

## Definizione di sorgente di calore e di macchina termica

**Sorgente di calore** è un corpo (o un sistema di corpi) a temperatura costante che ha la proprietà di cedere o di assorbire una qualsiasi quantità di calore  $\Delta Q$  mantenendo costante la propria temperatura. Così definita, la **sorgente di calore** è un ente ideale, ma spesso può essere realizzata con buona approssimazione:

- (1) con un sistema di **elevatissima capacità termica** (teoricamente infinita) come per esempio il mare, l'atmosfera ..
- (2) con un **termostato** ove la temperatura è mantenuta costante mediante una continua cessione o sottrazione di calore compiuta da opportuni meccanismo
- (3) con un sistema che sta compiendo una **trasformazione del proprio stato di aggregazione** (ad esempio ghiaccio fondente).
- (4) Va inoltre osservato che sul **piano di Clapeyron**, una sorgente è rappresentata da una **isoterma**.

Si chiama **macchina termica** un **sistema termodinamico** in grado di compiere trasformazioni cicliche assorbendo calore e fornendo lavoro. Se la macchina è **reversibile** <sup>(3)</sup> essa può assorbire lavoro e fare passare calore da una sorgente calda ad una sorgente fredda. In tal caso essa prende il nome di **macchina frigorifera**. In generale, **macchina termica** è un dispositivo costituito da vari meccanismi e da opportuni sistemi termodinamici che **opera ciclicamente** e trasforma in lavoro delle quantità di calore che scambia con un opportuno numero di **sorgenti di calore**.

Se  $\sum Q_i$  è la somma algebrica delle quantità di calore scambiate ed **L** il lavoro eseguito in un ciclo,

per il **primo principio della termodinamica** abbiamo:  $\sum Q_i = L$  dovendo essere

$$\Delta U = 0.$$

Il ciclo può essere percorso in un verso oppure in quello opposto se le trasformazioni che intervengono sono **reversibili**.

---

<sup>(3)</sup> la macchina termica è reversibile se è reversibile il ciclo che essa compie

Definiamo **rendimento**  $\eta$  (o **efficienza**) di una macchina termica il rapporto tra il lavoro eseguito ed il calore (positivo) assorbito dalla macchina termica durante un ciclo.

$Q_a$  = **calore assorbito** dalla macchina termica in un ciclo

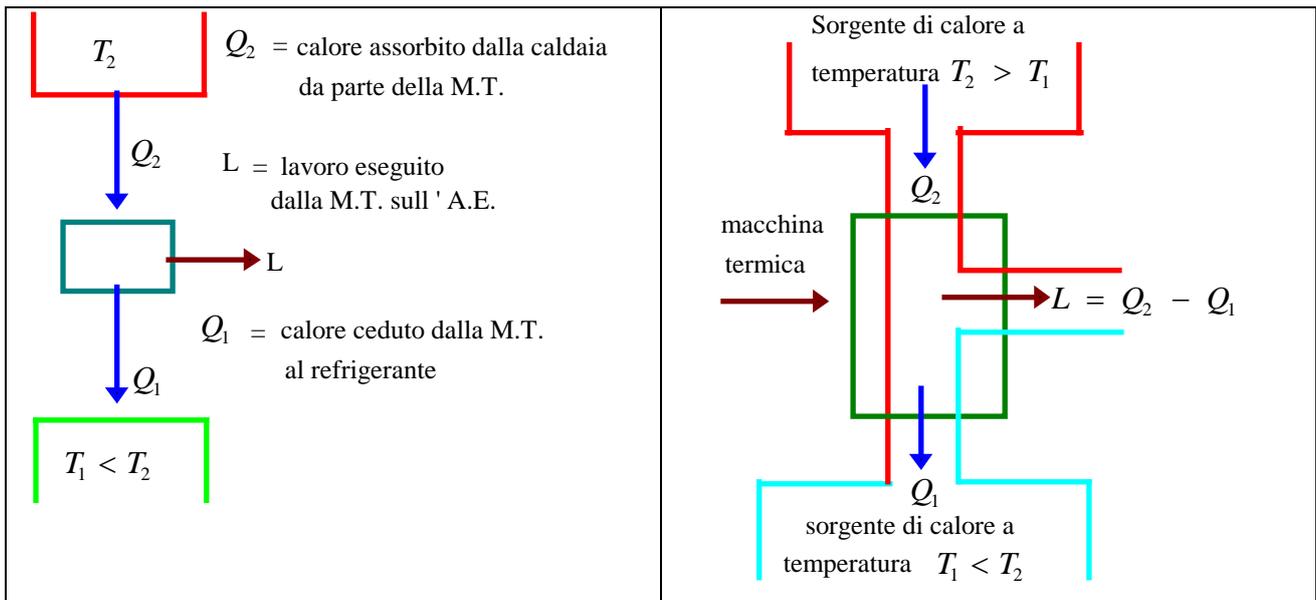
$Q_c$  = **calore ceduto** dalla macchina termica in un ciclo

$L$  = **lavoro eseguito** dalla macchina termica in un ciclo

$$L = Q_a - Q_c \qquad \eta = e = \frac{L}{Q_a} = \frac{Q_a - Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$$

### Osservazioni

- Il **primo principio della termodinamica** non pone alcuna limitazione sul calore ceduto ( $Q_c$ ) per cui potrebbe benissimo essere  $Q_c = 0$  e  $\eta = 1$ . Ma l'esperienza mostra che nessuna macchina termica può avere  $\eta = 1$ . Questa limitazione deriva dal **secondo principio della termodinamica**.
- Le **macchine termiche reali** non rispondono alla definizione da noi data di **macchina termica ideale**. Noi faremo riferimento soltanto a **macchine termiche ideali** dove il fluido che lavora ciclicamente è un **fluido omogeneo di cui è nota l'equazione di stato**.
- Quando una **macchina termica** opera in modo che come risultato finale viene prodotto lavoro sull'ambiente esterno si dice che opera a **ciclo motore**, in caso contrario opera a **ciclo inverso** (o a **ciclo resistente** o a **ciclo refrigerante**).
- Le **macchine termiche** si schematizzano come in figura, dove si indicano due sole sorgenti: la **caldaia** a temperatura  $T_2$  ed il **refrigerante** a temperatura  $T_1 < T_2$ . Le macchine termiche operanti tra due sole sorgenti sono dette **macchine di Carnot**.



