Unità Didattica N°22

Il potenziale elettrico

Lavoro compiuto dalla forza elettrostatica

Una proprietà fondamentale del campo elettrostatico è quella di essere **conservativo**. Come sappiamo dalla meccanica questo significa che il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico su una carica q quando questa passa dalla posizione iniziale A alla posizione finale B non dipende dal cammino percorso ma solo dalla posizione iniziale e finale. Dire che il campo $\vec{E}$ è **conservativo** (o anche che le forze $\vec{F}$ del campo elettrostatico sono **conservative**) significa affermare che se una carica q si sposta da una posizione iniziale A ad una posizione finale B (per effetto delle forze $\vec{F}$ del campo o per effetto di una forza esterna $\vec{F}_e$) il lavoro compiuto dalle forze del campo sulla carica q non dipende dal cammino che la carica segue per andare dalla posizione **A** alla posizione **B**. Questa affermazione è vera per qualsiasi distribuzione di cariche che genera il campo ma noi ci limiteremo a dimostrarla solo in alcuni casi semplici.

1) Dimostriamo quanto detto nel caso di un campo uniforme

Un **campo elettrostatico** si dice **uniforme** quando il vettore $\vec{E}$ è lo stesso in tutti i punti del campo, cioè quando la direzione, il verso ed il modulo di $\vec{E}$ sono gli stessi in tutti i punti del campo. In un **campo uniforme** le linee di forza (o meglio le linee di campo) sono segmenti paralleli, equiversi ed ugualmente distanziati. In ogni punto del campo una stessa carica q è soggetta alla stessa forza $\vec{F}$. Questo campo elettrico viene normalmente ottenuto mediante due lastre metalliche, piane e parallele, poste ad una distanza d, sulle quali è presente una distribuzione di cariche identica ma di segno opposto. Un simile dispositivo prende il nome di **condensatore piano**.[1]

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F} = q\vec{E}$ quando la carica q passa dalla posizione iniziale A a quella finale C attraverso il percorso ABC.

$$L_{ABC}\left(\vec{F}=q\vec{E}\right)=L_{AB}\left(\vec{F}\right)+L_{BC}\left(\vec{F}\right)=\vec{F}\times\overrightarrow{AB}+\vec{F}\times\overrightarrow{BC}=F\cdot\overline{AB}\cdot\cos 0=F\cdot\overline{AB}=F\cdot h=qEh$$

---

[1] E' bene sottolineare che sono conservativi i *campi elettrostatici*, ossia quelli dovuti a cariche elettriche in quiete. Vedremo in seguito che i **campi elettrici variabili nel tempo** e dovuti a cariche elettriche in movimento **non sono conservativi** .

$\vec{F} \times \vec{BC} = 0$ in quanto i **vettori** $\vec{F}$ e $\vec{BC}$ sono fra loro **perpendicolari**.

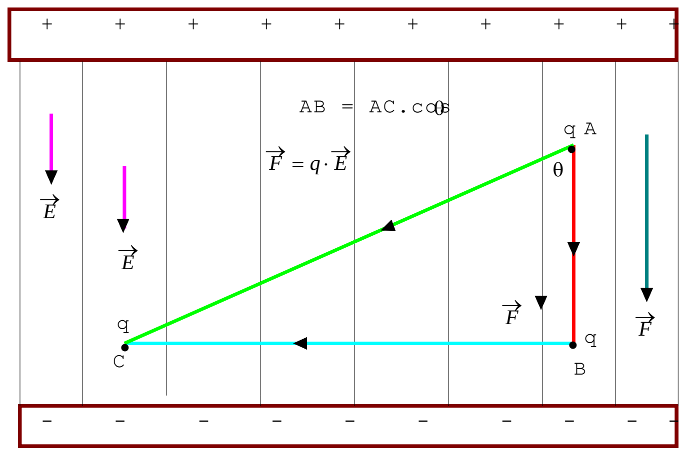
Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F} = q\vec{E}$ quando la carica q passa dalla posizione **A** alla posizione **C** attraverso il percorso rettilineo AC.

$$L_{AC}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \times \vec{AC} = F.\overline{AC}.\cos\theta = F.AB = F.h = qEh$$

Quindi $$L_{AC}\left(\vec{F}\right) = L_{ABC}\left(\vec{F}\right) = L_{\gamma}\left(\vec{F}\right)$$

dove γ è un percorso qualsiasi che congiunge la posizione iniziale A con la posizione finale C .

Linee di campo del **campo elettrostatico uniforme** prodotto da due piastre conduttrici parallele cariche di segno opposto. Nello spazio compreso fra le piastre le **Linee di campo** sono segmenti paralleli, equiversi ed equidistanti.



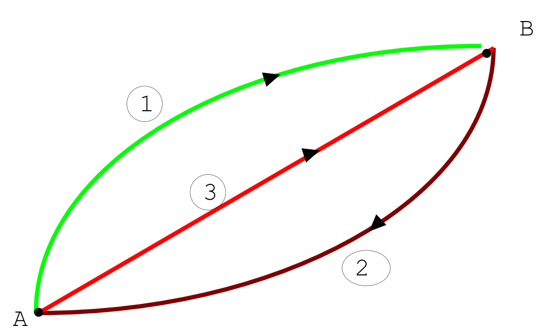
Tutte le forze che godono di questa proprietà sono dette **forze conservative**. Sono **forze conservative**: **1)** le **forze gravitazionali** **2)** le **forze elettrostatiche** **3)** le *forze elastiche* cioè le forze del tipo $\vec{F} = -k\vec{s}$.

Se le forze sono conservative allora:

$L_{AB}\left(\vec{F}\right) = -\, L_{BA}\left(\vec{F}\right)$, $L_{AB}\left(\vec{F}\right) + L_{BA}\left(\vec{F}\right) = 0$,

$L_{(1)}\left(\vec{F}\right) + L_{(2)}\left(\vec{F}\right) = 0$, $L_{A(1)B(2)A}\left(\vec{F}\right) = 0$ cioè

il lavoro di $\vec{F}$ lungo un **percorso chiuso è nullo**.



Viceversa, se il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo, allora la forza $\vec{F}$ è una **forza conservativa**

.

Energia potenziale elettrostatica

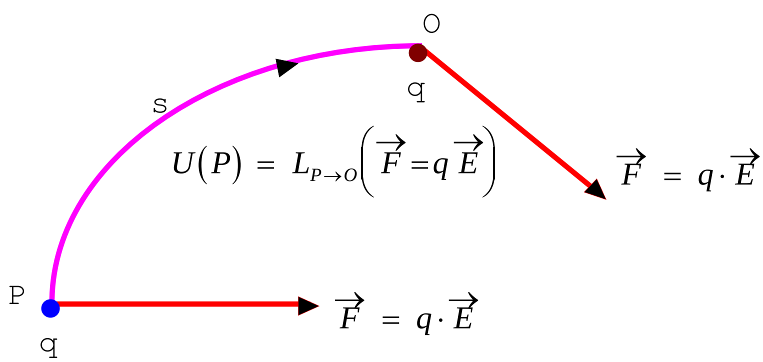
Il **campo elettrostatico** (cioè il campo elettrico creato da cariche elettriche in quiete) **è conservativo**. Per esso valgono le stesse considerazioni già fatte per il campo gravitazionale. Il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico su una carica elettrica q dipende soltanto dalla posizione iniziale e finale della carica e non dal particolare percorso seguito dalla carica. In forma equivalente possiamo dire che il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico lungo un percorso chiuso è nullo. Sia **q** una *carica di prova* positiva (ma potrebbe essere negativa) posta in un punto **P** di un campo elettrostatico $\vec{E}$ creato da una distribuzione qualsiasi di cariche elettriche. Sia **O** un punto qualsiasi del campo elettrostatico ed $\vec{F} = q\vec{E}$ la forza elettrostatica del campo che agisce su **q**. La carica di prova puntiforme **q** sia tale da risentire dell'azione del campo $\vec{E}$ ma non sia in grado di alterare in maniera sensibile il campo preesistente. Se spostiamo (anche solo idealmente) la carica **q**, attraverso un percorso arbitrario s, dalla posizione **P** alla posizione **O**, la forza conservativa $\vec{F}$ compie il lavoro $L_{P\to O}\left(\vec{F}\right) = L_{P\to O}\left(q\vec{E}\right)$ che dicesi **energia potenziale** della carica **q** posta nel punto **P** del campo elettrostatico quando assumiamo **0** come **stato di riferimento** o **posizione zero** dell'energia potenziale.

Pertanto definiamo **energia potenziale** (e la indichiamo col simbolo $U(P) = U_P$) di una carica **q**, posta in un punto **P** del campo $\vec{E}$, il lavoro che le forze del campo elettrostatico compiono quando la carica q si sposta dal punto **P** alla posizione di riferimento **O** lungo un qualsiasi percorso che congiunge P con O:

$$U(P) = L_{P\to O}\left(\vec{F} = q\vec{E}\right)$$

Il lavoro $L_{P\to O}\left(\vec{F}\right) = L_{P\to O}\left(q\vec{E}\right)$, e quindi l' **energia potenziale U**, dipende dalla scelta del punto di riferimento **O**. Si esprime questa circostanza dicendo che l ' energia potenziale è definita a meno di una costante additiva. Risulta sempre: $U(O) = L_{OO}\left(\vec{F}\right) = 0$

Se la forza conservativa che agisce sulla carica di prova è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, allora è conveniente assumere come **punto di riferimento** (o **posizione zero**) **O** un punto all'infinito (nella pratica a grande distanza dalle cariche che creano il campo $\vec{E}$).



Con questa convenzione si definisce **energia potenziale** della carica q posta nel punto P il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la carica q passa dalla posizione P all'infinito attraverso un percorso qualsiasi. Un'altra convenzione molto usata (soprattutto nella tecnica) è quella di assumere come posizione di riferimento zero un punto qualsiasi della terra. In tal caso tutte le cariche che si trovano sulla terra o si trovano su conduttori collegati con la terra hanno **energia potenziale zero**.

