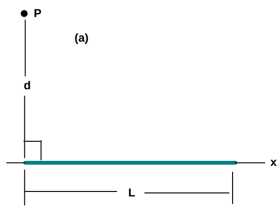
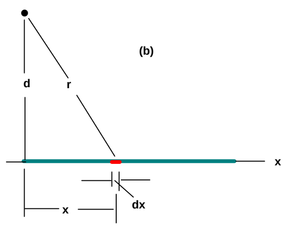
Potenziale dovuto ad una distribuzione continua di cariche

Carica lineare: bacchetta sottile, filo sottile

Una sottile bacchetta di plastica (non conducente), lunga L, ha una carica positiva di densità lineare uniforme $\lambda = \frac{q}{L}$. Considerando il potenziale zero a distanza infinita dalla bacchetta, determinare il potenziale elettrico V dovuto alla bacchetta nel punto P, ad una distanza normale d dall'estremità sinistra della bacchetta.





(a) Una sottile bacchetta, carica uniformemente, genera un potenziale elettrico V nel punto P.
(b) Un elemento di carica $dq = \lambda \cdot dx$ produce un elemento differenziale di potenziale dV nel punto P.
Si dimostra che vale la seguente formula:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \ln\left[\frac{L + \left(L^2 + d^2\right)^{\frac{1}{2}}}{d}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \ln\left(\frac{L + \sqrt{\left(L^2 + d^2\right)}}{d}\right)$$

Dimostrazione: Si consideri un elemento differenziale dx della bacchetta. Questo elemento contiene il seguente elemento differenziale di carica: $dq = \lambda \cdot dx$. Questo elemento infinitesimo di carica genera nel punto P, distante $\sqrt{x^2 + d^2}$, il potenziale: $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$

Per calcolare il potenziale V generato dall'intera bacchetta dovremo considerare tutti gli elementi infinitesimi della bacchetta. Otteniamo:

$$V = \int_0^L dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + d^2}\right)\right]_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[\ln\left(L + \sqrt{L^2 + d^2}\right) - \ln d\right]$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \ln\left(\frac{L + \sqrt{\left(L^2 + d^2\right)}}{d}\right)$$

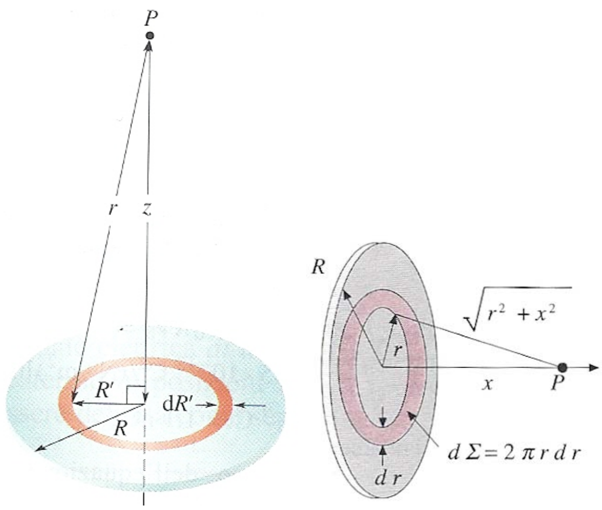
Disco sottile di raggio R con una carica q distribuita uniformemente su tutta la superficie (lamina sottile)

Calcolare il potenziale in un punto P dell'asse di un disco sottile di raggio R e carica q uniformemente distribuita su tutta la sua superficie $S=\pi R^2$ S.

Un disco di raggio R porta, sulla faccia superiore, una densità di carica uniforme $\sigma=\frac{q}{S}=\frac{q}{\pi R^2}$. Si vuole trovare il potenziale V nel punto P sull'asse centrale del disco.

Se indichiamo con z la distanza del punto P dal disco, di dimostra che è valida la seguente formula:

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right)$$



Per $z=0$ otteniamo il potenziale nel centro O del disco: $V_o=\frac{\sigma\cdot R}{2\varepsilon_o}$

Per $z>>R$, cioè a grandi distane otteniamo: $V=\frac{\sigma\cdot R^2}{4\varepsilon_o z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o z}$

Dimostrazione: Consideriamo un anello, concentrico col disco, di raggio r e larghezza radiale $d r$ e quindi di area $d\Sigma=2\pi r\cdot d r$. Tale elemento infinitesimo di area contiene il seguente elemento infinitesimo mo di carica: $d q=\sigma\cdot d\Sigma=\sigma\cdot 2\pi r\cdot d r=2\pi\sigma\cdot r\cdot d r$. Tutte le parti di questo elemento infinitesimo di superficie $d\Sigma$ si trovano alla stessa distanza r dal punto P dell'asse del disco. Il potenziale dV generato dall'anello infinitesimo sull'asse vale:

$$d V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{d q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2\pi\sigma\cdot r\cdot d r}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