Il calore assorbito dalla **macchina termica** va considerato **positivo**, quello ceduto va considerato **negativo**, sicché il calore scambiato durante l'intero ciclo è:

$$\sum Q_i = Q_2 + Q_1 = |Q_2| - |Q_1|$$

Il lavoro compiuto dalla **macchina termica** è **positivo** se compiuto sull'ambiente esterno, è **negativo** se è compiuto dall'ambiente esterno sulla macchina termica.

### La possibilità di trasformazione dell'energia ed il primo principio della termodinamica

- Il **primo principio della termodinamica** non pone alcuna limitazione alla possibilità di trasformazione dell'energia. Non essendo altro che l'enunciato del **principio di conservazione dell'energia** nella sua forma più generale esso stabilisce soltanto che quando viene convertito lavoro in calore o calore in lavoro questo deve avvenire in quantità assolutamente equivalenti. Nessuna restrizione viene posta alla possibilità di convertire energia meccanica in energia termica o calore in lavoro, imponendosi soltanto che l'**energia totale** venga conservata nel processo.

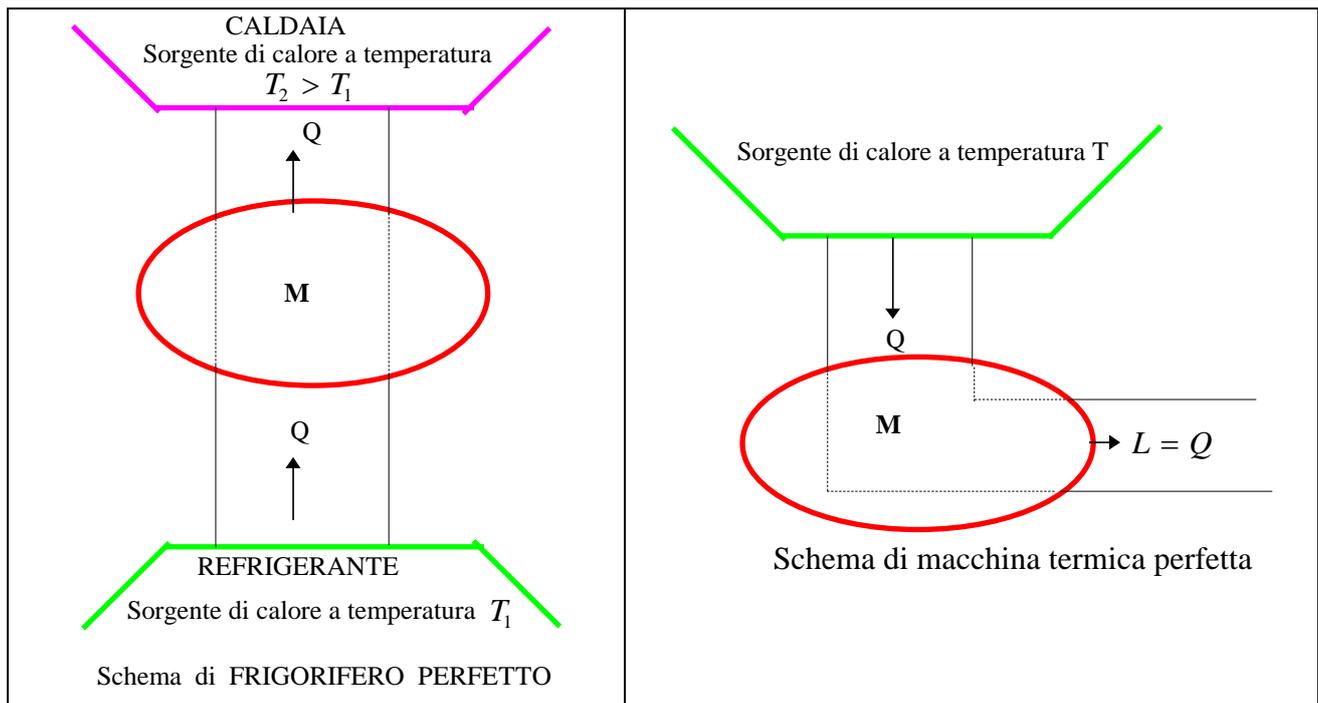
$\sum Q_i = Q_2 + Q_1 = |Q_2| - |Q_1|$  Se tenessimo conto solo del primo principio della termodinamica, saremmo indotti a ritenere che sono realizzabili un gran numero di processi termodinamici che, in realtà, non possono mai verificarsi.

Per esempio, quando un corpo viene posto a contatto con un altro a temperatura diversa, non accade mai che spontaneamente il corpo caldo diventi più caldo ed il corpo freddo più freddo. Non si è mai riscontrato che spontaneamente il calore si trasferisca da un corpo freddo ad un corpo caldo. Eppure questo processo non viola il primo principio della termodinamica: infatti la quantità di calore persa dal corpo freddo sarebbe uguale a quella assorbita dal corpo caldo ed il bilancio energetico sarebbe in parità.

- Conviene soffermare la nostra attenzione su di un altro processo, quello consistente nella trasformazione di calore in lavoro. Abbiamo visto che è possibile trasformare integralmente in calore una data quantità di energia meccanica e, se facessimo riferimento al solo principio, saremmo indotti a ritenere che anche il processo inverso è totalmente possibile.