Se il campo $\vec{E}$ è generato dalla carica puntiforme Q abbiamo: $U(P) = U(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\dfrac{Q\cdot q}{r} + C$

Il valore di **C** dipende dalla scelta della posizione di riferimento. Se scegliamo come **posizione zero** un punto all'infinito risulta $C = 0$ e quindi : $U(P) = U(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\dfrac{Q\cdot q}{r}$

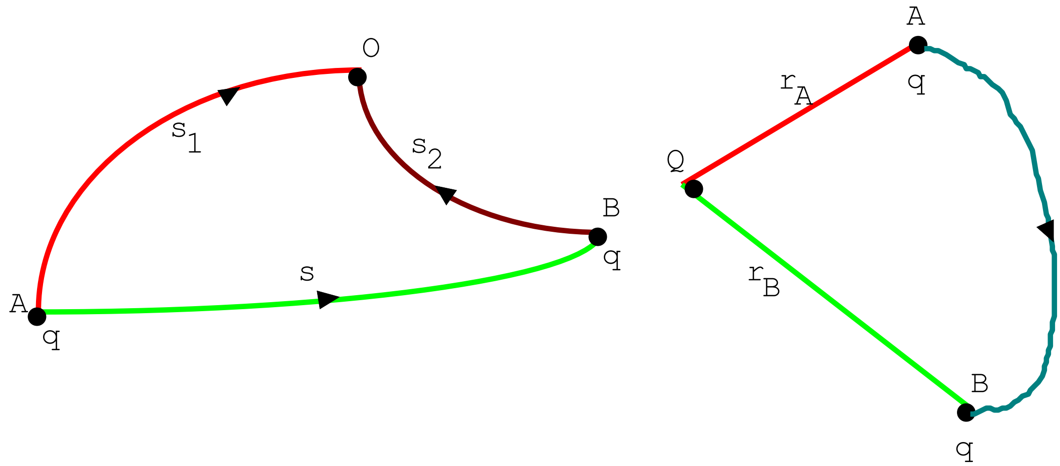
Consideriamo due punti qualsiasi **A** e **B** di un campo elettrostatico $\vec{E}$. In base alla definizione di energia potenziale possiamo scrivere:

$U(A) = L_{A\to O}\left(\vec{F}\right)$, $U(B) = L_{B\to O}\left(\vec{F}\right)$. Poiché risulta $L_{B\to O}\left(\vec{F}\right) = -L_{O\to B}\left(\vec{F}\right)$ abbiamo:

$$U(A) - U(B) = L_{A\to O}\left(\vec{F}\right) - L_{B\to O}\left(\vec{F}\right) = L_{A\to O}\left(\vec{F}\right) + L_{O\to B}\left(\vec{F}\right) = L_{A\to B}\left(\vec{F}\right)$$

$U(A) - U(B)$ rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico quando la carica **q** passa dalla posizione iniziale **A** a quella finale **B** lungo un percorso qualsiasi che unisce i punti A e B. Se indichiamo con U_i (U_f) l'energia potenziale posseduta dalla carica q nella posizione iniziale A (finale B), possiamo scrivere : $L_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = U_i - U_f = -\left(U_f - U_i\right) = -\Delta U$

dove il segno meno sta ad indicare che ad un lavoro positivo delle forze del campo fa riscontro una variazione negativa dell'energia potenziale, e viceversa .



Se il campo $\vec{E}$ è creato da una carica puntiforme **Q** abbiamo: $U(A) - U(B) = \dfrac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right)$

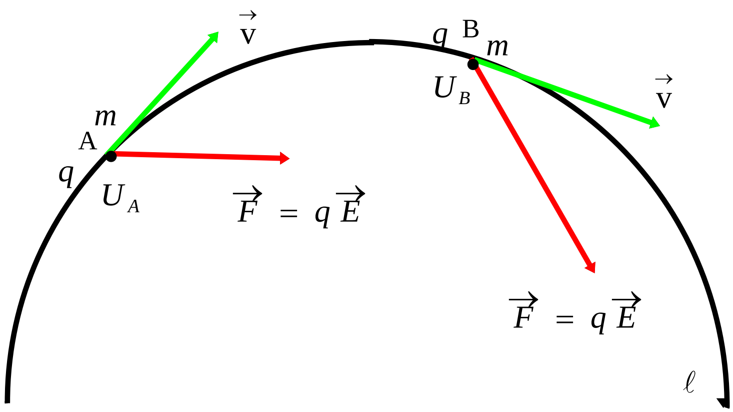
La formula trovata non dipende dalla particolare scelta del riferimento. Infatti, mentre il valore dell'energia potenziale di una carica elettrica dipende dal particolare riferimento che si considera, la differenza di energia potenziale fra due punti qualsiasi ne è del tutto indipendente. Fortunatamente ciò che in pratica interessa è solo la differenza di energia potenziale tra due punti. Supponiamo che una carica elettrica **q** si trovi immersa in campo elettrostatica e sia soggetta alle sole forze del campo. Vogliamo sapere cosa succede alla carica elettrica quando essa si muove all'interno di un campo elettrico e soggetta alle sole forze del campo. Si dice anche che la carica si muove spontaneamente all'interno del campo.

Noi sappiamo che risulta : $\underset{i\to f}{L}(\vec{F} = q\vec{E}) = U_i - U_f$

Quando la carica si muove spontaneamente, cioè quando è soggetta soltanto alle forze del campo elettrostatico, allora risulta: $\underset{i\to f}{L}(\vec{F} = q\vec{E}) > 0 \Rightarrow U_i - U_f > 0 \Rightarrow U_f < U_i$

Una carica elettrica soggetta alle sole forze del campo elettrico si muove lungo le **energie potenziali decrescenti**, cioè si sposta in una posizione a cui corrisponde una **energia potenziale minore**.

La conservazione dell'energia in un campo elettrostatico



Consideriamo una particella di massa **m** e carica elettrica **q** che si muove in un campo elettrostatico con velocità vettoriale $\vec{v}$, descrivendo la traiettoria ℓ. Quando la carica **q** avente massa **m** passa dalla posizione iniziale **A** a quella finale **B** le forze del campo elettrostatico compiono il seguente lavoro:

$$\underset{A\to B}{L(\vec{F} = q\vec{E})} = K_B - K_A = U_A - U_B \qquad U_A + K_A = U_B + K_B = U + K = \text{costante} \quad [\S\S]$$

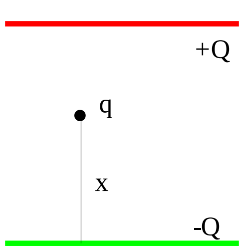
La somma dell'energia cinetica $K = \dfrac{1}{2}m\mathrm{v}^2$ **e dell'energia potenziale elettrica di una carica che si muove all'interno di un campo elettrostatico si mantiene costante.**

Se la carica elettrica **q** si muove all'interno di un campo elettrostatico radiale generato dalla carica **Q** allora la **[§§]** assume la seguente forma : $K + U = \dfrac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\dfrac{Qq}{r} = \text{costante}$

Questa formula esprime il **principio di conservazione dell'energia** all'interno di un campo elettrostatico generato da una carica puntiforme **Q**.

Per un campo elettrostatico generato da una carica radiale **Q** abbiamo :

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Qq}{r} + C \quad \text{Se } O \equiv P_\infty \quad U(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Qq}{r} \qquad U(A) - U(B) = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

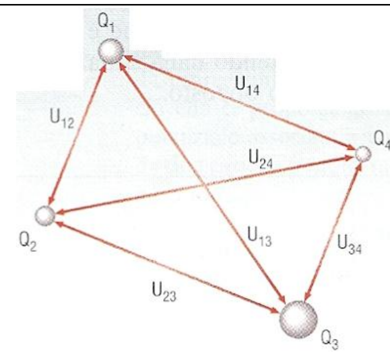


Per un campo uniforme come quello esistente all'interno di un condensatore piano abbiamo: $U(P) = qE\cdot x + C$ oppure $U(P) = qE\cdot x$ se come punto **O** scegliamo un qualsiasi punto dell'armatura negativa del condensatore piano.

Energia potenziale di un sistema formato da n cariche puntiformi

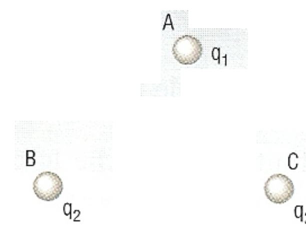
Se sono presenti più cariche elettriche puntiformi, l'energia potenziale del sistema è data dalla somma algebrica delle energie potenziali che si avrebbero scegliendo le cariche a due a due in tutti i modi possibili. Nel caso della figura abbiamo:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$



Tale formula ci dice che l'energia potenziale U del sistema costituito dalle 4 cariche elettriche è uguale al lavoro compiuto dalle forze elettriche quando le cariche del sistema sono infinitamente lontane tra loro. Possiamo anche dire che l'energia potenziale U è uguale al lavoro fatto da una **forza esterna** per costruire il sistema, spostando le cariche elettriche da ferme ed all'infinito fino a portarle nella configurazione voluta.

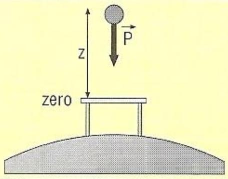
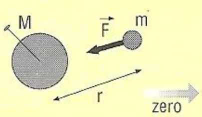
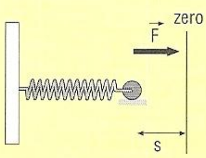
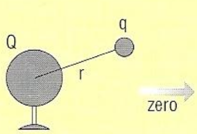
Esempio: Calcolare l'energia potenziale delle tre cariche della figura.