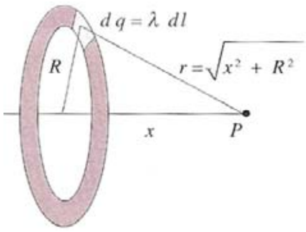
Il potenziale netto nel punto si trova sommando, mediante una integrazione definita, i contributi di tutte le corone circolari comprese tra $r=0$ ed $r=R$. Otteniamo:

$$\int_0^L d V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\int_0^L\frac{d q}{r}=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\int_0^L\frac{r\cdot d r}{\sqrt{z^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\cdot\int_0^L\frac{r\cdot d r}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right)$$

Carica q distribuita u uniformemente su un sottile anello di raggio R

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio R. Calcolare il potenziale in un punto P dell'asse dell'anello.



Si dimostra che vale la seguente formula: $V = \dfrac{q}{4\pi\,\varepsilon_o \cdot \sqrt{R^2+x^2}}$ dove x è la distanza del punto P dell'asse dall'anello. Nel centro dell'anello dove risulta $x=0$ abbiamo: $V = \dfrac{q}{4\pi\,\varepsilon_o \cdot R}$

A grande distanza, cioè per $x >> R$, il potenziale vale: $V = \dfrac{q}{4\pi\,\varepsilon_o \cdot x}$ come se la carica q fosse concentrata nel centro dell'anello.

Dimostrazione: $\lambda = \dfrac{q}{2\pi R}$ $\quad r = \sqrt{R^2+x^2}$ $\quad dV = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \cdot \dfrac{dq}{r} = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \cdot \dfrac{\lambda \cdot d\ell}{r} = \dfrac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o} \cdot \dfrac{d\ell}{\sqrt{R^2+x^2}}$

$$V = \int_0^{2\pi R} dV = \frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} \cdot \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o \cdot \sqrt{R^2+x^2}} \cdot [\ell]_0^{2\pi R} = \frac{\lambda \cdot 2\pi R}{4\pi\,\varepsilon_o \cdot \sqrt{R^2+x^2}}$$

$$V = \frac{\lambda \cdot 2\pi R}{4\pi\,\varepsilon_o \cdot \sqrt{R^2+x^2}} = \frac{\cancel{2\pi R}}{4\pi\,\varepsilon_o \cdot \sqrt{R^2+x^2}} \cdot \frac{q}{\cancel{2\pi R}} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_o \cdot \sqrt{R^2+x^2}}$$

Potenziale di un dipolo elettrico

Vogliamo ricavare un'espressione del potenziale generato da un dipolo elettrico in un punto P dello spazio lontano dal dipolo. Questo si verifica se $r >> d$, con d distanza fra le due cariche del dipolo. Un punto P dello spazio è completamente individuato quando conosciamo le grandezze r e ϑ. Il potenziale generato dal dipolo si calcola utilizzando la relazione:

