = accelerazione angolare del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione = accelerazione angolare di un punto qualsiasi del corpo rigido

n.B. Per un corpo rigido che ruota e trasla volgarmente le due equazioni cardinali, la prima per la traslazione la seconda per la rotazione.

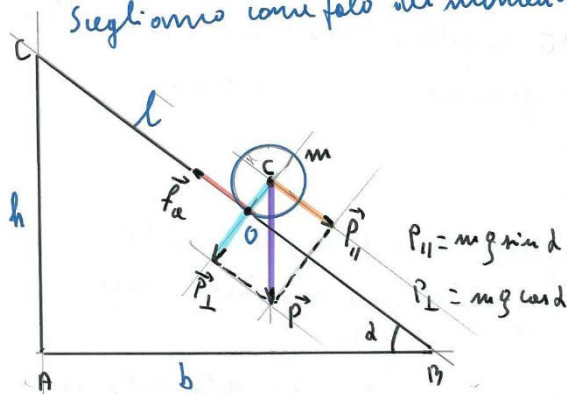
Moto roto-traslatorio di un solido di rotazione lungo un piano inclinato scabro

Consideriamo una sfera omogenea di massa m che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato scabro che forma un angolo α con il piano orizzontale.

Il moto rif. do della sfera è quello di rotazione attorno ad un asse di (normale al piano della figura) e passante per il centro di massa C della sfera. L'asse di non è fisso ma trasla con velocità lineare uguale alla velocità lineare v_C del centro di massa della sfera.

Poiché la sfera lungo il piano inclinato non può scivolare ha velocità nulla; per questo motivo il punto di contatto O può ritenersi istantaneamente fermo.

Scegliamo come polo dei momenti il centro di massa C e come asse di rotazione la retta d .



Applico alla sfera le due equazioni cardinali del moto di un corpo rif. do.

$$P_{\parallel} = mg \sin \alpha$$

$$P_{\perp} = mg \cos \alpha$$

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}_C \quad \text{per la traslazione}$$

$$M_C = I_C \cdot \alpha \quad \text{per la rotazione}$$

$\vec{a}_C$ è l'accelerazione lineare del centro di massa della sfera

α è l'accelerazione angolare della sfera

$$a_C = \alpha \cdot r \quad \alpha = \frac{a_C}{r}$$

$$\vec{P}_{11} + \vec{f}_a = m \cdot \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{m a_c = P_{11} - f_a = m g \sin \alpha - f}$$

$$M = \gamma_c \cdot d \quad M = M_{f_a} + M_{P_{11}} = f_a \cdot r + 0 \quad \boxed{M = f_a \cdot r}$$

$$\boxed{d = \frac{a_c}{r}} \quad \text{Il sistema da risolvere è il seguente:}$$

$$\begin{cases} d = \frac{a_c}{r} \\ \gamma_c \cdot d = f_a \cdot r \\ m a_c = m g \sin \alpha - f \end{cases} \quad \begin{aligned} &\gamma_c \cdot \frac{a_c}{r} = f_a \cdot r \quad \boxed{f_a = \frac{\gamma_c}{r^2} \cdot a_c} \\ &m a_c = m g \sin \alpha - \frac{\gamma_c}{r^2} \cdot a_c \end{aligned}$$

$$a_c + \frac{\gamma_c}{m r^2} \cdot a_c = g \sin \alpha \quad ; \quad (m r^2 + \gamma_c) a_c = g \sin \alpha \cdot m r^2$$

$$\boxed{a_c = \frac{m r^2 g \sin \alpha}{\gamma_c + m r^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{\gamma_c}{m r^2}} = \frac{m g \sin \alpha}{m + \frac{\gamma_c}{r^2}}} \quad (P)$$

$$f_a = \frac{\gamma_c}{r^2} \cdot \frac{m g \sin \alpha}{m + \frac{\gamma_c}{r^2}}$$

$$\boxed{f_a = \frac{\gamma_c}{\gamma_c + m r^2} \cdot m g \sin \alpha}$$

N.B.

La sfera rotola senza strisciare su:
 1) c'è attrito 2) se la forza d'attrito ha il valore dato
 nella (P). Questo significa fissata la massa, la geometria
 geometrica del solido di rotazione, noto il valore di f_a
 si ha un unico rototranslatorio rotolo per un ben
 determinato valore dell'angolo α

cilindro $\begin{cases} d = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} \cdot r \sin \alpha \\ a = dr = \frac{2}{3} g \sin \alpha \\ f_a = \frac{1}{3} m g \sin \alpha \end{cases}$

sfera $\begin{cases} d = \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{r} \cdot r \sin \alpha \\ a = dr = \frac{5}{7} g \sin \alpha \\ f_a = \frac{2}{7} m g \sin \alpha \end{cases}$

$$v^2 = 2al = 2a \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{2h}{\sin \alpha} \cdot \frac{mr^2 g \sin \alpha}{I_c + mr^2} = 2gh \cdot \frac{mr^2}{I_c + mr^2}$$