$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q_1 q_2}{AB} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q_2 q_3}{BC} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q_1 q_3}{AC} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\left(\frac{q_1 q_2}{AB} + \frac{q_2 q_3}{BC} + \frac{q_1 q_3}{AC}\right)$$

L'energia potenziale in meccanica e in elettrostatica

	Tipo	Definizione	Espressione matematica	Livello zero	Sistema	Proprietà
	Gravitazionale della forza-peso (cioè vicino alla Terra)	Eguale al lavoro compiuto dalla forza-peso quando un corpo di massa m scende un dislivello z	mgz	Quello nel quale la coordinata z è uguale a zero	Terra + corpo	È tanto più grande quanto maggiore è il dislivello tra la posizione del corpo e il livello scelto come zero
	Gravitazionale di Newton	Eguale al lavoro della forza di gravitazione universale quando una massa è spostata all'infinito tenendo fissa l'altra	$-G\dfrac{mM}{r}$	Quando le masse sono a distanza infinita	Due punti materiali di masse m e M posti alla distanza r	È tanto minore (cioè negativa, con valore assoluto sempre più grande) quanto più le masse sono vicine
	Elastica	Eguale al lavoro della forza elastica per riportare la molla (a cui è attaccato il corpo) nella posizione di equilibrio	$\dfrac{1}{2}ks^2$	Quello nel quale la molla è a riposo ($s = 0$)	Molla di massa trascurabile rispetto a quella del corpo attaccato a una sua estremità	È tanto più grande quanto più la molla è deformata
	Elettrostatica della forza di Coulomb	Eguale al lavoro della forza elettrica quando una carica è spostata all'infinito tenendo fissa l'altra	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{qQ}{r}$	Quando le cariche sono a distanza infinita	Due punti materiali con cariche q e Q posti alla distanza r	Il valore assoluto è tanto maggiore quanto più le cariche sono vicine

Potenziale elettrostatico

In precedenza abbiamo visto che una carica elettrica q posta in un punto P di un campo elettrostatico $\vec{E}$ acquista una energia potenziale **U(P)** il cui valore dipende da $\vec{E}$, dalla carica q e dalla sua posizione. Per caratterizzare i punti di un campo elettrostatico da un *punto di vista energetico* è opportuno introdurre una grandezza fisica che dipenda esclusivamente dalla causa (distribuzione delle cariche) che genera il campo e dal punto considerato, ma non dipenda dalla carica di prova q. Tale nuova grandezza è il potenziale elettrostatico **V** (o ϕ). Si definisce **potenziale elettrostatico** nel punto P di un campo elettrostatico $\vec{E}$ il seguente rapporto:

$$V(P) = \frac{U(P)}{q} = \frac{L_{P\to O}(\vec{F})}{q} = \frac{L_{P\to\infty}(\vec{F})}{q} \qquad \text{con} \qquad \vec{F} = q\cdot\vec{E}$$

Risulta pure :

$$V(A) - V(B) = \frac{U(A)}{q} - \frac{U(B)}{q} = \frac{U(A)-U(B)}{q} = \frac{L_{A\to B}(\vec{F})}{q}$$

$L_{A\to B}(q\vec{E}) = L_{A\to B}(\vec{F}) = q[V(A) - V(B)]$ = lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico quando la **carica di prova q** si sposta dalla posizione iniziale **A** alla posizione finale **B**.

Definizione: La differenza di potenziale $V(A)-V(B)$ fra due punti **A** e **B** di un campo elettrico è uguale al rapporto fra il lavoro compiuto dalla forza del campo su una carica di prova **q** quando questa si sposta da **A** a **B** e la carica **q** stessa.

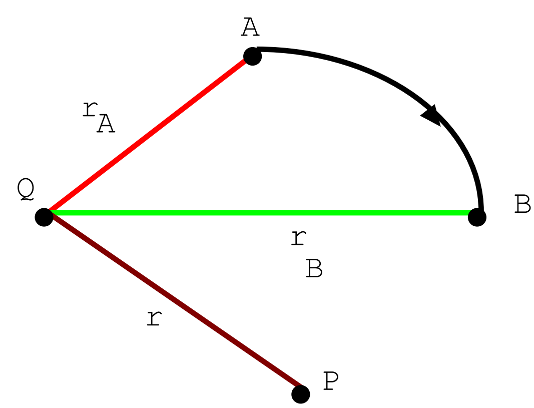
$L_{A\to\infty}(q\vec{E}) = L_{A\to\infty}(\vec{F}) = q[V(A)-V(\infty)] = q\cdot V_A$ = lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico quando la carica **q** passa dalla posizione **A** all'infinto dove il potenziale vale zero per convenzione.

Se scegliamo come riferimento un punto all'**infinito**, si dimostra che il potenziale elettrostatico in un punto P distante r dalla carica Q che genera il campo $\vec{E}$ vale:

$V(P) = V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{r}$ mentre $V(A)-V(B) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$

$$[V] = \frac{[L]}{[q]} = \frac{[L^2.M.T^{-2}]}{[T.I]} = [L^2.M.T^{-2}.I^{-3}]$$

$$\{V\} = volt = V = \frac{\{L\}}{\{q\}} = \frac{joule}{coulomb} \qquad 1V = \frac{1J}{1C}$$



L'**unità di misura** del potenziale è il **Volt**.

Tra due punti A e B esiste la d.d.p. di 1 volt se le forze del campo elettrostatico compiono il lavoro di un joule quando un coulomb di elettricità passa dalla posizione A alla posizione B.

In un punto P di un campo elettrostatico esiste il **potenziale di un volt** se le forze del campo elettrostatico compiono il lavoro di un joule quando un coulomb di elettricità passa dal punto P al punto di riferimento O (o T). Se il campo è generato da più cariche puntiformi Q_1, Q_2, Q_3, abbiamo. $V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{Q_1}{r_1}+\frac{Q_2}{r_2}+\frac{Q_3}{r_3}+\cdots\right)$

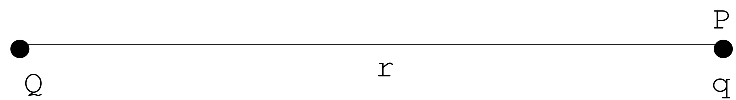
<<**Calcolare l'energia potenziale di una carica q posta alla distanza r da una carica Q.**>>

$L_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot Q\cdot q\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$, se $r_B = \infty$ $\left(\frac{1}{r_B}=0\right)$ se $r_A = r$ abbiamo :

$$U(A) = L_{A\to\infty}\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q\cdot q}{r}$$

<< Calcolare il *potenziale* in un punto **P** distante r da una carica **Q**>>

Colloco nel punto P la carica di prova **q**.



$$V(P) = \frac{L_{P\to\infty}\left(\vec{F}=q\,\vec{E}\right)}{q} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Qq}{r}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{r}$$

Osservazione N°1: In meccanica ha maggiore importanza l'energia potenziale, in elettrologia ha maggiore importanza il potenziale.

Osservazione N°2: Nel S.I. il volt è definito tenendo presente la legge:

$$\Delta V = \frac{W}{i} \quad \text{e quindi : } \{V\} = \frac{\{W\}}{\{i\}} = volt = \frac{watt}{ampere} \quad \text{cioè:}$$

Il **volt** è la d.d.p. esistente tra due sezioni di un filo conduttore percorso dalla corrente continua costante di 1 ampere, quando la potenza dissipata nel tratto considerato è di 1 watt (senza che nel conduttore avvengano fenomeni energetici oltre all'effetto Joule)

Osservazione N°3: In funzione del volt possiamo definire una nuova unità di misura del lavoro, usata soprattutto nei problemi di fisica atomica, l'elettronvolt (simbolo **eV**). $1eV$ è il lavoro compiuto dalla forza del campo elettrico su un elettrone che si sposta da un punto **A** ad un punto **B** fra i quali esista una **d.d.p.** di $1V$. Risulta: $1eV = 1,602\cdot 10^{-19}\, J$

Potenziale e moto delle cariche elettriche

Una carica elettrica positiva q, immersa in un campo elettrostatico $\vec{E}$ comunque creato, si sposta spontaneamente dai punti a potenziale più elevato a quelli a potenziale più basso, cioè si sposta lungo i **potenziali decrescenti**.

DIMOSTRAZIONE

Carica che si sposta **spontaneamente** significa carica soggetta alle sole forze del campo elettrostatico. Questo significa che le forze del campo elettrostatico compiono un lavoro positivo in quanto è acuto l'angolo formato dalla forza elettrostatica del campo e dalla velocità vettoriale posseduta dalla carica.

$$\left.\begin{array}{l} L_{A\to B} = q\left(V_i - V_f\right) \\ q > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_i - V_f > 0 \Rightarrow V_f < V_i$$

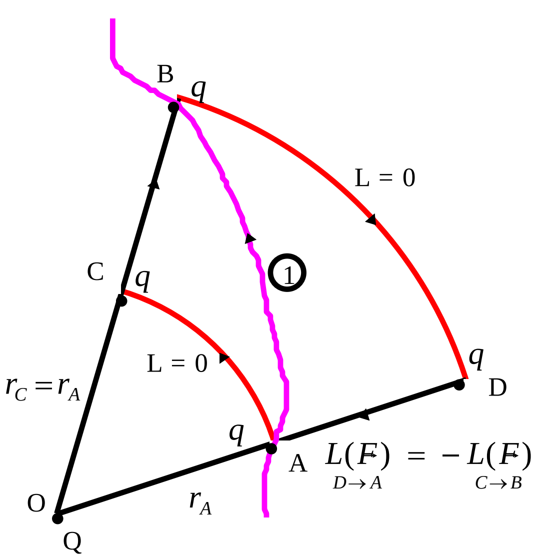
Una carica elettrica q negativa, immersa in un campo elettrostatico $\vec{E}$, si muove spontaneamente dai punti a potenziale minore a quelli a potenziale maggiore, ossia secondo i *potenziali crescenti*.

