Unità Didattica N° 23

Condensatori

Capacità di un conduttore isolato

Consideriamo una sfera conduttrice di raggio **R** sulla quale è distribuita la carica elettrica **Q**. La sfera è **isolata**, cioè molto lontana da qualsiasi altro corpo. Noi sappiamo che il suo potenziale è:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{R} \quad \text{cioè :} \quad Q = (4\pi\varepsilon_o)\cdot V \quad \text{cioè:} \quad Q \propto V$$

La carica della sfera è direttamente proporzionale al suo potenziale. Lo stesso si verifica per un conduttore avente forma qualsivoglia. Scrivendo la relazione precedente nella forma: $\frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_o R$ appare evidente che per una sfera assegnata (ed anche per un qualsiasi altro conduttore) il rapporto $\frac{Q}{V} = \frac{\text{carica distribuita sulla sfera}}{\text{potenziale della sfera}}$ è una **costante positiva C** a cui diamo il nome di **capacità elettrica** della sfera (del conduttore) isolata. La costanza del rapporto $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{V}}$ può anche essere confermata per via sperimentale. La relazione $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{V}}$, scritta nella forma $Q = CV$, indica che diversi conduttori isolati portati allo stesso potenziale tratterranno una carica elettrica tanto più elevata quanto più elevato è il valore di **C**.

Definizione: Dicesi capacità di un conduttore il rapporto costante tra la carica somministrata ed il potenziale che esso acquista. In simboli abbiamo: $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{V}}$

Questa osservazione può servire a giustificare il nome di **capacità** dato a tale costante.

$$[C] = [Q]\cdot[V^{-1}] = [I\,T]\cdot[L^{-2}\cdot M^{-1}\cdot T^{3}\cdot I^{1}] = [L^{-2}\cdot M^{-1}\cdot T^{4}\cdot I^{2}]$$

$$\{C\} = farad = \frac{\{Q\}}{\{V\}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} = F = \frac{C}{V}$$

L'unità di misura della capacità è il **farad** (F), cioè la capacità di un conduttore che richiede un coulomb di elettricità per innalzare di un volt il suo potenziale. Oppure: **Il farad è la capacità di un conduttore isolato nello spazio che assume il potenziale di un volt quando acquista la carica di un coulomb**.

Leggi della capacità di un conduttore:

1) La capacità di un conduttore isolato varia al variare della forma geometrica della sua superficie e cresce al crescere della superficie stessa

2) La capacità di un conduttore cresce con la presenza di altri conduttori isolati da esso

3) La capacità di un conduttore aumenta coll'aumentare della costante dielettrica del mezzo in cui si trova.

La **capacità di un conduttore sferico isolato** ci viene fornita dalla seguente formula:

$$C = 4\pi\varepsilon_o R$$

Questa formula ci fa capire che la capacità di un conduttore isolato (ed anche di un qualsiasi sistema di conduttori) dipende solo dalla geometria del conduttore e dal mezzo in cui il conduttore è immerso e non dipende né dalla carica posseduta dal conduttore né dal potenziale a cui il conduttore si porta.

Per farsi un'idea della grandezza del **farad** basti pensare che una sfera conduttrice avente raggio $R = 9\cdot000\cdot000\,km = 9\cdot000\cdot000\cdot000\,m = 9\cdot10^9\,m$ ha la capacità di **1 farad** . Infatti :

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_o} = 1\,farad\cdot\left(9\cdot10^9\,\frac{m}{F}\right) = 9\cdot10^9\,m \qquad \{\varepsilon_o\} = \frac{\{C\}}{\{R\}} = \frac{F}{m}$$

La terra ha una capacità minore di un millifarad, mentre gli usuali conduttori hanno capacità dell'ordine del picofarad.

$$R_T \approx 6\cdot000\,km = 6\cdot000\cdot000\,m = \textbf{raggio della terra}$$

$$C_T = \frac{1}{8{,}99\cdot10^{-9}}\cdot6\cdot000\cdot000\,F = 667\,\mu F = 0{,}667\,mF = 0{,}667\,millifarad$$

Una sfera avente il raggio di **un metro** ha una capacità di $111\,pF$.

$$R = 1cm \quad\Rightarrow\quad C = 1{,}11\,pF = 1{,}11\cdot10^{-12}\,F$$

data l'eccessiva grandezza del **farad**, nell'uso corrente è consentito l'uso dei suoi sottomultipli:

$1\,millifarad = 1mF = 10^{-3}\,F$	$1\,microfarad = 1\,\mu F = 10^{-6}\,F$
$1\,nanofarad = 1nF = 10^{-9}\,F$	$1\,picofarad = 1\,pF = 10^{-12}\,F$

Una capacità di un **microfarad** è già molto grande. L'unità più usata il elettrostatica è il **picofarad**.

Lavoro di carica di un conduttore isolato

Quando un conduttore isolato possiede una carica **Q** in eccesso ha una energia potenziale elettrostatica pari al lavoro che bisogna compiere per portare la carica **Q** sul conduttore scarico. Quando ad un conduttore scarico ed isolato somministriamo la carica **Q** esso si porta al potenziale $V = \frac{Q}{C}$. Se ad un certo istante sul conduttore si trova una carica **q** (< **Q**) il suo potenziale vale : $\mathbf{V = \frac{q}{C}}$. Si aumenti la carica **q** di una quantità infinitesima dq . Il lavoro necessario per portare dq , inizialmente a potenziale zero , sul conduttore è dato da: $\mathbf{dL = V \cdot dq = \frac{q}{C} dq}$ e quindi il lavoro totale per portare la carica **Q** sul conduttore è: $L = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq = \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q$

$$\mathbf{L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2}$$

Per elettrizzare un conduttore si deve spendere un certo lavoro che rimane immagazzinato sotto forma di energia potenziale elettrostatica che verrà restituita durante la scarica del conduttore.