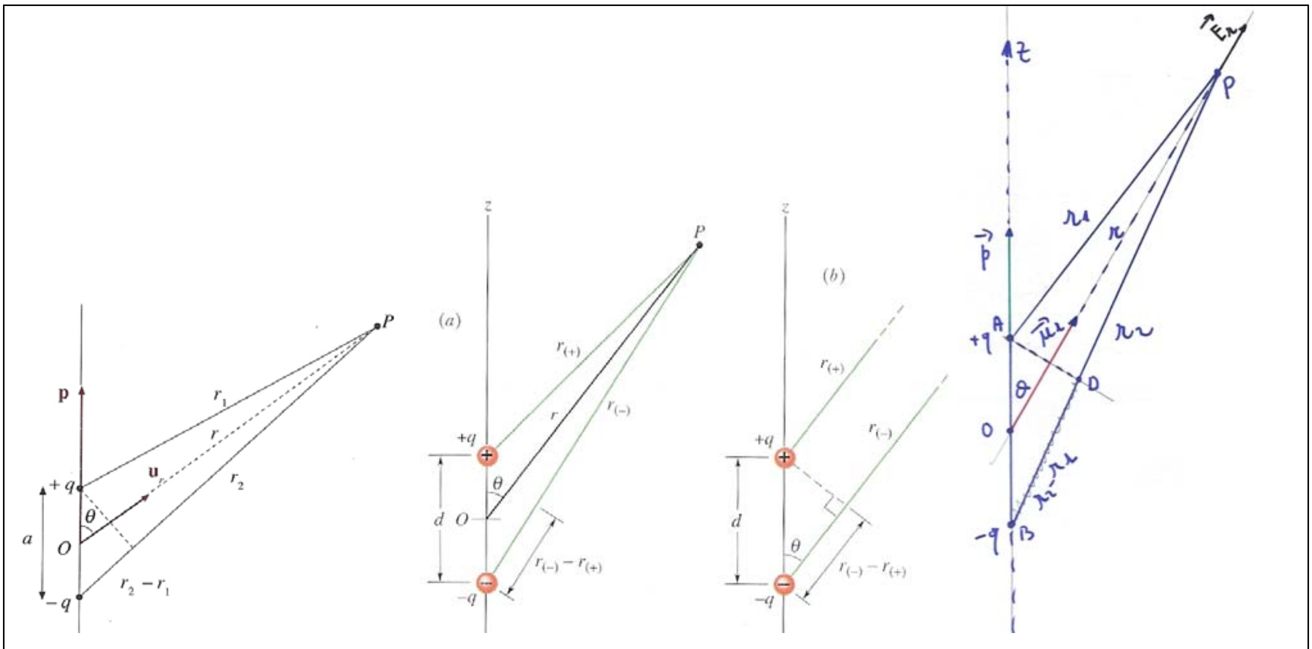
$$V(P) = V_1(+q) + V_2(-q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r_1^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r_2^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \qquad V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

che è una relazione esatta.

Se il punto P è molto lontano dal dipolo, cioè se $r >> d$, possiamo porre: $r_2 - r_1 \approx d \cdot \cos\vartheta$, $r_1 r_2 = r^2$ e ritenere $r_1 // r_2$ $(PA // PB)$ e quindi: $r_1 = r_2$. In questo caso la formula che ci consente di calcolare il potenziale assume la forma: $V(P) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \dfrac{q\,d\cos\vartheta}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \dfrac{\vec{p} \times \vec{u}_r}{r^2}$ [x]

essendo $\vec{u}_r$ il versore della direzione OP e $\vec{p}=q\cdot\vec{d}=q\cdot(A-B)$ il momento del dipolo elettrico. Esaminiamo la struttura della formula [x]. L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento $\vec{p}=q\cdot\vec{d}=q\cdot(A-B)$ e non q e d separatamente. Questo ci dice che da misure di potenziale possiamo ricavare informazioni su $\vec{p}=q\cdot\vec{d}=q\cdot(A-B)$, ma non sulla costituzione del sistema. Il valore del potenziale decresce con il quadrato della distanza dal dipolo, cioè più rapidamente di quello generato da una singola carica puntiforme. Qualitativamente questo è dovuto al fatto che gli effetti delle due cariche di segno opposto si neutralizzano parzialmente. Quando si sommano i contributi di più cariche puntiformi si ottiene alla fine una dipendenza funzionale di V da r che è diversa dalla forma $\frac{1}{r}$ caratteristica di ogni singolo contributo.

Il potenziale è positivo ($\cos\vartheta>0$ cioè per $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$) nel semispazio contenente la carica $+q$ ed ottenuto da un piano α passante per O e perpendicolare alla retta AB. Tutti i punti i punti del piano α hanno potenziale nullo. Tutti i punti dell'altro semispazio hanno potenziale negativo.



(a) Il punto P è ad una distanza r dal punto medio O di un dipolo. Il segmento OP forma un angolo ϑ con l'asse del dipolo. (b) Se P è lontano dal dipolo, $r_1 = AP$ ed $r_2 = BP$ sono approssimativamente paralleli a r ed il segmento AD, che delimita la differenza $r_2 - r_1$, può essere considerato perpendicolare al segmento $OP = r$.

Se conosciamo il potenziale possiamo calcolare il campo elettrico. Il campo elettrico generato dal dipolo nella direzione $OP = r$ vale:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q\,d\cos\vartheta}{r^2}\right] = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{p\cdot\cos\vartheta}{r^2}\right] = -\frac{p\cdot\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$E_r = -\frac{p\cdot\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\left(\frac{-2}{r^3}\right) = \frac{p\cdot\cos\vartheta}{2\pi\varepsilon_o\cdot r^3} \qquad E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{p\cdot\cos\vartheta}{r^3}$$

Lungo la retta z che contiene le due cariche del dipolo abbiamo: $\vartheta = 0 \quad \cos\vartheta = \cos 0 = 1$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{p}{r^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q\cdot d}{r^3}$$