Dimostrazione $$\left.\begin{array}{l} L_{A\to B} = q\left(V_i - V_f\right) \\ q < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_i - V_f < 0 \Rightarrow V_f > V_i$$

Lavoro compiuto dalla forza elettrostatica di un campo radiale

Consideriamo il campo elettrostatico creato da una carica puntiforme **Q** posta nel punto **O** (**campo radiale**). Supponiamo che la carica **q** passi dalla posizione iniziale **A** a quella finale **B** attraverso il percorso (1) . Durante questo tragitto sulla carica **q** agisce la forza $\vec{F} = q\vec{E}$. vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica conservativa $\vec{F} = q\vec{E}$ quando la carica passa dalla posizione iniziale **A** a quella finale **B** . Poiché $\vec{F}$ è una forza conservativa tale lavoro non dipende dal percorso seguito, cioè: $L_{(1)}(\vec{F}) = \underset{A\to C}{L(\vec{F})} + \underset{C\to B}{L(\vec{F})}$ dove AC è l'arco di circonferenza di centro **O** e raggio $OA = r_A$.

$\underset{A\to C}{L(\vec{F})} = 0$ in quanto la forza radiale $\vec{F} = q\vec{E}$ e spostamento $\overrightarrow{ds}$ sono fra loro perpendicolari .



La direzione dello spostamento infinitesimo $\overrightarrow{ds}$ coincide con la direzione della velocità istantanea $\vec{v}$ e quindi con la retta tangente alla circonferenza nel punto considerato .

Per la legge di Coulomb sulla carica **q** agisce una la forza $\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Qq}{r^2}}$ dove r è la distanza della carica **q** dal punto **O** .

$$L_{(1)}(\vec{F}) = L_{CB}(\vec{F}) = \int_{r_C}^{r_B} dL = \int_{r_C}^{r_B} \vec{F}\times d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Qq}{r^2}\cdot dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\cdot dr =$$

$$= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] \qquad L_{AB}(\vec{F}) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Noi sappiamo che l'**energia potenziale** della carica **q** posta nel punto **P** distante **r** dalla carica **Q** che genera il campo è uguale al lavoro compiuto dalle forze del campo quando **q** passa dalla posizione **P** all'infinito . Rispetto alla situazione precedente abbiamo:

$$r_A = r \ , \ r_B = \infty \ , \ \frac{1}{r_B} = 0 \qquad U(P) = U(r) = \underset{P\to\infty}{L}(\vec{F} = q\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Qq}{r}$$

Il **potenziale** nel punto **P** vale: $V(P) = \dfrac{U(P)}{q} = \dfrac{\underset{P\to\infty}{L(\vec{F})}}{q} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\dfrac{Q}{r}$

Per quanto riguarda la **differenza di energia potenziale** e di **potenziale** abbiamo , per un campo radiale:

$$U(A) - U(B) = L_{AB}(\vec{F}) = \frac{Qq}{4\pi\,\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \qquad V(A) - V(B) = \frac{L_{AB}(\vec{F})}{q} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$\underset{ACBDA}{L(\vec{F})} = \underset{AC}{L(\vec{F})} + \underset{CB}{L(\vec{F})} + \underset{BD}{L(\vec{F})} + \underset{DA}{L(\vec{F})} = 0 + \underset{CB}{L(\vec{F})} + 0 + \underset{DA}{L(\vec{F})} = \underset{CB}{L(\vec{F})} - \underset{CB}{L(\vec{F})} = 0$$

Il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica lungo un percorso chiuso è nullo. Quindi la forza elettrostatica è conservativa come è conservativo il campo elettrostatico creato da una carica puntiforme. Ciò che abbiamo dimostrato per un campo radiale è valido per un campo elettrostatico comunque creato. Possiamo concludere affermando che il **campo elettrostatico comunque creato è conservativo**.

Generalizzazione del principio di conservazione dell'energia meccanica al caso in cui sono presenti forze non conservative

\Finora abbiamo considerato soltanto l'azione di una **singola forza** $\vec{F}$ **conservativa** su un punto materiale di massa m . Quando la massa m passa da uno stato iniziale A dove ha **velocità** v_i ed **energia potenziale** U_i ad uno stato finale B dove ha **velocità** v_f ed **energia potenziale** U_f

abbiamo : $\underset{A\to B}{L(\vec{F})} = K_f - K_i = U_i - U_f$

Questa relazione può essere scritta in una delle seguenti maniere :

$$\Delta K = -\Delta U \qquad \Delta K + \Delta U = 0 \qquad K_f + U_f = K_i + U_i = E$$

$\underset{A\to B}{L}(\vec{F})$ è il lavoro che compie la forza $\vec{F}$ quando la massa m passa dallo stato iniziale A allo stato finale B. <<**La variazione dell'energia cinetica più la variazione dell'energia potenziale è zero se la forza che agisce su m è conservativa**>>

Se sulla massa m agiscono più forze conservative quali la forza peso ,la forza elastica di una molla, la forza elettrostatica allora possiamo generalizzare le formule precedentemente ricavate.

$\underset{A\to B}{L}(\vec{F})$ diventa ΣL, cioè diventa la somma algebrica dei lavori compiuti dalle varie forze conservative . ΔU diventa $\Sigma\Delta U$ = somma delle corrispondenti variazioni di energia potenziale associate alle forze conservative. ΔK è sempre la variazione di energia cinetica della massa m.

$$\Sigma L = \Delta K = -\Sigma\Delta U \qquad \Delta K + \Sigma\Delta U = 0$$

Nella pratica, si presenta frequentemente il caso in cui sulla massa m agisca , oltre alla forza conservativa $\vec{F}$, anche una forza non conservativa $\vec{f}_a$, dovuta , ad esempio, all'attrito.

In questo caso la somma della variazione dell'energia cinetica e della variazione dell'energia potenziale non è più zero ma è uguale al lavoro (**negativo**) compiuto dalla forza non conservativa (forza di attrito) , $\Delta K + \Delta U = \underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a)$

Infatti dovrà essere:

$\underset{A\to B}{L}(\vec{F}) + \underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a) = \Delta K$ **Il lavoro compiuto su m da parte di tutte le forze agenti su m è uguale alla variazione di energia cinetica di m .**

Ma noi sappiamo che $\underset{A\to B}{L}(\vec{F}) = -\Delta K$ e quindi possiamo scrivere : $-\Delta U + \underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a) = \Delta K$ cioè:

$\Delta K + \Delta U = \underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a)$ La formula precedente può essere scritta così :

$$K_f - K_i + U_f - U_i = \underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a) \quad , \quad K_f + U_f - U_i = K_i + U_i + \underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a)$$

$$E_f = E_i + \underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a) \qquad E_f - E_i = + \underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a)$$

Avendo indicato rispettivamente con E_B ed E_A l'energia meccanica totale posseduta dal punto materiale nello stato finale B e nello stato iniziale A .

Questa relazione mostra che in presenza di forze non conservative l'energia meccanica totale non si conserva . Poiché il lavoro $\underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a)$ compiuto sulla massa m dalla forza di attrito è sempre negativo deduciamo che l'energia meccanica finale E_f è minore di quella iniziale E_i .

Il lavoro non conservativo $\underset{A\to B}{L}(\vec{f}_a)$ rappresenta un trasferimento irreversibile di energia dal corpo di massa m all'ambiente circostante.

Le superfici equipotenziali

Il luogo dei punti di un campo elettrostatico aventi lo stesso potenziale dicesi *superficie equipotenziale*. Illustriamo le principali proprietà delle **superfici equipotenziali**

1) Due superfici equipotenziali non possono intersecarsi mai.

Infatti, se questo si verificasse avremmo dei punti del campo elettrostatico a cui corrisponderebbero due valori diversi del potenziale. Ma noi sappiamo che ad ogni punto di un campo elettrostatico (che è conservativo) corrisponde un solo valore del potenziale. Quindi per ogni punto di un campo elettrostatico passa sempre una sola superficie equipotenziale .

2) Una famiglia di superfici equipotenziali, ciascuna corrispondente ad un diverso valore del potenziale, può essere usata per dare una descrizione grafica del campo elettrostatico in una certa regione dello spazio (cosi come avevamo fatto attraverso le linee di campo). In questa descrizione del campo elettrostatico a regioni con superfici equipotenziali addensate (oppure ben separate) corrispondono ragioni in cui il campo elettrostatico è intenso (debole).

3) Il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico su di una carica di prova q che si sposta da un punto A ad un punto B di una stessa superficie equipotenziale, è nullo. Infatti noi sappiamo che: $L_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = q\left(V_A - V_B\right) = 0$ in quanto deve essere: $V_A = V_B$

Questa proprietà sussiste anche se la traiettoria descritta dalla carica q non giace interamente sulla superficie equipotenziale.

4) Per motivi di simmetria, le superfici equipotenziali per un campo elettrostatico creato da una carica puntiforme sono una **famiglia di sfere concentriche**. Per un campo uniforme esse sono una famiglia di piani perpendicolari alla direzione del campo elettrostatico. In tutti i casi le superfici equipotenziali sono normali alle linee di campo e quindi ad $\vec{E}$. Dalla meccanica sappiamo che il lavoro è nullo se la forza $\vec{F}$ (e quindi $\vec{E}$) e lo spostamento $\vec{s}$ sono fra loro perpendicolari.

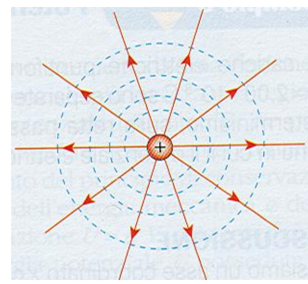
Quindi il lavoro che le forze $\vec{F}$ del campo compiono per portare una carica **q** da un punto A ad un punto B distante << **ds** >> sulla superficie equipotenziale è zero.

Questo significa che $dL = \vec{F} \times \vec{ds} = 0$ cioè $\vec{F} \perp \vec{ds}$.

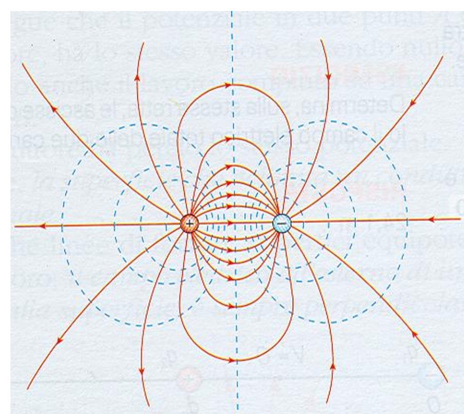
La forza $\vec{F}$ è quindi ortogonale allo spostamento, cioè alla superficie equipotenziale.