$$v_c^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_c}{mr^2}}$$

velocità della sfera al fine del piano inclinato

Risoluzione energetica

$$U(c) = K(A) \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 \quad \omega = \frac{v_c}{r}$$

$$\frac{1}{2} I_c \cdot \frac{v_c^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_c^2 = mgh \quad \frac{1}{2} \left(\frac{I_c}{r^2} + m \right) v_c^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{I_c + mr^2}{r^2} \cdot v_c^2 = mgh \quad v_c^2 = \frac{2mr^2 gh}{I_c + mr^2}$$

$$v_c^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_c}{mr^2}}$$

$$v_c^2 = 2al = \frac{2h}{\sin \alpha} \cdot a \quad a = \frac{v_c^2 \sin \alpha}{2h}$$

$$a = \frac{2mr^2 gh}{I_c + mr^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{2h} = \frac{mr^2 g \sin \alpha}{mr^2 + I_c}$$

$$a = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{I_c}{mr^2}}$$

Terzo procedimento

Il moto della sfera può essere considerato come il moto di pura rotazione attorno ad un asse passante per il punto di contatto O normale al piano della figura.

$$M_O = I_O \cdot \alpha \quad \text{con} \quad I_O = I_C + mr^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{teorema di} \\ \text{Huyghens-Steiner} \end{array} \right.$$

$$M_O = P_{11} \cdot r = mgr \sin \alpha \quad mgr \sin \alpha = (I_C + mr^2) \cdot \frac{a_C}{r}$$

$$a_C = \frac{mgr^2 \sin \alpha}{I_C + mr^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_C}{mr^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Poi si procede} \\ \text{come prima} \end{array} \right.$$

v.B. Il centro di massa lungo il piano inclinato si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\text{con accelerazione costante} \quad a_C = \frac{mgr^2 \sin \alpha}{I_C + mr^2}$$

Moto di un solido di rotazione lungo un piano orizzontale

Consideriamo una sfera che rotola senza slittare lungo un piano orizzontale. La sfera ruota con velocità angolare ω attorno all'asse di simmetria per il suo centro di massa C ortogonale al piano della figura. Risultata $v_C = \omega r$ velocità lineare del centro di massa $\Rightarrow a_C = \alpha r$ accelerazione lineare del centro di massa

α = accelerazione angolare della sfera attorno all'asse di rotazione α e moto della sfera è la combinazione fra una rotazione ed una traslazione. Si tratta di una rototraslazione in cui il centro di massa avanza con velocità $v_C = \omega r$ mentre la sfera ruota con velocità angolare ω rispetto all'asse di rotazione α .

Il punto di contatto O è istantaneamente fermo. Trattiamo il caso di una sfera di massa m e raggio r che rotola senza slittare lungo un piano orizzontale sotto l'azione di una forza orizzontale $\vec{F}$ applicata nel suo centro di massa. La legge del moto del centro di massa C è:

$$\vec{F} + \vec{f}_a = m \cdot \vec{a}_C \Rightarrow \boxed{F - f_a = m a_C} \quad \text{Scegliamo il punto } C \text{ come polo per il calcolo dei momenti.}$$

$$M_P + F_{Pa} = J_C \cdot \alpha \Rightarrow F \cdot 0 + f_a r = J_C \alpha \Rightarrow r f_a = J_C \alpha \Rightarrow \boxed{f_a = \frac{J_C}{r^2} \cdot a_C}$$

$$F - \frac{J_C}{r^2} \cdot a_C = m a_C \Rightarrow \left(\frac{J_C}{r^2} + m \right) a_C = F \quad \alpha_C = \frac{\vec{F}}{m + \frac{J_C}{r^2}} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{J_C}{m r^2} \right)}$$

Si tratta di un moto rettilineo uniformemente accelerato (per il centro di massa).

La condizione per puro rotolamento si: $f_a \leq \mu_s \cdot N = \mu_s m g$

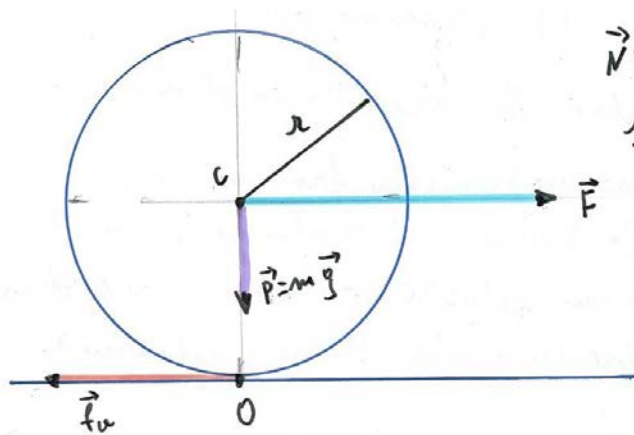
In caso contrario la sfera rotola e slitta con temporaneamente.