Infatti un processo consistente nella trasformazione completa di calore in lavoro non violerebbe il primo principio della termodinamica giacché la conversione avverrebbe in quantità equivalenti. Sebbene sia possibile trasformare completamente una data quantità di lavoro in calore, non è stato mai possibile costruire una macchina termica ciclica in grado di convertire completamente una certa quantità di calore in energia meccanica. Se fosse realizzabile il primo processo potremmo costruire un frigorifero perfetto funzionante secondo lo schema indicato in figura: ad ogni ciclo la macchina termica **M** estrarrebbe dalla sorgente a temperatura  $T_1$  la quantità di calore **Q** che, senza somministrazione alcuna di energia meccanica dall'esterno, trasferirebbe integralmente all'ambiente a temperatura  $T_2$  più elevata. Al termine di ciascun processo la macchina termica si riporterebbe nelle condizioni iniziali.

Se fosse realizzabile il secondo processo potremmo costruire una macchina termica perfetta funzionante secondo lo schema indicato in figura:



Ad ogni ciclo la macchina termica **M** sottrarrebbe alla sorgente a temperatura **T** una quantità di calore **Q** che convertirebbe integralmente nell'energia meccanica **L**. Se una tale macchina termica potesse essere costruita, sarebbe possibile, per esempio, fare muovere una nave sfruttando l'enorme riserva di energia termica presente nel mare.

- Bisogna ribadire che l'esistenza di un **frigorifero perfetto** e di una **macchina termica perfetta** non sono in contrasto con il **primo principio della termodinamica** il quale sancisce unicamente l'impossibilità di un **perpetuum mobile di prima specie**, cioè l'impossibilità di produrre energia dal nulla. Sia l'una che l'altra macchina termica non altererebbero l'energia totale coinvolta nei processi

### Secondo principio della termodinamica

Il **secondo principio della termodinamica** specifica quali processi che non violano il **primo principio della termodinamica** possono effettivamente avvenire in natura. Esso può essere formulato in molti modi diversi, ma tutte le formulazioni sono fra loro equivalenti ed ognuna di esse mette in risalto un aspetto particolare.

#### Enunciato di Kelvin-Planck

E' impossibile costruire una macchina termica che lavorando ciclicamente, trasformi in lavoro il calore assorbito da un'unica sorgente; è sempre necessario cedere ad un'altra sorgente a temperatura più bassa (REFRIGERANTE) una parte del calore assorbito.

Con parole diverse possiamo dire che è impossibile realizzare una trasformazione che abbia come unico risultato quello di convertire integralmente in lavoro il calore assorbito da una sola sorgente.

Il secondo principio della termodinamica nega l'esistenza di una macchina termica perfetta o perpetuum mobile di seconda specie, cioè esclude la possibilità di realizzare un moto perpetuo di seconda specie cioè una macchina termica capace di produrre lavoro assorbendo calore da una sola sorgente.

Una macchina termica reale funziona secondo lo schema della figura. La macchina termica  $M$ , che lavora ciclicamente, sottrae ad ogni ciclo la quantità di calore  $Q_2$  alla sorgente a temperatura  $T_2$  (caldaia) e ne cede una quantità  $Q_1$  ad un'altra sorgente (refrigerante) a temperatura inferiore  $T_1$  e converte in energia meccanica  $L$  una parte del calore ricevuto, precisamente  $Q_2 - Q_1$ .

Per una macchina termica ha particolare importanza il suo rendimento  $\eta$  definito come il rapporto tra il lavoro eseguito dalla macchina termica durante un ciclo ed il calore assorbito dalla caldaia, cioè il rapporto tra la quantità  $Q_2 - Q_1$  effettivamente convertita in energia meccanica e la quantità di calore presa dalla sorgente a temperatura più elevata:

$$\eta = e = \frac{L}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \quad \eta < 1$$

### Enunciato di Clausius

E' impossibile realizzare una macchina termica che, operando ciclicamente, produca come unico risultato un trasferimento di calore da un corpo ad un altro avente una temperatura più elevata.

Con parole diverse possiamo dire che **il calore fluisce spontaneamente dai corpi più caldi a quelli più freddi**, oppure, **è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di fare passare calore dal corpo a temperatura più bassa a quello a temperatura più elevata.**

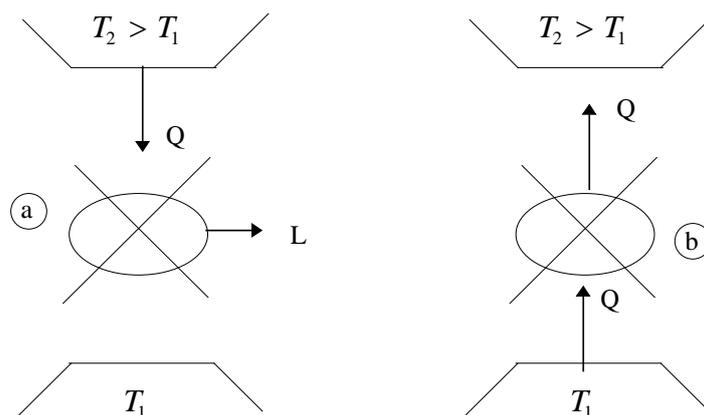
Il **secondo principio della termodinamica** nega la possibilità di costruire un **frigorifero perfetto**, cioè una macchina termica capace di trasferire calore da un refrigerante ad una caldaia senza bisogno di lavoro esterno.

L'**equivalenza** fra le due formulazioni del **secondo principio della termodinamica**, quella di lord Kelvin (cioè **Thomson**) e quella di **Clausius**, si può dimostrare facendo vedere che, se una delle due formulazioni è falsa, risulta falsa anche l'altra.