Inoltre le linee di campo sono sempre orientate dalle superfici a potenziale più elevato a quelle a potenziale più basso.

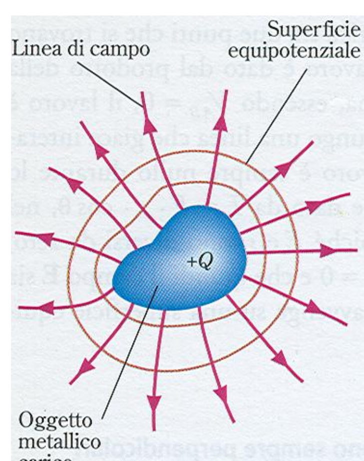
Linee di campo (a tratto continuo e colorate in rosso) e **superfici equipotenziali** del campo elettrico generato da una carica puntiforme. (le linee tratteggiate azzurre rappresentano le intersezioni di alcune superfici equipotenziali col piano della figura e sono dette **linee equipotenziali**)



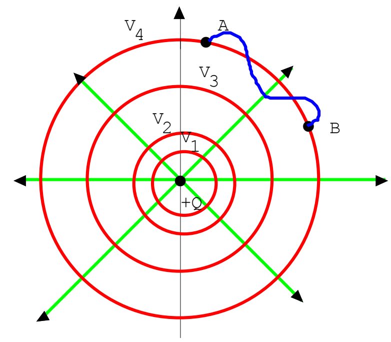
Linee di campo (a tratto continuo e colorate in rosso) e **superfici equipotenziali** (linee tratteggiate azzurre) del **campo elettrico generato da due cariche opposte**.



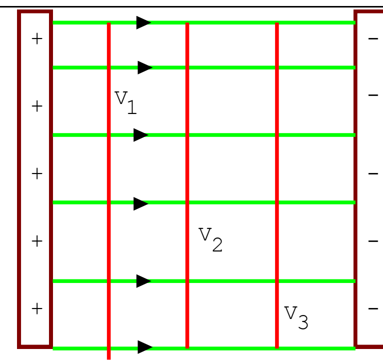
Le linee e le superfici equipotenziali sono perpendicolari alle linee del campo elettrico generato dalla carica $+Q$



Le linee del campo elettrico generato da una carica puntiforme Q sono semirette (uscenti dalla carica se è positiva o entranti se negativa). Le superfici equipotenziali di tale campo sono formate dai punti che hanno la stessa distanza r dalla carica, cioè sono sfere centrate su Q. In ogni punto, linee di campo e superfici equipotenziali sono perpendicolari fra loro.



Le **linee di un campo elettrico uniforme** sono rettilinee, parallele, equiverse ed equidistanti tra loro. Le **superfici equipotenziali** sono piani perpendicolari alle linee del campo. Le linee di campo sono **perpendicolari** alle superfici equipotenziali.



La deduzione del campo elettrico dal potenziale

A e **B** siano due punti di un campo elettrostatico $\vec{E}$ uniforme. Spostiamo la carica di prova q dalla posizione iniziale A alla posizione finale B . Le forze del campo elettrostatico compiono il seguente lavoro :

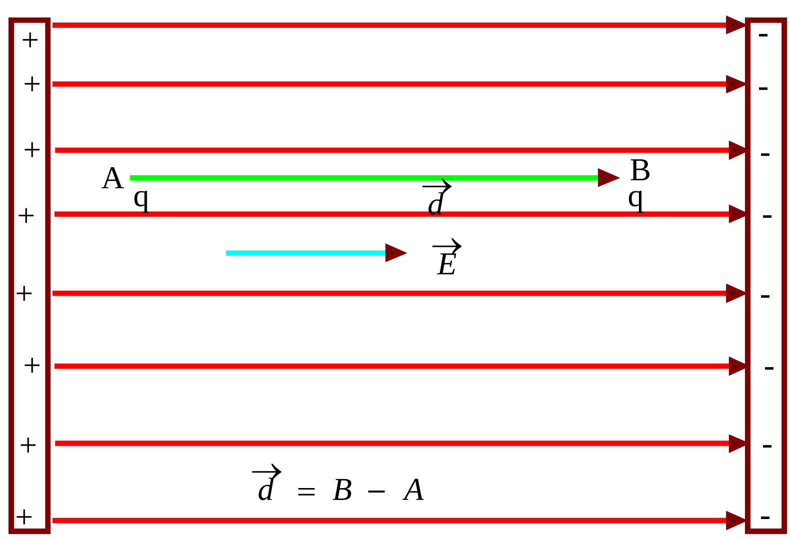
$$L_{A\to B}\left(\vec{F}=q\vec{E}\right) = U_A - U_B = \vec{F}\times\vec{d} = F\cdot d = q\,E\,d$$

$$\frac{U_A - U_B}{q} = E\,d \quad , \quad V_A - V_B = E\,d$$

$$E = \frac{V_A - V_B}{d} = \frac{V_i - V_f}{d} = -\frac{\Delta V}{d}$$

Questa equazione mostra la connessione fra la **d.d.p.** e l'**intensità del campo elettrostatico** in un caso particolare e ci dice che **E** si può misurare in $\frac{\text{volt}}{\text{metro}}$, cioè:

$$\{E\} = \frac{V}{m} \quad .$$



Qual è il legame tra V ed $\vec{E}$ nel caso più generale in cui il campo non è uniforme e la carica di prova viene spostata lungo un percorso che non è rettilineo ?

Quando la carica q si sposta del tratto infinitesimo $\overrightarrow{ds}$, le forze del campo compiono il seguente lavoro : $dL = \vec{F} \times \vec{ds} = q\,\vec{E} \times \vec{ds} = qE\cos\vartheta\, ds = -dU$ da cui ricaviamo :

$$E\cos\vartheta = -\frac{dU}{q\,ds} = -\frac{dV}{ds}$$

$E\cos\vartheta$ è la componente di $\vec{E}$ lungo la direzione del moto cioè lungo la direzione della traiettoria

$\frac{dV}{ds}$ = **gradiente di potenziale** = variazione di potenziale lungo il tratto infinitesimo ds

Se $\vartheta = 0$ ($\vec{E}$ risulta tangente alla traiettoria ℓ) abbiamo : $E = -\frac{dV}{ds}$

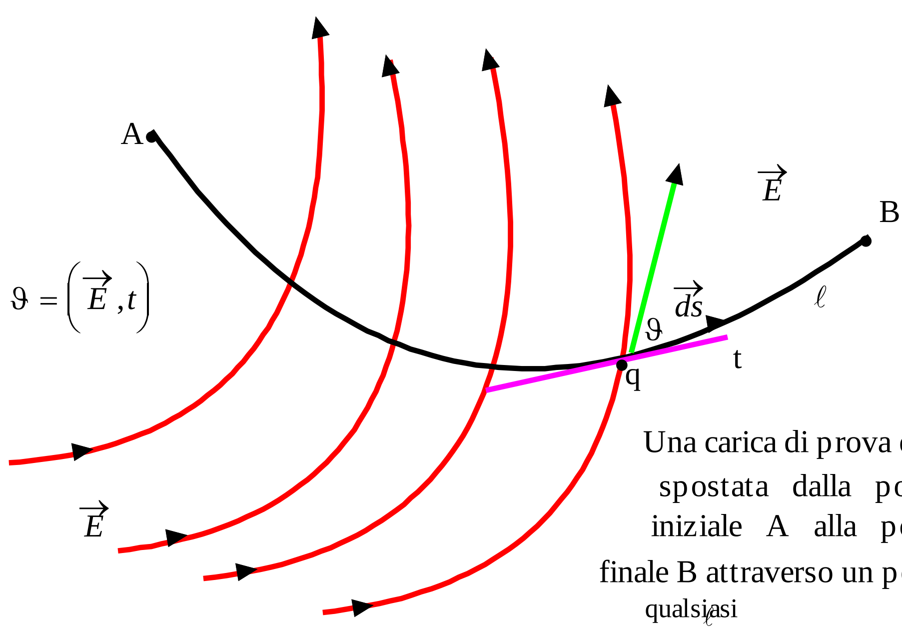
Il lavoro totale $L_{A\to B}(\vec{F} = q\vec{E})$ si ottiene sommando i lavori elementari dL relativi a tutti i tratti infinitesimi ds nei quali è divisa la traiettoria ℓ . Si ottiene , integrando lungo il percorso ℓ ,

$$L_{A\to B}(\vec{F} = q\vec{E}) = \int_A^B \vec{F} \times \overrightarrow{ds} = q\int_A^B \vec{E} \times \overrightarrow{ds} = q\int_A^B E\cos\vartheta\, ds = U_A - U_B$$

Dividendo ambo i membri per q otteniamo : $\frac{U_A - U_B}{q} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \times \overrightarrow{ds}$

$$V_B - V_A = V_f - V_i = \Delta V = -\int_A^B \vec{E} \times \overrightarrow{ds}$$

Questa relazione ci permette di calcolare la d.d.p. tra due punti qualsiasi se è noto $\vec{E}$ nei vari punti del campo. Viceversa, possiamo conoscere le proprietà del campo elettrostatico conoscendo il potenziale è questo è più semplice.



Una carica di prova q viene spostata dalla posizione iniziale A alla posizione finale B attraverso un percorso qualsiasi ℓ

In definitiva, conoscendo il campo elettrico è possibile calcolare il potenziale nell'intorno di un punto **P** e, reciprocamente, conoscendo il potenziale è possibile calcolare il campo elettrico in quel punto. E' così dimostrato che le due descrizioni della realtà fisica, basate sull'uso di queste grandezze fisiche ($\vec{E}$ e **V**), sono equivalenti fra loro. Utilizzando il vettore $\vec{E}$ dobbiamo servirci dell'algebra dei vettori, utilizzando il potenziale **V** che è una grandezza scalare dobbiamo servirci dell'algebra dei numeri reali con grande vantaggio nei calcoli.