Condensatori

Se un certo numero di conduttori sono uno vicino all'altro, il potenziale di ognuno di essi è determinato non solo dalla carica propria ma anche dall'entità e dal segno delle cariche degli altri conduttori e dalla loro forma grandezza e posizione. Per esempio il **potenziale** di una sfera S_1 carica **positivamente** (negativamente) si **abbassa** (si alza) se una seconda sfera S_2 carica negativamente (**positivamente**) è avvicinata alla prima. Mettiamoci adesso in un caso particolare considerando due sfere S_1 ed S_2 fra loro molto lontane ed aventi lo stesso raggio **R**. Sulla prima sfera c'è la carica $+q$, sulla seconda la carica $-q$.

Noi sappiamo che : $V_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{R}$ $\quad V_2' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{R}$ $\quad V_1' - V_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2q}{R}$

La capacità del sistema costituito dalle due sfere è , per definizione : $\mathbf{C' = \frac{q}{V_1' - V_2'} = 2\pi\varepsilon_o R}$

Avviciniamo adesso le due sfere: la presenza dell'una distruggerà ora la simmetria sferica delle linee di campo uscenti dall'altra. Le linee di campo uscenti da una data sfera che , per una grande distanza fra le sfere , si irradiano verso l'infinito uniformemente in tutte le direzioni ora terminano , in parte , sull'altra sfera . Questo significa che una carica positiva avvicinata ad un oggetto isolato ne innalza il potenziale , mentre una carica negativa lo abbassa . Le due sfere si portano , pertanto , ai potenziali $V_1 < V_1'$ e $V_2 > V_2'$.

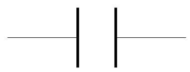
Quindi, sebbene la carica su ciascuna sfera non sia cambiata , è chiaro che la differenza di potenziale fra di esse si è ridotta considerevolmente .

In altri termini, la capacità del sistema delle due sfere, definita da $C = \dfrac{q}{V_1 - V_2}$ è stata notevolmente aumentata rispetto al suo valore iniziale C' avvicinando le sfere fra loro.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & < & V_1' \\ V_2' & < & V_2 \\ \hline V_1 + V_2' & < & V_1' + V_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 < V_1' - V_2' \quad \Rightarrow \quad \boxed{C > C'}$$

● Consideriamo adesso il caso di due conduttori qualsiasi, vicini aventi forma qualsiasi e con cariche uguali ed opposte. Un tale sistema prende il nome di condensatore ed i conduttori sono chiamati armature. Le cariche uguali ed opposte possono essere fornite connettendo per un certo tempo le armature ai due poli di una batteria. Ovviamente la carica totale dell'intero condensatore è nulla, per cui col termine carica di un condensatore intendiamo la carica che possiede ciascuna armatura indipendentemente dal segno. Il seguente rapporto: $\mathbf{C = \dfrac{q}{V_A - V_B}}$

dicesi **capacità del condensatore** il quale , in generale , è rappresentato col seguente simbolo



Se il conduttore **B** è collegato con la terra si ha: $C = \dfrac{q}{V_A}$ essendo per convenzione $V_B = V_T = 0$

● La capacità di un condensatore dipende: 1) dalla geometria di ciascuna armatura 2) dalla disposizione di ciascuna armatura rispetto all'altra 3) dal mezzo in cui le armature sono poste

Per il momento supponiamo che il mezzo sia il vuoto.

● Il condensatore è un dispositivo capace di acquistare una notevole quantità di carica elettrica senza raggiungere un potenziale troppo elevato. Quindi i condensatori possono servire come utili mezzi per immagazzinare energia che può essere pensata distribuita nel campo elettrico (che può essere elevato) fra le armature.

● Il farad è la capacità di un condensatore in cui la $d.d.p.$ tra le armature varia di 1 volt se si trasferisce 1 coulomb di elettricità da un'armatura all'altra.

Condensatore piano

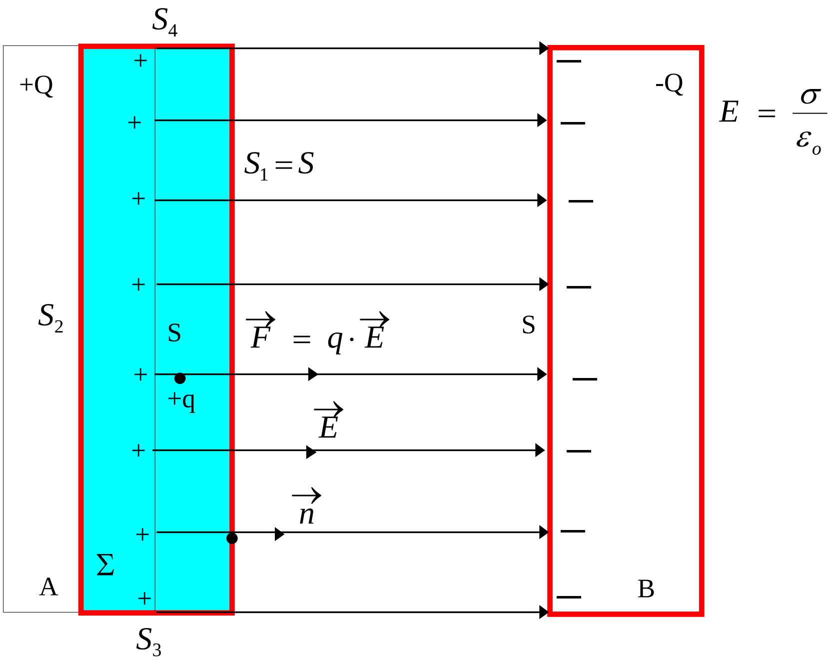
Il **condensatore piano** è costituito da due lastre metalliche piane e parallele di area **S** e poste ad una distanza **d**. Le due lastre vengono dette **armature**. Un modo per caricare il condensatore è il seguente: si collega ciascuna armatura coi terminali di una batteria. Su un'armatura compare la carica $+Q$, sull'altra la carica $-Q$.