Si dimostra che per una macchina termica operante reversibilmente fra le temperature assolute  $T_1$  e

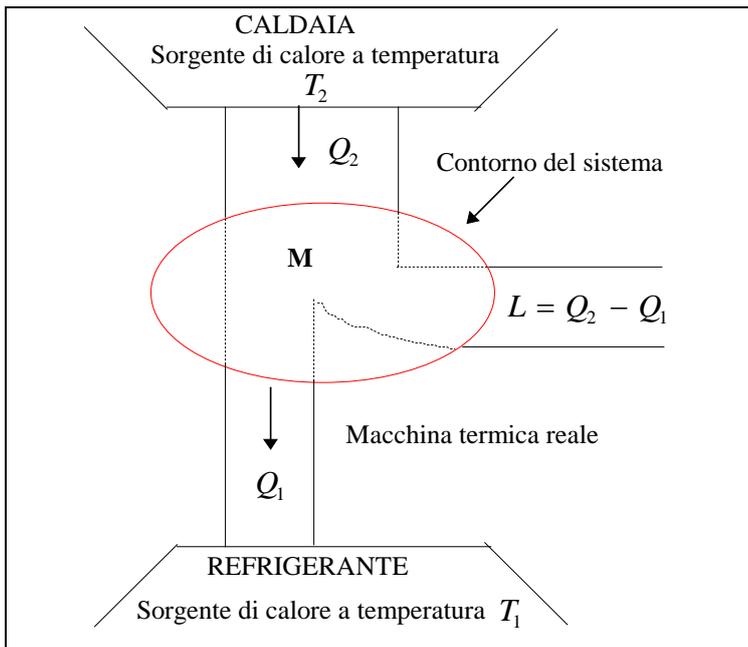
$T_2$  il rendimento risulta:  $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$  e quindi :

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \quad \text{ed anche:} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$



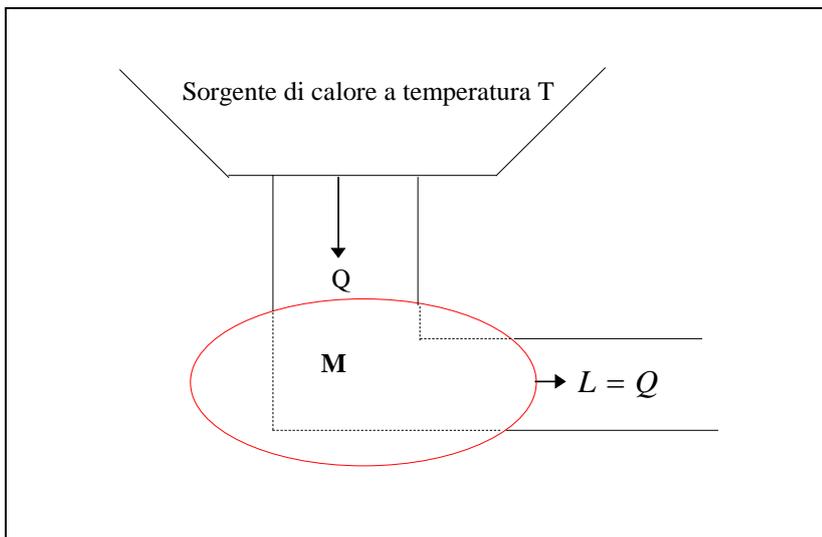
Secondo principio della termodinamica :

(a) Postulato di Kelvin (b) Postulato di Clausius



Schema di **macchina termica reale**:

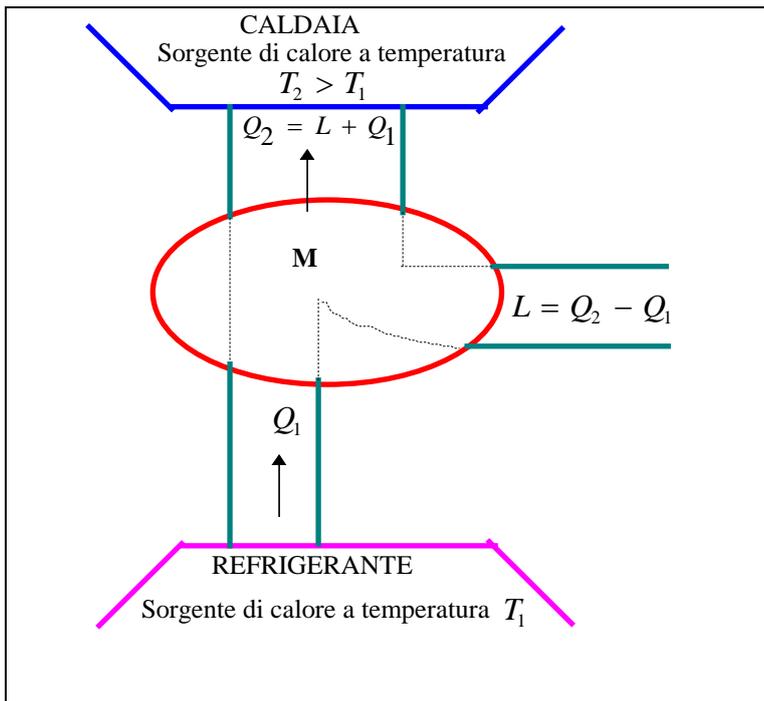
il fluido operante nella **macchina termica** M riceve calore da una sorgente a temperatura  $T_2$  e cede ad una sorgente a temperatura  $T_1 < T_2$  una quantità di calore  $Q_1 < Q_2$  compiendo in ogni ciclo un lavoro esterno  $L = Q_2 - Q_1$