Campo e potenziale di un conduttore in equilibrio elettrostatico

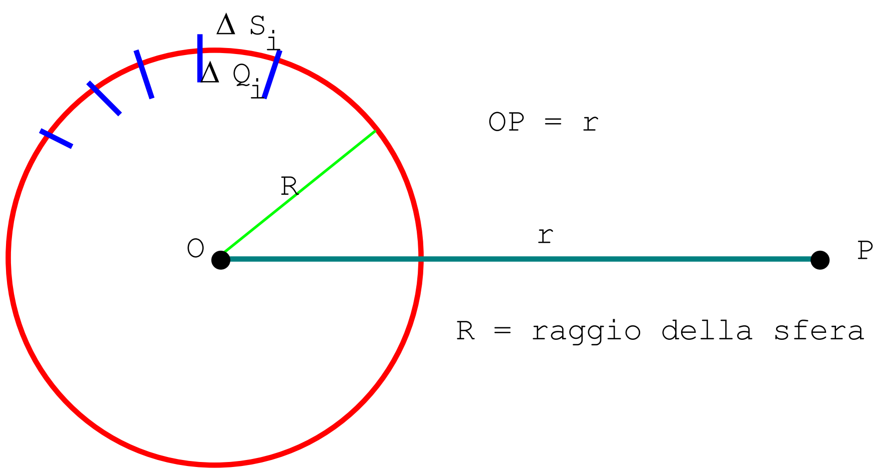
Abbiamo dimostrato che, una volta raggiunto uno stato di equilibrio, una carica q in eccesso posta su di un conduttore isolato si trova sulla sua superficie esterna. Ora osserviamo che questa carica q si distribuisce sulla superficie in modo che tutti i punti del conduttore, inclusi quelli sulla superficie e quelli all'interno, abbiano lo **stesso potenziale**. Consideriamo due punti qualsiasi **A** e **B** all'interno del conduttore o sulla sua superficie. Se essi non fossero allo stesso potenziale, i portatori di carica che si trovano sul conduttore vicino al punto avente potenziale più basso, tenderebbero a muoversi verso il punto a potenziale più alto. Ma noi abbiamo detto che si è raggiunto una situazione di equilibrio nella quale tali correnti non esistono. Questo ci consente di affermare che tutti i punti, sia sulla superficie che al suo interno, debbono avere il medesimo potenziale. Poiché la superficie del conduttore è equipotenziale, $\vec{E}$ deve essere normale alla superficie in tutti i punti di essa. **a)** Una carica posta su un conduttore isolato si propaga fino a quando $\vec{E}$ si annulla in tutti i punti interni oppure: **b)** La carica si muove finché tutti i punti del conduttore (sulla superficie e al suo interno) si portano allo stesso potenziale, cioè finché tutto il volume occupato dal conduttore diventa equipotenziale. Dalle cose dette è lecito definire potenziale di un conduttore il potenziale di un suo punto qualsiasi. Esso coincide col rapporto tra il lavoro compiuto dalle forze del campo quando spostiamo una carica q da un punto qualsiasi del conduttore al riferimenti O (∞) e la carica q.

Potenziale di un conduttore sferico

Su di una superficie sferica sia distribuita uniformemente la carica Q. Tutti i punti della sfera sono allo stesso potenziale, quindi il potenziale della sfera coincide col potenziale del suo centro. Scomponiamo la superficie S in elementi di superficie ΔS_i piccolissimi. In ognuna di esse c'è una carica ΔQ_i che si comporta come una carica puntiforme determinando al centro un potenziale dato da: $\Delta V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\Delta Q_i}{R}$

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \ldots + \Delta V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\Delta Q_1}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\Delta Q_2}{R} + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\Delta Q_n}{R} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + .. + \Delta Q_n}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R}$$



In un punto P distante r dal centro O della sfera il potenziale vale : $V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{r}$

Teorema di Coulomb

In figura è disegnato un conduttore isolato la cui densità elettrica è σ. In generale σ varia da punto a punto. Quanto vale **E** in punti esterni alla superficie del conduttore ed infinitamente vicini ad essa? Si consideri un elemento dS di superficie del conduttore e sia dq la carica distribuita su dS.

Risulta: $\sigma = \frac{dq}{ds}$ = **densità elettrica superficiale** nei punti di dS

Sia **E** l'intensità del campo nei punti infinitamente vicini all'elemento dS di superficie.

Si consideri come **superficie gaussiana** una superficie Σ chiusa cosi costituita:

1) come superficie laterale S_1 quella formata da tutte le linee di campo uscenti dal perimetro di dS e idealmente prolungate dentro il conduttore

2) esternamente, la superficie dS' parallela ed infinitamente prossima a dS

3) nel conduttore, ove **E** è nullo, la superficie dS''

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_{S_1}(\vec{E}) + \Phi_{dS'}(\vec{E}) + \Phi_{dS''}(\vec{E}) = E \cdot dS$$

$\Phi_{S_1}(\vec{E}) = 0$ in quanto $\vec{E}$ risulta tangente alle linee di campo ($\vec{E} \perp \vec{n}$)

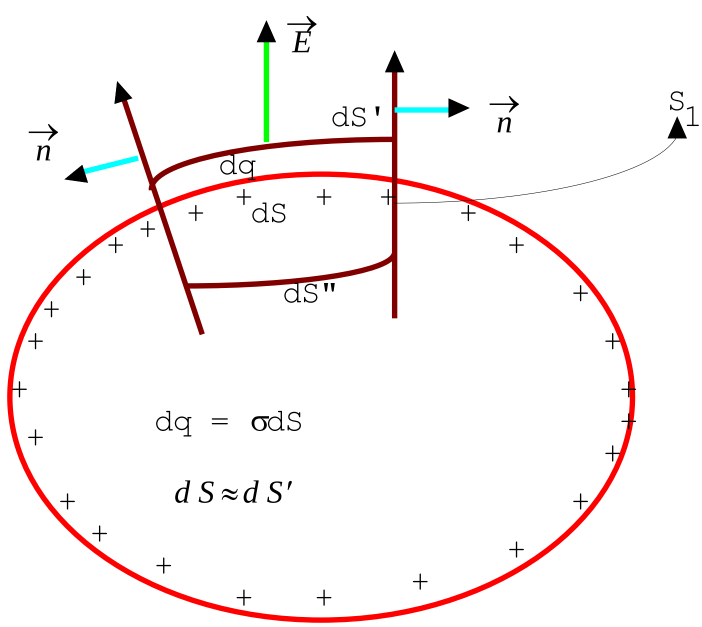
$\Phi_{dS''}(\vec{E}) = 0$ in quanto $\vec{E}$ è **nullo** in ogni punto interno al conduttore

$$\Phi_{dS'}(\vec{E}) = \vec{E} \times \vec{n} \cdot dS' = E \cdot dS' \cdot \cos\vartheta = E \cdot dS' = E \cdot dS$$

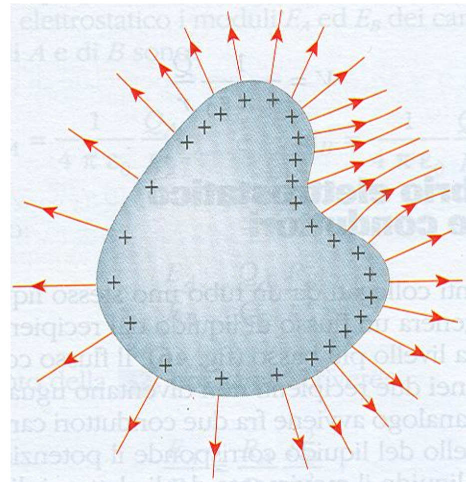
Per il teorema di Gauss abbiamo: $\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \dfrac{dq}{\varepsilon_o} = \dfrac{\sigma\, dS}{\varepsilon_o} = E \cdot dS$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}}$$ **Teorema di Coulomb**

Il **Teorema di Coulomb** fissa la relazione tra la legge di distribuzione delle cariche elettriche ed il valore **E** della intensità del campo elettrostatico in punti molto vicini alla superficie esterna del conduttore. Il campo $\vec{E}$ **1)** è normale al conduttore perché la superficie del conduttore è equipotenziale **2)** è volto verso il conduttore o via dal conduttore secondo che risulti $\sigma < 0$, $\sigma > 0$ **3)** il modulo è proporzionale a σ secondo la costante di proporzionalità $\dfrac{1}{\varepsilon_o}$



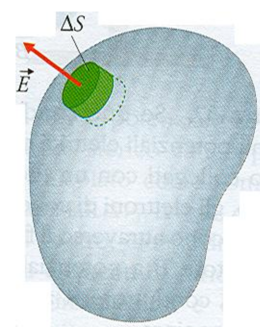
In tutti i punti di un conduttore carico all'equilibrio elettrostatico il **campo elettrico è nullo** ed il **potenziale è costante**. La **superficie** che delimita il conduttore **è equipotenziale**. Il campo elettrico nei punti immediatamente esterni è **perpendicolare** alla superficie. Il modulo di tale campo vale, per il teorema di Coulomb $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$.



Osservazione N°1 In un punto appartenente alla superficie esterna del conduttore il campo, sempre normale ad essa, vale : $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$

Osservazione N°2 Alla superficie esterna dei conduttori, là dove escono linee di campo, si hanno cariche positive. Alla superficie esterna dei conduttori, là dove arrivano linee di campo, si hanno cariche elettriche negative.

Per calcolare il modulo E del campo elettrico appena al di fuori di un conduttore carico, si applica il teorema di Gauss e si considera come superficie gaussiana un cilindretto le cui basi di area infinitesima ΔS sono disposte, parallelamente ed a piccola distanza, da una parte e dall'altra della superficie esterna del conduttore. Il flusso del campo elettrico uscente coincide con quello che attraversa la base esterna ed è uguale a $E \cdot \Delta S$.