Se **d** è piccolo rispetto alle dimensioni delle armature, allora il campo elettrostatico $\vec{E}$ all'interno delle armature si può ritenere uniforme, cioè $\vec{E}$ è lo stesso in tutti i punti dello spazio compreso fra le due armature. Le linee di campo sono segmenti paralleli equidistanziati, ortogonali alle due armature ed orientate dall'armatura positiva a quella negativa. [8]

- Si consideri un condensatore piano e supponiamo che sull'armatura di area S ci sia l'eccesso di carica $+Q$, mentre sull'armatura **B** di area **S** , completamente affacciata con **A** e posta alla distanza **d** , ci sia l'eccesso di carica $-Q$. Per una carica di prova $+q$ che passi dall'armatura A all'armatura B abbiamo :

$$V_A - V_B = \frac{L_{AB}(\vec{F})}{q} = \frac{F \cdot d \cdot \cos 0}{q} = E \cdot d$$

$$V_A - V_B = E \cdot d \qquad\qquad E = \frac{V_A - V_B}{d}$$



Possiamo calcolare la capacità del condensatore piano facendo uso del teorema di Gauss e scegliendo come superficie gaussiana Σ quella del parallelepipedo colorato in figura.

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \Phi_{S_1}(\vec{E}) + \Phi_{S_2}(\vec{E}) + \Phi_{S_3}(\vec{E}) + \Phi_{S_4}(\vec{E}) =$$

[8] Le leggi dell'elettromagnetismo richiedono che vi sia dispersione delle linee di campo ai bordi delle armature. Questo effetto, detto **effetto di bordo del condensatore**, può essere trascurato se d è sufficientemente piccolo.

$$= \vec{E} \times \vec{n} \cdot S_1 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ = \ E \cdot S \cdot \cos 0 \ = \ E \cdot S$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) \ = \ \frac{Q}{\varepsilon_o} \ , \ E \cdot S \ = \ \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q = \varepsilon_o \, ES}$$

$\Phi_{S_2}(\vec{E}) \ = \ 0$ perché **E** è nullo in ogni punto di S_2

$\Phi_{S_3}(\vec{E}) \ = \ \Phi_{S_4}(\vec{E}) \ = \ 0$ in quanto in ogni punto di S_3 e di S_4 il versore $\vec{n}$ è perpendicolare ad $\vec{E}$.

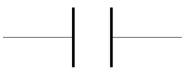
$$C \ = \ \frac{Q}{V_A \ - \ V_B} \ = \ \frac{\varepsilon_o E \, S}{E \, d} \ = \ \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d} \qquad\qquad \mathbf{C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d}}$$

Sintesi

$$\left. \begin{array}{l} Q \ = \ \varepsilon_o \, E \, S \\ V_A \ - \ V_B \ = \ E \, d \\ C \ = \ \dfrac{Q}{V_A \ - \ V_B} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C \ = \ \frac{Q}{V_A \ - \ V_B} \ = \ \frac{\varepsilon_o E \, S}{E \, d} \ = \ \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d}}$$

Se tra le armature del condensatore c'è un dielettrico avente costante dielettrica relativa ε_r , la formula precedente diventa :

$$\mathbf{C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d} = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}}$$

Negli schemi elettrici un condensatore qualsiasi è indicato col simbolo 

Oltre che forma piana , i condensatori possono avere svariate altre forme. Molti condensatori li largo uso nella tecnica hanno le armature costituite da lunghe strisce di stagnola poste l'una di fronte all'altra e separate da un sottilissimo strato di materiale isolante. Queste strisce vengono poi avvolte in modo da ottenere un condensatore di piccolo ingombro. La funzione del materiale isolante, oltre a quella di tenere separate le armature, è quella di determinare un aumento della capacità.

- E' interessante determinare quali dimensioni deve avere un conduttore isolato affinché la sua capacità sia confrontabile con quella di un condensatore piano .

Considerando per semplicità un conduttore sferico di raggio R abbiamo :

$$C \ = \ 4\pi\varepsilon_o R \qquad C \ = \ \frac{\varepsilon_o S}{d} \qquad 4\pi\varepsilon_o R \ = \ \frac{\varepsilon_o S}{d} \qquad R \ = \ \frac{S}{4\pi d}$$

Per un condensatore piano avente $S \ = \ 1m^2 \quad d \ = \ 1mm \ = \ 10^{-3}\,m$ otteniamo : $\quad R \ \approx \ 100\,m$

- Per ribadire che il farad è una unità di misura enorme, calcoliamo quale dovrebbe essere l'area **S** delle armature di un condensatore piano, poste alla distanza di $0{,}1mm$ se volessimo realizzare una capacità di 1 farad.

$$S \ = \ \frac{C\,d}{\varepsilon_o} \ = \ \frac{1 \cdot 10^{-4}}{8{,}86 \cdot 10^{-12}}\,m \ = \ 1{,}12 \cdot 10^7 \, m^2$$

La superficie di ciascuna armatura è equivalente a quella di un quadrato di lato pari a $3 \cdot 400\, m$. Un tale condensatore sarebbe difficilmente realizzabile ed utilizzabile .

Lavoro di carica di un condensatore

Siano **A** e **B** le due armature di un condensatore piano avente capacità **C**. **Caricare** il condensatore significa trasportare la carica **+Q** dall'armatura **B** all'armatura **A**. Vogliamo calcolare il **lavoro che una forza esterna deve compiere per fare ciò**.

Supponiamo che ad un certo istante la carica **+q** sia stata trasferita dall'armatura B all'armatura A.