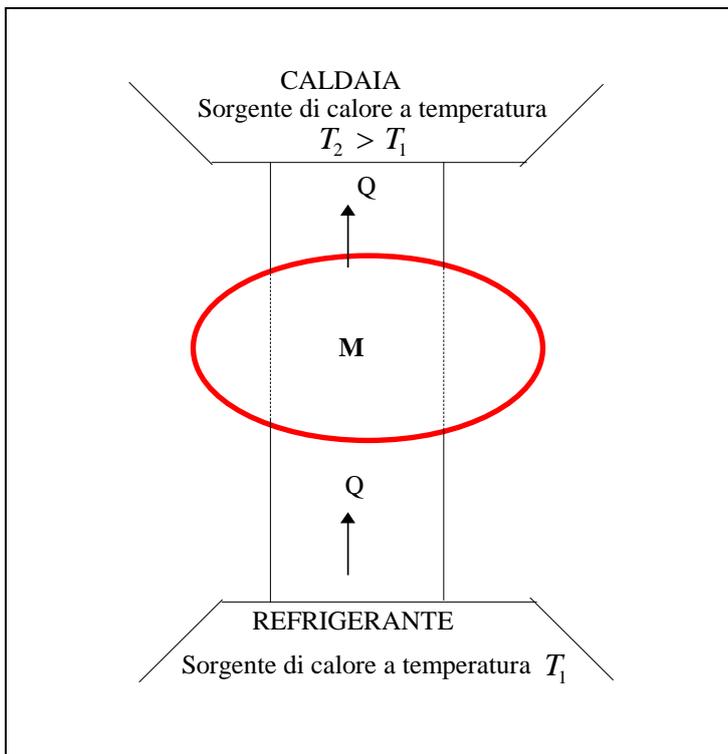
**Macchina termica perfetta**

o

**perpetuum mobile di seconda specie**



Schema di **macchina frigorifera reale**:  
 il fluido operante nella **macchina termica M** estrae dalla sorgente fredda a temperatura  $T_1$  (**cella frigorifera**) la quantità di calore  $Q_1$  e cede alla sorgente calda  $T_2 > T_1$  la quantità di calore  $Q_2 > Q_1$  assorbendo contemporaneamente dall'ambiente esterno un lavoro pari a  $L = Q_2 - Q_1$



a) in un **frigorifero reale** è necessario fornire lavoro **L** dall'ambiente esterno **per trasferire del calore**  $Q_1$  dal refrigerante alla caldaia.

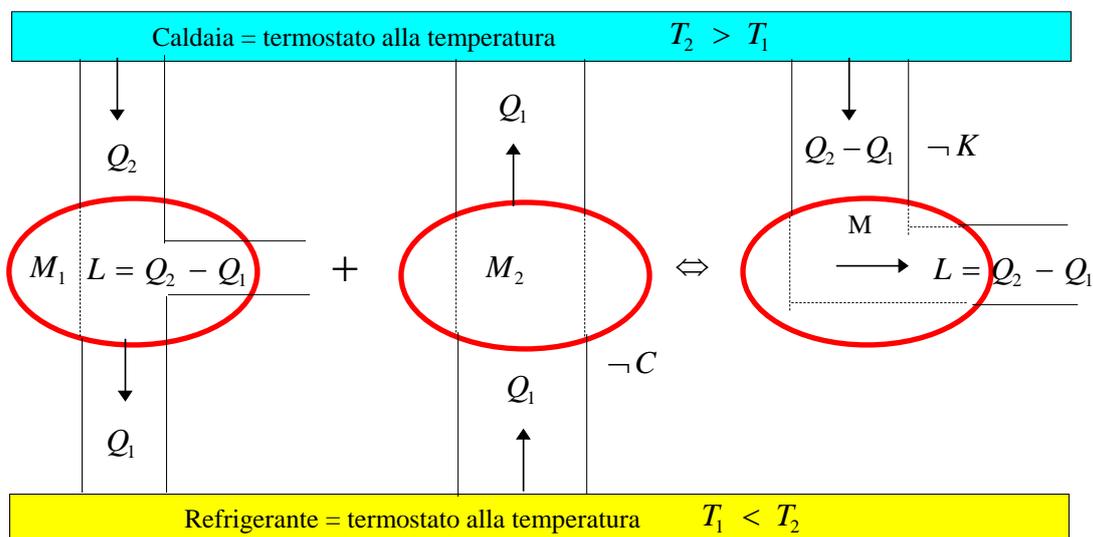
b) In un **frigorifero perfetto** il calore **Q** fluirebbe dal refrigerante alla caldaia senza bisogno di lavoro esterno

## Equivalenza degli enunciati di Kelvin e di Clausius

Gli enunciati di Kelvin e di Clausius sono entrambi enunciati del **secondo principio della termodinamica**. Essi sono diversi soltanto nella formulazione mentre nella sostanza sono **equivalenti** e quindi o sono entrambi veri o sono entrambi falsi. Quindi la verità di uno dei due enunciati implica la verità dell'altro enunciato oppure la falsità di uno dei due implica la falsità dell'altro.

**K** = verità del postulato di Kelvin     $\neg K$  = falsità del postulato di Kelvin

**C** = verità del postulato di Clausius     $\neg C$  = falsità del postulato di Clausius



**Adesso dalla falsità del postulato di Clausius deduciamo la falsità del postulato di Kelvin dimostrando così che i postulati di Clausius e di Kelvin sono equivalenti**

$$\neg C \Rightarrow \neg K \text{ e quindi } C \equiv K$$

Considera una macchina termica ciclica  $M_1$  che assorbe la quantità di calore  $Q_2$  dalla sorgente calda cedendo la quantità di calore  $Q_c$  alla sorgente fredda e trasformando la differenza in lavoro esterno  $L = Q_2 - Q_1$ . Supponiamo ora che ci sia una seconda macchina termica  $M_2$  che operi tra le medesime sorgenti. Se non fosse valido l'enunciato di Clausius  $M_2$  potrebbe essere un **frigorifero perfetto** che porta la quantità di calore  $Q_c$  dal refrigerante  $T_1$  alla caldaia  $T_2 > T_1$ . La combinazione delle macchine  $M_1$  ed  $M_2$  sarebbe la **macchina termica perfetta M** che trasforma il calore  $Q_2 - Q_1$  in lavoro.