Potere dispersivo delle punte

Dimostriamo in maniera elementare che la distribuzione delle cariche elettriche in un conduttore isolato è governata dalla legge: $\sigma \propto \dfrac{1}{R} = \rho$ dove σ è la **densità elettrica superficiale** del punto P ed R il raggio di curvatura della superficie nel punto P. [19]

---

[19] Curvatura di una circonferenza di raggio R è il reciproco del suo raggio , cioè $\rho = \dfrac{1}{R}$: essa è costante . Per le altre curve è possibile , per tratti molto piccoli delle curve stesse, costruire delle circonferenze in modo che gli archi

Discutiamo il caso semplice nel quale la superficie vicino al punto in questione può essere approssimata da una porzione di sfera . Consideriamo due sfere di raggi diversi collegate da un filo sottile e molto lungo. [(19a)]

Portiamo tutto il sistema ad un potenziale **V** arbitrario , somministrando la carica **Q** . Una parte Q_1 si distribuirà sulla superficie esterna della sfera di raggio R_1 ed una parte Q_2 sulla superficie esterna della sfera di raggio R_2 .

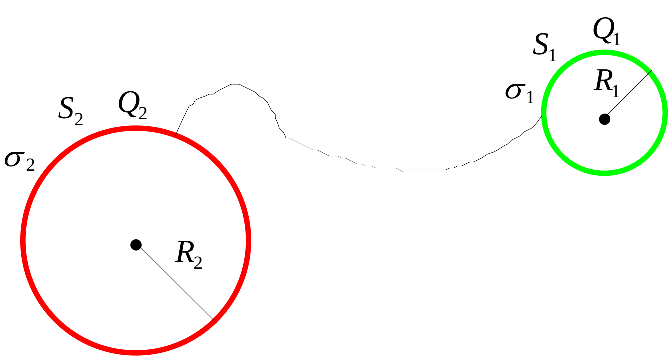
I potenziali (**uguali**) delle sfere sono: $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q_1}{R_1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q_2}{R_2}$ $\quad Q = Q_1 + Q_2$

Semplificando otteniamo: $\boxed{\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{R_1}{R_2}}$ essendo $R_2 > R_1$ deve essere $Q_2 > Q_1$

La sfera più grande ha la maggiore carica totale. D'altra parte risulta :

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} \quad , \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{Q_2}\cdot\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$\boxed{\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}}$ $\Rightarrow$ $\sigma_1 > \sigma_2$ Quindi **la densità elettrica varia in modo inversamente proporzionale al raggio di curvatura**. Concludendo possiamo affermare che la sfera più grande possiede la carica totale maggiore ma ha minore densità elettrica .



Poiché il campo elettrico, nelle vicinanze della sfera, vale $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$, risulterà più grande nelle vicinanze della sfera più piccola .

In genere un conduttore elettrizzato immerso in aria si scarica più o meno lentamente . Naturalmente si pensa all'aria come ad un isolante. Tuttavia essa contiene un piccolo numero di ioni prodotti ad esempio dai raggi cosmici. Un conduttore carico positivamente (negativamente)

---

coincidano. Allora il raggio **r** di tali circonferenze dicesi **raggio di curvatura** e l'inverso $\rho = \dfrac{1}{R}$ è la curvatura . Se la curva in questione ha equazione **y = y(x)** allora abbiamo : $r = \dfrac{\sqrt{\left[1 + \left(y'(x)\right)^2\right]^3}}{y''(x)}$

[(19a)] Teoricamente le sfere dovrebbero essere ad una distanza l'una dall'altra in maniera che la carica su ciascuna di esse abbia un effetto trascurabile sulla distribuzione della carica sull'altra .

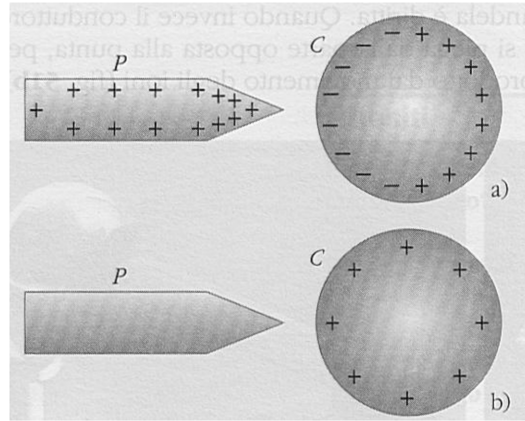
attrarrà ioni negativi (positivi) dell'aria circostante e così disperderà lentamente la carica. Se il conduttore possiede delle punte, il valore del modulo del vettore $\vec{E}$ nell'aria vicino alle punte può essere molto elevato. Infatti sulla punta il raggio di curvatura **r** è estremamente piccolo, quindi si avrà una densità elettrica σ elevatissima. Poiché la forza esercitata su una carica esterna alla punta è proporzionale ad **E**, osserveremo forze molto grandi in vicinanza delle punte.

Le cariche presenti nell'aria vengono accelerate fortemente vicino alle punte producendo per urto con le molecole dell'aria un grande numero di nuovi ioni. La formazione di cariche di segno opposto a quelle presenti sulla punta neutralizza la carica sulla punta. Si crea così nelle vicinanze di una punta un movimento macroscopico di cariche elettriche, detto **vento elettrostatico** capace di piegare (ed anche spegnere) la fiamma di una candela. Le punte disperdono le cariche elettriche che possiedono e quindi un conduttore che possiede delle punte non può essere elettrizzato. L'**arganetto** (mulinello) **elettrico** mette in evidenza la dispersione delle punte. Il **potere dispersivo delle punte** può essere spiegato in base alle seguenti considerazioni. Un conduttore carico, immerso in un aeriforme all'interno del quale sono presenti ioni di segno opposto, genera nello spazio circostante un campo elettrico che è particolarmente intenso in prossimità di eventuali punte del conduttore. In vicinanza di queste punte hanno inizio dei processi di ionizzazione per urto che rendono conduttrice l'aria. Se il conduttore è carico positivamente esso attrae gli ioni negativi e respinge quelli positivi. In altri termini quando si dice che una punta disperde le proprie cariche si dice una cosa inesatta. In realtà l'intenso campo elettrico che si genera nelle vicinanze di una punta provoca una intensa ionizzazione per urto, che si aggiunge a quella preesistente. La punta attrae gli ioni di segno opposto al proprio neutralizzando così la sua carica e respingendo quelli dello stesso segno. Finora abbiamo supposto che l'elettrizzazione non fosse molto intensa e quindi che la repulsione reciproca fra le cariche elettriche presenti nel conduttore non fosse così forte da vincere le forze che le tengono legate ad esso. Se, invece, l'elettrizzazione è molto intensa, le cariche possono essere strappate al conduttore e proiettate nello spazio circostante.

Si ha allora il fenomeno della **scarica**, che può essere accompagnata da fenomeni acustici ed ottici (**crepitii** e **bagliori**). L'esempio più noto e più importante di **scarica** è dato dal **fulmine**. Poiché sulle punte l'elettrizzazione è più intensa, è proprio in corrispondenza di una punta che più facilmente si realizzano le condizioni di scarica. Per questo motivo i **fulmini** cadono più spesso sulla cima di un albero che nel centro di un grande prato.

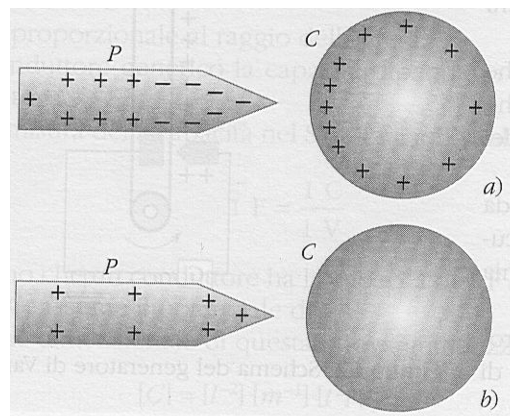
a) Se un conduttore appuntito P, carico positivamente, è posto vicino ad un conduttore neutro C, quest'ultimo si carica negativamente per induzione nella parte più vicina a P e positivamente nella parte più lontana.

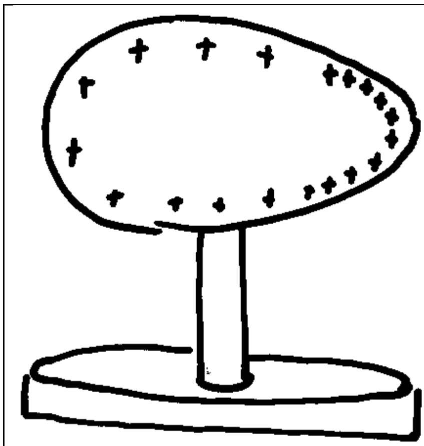
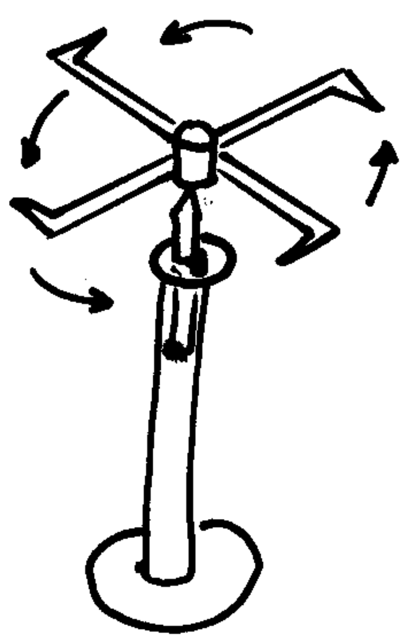
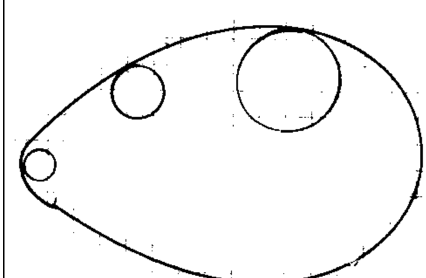
b) A causa della ionizzazione dell'aria e del moto degli ioni, dopo un certo tempo il conduttore P si scarica e C si carica negativamente.