Risulta : $$V_A - V_B = \frac{q}{C}$$

Indi supponiamo che una carica infinitesima **dq** passi dall'armatura **B** all'armatura **A** . Le forze del campo creato dalle cariche **+q** e **-q** compiono sulla carica dq il seguente lavoro :

$$d\,L = \left(V_i - V_f\right) d\,q = \left(V_B - V_A\right) d\,q$$

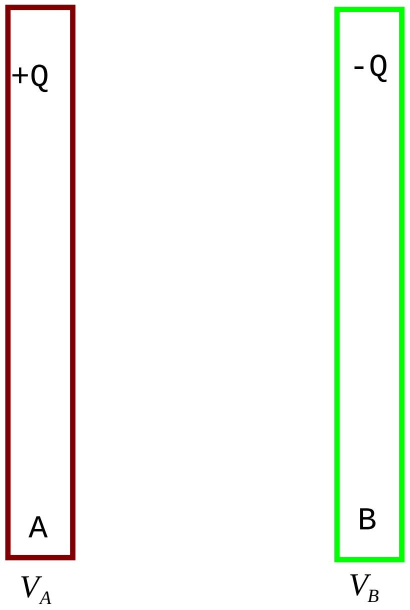
Ma la carica $d\,q$,spontaneamente , non può passare da B ad A . Ci vuole l'intervento di una forza esterna $\vec{F}_e$ la quale compie un lavoro uguale ed opposto a quello compiuto dalle forze del campo , cioè :

$$d\,L = -\left(V_B - V_A\right) dq = \left(V_A - V_B\right) dq = \frac{q}{C} dq$$

Per avere il *lavoro totale* compiuto dalla forza esterna contro le forze del campo elettrostatico per trasportare la carica **Q** dall'armatura B all'armatura A bisogna sommare tutti gli infiniti contributi dei lavori elementari $d\,L$, cioè bisogna calcolare il seguente integrale definito:

$$L = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C}\left[q^2\right]_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q\left(V_A - V_B\right) = \frac{1}{2} C\left(V_A - V_B\right)^2$$

Questa formula ci fornisce anche il lavoro che il condensatore può restituire all'atto della scarica.

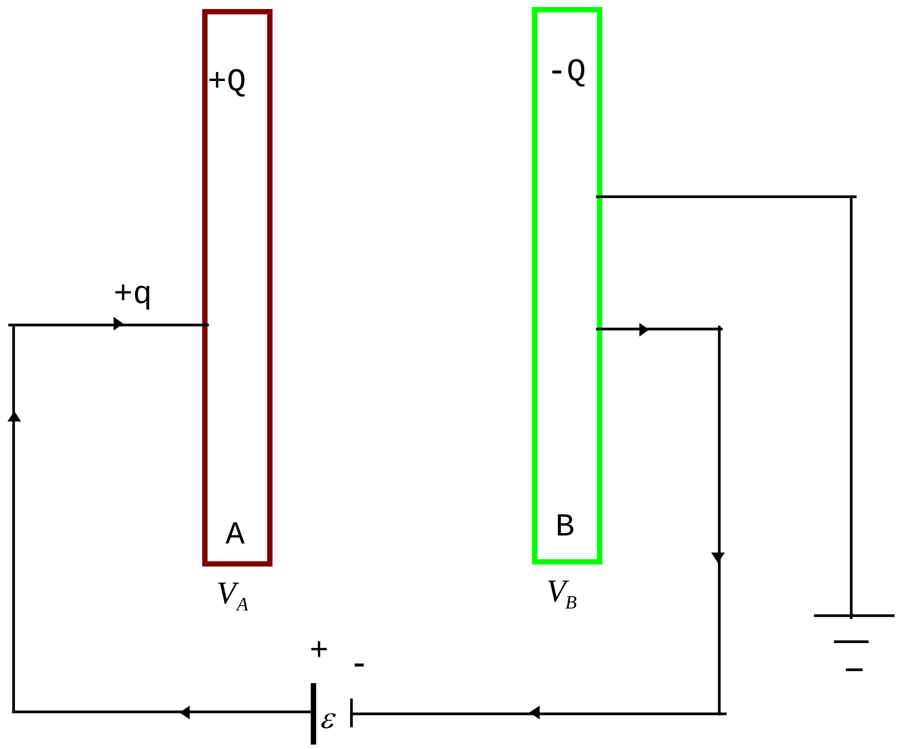


Un generatore , nel caricare un condensatore , trasferisce elettroni da un'armatura all'altra .

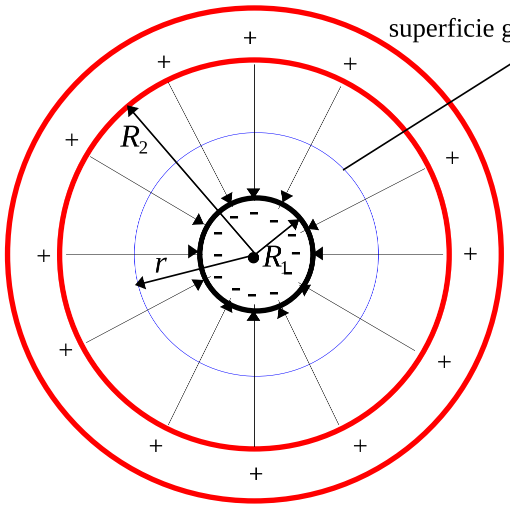
L'armatura che perde elettroni assume una carica positiva , mentre quella che acquista elettroni assume una carica negativa opposta .

Se però tale armatura è collegata con la terra essa ha carica nulla e potenziale pure nullo . In questo caso risulta

$$C = \frac{Q}{V} \quad , V = \frac{Q}{C} \quad , Q = CV \quad , V_A - V_B = V$$



Condensatore cilindrico



Un condensatore cilindrico è costituito da due cilindri coassiali di raggi R_1 ed R_2 ($> R_1$) e lunghezza ℓ . Supponendo che sia $\ell >> R_2$ possiamo ignorare la dispersione delle linee di campo agli estremi . Come superficie gaussiana considero un cilindro coassiale di raggio **r** ($R_1 \le r \le R_2$) ed altezza ℓ avente come basi due cerchi di raggio **r** . Per il teorema di Gauss possiamo scrivere:

$\boxed{\oint \vec{E} \times d\,\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_o}}$ dove **q** è la carica del condensatore cilindrico . $\boxed{E \cdot (2\pi r \cdot \ell) = \frac{q}{\varepsilon_o}}$

dato che il vettore $\vec{E}$ è costante all'interno delle due armature del condensatore cilindrico e tutto il flusso del vettore $\vec{E}$ passa attraverso la superficie laterale del cilindro gaussiano. $\boxed{E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o r \ell}}$