L'effetto complessivo della macchina termica reale  $M_1$  e del frigorifero perfetto  $M_2$  (che è la negazione del postulato di Clausius) è una macchina termica perfetta che è la negazione del postulato di Kelvin.

$$M_1 + M_2 \Leftrightarrow M$$

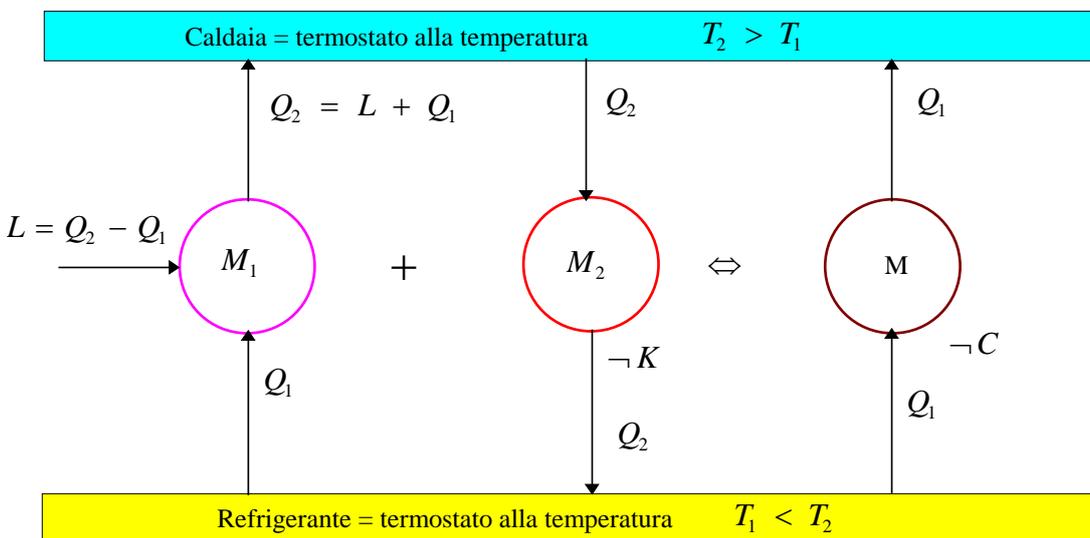
$$M_1 = \text{macchina termica reale} \quad M_2 = \text{frigorifero perfetto} = \neg C$$

$$M = \text{macchina termica perfetta} = \neg K$$

**Dimostriamo che se il postulato di Kelvin non è vero allora anche il postulato di Clausius è falso.**

Consideriamo un **frigorifero reale**  $M_1$  che assorbe la quantità di calore  $Q_c$  dal refrigerante a temperatura  $T_1 < T_2$  e tramite il lavoro esterno  $L = Q_2 - Q_1$  ( $Q_2 = Q_1 + L$ ) cede alla caldaia a temperatura  $T_2 > T_1$  la quantità di calore  $Q_2 = Q_1 + L$ .

Supponiamo che ci sia una seconda macchina termica  $M_2$  che operi tra le medesime sorgenti. Se non fosse valido il **postulato di Kelvin** potrebbe essere una **macchina termica perfetta** che porta la quantità di calore  $Q_2$  dalla caldaia al refrigerante. La combinazione del frigorifero  $M_1$  e della macchina termica perfetta  $M_2$  ( $\neg K$ ) è il **frigorifero perfetto**  $M$  ( $\neg C$ ) che porta il calore  $Q_c$  dalla sorgente fredda alla sorgente calda.

$$M_1 + M_2 \Leftrightarrow M$$


$$M_1 = \text{frigorifero reale} \quad M_2 = \text{macchina termica perfetta} = \neg K$$

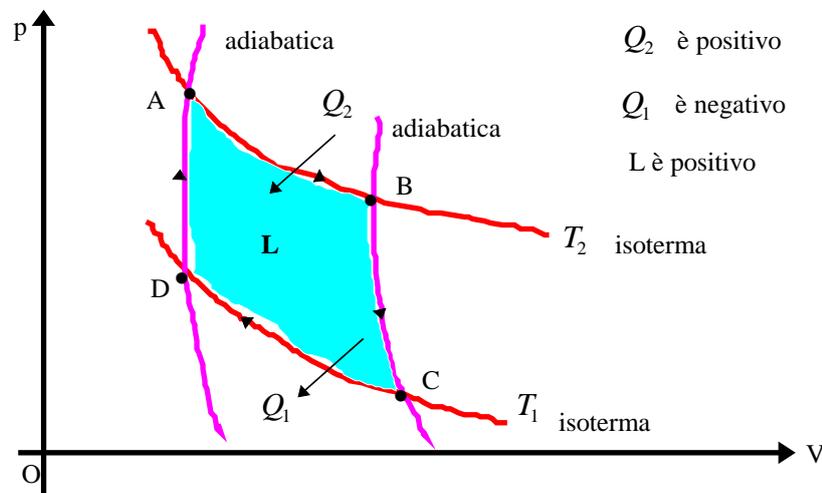
$$M = \text{frigorifero perfetto} = \neg C$$

**Sorgente di calore** in una trasformazione termodinamica è un qualsiasi corpo capace di assorbire o cedere calore senza che la sua temperatura vari.

### Ciclo di Carnot

Nella definizione di macchina termica abbiamo detto che essa deve operare tra  $n \geq 2$  sorgenti. Non possiamo avere  $n = 1$  sorgenti in quanto il postulato di **Kelvin** ce lo vieta. Resta allora il caso più semplice, cioè  $n = 2$ . Come deve operare questa macchina più semplice di tutte le altre ?

Nel piano di **Clapeyron** (piano  $pV$ ) le due sorgenti sono rappresentate da due **isoterme reversibili**. Ora se vogliamo chiudere il ciclo e se vogliamo che non avvengano scambi con altre sorgenti è evidente che dobbiamo prendere in considerazione solo due **adiabatiche reversibili**. E' questa la macchina studiata da Carnot e le cui proprietà sono fondamentali: gli scambi di calore con le sorgenti avvengono durante le **isoterme**, mentre le due **adiabatiche** sono necessarie per portare il sistema da una temperatura all'altra. Il sistema termodinamico che opera può essere qualsiasi: un gas perfetto, un gas reale, un filo estensibile, una pila Daniel, ... E' evidente che il caso più semplice da trattare sarà quello dal **gas perfetto** anche se le proprietà fondamentali della macchina di Carnot non dipendono dal fluido.