Abbiamo visto che il rotolamento della sfera può essere descritto come una rotazione con velocità angolare $\omega = \frac{v_C}{r}$ attorno all'asse di rotazione O quando questo trasla con velocità lineare v_C .

L'energia cinetica della sfera si viene fornita dalla seguente relazione:

$$\boxed{K = E_C = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2} \quad \text{per la sfera abbiamo } \boxed{J_C = \frac{2}{5} m r^2}$$

$$K = E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \cdot \frac{v_C^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_C^2 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) m v_C^2 \quad \boxed{K = E_C = \frac{7}{10} m v_C^2}$$

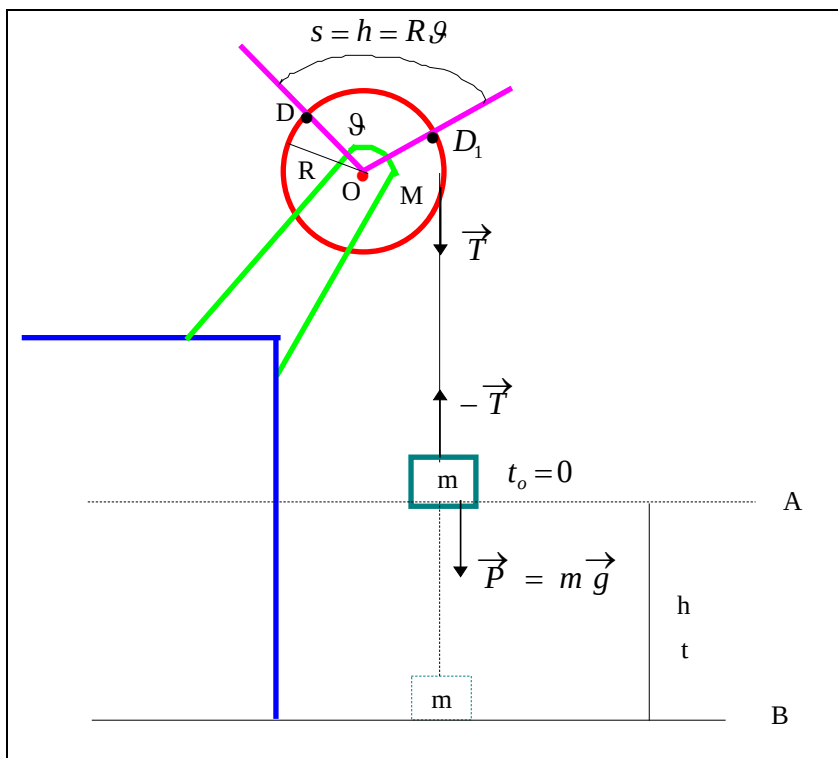


$$\vec{N} = -\vec{P} = -m \vec{g} = \text{reazione vincolare}$$

Il punto di contatto O con il piano orizzontale è istante per istante fermo.

Un disco omogeneo di massa M e raggio r è libero di ruotare intorno ad un asse per il centro O montato su supporti fissi e privi di attrito come indicato in figura. Una fune è avvolta lungo il bordo del disco ed è collegata con una massa m che viene lasciata cadere sotto l'azione della gravità. Calcolare:

- l'accelerazione lineare della massa m
- la velocità della massa m dopo che ha percorso h metri (oppure dopo t secondi)
- l'accelerazione angolare del disco e l'accelerazione tangenziale di un punto situato sul bordo del disco
- la tensione della fune (supposta di massa trascurabile)
- l'energia cinetica del disco dopo t secondi (oppure quando la massa m si è abbassata di h metri)
- l'energia cinetica della massa m dopo t secondi (oppure quando la massa m si è abbassata di h metri)



- Una forza costante $\vec{T}$ diretta verticalmente verso il basso provoca la rotazione del disco

- Massa m legata all'estremità di una fune di peso trascurabile.

Se la fune ruota di un angolo ϑ un tratto di fune $h = r\vartheta$ si svolge e la massa m si abbassa del tratto $h = r\vartheta$.

Il punto D , situato sul bordo del disco, descrive l'arco $DD_1 = s = h$ con una velocità lineare $v = \omega r$ uguale alla velocità della massa m

- L'unica forza che esercita un **momento torcente** sul disco è la tensione $\vec{T}$ della fune, la quale ha braccio $\mathbf{R}$ rispetto al perno $\mathbf{O}$.

Il momento meccanico $\vec{\tau}$ esercitato sul disco dalla tensione $\vec{T}$ del filo della fune produce un'accelerazione angolare α data da: $\tau = \mathcal{J} \cdot \alpha$ con α accelerazione angolare del disco

$\tau = T \cdot R$ $T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha$ $a = \alpha R$ = accelerazione lineare di un punto del bordo del disco

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad T = \frac{\mathcal{J} \cdot \alpha}{R} = \frac{\mathcal{J} \cdot a}{R^2}$$

- Sulla massa m , appesa all'estremità libera della fune, agiscono due forze:
- la tensione del filo T verso l'alto ed il peso $\vec{P} = m\vec{g}$ verso il basso

La legge fondamentale della dinamica applicata alla massa m ci consente di scrivere: $\vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

In termini scalari abbiamo: $P - T = ma$ (la direzione verticale è stata orientata verso il basso)

$\vec{a}$ è l'accelerazione subita dalla massa m ed il suo modulo coincide con l'accelerazione lineare di un qualsiasi punto posto sul bordo del disco

- Abbiamo due equazioni $T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha$ $P - T = ma$ e tre incognite T , a , α .