In precedenza abbiamo visto che lungo una linea di campo la relazione che intercorre tra il campo elettrico **E** ed il potenziale **V** è : $E = -\frac{dV}{dr}$ e quindi : $-dV = E \cdot dr$

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr \qquad -(V_2 - V_1) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon_o \ell} \cdot \frac{1}{r} dr \qquad -(V_2 - V_1) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o \ell} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr$$

$$-(V_2 - V_1) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o \ell} \cdot [\ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o \ell} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1} \qquad \mathbf{V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o l} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Per definizione , la capacità del condensatore cilindrico considerato è data da :

$$\mathbf{C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \cdot \ell}$$

Come l'espressione ricavata per il condensatore piano anche questa dipende solamente dai fattori geometrici R_1, R_2, ℓ .

Condensatore. sferico

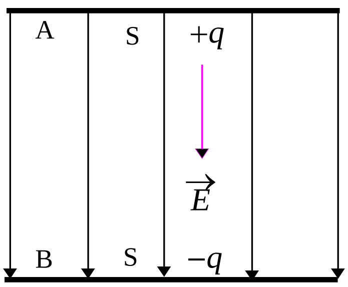
Il **condensatore sferico** è costituito da due sfere cave perfettamente concentriche e conduttrici . Detto R_1 il raggio della sfera interna ed R_2 quello della sfera esterna, supponiamo che tra le due sfere vi sia il vuoto e che la sfera interna abbia carica totale $+q$ e quella esterna una carica totale $-q$. Per la legge di Gauss il campo elettrico all'esterno della sfera di raggio R_2 deve essere nullo . Sempre per la legge di Gauss e per evidenti ragioni di simmetria nella regione compresa tra le due sfere il campo elettrico deve essere radiale ed avere modulo determinato dalla sola carica $+q$ della sfera interna . $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{r^2}$ con $R_1 \leq r \leq R_2$

La $d.d.p.$ $\Delta V = V_2 - V_1$ tra le due sfere vale :

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\times d\vec{\ell} = -\int_{R_2}^{R_1} E\cdot dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{R_2}^{R_1}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{R_1}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \qquad \mathbf{C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_o R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

Condensatore piano



Consideriamo un condensatore piano avente carica **q**, densità superficiale $\sigma = \frac{q}{S}$ e con le armature poste alla distanza **d**. Il campo elettrico all'interno del condensatore è uniforme ed il suo modulo vale: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$ $E = \frac{V_A - V_B}{d}$

$$E = E \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{V_A - V_B}{d} \Rightarrow \frac{q}{\varepsilon_o S} = \frac{V_A - V_B}{d} \qquad \mathbf{C = \frac{q}{V_A - V_B} = \varepsilon_o\cdot\frac{S}{d}}$$

$E = (V_A - V_B)d$ è un caso particolare della relazione generale $V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E}\times d\vec{\ell} = E\cdot d$.

L'integrale può essere calcolato lungo qualsiasi linea che inizi su una armatura ha lo stesso potenziale in tutti i suoi punti ed il lavoro delle forze elettrostatiche non dipende dal percorso .

Condensatori in parallelo

Due o più condensatori si dicono collegati in parallelo quando alle armature di ciascun condensatore è applicata la stessa $d.d.p..\ (V_A - V_B)$. **Quale singola capacità C è equivalente a questa combinazione, cioè quale deve essere la capacità C di un singolo condensatore le cui armature abbiano la stessa $d.d.p..\ V_A - V_B$ e la cui carica sia**

$q = q_1 + q_2 + q_3$? $\quad C = \dfrac{q}{V_A - V_B}$ cioè $\quad q = C \cdot (V_A - V_B)$

Per ogni singolo condensatore abbiamo :

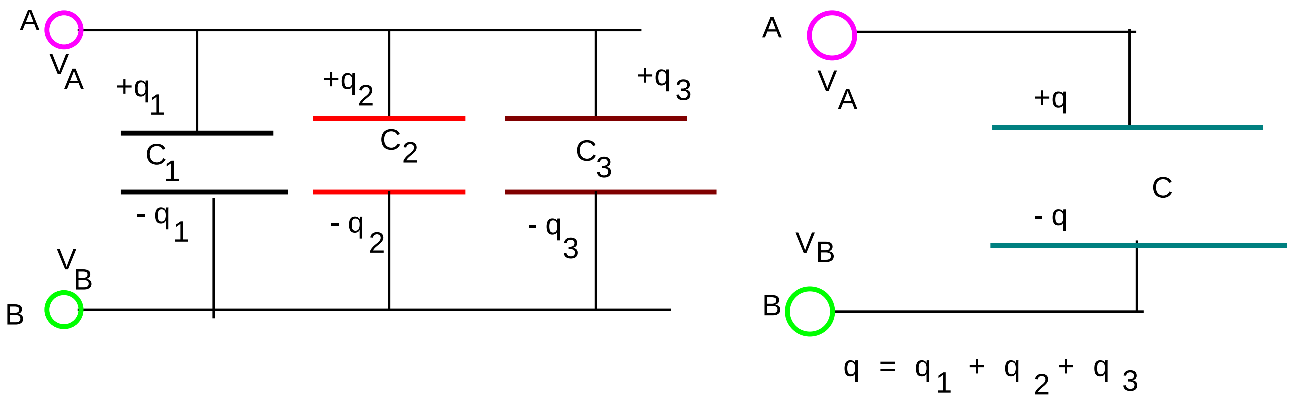
$$q_1 = C_1 \cdot (V_A - V_B) \qquad q_2 = C_2 \cdot (V_A - V_B) \qquad q_3 = C_3 \cdot (V_A - V_B)$$

$$q = C \cdot (V_A - V_B) = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot (V_A - V_B) \Rightarrow \mathbf{C = C_1 + C_2 + C_3}$$

Le batterie di condensatori in* PARALLELO *servono a realizzare grandi capacità.