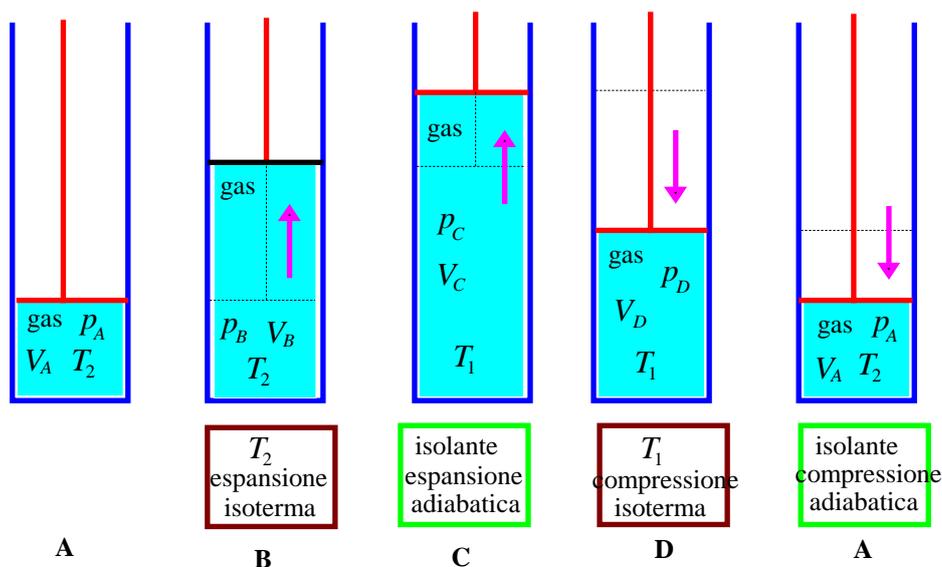


Il **ciclo di Carnot** costituisce lo schema più semplice di **macchina termica**. Il sistema che compie il ciclo è in generale del tutto arbitrario ma noi, per semplicità, lo considereremo un gas perfetto.

Il **ciclo di Carnot** è composto da due trasformazioni isoterme e due adiabatiche. Consideriamo un **gas perfetto** i cui stati fisici possono essere rappresentati nel **piano di Clapeyron**  $Vp$  e prendiamo in considerazione due **adiabatiche** e due **isoterme**

rispettivamente alle temperature  $T_1$  e  $T_2 > T_1$ , Queste 4 curve si intersecano nei 4 punti **A, B, C, D** come indicato in figura. Siano  $AB$  e  $CD$  i due rami di isoterma rispettivamente alle temperature  $T_2$  e  $T_1$ . La trasformazione reversibile ciclica  $ABCD$  prende il nome di **ciclo di Carnot**.

Diciamo **diretto** il funzionamento per cui il ciclo è percorso in **senso orario**, e quindi si produce un **lavoro positivo**. Questo lavoro è rappresentato dall'area colorata. Nel caso più comune, nel quale l'espansione adiabatica  $BC$  produce un raffreddamento, la isoterma  $T_2$  viene compiuta con somministrazione di calore ed aumento di volume.  $Q_2$  viene somministrato al **S.T.** dalla sorgente più calda,  $Q_c$  viene ceduto al refrigerante dal **S.T.**. Per il **primo principio della termodinamica** la differenza  $Q_2 - Q_1$  equivale al lavoro **L** ottenuto ed è quindi positivo. Nel funzionamento inverso si spende **lavoro** ( $L < 0$ ) e si invertono gli scambi di calore. Il seguente esempio illustra come si possa realizzare nella pratica un **ciclo di Carnot**.



Poniamo il nostro gas perfetto in un recipiente cilindrico a pareti laterali termicamente isolanti e con un pistone ad un estremo, pure termicamente isolante, in modo che il calore possa essere scambiato solo attraverso l'altro estremo (la base del cilindro), che supporremo conduttore di calore. Siano  $T_1$  e  $T_2 > T_1$  due sorgenti di calore così grandi che le loro temperature non variano quando esse cedono oppure assorbono qualunque quantità finita di calore. Inizialmente il gas sia alla temperatura  $T_2$ , abbia pressione  $p_A$  ed occupi il volume  $V_A$ . Sia **A** il corrispondente punto rappresentativo nel piano di Clapeyron dello stato fisico del gas perfetto. Se poniamo il cilindro sulla sorgente  $T_2$  tra gas e sorgente non ha luogo scambio di calore. Mantenendo il cilindro sulla sorgente  $T_2$ , alziamo il pistone molto lentamente in modo da aumentare reversibilmente il volume fino a raggiungere il valore  $V_B$ .

Poniamo ora il cilindro sopra un isolante termico ed aumentiamone il volume molto lentamente fino a raggiungere il valore  $V_C$ . Poiché durante questa fase il sistema è isolato termicamente, la trasformazione è rappresentata dal tratto di adiabatica  $BC$ . Durante questa espansione adiabatica, la temperatura del gas diminuisce passando dal valore  $T_2$  al valore  $T_1$  e lo stato fisico del gas è ora rappresentato nel piano di Clapeyron dal punto  $C$ . Indi poniamo il cilindro sulla sorgente  $T_1$  e comprimiamolo molto lentamente lungo l'isoterma  $CD$ , finché il suo volume diminuisca fino a raggiungere il valore  $V_D$ . Lo stato termodinamico del gas è ora rappresentato dal punto  $D$ . Infine torniamo a metterlo sopra l'isolante termico e comprimiamolo adiabaticamente lungo il ramo  $DA$  fino a quando la sua temperatura raggiunge il valore  $T_2$ . Il S.T. è tornato al suo stato iniziale rappresentato dal punto  $A$ .