La fune fornisce un vincolo che ci consente di stabilire una relazione tra l'accelerazione lineare a e l'accelerazione angolare α .

Quando il disco ruota di un angolo ϑ (misurato in radianti), un tratto di fune lungo $s = R\vartheta$ si svolge e la massa m si abbassa del tratto: $h = s = r\vartheta$ [§]

$$(\text{Derivando la [§] otteniamo : } v = \frac{ds}{dt} = \frac{dr\vartheta}{dt} = r \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = r \cdot \omega) \quad v = \omega \cdot R$$

$$(\text{Derivando una seconda volta otteniamo): } a = \alpha R$$

che è la terza equazione necessaria per risolvere il problema.

$$\begin{cases} a = \alpha R \\ T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha \\ P - T = ma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a}{R} \\ T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha \\ P - T = ma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a}{R} \\ T \cdot R^2 = \mathcal{J} \cdot a \\ P - T = ma \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{T \cdot R^2}{\mathcal{J}} \\ mg - T = \frac{mT \cdot R^2}{\mathcal{J}} \end{cases}$$

$$mg\mathcal{J} - T\mathcal{J} = mT \cdot R^2 \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2}MR^2 = \text{momento d'inerzia della carrucola}$$

$$mT \cdot R^2 + T\mathcal{J} = mg\mathcal{J} \quad (mR^2 + \mathcal{J})T = mg\mathcal{J} \quad T = \frac{mg\mathcal{J}}{mR^2 + \mathcal{J}} = \frac{\frac{\mathcal{J}}{R^2}}{m + \frac{\mathcal{J}}{R^2}} \cdot mg$$

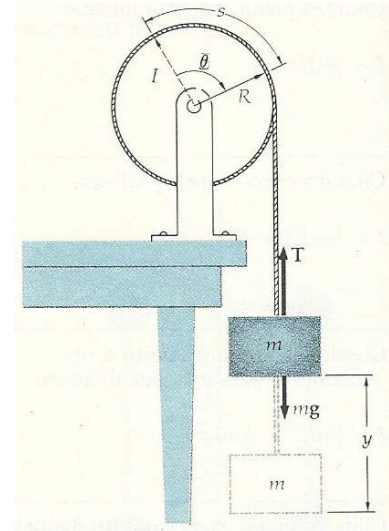
$$T = \frac{mg \frac{1}{2} M R^2}{m R^2 + \frac{1}{2} M R^2} = \frac{mg \frac{1}{2} M}{m + \frac{1}{2} M} = \frac{mM}{2m + M} \cdot g \quad T \cdot r = \mathcal{J} \cdot \alpha \Rightarrow T = \frac{\mathcal{J} \cdot a}{R} = \frac{\mathcal{J} \cdot a}{R^2}$$

$$a = \frac{T R^2}{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{M R^2} \cdot \frac{m M}{2m+M} \cdot g = \frac{2m}{2m+M} \cdot g \quad \mathbf{a = \frac{2m}{2m+M} \cdot g} \quad \alpha = \frac{a}{r} = \frac{2m}{2m+M} \cdot \frac{g}{r}$$

Il corpo attaccato ad una corda avvolta sulla ruota (vedere figura accanto) determina il moto rigido. Se la ruota gira di un angolo ϑ , si svolge un tratto della corda lungo $\mathbf{s = R \vartheta}$ ed il corpo scende di un tratto $\mathbf{y = R \vartheta}$.

Valgono le seguenti formule:

$$\mathbf{T = \frac{mM}{2m+M} \cdot g} \quad \mathbf{a = \frac{2m}{2m+M} \cdot g} \quad \alpha = \frac{a}{r} = \frac{2m}{2m+M} \cdot \frac{g}{r}$$



Poiché l'accelerazione $\mathbf{a}$ con cui si muove la massa $\mathbf{m}$ è costante, il moto è **uniformemente accelerato** e la velocità di $\mathbf{m}$ può essere calcolata applicando la formula:

$$v^2 = v_o^2 + 2as \quad \text{con} \quad v_o = 0 \quad s = h \quad v^2 = 2as \quad \mathbf{v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{\mathcal{J}}{r^2}}}}$$

$$v^2 = \frac{2m}{m + \frac{\mathcal{J}}{r^2}} \cdot gh \quad v^2 = \frac{4m}{2m + M} \cdot gh \quad \mathbf{v = \sqrt{\frac{4m}{2m + M} \cdot gh}}$$

- Otteniamo lo stesso risultato se applichiamo il **principio di conservazione dell'energia meccanica totale** al sistema composto dal disco di massa M e dal corpo di massa m .