N.B. Il valore massimo che può raggiungere $(V_A - V_B)$ è il più grande fra quelli che possono sopportare i singoli condensatori.

I condensatori che costituiscono il raggruppamento possono avere forma e dimensioni diverse.



Condensatori in serie

Due o più condensatori si dicono collegati in serie quando ogni condensatore possiede la stessa carica q. Questo si verifica quando l'armatura positiva (negativa) di un condensatore è collegata a quella negativa (positiva) del successivo. In questo caso la carica <<$+q$>> che si trova sull'armatura <<**1**>> induce nel conduttore racchiuso nella linea tratteggiata la carica $-q$ nell'armatura <<**2**>> e la carica <<$+q$>> nell'armatura <<**3**>>, e cosi di seguito.

Si ottiene cosi un sistema di armature, ciascuna delle quali possiede, in valore assoluto, la carica q. Quale singola capacità C è equivalente a questa combinazione, cioè quale deve essere la capacità C di un singolo condensatore avente la carica q e le cui armature presentano la stessa $d.d.p..(V_A - V_B$) esistente agli estremi della serie di condensatori?

$V_A - V_C = \frac{q}{C_1}$ Sommando membro

$V_C - V_D = \frac{q}{C_2}$ a membro otteniamo

$V_D - V_B = \frac{q}{C_3}$

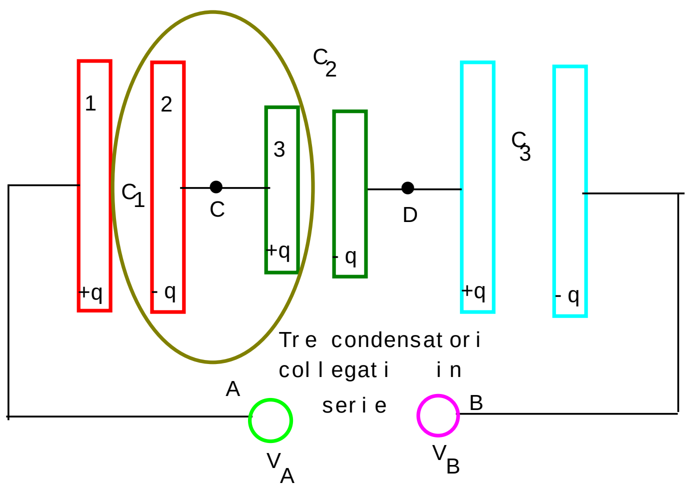
$$\mathbf{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

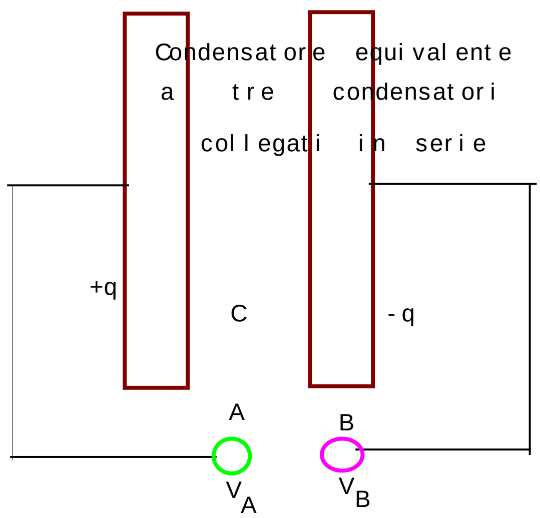
$$V_A - V_B = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{q}{C}$$

La capacità equivalente al collegamento in serie è sempre minore della più piccola capacità della catena. Se i condensatori hanno tutti la stessa capacità C* risulta $C = \frac{C^*}{n}$. La batteria ha una capacità pari ad 1/n della capacità di un singolo elemento. In compenso la $d.d.p..$ $V_A - V_B$ applicata alla batteria si divide in n parti uguali, sicché ad ogni singolo condensatore è applicata soltanto $\frac{1}{n}$ della $d.d.p..$ totale $V_A - V_B$. Se le n capacità non sono uguali abbiamo:

$$C_1(V_A - V_B) = C_2(V_A - V_B) = C_3(V_A - V_B)$$

cioè i vari condensatori sono soggetti a $d.d.p..$ inversamente proporzionali alle loro capacità.





Energia del campo elettrico

Si sa che ogni configurazione di cariche elettriche possiede una certa energia potenziale **U**, uguale al lavoro **L** (che può essere negativo o positivo) che deve essere fatto per mettere assieme tutti i componenti individuali originariamente infinitamente lontani gli uni dagli altri ed a riposo. Tale lavoro risulta uguale al lavoro **L** compiuto dalle forze del campo (creato dalla configurazione delle cariche) nel distruggersi. Cioè l'**ENERGIA POTENZIALE** di un campo elettrico si ottiene calcolando il lavoro che il campo richiede per essere creato. Possiamo ritenere l'energia elettrica come energia potenziale delle due distribuzioni di cariche presenti sulle due armature, oppure, seguendo la teoria dei campi, associare l'energia al campo elettrico. Infatti il concetto di campo elettrostatico porta a ritenere che l'energia dei conduttori elettrizzati sia localizzata non nei conduttori stessi, dove il campo è nullo, ma nello spazio circostante.