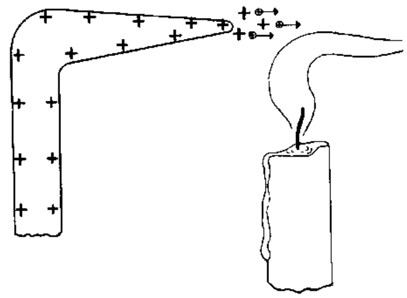
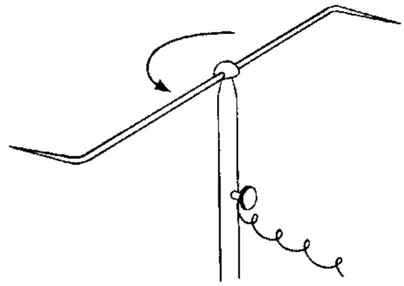
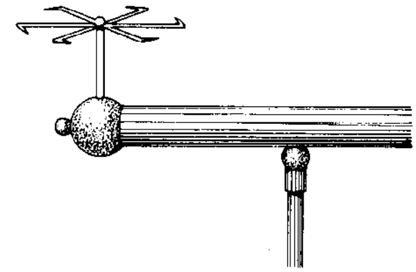


a) Un conduttore appuntito P, allo stato neutro, posto vicino ad un conduttore C carico positivamente, si carica negativamente per induzione nella parte più vicina a C e positivamente nella parte più lontana.

b) La ionizzazione dell'aria fa si che P si carichi positivamente e C perda la sua carica.



 **Potere delle punte** Su un conduttore isolato le cariche elettriche si addensano là dove la curvatura della superficie è maggiore	 **Mulinello Elettrico**	

 La fiamma di una candela è piegata dal **vento elettrico** proveniente da una punta elettrizzata	 **arganetto elettrico** **Le punte elettrizzate generano il vento elettrico , e per reazione l'arganetto si mette in movimento**	 **arganetto elettrico**

- *Discutere il funzionamento del parafulmine, che, com'è noto, è costituito da una punta metallica connessa a terra da una striscia di rame come in fig. 25.*

INDICAZIONE. Quando una nuvola carica negativamente passa sulla punta vi induce cariche positive e la lastra di rame a terra si carica. Però queste cariche negative, cioè elettroni, si disperdono nella terra. Le punte cariche attraggono ioni negativi che si scaricano, fornendo il loro elettrone in più, che passa attraverso la striscia conduttrice e finisce a terra. Però l'effetto più importante delle punte è di creare un flusso di cariche positive dirette verso l'alto, creando una *carica spaziale* che ha l'effetto di ridurre il campo elettrico esistente tra nuvola e casa. Il fulmine così ha maggiori probabilità di scaricarsi altrove (ove il campo resta più forte), ma comunque se colpisce la casa si scarica a terra attraverso la striscia di rame.

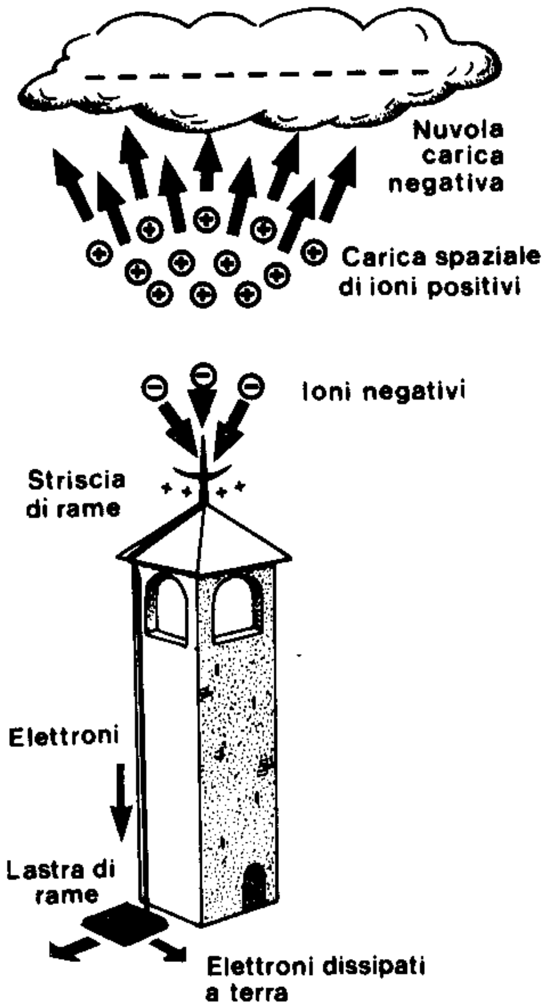


Fig. 25

La circuitazione del vettore $\vec{E}$

Consideriamo una linea chiusa ℓ tracciata in un campo elettrostatico $\vec{E}$ ed assumiamo su di essa, in maniera arbitraria, un **verso positivo**. Suddividiamo la linea ℓ in elementi $\Delta\ell$ piccoli a piacere (in teoria in elementi infinitesimi $d\ell$) in modo che essi possano essere descritti come **spostamenti rettilinei** (segmenti di retta). Per ogni elemento $\Delta\ell$ $(d\ell)$ della linea chiusa si considerino poi:

1) il vettore $\overrightarrow{\Delta\ell}$ $(\overrightarrow{d\ell})$ avente per modulo $\Delta\ell$ $(d\ell)$ e per direzione e verso quelli della tangente alla curva nel punto considerato orientato secondo il verso positivo assunto sulla curva.

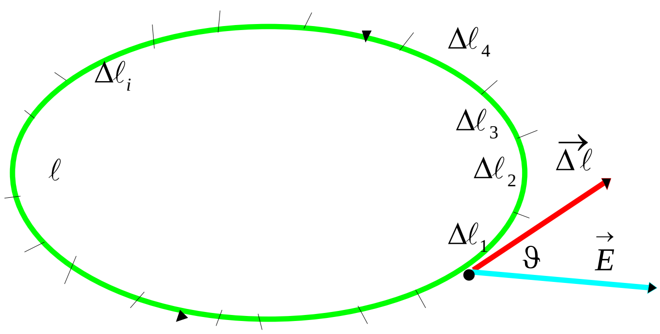
2) il prodotto scalare $\vec{E}\times\overrightarrow{\Delta\ell} = E\cdot\Delta\ell\cdot\cos\vartheta$ ($\vec{E}\times\overrightarrow{d\,\ell} = E\cdot d\ell\cdot\cos\vartheta$), ove $\vec{E}$ è il vettore campo elettrico nel punto in cui si considera $\overrightarrow{\Delta\ell}$ ($\overrightarrow{d\,\ell}$) e ϑ l'angolo formato dalle direzioni orientate di $\vec{E}$ e $\overrightarrow{\Delta\ell}$ ($\overrightarrow{d\,\ell}$).

La somma delle quantità $\vec{E}\times\overrightarrow{\Delta\ell}$ ($\vec{E}\times\overrightarrow{d\,\ell}$) estesa a tutti gli elementi della curva chiusa ℓ prende il nome di **circuitazione del vettore** $\vec{E}$ lungo la linea chiusa ℓ nel verso prestabilito, cioè:

$$C_\ell(\vec{E}) = \vec{E}\times\overrightarrow{\Delta\ell_1} + \vec{E}\times\overrightarrow{\Delta\ell_2} + \vec{E}\times\overrightarrow{\Delta\ell_3} + \cdots\cdots + \vec{E}\times\overrightarrow{\Delta\ell_n} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}\times\overrightarrow{\Delta\ell_i}$$

In termini differenziali abbiamo: $C_\ell(\vec{E}) = \oint \vec{E}\times\overrightarrow{d\,\ell} = \oint E\cdot\cos\vartheta\cdot d\,\ell$

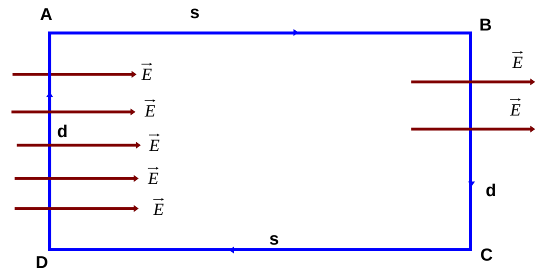
$C_\ell\left(\vec{E}\right) = \sum \vec{E}\times\Delta\vec{\ell}_i$ Circuitazione del vettore $\vec{E}$ lungo il percorso chiuso ℓ



La definizione di **circuitazione del vettore** $\vec{E}$, precedentemente introdotta, è valida per un campo vettoriale $\vec{v}$ qualsiasi. Se risulta $C_\ell(\vec{v}) = 0$, qualunque sia la linea chiusa ℓ, allora $\vec{v}$ dicesi **campo conservativo**. Il campo gravitazionale $\vec{g}$ e quello elettrostatico $\vec{E}$ sono conservativi in quanto risulta $C_\ell(\vec{g}) = 0$, $C_\ell(\vec{E}) = 0$. Il campo magnetico $\vec{B}$ non è un campo conservativo in quanto, in generale, risulta: $C_\ell(\vec{B}) \neq 0$.

Teorema: La **circuitazione del vettore elettrico** generato da cariche elettriche in quiete (**campo elettrostatico**) lungo qualunque percorso chiuso orientato è sempre uguale a zero. Questo esprime in modo matematico il fatto che il campo **elettrostatico è conservativo**.

Dimostriamo il teorema della circuitazione per un campo elettrostatico $\vec{E}$ uniforme lungo un percorso rettangolare orientato come indicato in figura.



$$C_{ABCD}\left(\vec{E}\right)=\vec{E}\times\overrightarrow{AB}+\vec{E}\times\overrightarrow{BC}+\vec{E}\times\overrightarrow{CD}+\vec{E}\times\overrightarrow{DA}=\cancel{E\cdot s}+E\cdot d\cdot\cos 90°-\cancel{E\cdot s}+E\cdot d\cdot\cos 90°=0$$

Il risultato ottenuto, dimostrato per un **campo elettrostatico uniforme** e per un **percorso rettangolare** è valido per un circuito chiuso qualsiasi e per un campo elettrostatico non uniforme.