Quando la massa m si abbassa del tratto h , la sua energia potenziale diminuisce della quantità mgh . **Questa energia potenziale si trasforma in energia cinetica dell'intero sistema.**

energia meccanica totale del sistema nella configurazione iniziale **A** =
= **energia meccanica totale** del sistema nella configurazione finale **B**

Ricordando che $U_A(\text{disco}) = U_B(\text{disco})$ possiamo scrivere:

$$U_A(\mathbf{m}) + U_A(\mathbf{disco}) + K_A(\mathbf{m}) + K_A(\mathbf{disco}) = U_B(\mathbf{m}) + U_B(\mathbf{disco}) + K_B(\mathbf{m}) + K_B(\mathbf{disco})$$

$$U_A(m) + 0 + 0 = 0 + K_B(m) + K_B(\text{disco}) \quad mgh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{2m}{m + \frac{\mathcal{J}}{R^2}} \cdot gh = \frac{4m}{2m + M} \cdot gh \quad \frac{\mathcal{J}}{R^2} = \frac{1}{2}M$$

La massa m si muove di moto naturalmente accelerato per cui la sua legge oraria del moto è:

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{m}{2m + M} \cdot g \cdot t^2$$

$$\begin{aligned} K(\text{disco}) &= \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} M \cdot (\omega r)^2 = \frac{1}{4} M v^2 = \frac{1}{4} M \cdot \frac{4m}{2m + M} \cdot gh = \\ &= \frac{mM}{2m + M} \cdot gh = \frac{mM}{2m + M} \cdot g \cdot \frac{m}{2m + M} \cdot g \cdot t^2 = \frac{m^2 M}{(2m + M)^2} \cdot g^2 t^2 \end{aligned}$$

$$K(\text{disco}) = \frac{m^2 M}{(2m + M)^2} \cdot g^2 t^2 \quad K(\text{disco}) = \frac{mM}{2m + M} \cdot gh$$

Altro modo di calcolare l'energia cinetica del disco

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 \Rightarrow K_B(\text{disco}) = \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh - \frac{1}{2} m v^2 = mgh - \frac{1}{2} m \frac{4m}{2m + M} gh = \\ &= mgh - \frac{2m^2}{2m + M} gh = \left(m - \frac{2m^2}{2m + M} \right) \cdot gh = \frac{mM}{2m + M} \cdot gh \quad K_B(\text{disco}) = \frac{mM}{2m + M} \cdot gh \end{aligned}$$

Supponendo che il disco parta da fermo, calcolare il lavoro compiuto dalla tensione T della fune in t secondi. Calcolare anche l'aumento di energia cinetica rotazionale del disco.

$\tau = T \cdot r = \text{costante}$ Per il disco che ruota attorno al perno O abbiamo trovato:

$$a = \frac{2m}{2m + M} \cdot g \quad \alpha = \frac{a}{r} = \frac{2m}{2m + M} \cdot \frac{g}{r} \quad T = \frac{mM}{2m + M} \cdot g \quad v^2 = \frac{4m}{2m + M} \cdot gh$$

Essendo **costante il momento** applicato al disco, l'**accelerazione angolare** risultante α è pure **costante**. Lo spostamento angolare totale con accelerazione angolare costante si ricava

$$\text{dall'equazione: } \vartheta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \text{essendo: } \omega_0 = 0 \quad \text{ed } \alpha = \frac{a}{r} = \frac{2m}{2m + M} \cdot \frac{g}{r}$$

Il lavoro compiuto da T in uno spostamento angolare finito quando il momento meccanico è costante ci viene fornito dalla seguente relazione:

$$L = \tau(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \tau \cdot \vartheta = Tr \cdot \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} r T \alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{mM}{2m + M} \cdot g \cdot \frac{2m}{2m + M} \cdot \frac{g}{r} \cdot t^2 \quad L = \frac{m^2 M}{(2m + M)^2} \cdot g t^2$$

Tale lavoro deve tradursi in un aumento di energia cinetica del disco. Il disco, partendo da fermo, acquista una velocità angolare $\omega = \alpha t$

$$K(\text{disco}) = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M r^2 \cdot \alpha^2 t^2 = \frac{1}{4} M \cdot (\alpha r)^2 \cdot t^2 = \frac{1}{4} M \cdot a^2 \cdot t^2 =$$

$$= \frac{1}{4} M \cdot \frac{4m^2}{(2m+M)^2} g^2 t^2 = \frac{m^2 M}{(2m+M)^2} \cdot g t^2 = L$$

Quindi l'aumento di energia cinetica del disco è uguale al lavoro compiuto dal risultante delle forze agenti sul disco. Tale risultante, come sappiamo, è la tensione della fune, cioè il peso della massa m .