Da questo punto di vista l'energia di un condensatore carico viene associata al campo elettrico esistente fra le armature , anziché alle cariche distribuite sulle armature. Per semplicità riferiamoci ad un condensatore piano le cui armature distanti fra loro **d** abbiano area **S**. Definiamo l'energia volumica **W** del campo elettrostatico , cioè l'energia del campo elettrostatico del condensatore riferita al volume esistente fra le due armature. Essa è detta anche densità spaziale di energia elettrostatica. In formule abbiamo:

$$W = \frac{dU}{dV} = \frac{L}{V} = \frac{\text{energia}}{\text{volume}} \qquad W = \frac{\frac{1}{2}Q(V_A - V_B)}{S \cdot d} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{S}\cdot\frac{V_A - V_B}{d} = \frac{1}{2}\sigma E$$

Ma $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$ e quindi : $\mathbf{W = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2}$ oppure:

$$\mathbf{W} = \frac{\frac{1}{2}\mathbf{C(V_A - V_B)^2}}{\mathbf{S \times d}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_o \mathbf{S}}{\mathbf{d}}(\mathbf{V_A - V_B})^2}{\mathbf{S \cdot d}} = \frac{1}{2}\varepsilon_o\left(\frac{\mathbf{V_A - V_B}}{\mathbf{d}}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o \mathbf{E}^2$$

Questa formula , ricavata per il caso particolare di un condensatore piano , è valida in generale .

Se in un punto **P** dello spazio esiste un campo elettrico **E**, si può pensare che in quel punto sia immagazzinata energia nella misura di $\frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$ per unità di volume, cioè :

$$W(P) = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

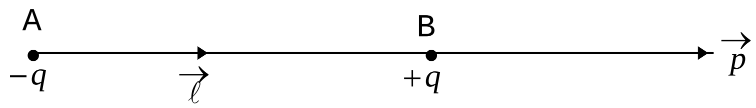
dove dV è un elemento infinitesimo di volume che abbia P al suo interno.

Dipolo elettrico

In precedenza abbiamo visto che l'elettrizzazione consiste in una separazione di cariche elettriche . Nella maggior parte dei casi questa separazione è resa possibile da piccole deformazioni nelle orbite degli elettroni atomici o molecolari sotto l'influenza di un campo elettrico esterno. La distribuzione di carica che ne risulta può essere rappresentata schematicamente mediante un dipolo elettrico, cioè un sistema di due cariche elettriche uguali ed opposte separate da una distanza $\ell \cong 10^{-10}\, cm$.

Il *dipolo elettrico* è un sistema costituito da due cariche elettriche puntiformi uguali ed opposte $+q$ e $-q$ poste ad una piccolissima distanza l'una dall'altra.

Un dipolo elettrico è assimilabile ad un corpo rigido. Ad ogni dipolo possiamo associare un vettore $\vec{p}$ detto *momento di dipolo elettrico* capace di descrivere il comportamento elettrico del dipolo stesso

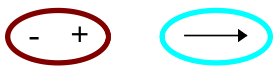


.

Esso è un vettore avente **modulo** $q\ell$, **direzione** la retta AB cioè la retta che congiunge le due cariche elettriche , verso che va dalla carica negativa $-q$ a quella positiva $+q$. In termini vettoriali abbiamo :

$$\vec{p} = q(B - A) = q \cdot \vec{\ell} \qquad \text{con} \qquad \vec{\ell} = B - A = \vec{AB}$$

Un dipolo può essere indicato con uno dei due seguenti simboli :



$\{p\} = C \cdot m =$ unità di misura del momento di dipolo

Una comoda unità di misura per i momenti di dipolo di un atomo o di una molecola è la **carica elettrica fondamentale e moltiplicata per la distanza di 1A**. Per esempio, il momento di dipolo della molecola di cloruro di sodio $NaC\ell$ espresso in questa unità ha un valore di circa $2e\mathring{A}$.

Il vettore $\vec{p}$ caratterizza e descrive il comportamento elettrico del dipolo cioè ci dà informazioni sul campo elettrico che esso crea nello spazio circostante e sulle azioni che subisce quando è immerso in un campo elettrico esterno. La natura vettoriale del momento di dipolo elettrico ci permette di ricavare diverse espressioni relative a dipoli elettrici in forma concisa e compatta .

Immaginiamo il dipolo elettrico come un oggetto indeformabile (sistema rigido), come se le cariche $+q$ e $-q$ fossero attaccate ad una sbarretta rigida isolante di lunghezza ℓ .

Spesso il dipolo elettrico viene sostituito dal suo momento di dipolo $\vec{p}$. In figura è indicato un dipolo elettrico il cui momento di dipolo $\vec{p}$ forma un angolo ϑ con un campo elettrico uniforme di intensità

$\vec{E}$. Le forze agenti sul dipolo $\vec{F}_A = -q \cdot \vec{E}$ e $\vec{F}_B = +q \cdot \vec{E}$ sono parallele , opposte ed hanno moduli uguali poiché il campo $\vec{E}$ è uniforme . Quindi un dipolo elettrico posto in un campo elettrostatico esterno $\vec{E}$ è soggetto ad una coppia di forze $\vec{F}_A$ ed $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$ che tende a farlo ruotare in modo che $\vec{p}$ diventi parallelo ed equiverso con $\vec{E}$. Calcoliamo il momento meccanico della coppia di forze che agiscono sul dipolo ricordando che il momento meccanico o momento motore $\vec{\tau}$ di una coppia di forze è uguale al momento di una delle due forze rispetto al punto di applicazione dell'altra.

$\vec{\tau} = (B - A) \wedge \vec{F}_B = \vec{\ell} \wedge q\vec{E} = q\vec{\ell} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ oppure :

$\vec{\tau} = (A - B) \wedge \vec{F}_A = -\vec{\ell} \wedge \left(-q\vec{E}\right) = q\vec{\ell} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ $\qquad \vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

Conclusione

Un dipolo elettrico avente <u>momento di dipolo</u> $\vec{p}$, immerso in un campo elettrico uniforme $\vec{E}$, è soggetto ad una coppia di forze il cui momento meccanico $\vec{M}$ è dato da :

$$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E} \qquad \text{con} \qquad M = p \cdot E \cdot \sin\vartheta$$

Il dipolo soggetto alla coppia di forze di momento $\vec{M}$ ruota, e la rotazione cessa quando $\vec{p}$ ed $\vec{E}$ sono paralleli ed equiversi .