Durante l'espansione isoterma, rappresentata dal ramo  $AB$ , il S.T. assorbe la quantità di calore  $Q_2$  dalla sorgente  $T_2$ . Durante la compressione isoterma, rappresentata dal ramo  $CD$ , il gas cede alla sorgente  $T_1$  la quantità di calore  $Q_1$ . La quantità totale di calore assorbito dal gas durante il ciclo è data da  $Q_2 - Q_1$ . Sia  $L$  il lavoro fatto dal gas durante la trasformazione. Questo lavoro è uguale all'area delimitata dal ciclo. Essendo  $\Delta U = 0$  il primo principio della termodinamica diventa:  $L = Q_2 - Q_1$

Questa equazione ci dice che solo una parte del calore assorbito dal gas si trasforma in lavoro. Il calore rimanente  $Q_1$  viene restituito alla sorgente più fredda; diciamo anche che la quantità di calore

$Q_1$  si è degradata. 
$$\eta = e = \frac{L}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

Il ciclo di Carnot serve a fare vedere che il calore assorbito da una sorgente non può essere trasformato completamente in lavoro meccanico. In generale una parte consistente di esso si degrada, cioè diventa calore a temperatura più bassa.

### Calcolo del rendimento in un ciclo di Carnot

Per il ciclo di Carnot abbiamo visto che risulta: 
$$\eta = e = \frac{L}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

Si dimostra che risulta: 
$$\eta = e = \frac{L}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad [1]$$

Dimostrazione della formula [1]

$Q_2 = Q_{AB} = L_{AB} =$  primo principio della termodinamica  $\Delta U_{AB} = 0$   $Q_2 = nRT_2 \cdot \ln \frac{V_B}{V_A}$

$$|Q_1| = |Q_{CD}| = |L_{CD}| = nRT_1 \cdot \ln \frac{V_C}{V_D} \quad \Delta U_{CD} = 0 \quad |Q_1| = nRT_1 \cdot \ln \frac{V_C}{V_D}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} = 1 - \frac{nRT_1 \cdot \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_2 \cdot \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\ln \frac{V_C}{V_D}}{\ln \frac{V_B}{V_A}}$$

Adesso dimostriamo che risulta  $\ln \frac{V_C}{V_D} = \ln \frac{V_B}{V_A}$  e quindi:  $\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

Applicando le equazioni di Poisson alle trasformazioni adiabatiche  $BC$  e  $AD$  abbiamo:

$$T_2 \cdot V_B^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_C^{\gamma-1} \quad T_2 \cdot V_A^{\gamma-1} = T_1 \cdot V_D^{\gamma-1} \quad \text{Dividendo membro a membro otteniamo:}$$

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \Rightarrow \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{V_C}{V_D}$$

**Teorema di Carnot:** Nessuna macchina termica ideale può avere un rendimento maggiore della macchina di Carnot operante tra le stesse temperature, ovvero il rendimento dipende soltanto dalla temperatura della caldaia e dalla temperatura del refrigerante.

**Rendimento di una macchina termica ideale:** Tutte le macchine termiche ideali reversibili che lavorano tra due sorgenti uguali devono avere lo stesso rendimento

$$\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

**Teorema di Carnot generalizzato:** Il rendimento di una macchina termica reversibile che scambia calore con più di due sorgenti a diverse temperature è sempre minore del rendimento della macchina termica di Carnot che funziona tra le due temperature estreme.

### Teorema di Carnot per macchine reversibili

Tutte le macchine reversibili che lavorano tra due sorgenti aventi rispettivamente temperature  $T_1$  e  $T_2$  hanno lo stesso rendimento.

### Teorema di Carnot per le macchine reali

Il rendimento  $\eta_X$  di una qualsiasi macchina termica reale  $X$  che lavora tra due sorgenti di calore aventi rispettivamente temperature  $T_1$  e  $T_2$  è sempre minore del rendimento  $\eta_R$  della macchina termica reversibile di Carnot  $R$  operante tra le stesse sorgenti:  $\eta_X < \eta_R$

### Teorema di Carnot in generale

Date due sorgenti rispettivamente a temperature  $T_1$  e  $T_2 > T_1$ , una macchina termica  $\mathbf{X}$  qualunque funzionante fra tali temperature avrà rendimento  $\eta_X$  **minore o uguale** al rendimento  $\eta_R$  della macchina termica reversibile di Carnot  $\mathbf{R}$ ; il segno di uguale valendo se la macchina termica  $\mathbf{X}$  considerata è anch'essa reversibile.

$$\eta_X \leq \eta_R = \frac{L}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Il rendimento di una macchina termica aumenta col crescere della differenza di temperatura tra le due sorgenti con cui si scambia il calore.

Ad esempio, una macchina termica che assorbe calore da una caldaia a  $1500^\circ K$  e cede calore all'ambiente a  $300^\circ K$  può avere un rendimento massimo, se è realizzata in maniera da avvicinarsi

molto ad una macchina reversibile:

$$\eta = \frac{1500 - 300}{1500} = \frac{4}{5} = 80\%$$

Una macchina che utilizzasse la differenza di temperatura tra la superficie ed il fondo del mare ( $20^\circ C$  e  $4^\circ C$ ) avrebbe un rendimento massimo:

$$\eta = \frac{393 - 377}{393} = 4\%$$

Per di più, a causa dell'irreversibilità delle macchine reali, il rendimento realmente ottenibile è ancora più basso.

Concludendo possiamo affermare che il **rendimento di tutte le macchine reversibili che operano fra due stesse temperature è il medesimo e nessuna macchina irreversibile che lavori fra le stesse temperature può avere un rendimento maggiore.**

Clausius e Kelvin dimostrarono che questo teorema era una conseguenza necessaria del secondo principio della termodinamica. Si noti che nulla è detto circa la sostanza operante, cosicché il rendimento di una macchina termica reversibile è indipendente da tale sostanza e dipende soltanto dalle temperature dei termostati. Inoltre una macchina reversibile opera con il massimo rendimento possibile tra queste due temperature.