Dimostrare che per il sistema considerato (disco + massa appesa all'estremità libera della fune) vale il principio di conservazione dell'energia meccanica totale.

Il risultante delle forze agenti sul sistema disco + massa appesa alla fune è la forza di gravità (peso) agente sul corpo sospeso. Si tratta di una **forza conservativa**. Considerando il sistema globalmente, si vede che nella discesa verticale verso il basso la massa appesa perde la seguente **energia potenziale** $U = mgh$ dove h è il tratto verticale percorso dalla massa m appesa alla fune durante la discesa.

Contemporaneamente la massa m acquista energia cinetica di traslazione ed il disco di massa M energia cinetica di rotazione. L'**energia cinetica** totale del sistema massa + disco è:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$$

dove v è la velocità lineare della massa appesa. Dobbiamo dimostrare che:

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Per il moto traslatorio della massa m si ha: $v^2 = 2ah$ essendo nulla la velocità iniziale. $h = \frac{v^2}{2a}$

Sappiamo pure che risulta $a = \frac{2m}{2m+M} \cdot g$ per averlo dimostrato in precedenza

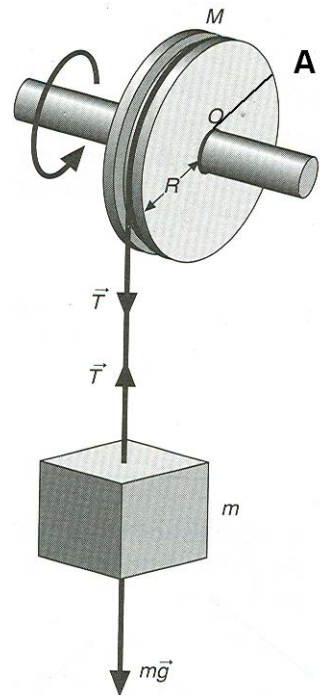
$$m g h = m g \cdot \frac{v^2}{2a} = m \cancel{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{2m+M}{2m \cancel{g}} = \frac{1}{4} (2m+M) v^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} (2m+M) v^2$$

L'**energia meccanica si conserva**

Una carrucola di raggio $R = 30\text{ cm}$ e massa $M = 2\text{ kg}$ può ruotare attorno al proprio asse orizzontale privo di attrito. Mediante una corda di massa trascurabile ed avvolta attorno alla gola di una carrucola è sospeso un corpo di massa $m = 500\text{ g}_r$. Calcolare:

- a) l'accelerazione lineare di un punto del bordo della carrucola
- b) la velocità angolare della carrucola dopo 3 secondi
- c) l'angolo descritto dal raggio vettore OA dopo 4 secondi
- d) la tensione della corda e) l'energia cinetica della carrucola dopo 5 secondi
- f) l'accelerazione della massa m g) di quanto si abbassa la massa m dopo 6 secondi
- h) la reazione dell'asse di rotazione della carrucola
- i) il tempo impiegato dalla massa m per abbassarsi di 1 m
- L) la velocità lineare di un punto della carrucola distante $\frac{R}{4}$ dall'asse



di rotazione dopo 8 secondi.

$$m = 500\text{ g}_r = \frac{1}{2}\text{ kg} = 0,5\text{ kg} \quad M = 2\text{ kg} \quad R = 30\text{ cm} = 0,3\text{ m}$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \quad \tau = \mathcal{J} \cdot \alpha \Rightarrow T \cdot R = \mathcal{J} \cdot \alpha \quad a = \alpha \cdot R \quad \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \quad P - T = ma \quad Mg - T = ma$$

- a) l'accelerazione lineare di un punto del bordo della carrucola

$a = \alpha \cdot R$ = accelerazione di un punto qualsiasi del bordo della carrucola

α = accelerazione angolare della carrucola

Come polo dei momenti scegliamo il punto O centro di massa della carrucola. Rispetto a tale polo il momento della forza peso $\vec{P}_c = M \cdot \vec{g}$ della carrucola è nullo. Solo la tensione $\vec{T}$ del filo ha momento diverso da zero e l'equazione del moto della carrucola è $\tau = \mathcal{J} \cdot \alpha$. Per la massa m l'equazione del moto è: $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$ che, in termini scalari, diventa: $mg - T = ma$.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a}{R} ; \frac{\mathcal{J}}{R^2} = \frac{1}{2} M \\ T = \frac{\mathcal{J}}{R} \cdot \alpha = \frac{\mathcal{J}}{R} \cdot \frac{a}{R} = \frac{\mathcal{J}}{R^2} \cdot a = \frac{1}{2} Ma & mg - T = ma \Rightarrow mg - \frac{1}{2} Ma = ma \quad 2mg - Ma = 2ma \\ mg - T = ma \end{cases}$$

$$a = \frac{2m}{M + 2m} g$$

$$a = \frac{1}{2+1} \cdot 9,8 = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{3,27}{0,3} = 10,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

b) la velocità angolare della carrucola dopo 3 secondi

Il moto della carrucola è **rotatorio uniformemente vario**.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t = (10,9) \cdot 3 = 32,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \omega = 32,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

c) l'angolo descritto dal raggio vettore OA dopo 4 secondi

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} (10,9) \cdot 16 \quad \vartheta = 87,2 \text{ rad}$$

d) la tensione della corda

$$T = \frac{\mathcal{J}}{R} \cdot \alpha = \frac{\mathcal{J}}{R} \cdot \frac{a}{R} = \frac{\mathcal{J}}{R^2} \cdot a = \frac{1}{2} M a = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3,27 = 3,27 \text{ N} \quad T = 3,27 \text{ N}$$

e) l'energia cinetica della carrucola dopo 5

$$K = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot (\alpha t)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (0,3)^2 \cdot (10,9 \cdot 5)^2 = \frac{1}{2} (0,09) \cdot (54,5)^2 = 133,66 \text{ J} \quad K = 133,66 \text{ J}$$

f) l'accelerazione della massa m

$$a = \frac{1}{2+1} \cdot 9,8 = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

g) di quanto si abbassa la massa m dopo 6 secondi

$$h = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,27 \cdot 36 = 58,86 \text{ m} \quad h = 58,86 \text{ m}$$

h) la reazione dell'asse di rotazione della carrucola

Le forze che agiscono sulla carrucola sono la tensione $\vec{T}$ ed il peso della carrucola $\vec{P}_c = M \cdot \vec{g}$. L'asse della carrucola consente le rotazioni ed impedisce qualsiasi traslazione. La reazione dell'asse di rotazione della carrucola è uguale ed opposta al risultante $\vec{R}$ di tutte le forze esterne applicate nel baricentro della carrucola. Tali forze applicate nel baricentro della carrucola danno come risultante

$$\vec{R} = \vec{T} + M \cdot \vec{g} \quad \vec{Z} = -\vec{R} \quad Z = R = T + Mg$$

$$Z = T + Mg = 3,27 + 2 \cdot 9,8 = 3,27 + 19,6 = 22,87 \text{ N} \quad Z = 22,87 \text{ N}$$

i) il tempo impiegato dalla massa m per abbassarsi di 1 m

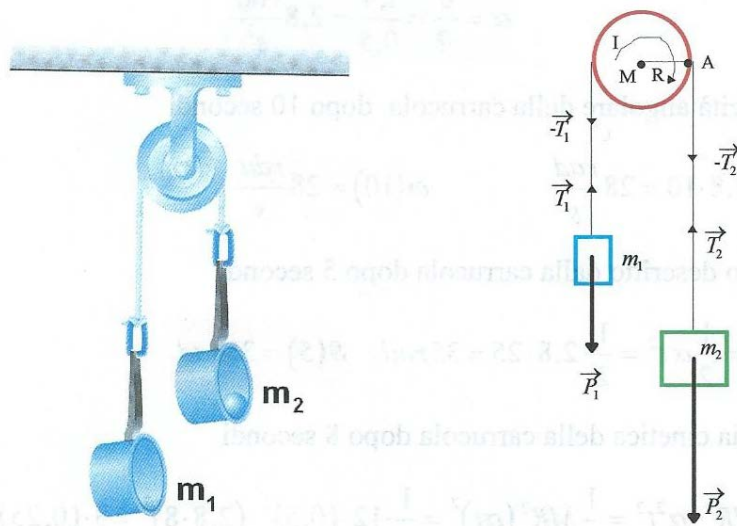
$$h = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{3,27}} = \sqrt{0,61} = 0,78 \text{ s} \quad t = 0,78 \text{ s}$$

L) la velocità lineare di un punto della carrucola distante $\frac{R}{4}$ dall'asse di rotazione dopo 8 secondi.

$$v = \omega \cdot \frac{R}{4} = \alpha t \cdot \frac{R}{4} = (10,9) \cdot 8 \cdot \frac{0,3}{4} = 6,54 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v = 6,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il sistema indicato in figura è costituito da una carrucola di raggio $R = 50\text{ cm}$ e massa $M = 12\text{ kg}$ e da due masse $m_1 = 3\text{ kg}$ ed $m_2 = 5\text{ kg}$ poste agli estremi di una corda che passa nella gola di una carrucola. La corda non scorre nella gola ma si muove con la carrucola. Calcolare:

- 1) l'accelerazione lineare delle due masse
- 2) le tensioni dei due tratti di corda
- 3) l'accelerazione angolare della carrucola
- 4) la velocità angolare della carrucola dopo 10 secondi
- 5) l'angolo descritto dalla carrucola dopo 5 secondi
- 6) l'energia cinetica della carrucola dopo 8 secondi
- 7) la reazione dell'asse di rotazione della carrucola
- 8) la velocità lineare di un punto della carrucola distante $\frac{R}{3}$ dall'asse di rotazione dopo 12 s .
- 9) il tempo impiegato dalla massa m_2 per abbassarsi di 1 m
- 10) la velocità angolare della carrucola quando la massa m_2 si abbassa di 1 m
- 11) Dimostrare che dopo 1 s il lavoro compiuto sul sistema dalla forza di gravità è uguale all'energia cinetica dell'intero sistema, provando con ciò che l'energia meccanica si conserva.



$$m_1 = 3\text{ kg} \quad m_2 = 5\text{ kg} \quad M = 12\text{ kg} \quad R = 50\text{ cm} = 0,5\text{ m} \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \frac{\mathcal{J}}{R^2} = \frac{1}{2}M$$

1) Calcolare l'accelerazione lineare delle due masse

Alle masse m_1, m_2 applico la legge fondamentale della dinamica; alla carrucola applico la seconda equazione cardinale della dinamica. Ottengo:

$$\begin{cases} T_1 - m_2 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ (T_2 - T_1) \cdot R = \mathcal{J} \cdot \alpha \\ \alpha = \frac{a}{R} \end{cases} \quad \begin{cases} T_1 = m_2 g + m_1 a \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \\ T_2 - T_1 = \frac{\mathcal{J}}{R} \cdot \frac{a}{R} = \frac{\mathcal{J}}{R^2} \cdot a = \frac{1}{2} M a \end{cases}$$

$$m_2 g - m_2 a - m_2 g - m_1 a = \frac{1}{2} M a$$

$$2m_2 g - 2m_2 a - m_1 a = M a \quad a = \frac{2(m_2 - m_1)}{2(m_2 + m_1) + M} \cdot g = \frac{2 \cdot 2}{16 + 12} \cdot g = \frac{1}{7} \cdot g = 1,4 \frac{m}{s^2} \quad a = 1,4 \frac{m}{s^2}$$

2) Calcolare le tensioni dei due tratti di corda

$$T_1 = m_1 (g + a) = 3(9,8 + 1,4) = 3 \cdot 11,2 = 33,6 N \quad T_1 = 33,6 N$$

$$T_2 = m_2 (g - a) = 5(9,8 - 1,4) = 5 \cdot 8,4 = 42 N \quad T_2 = 42 N$$

3) Calcolare l'accelerazione angolare della carrucola

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1,4}{0,5} = 2,8 \frac{rad}{s^2}$$

4) Calcolare la velocità angolare della carrucola dopo 10 secondi

$$\omega = \omega_o + \alpha t = \alpha t = 2,8 \cdot 10 = 28 \frac{rad}{s} \quad \omega(10) = 28 \frac{rad}{s}$$

5) Calcolare l'angolo descritto dalla carrucola dopo 5 secondi

$$\vartheta = \vartheta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,8 \cdot 25 = 35 rad \quad \vartheta(5) = 35 rad$$

6) Calcolare l'energia cinetica della carrucola dopo 8 secondi

$$K = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \alpha^2 t^2 = \frac{1}{4} M R^2 (\alpha t)^2 = \frac{1}{4} \cdot 12 \cdot (0,5)^2 \cdot (2,8 \cdot 8)^2 = 3 \cdot (0,25) \cdot (22,4)^2 \quad K = 376,32 J$$

7) Calcolare la reazione dell'asse di rotazione della carrucola

$$Z = T_1 + T_2 + Mg = 33,6 + 42 + 12 \cdot 9,8 = 193,2 \text{ N} \quad Z = 193,2 \text{ N}$$

8) Calcolare la velocità lineare di un punto della carrucola distante $\frac{R}{3}$ dall'asse di rotazione dopo

$$12 \text{ s.} \quad v = \omega \cdot \frac{R}{3} = \alpha t \cdot \frac{R}{3} = 2,8 \cdot 4 \cdot \frac{0,5}{3} = 5,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(12) = 5,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

9) Calcolare il tempo impiegato dalla massa m_2 per abbassarsi di 1 m

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2}{1,4}} = \sqrt{1,428} = 1,2 \text{ s} \quad t = 1,2 \text{ s}$$

10) Calcolare la velocità angolare della carrucola quando la massa m_2 si abbassa di 1 m

$$\omega = \alpha t = 2,8 \cdot 1,2 = 3,36 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \omega(1,2) = 3,36 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

11) Dimostrare che dopo 1 s il lavoro compiuto sul sistema dalla forza di gravità è uguale all'energia cinetica dell'intero sistema, provando con ciò che l'energia meccanica si conserva.

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \quad h(1) = 0,7 \text{ m} \quad L(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = (P_2 - P_1) \cdot h = (m_2 - m_1) g \cdot h = (5 - 3) \cdot 9,8 \cdot 0,7 = 13,72 \text{ J}$$

$$K_{car} = 3 \cdot 0,25 \cdot 7,84 = 5,88 \text{ J} \quad K_{m_1 m_2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (a \cdot t)^2 = 4 \cdot 1,96 = 7,84 \text{ J}$$

$$K_{car} + K_{m_1 m_2} = 7,84 + 5,88 = 13,72 \text{ J} \quad L(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = K_{car} + K_{m_1 m_2}$$