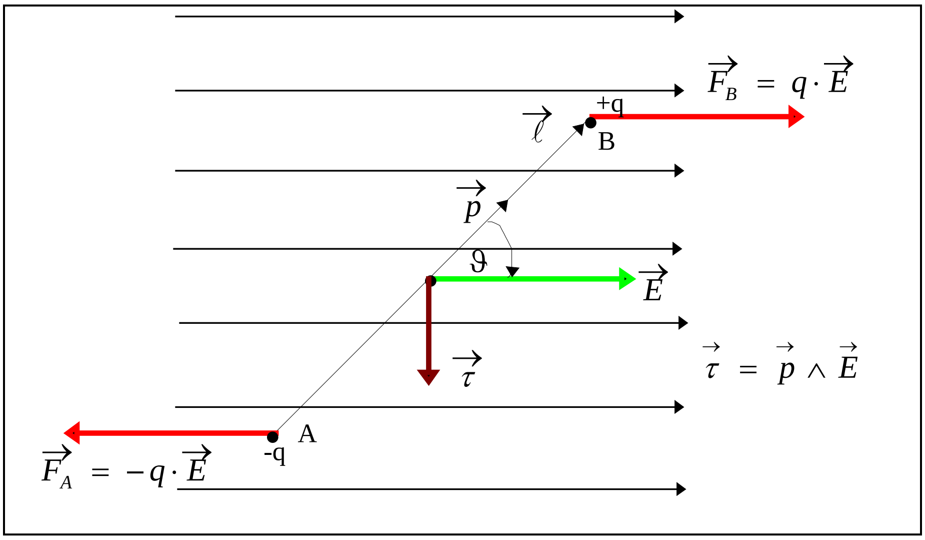
Se il campo elettrico $\vec{E}$ non è uniforme, sulle due cariche del dipolo agiranno due forze $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ a risultante non nullo. Essendo il dipolo un corpo rigido il sistema delle due forze $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ è riducibile ad una sola forza ($\vec{R}$) non nulle (risultante) e ad una coppia.

Quindi il dipolo sarà ancora ruotato nella direzione del campo della coppia dalla coppia e sarà inoltre traslato dalla forza . **Traslato dove ?** lungo i punti in cui il dipolo elettrostatico ha energia potenziale **U** (somma delle energie potenziali di ciascuna carica) minore . Si può dimostrare che l'energia potenziale del dipolo vale : $\qquad U = -\vec{p} \times \vec{E} = -p\,E\cos\vartheta$

tale energia è uguale al lavoro necessario per ruotare l'angolo del dipolo da un valore ϑ_o (che per comodità può essere preso uguale $90°$) ad un valore finale ϑ.

L'energia potenziale è **minima** quando $\vartheta = 0$, il che indica che il dipolo è in equilibrio stabile quando $\vec{p}$ è parallelo ed equiverso con $\vec{E}$.

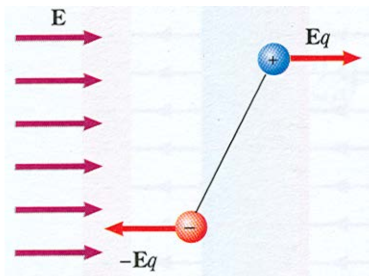
L'energia potenziale del dipolo è **massima** quando $\vartheta = \pi$, il che indica che il dipolo è in **equilibrio instabile** quando $\vec{p}$ ed $\vec{E}$ sono paralleli ed opposti.



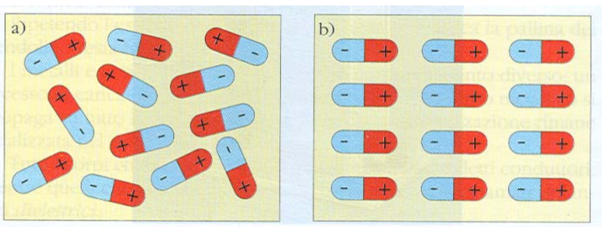
Dipolo elettrico immerso in un campo elettrostatico uniforme. Il **risultante** delle forze agenti sul dipolo è **nullo** ma c'è un **momento** $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ che tende ad allineare il dipolo al campo elettrico $\vec{E}$

In un isolante le cariche elettriche non sono libere di muoversi come avviene nei conduttori, tuttavia un campo elettrico intenso è in grado di modificare la struttura molecolare del dielettrico generando dei **dipoli** che sono dei sistemi costituiti da due cariche di uguale valore ma di segno opposto poste ad una piccola distanza l'una dall'altra.

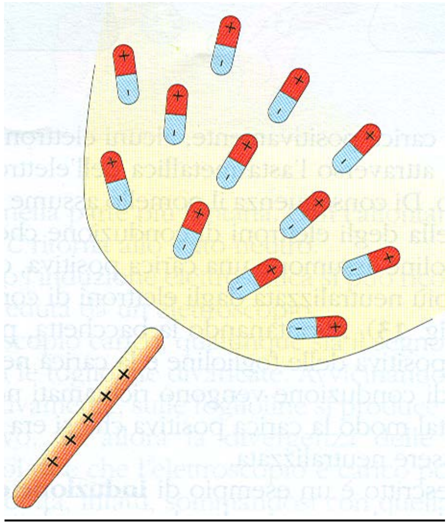
Un campo elettrico $\vec{E}$ agisce su un dipolo con una coppia di forze che lo fa ruotare alluineandolo con il campo $\vec{E}$.



Rappresentazione schematica dei dipoli di un dielettrico polare. I dipoli sono orientati casualmente (a) in assenza di un campo elettrico esterno; sono orientati uniformemente (b) per effetto di un campo elettrico esterno.



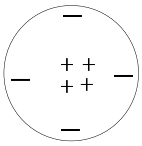
Se un corpo dotato di carica elettrica positiva è avvicinato ad un dielettrico, i dipoli del dielettrico si orientano. La **parte più vicina del dielettrico si carica negativamente**, quella più lontana positivamente. Il **dielettrico è soggetto ad una forza risultante attrattiva** in quanto l'attrazione esercitata dal corpo elettrizzato positivamente sulle cariche negative del dipolo prevale sulla repulsione esercitata sulle cariche positive.



La polarizzazione elettrica di un dielettrico

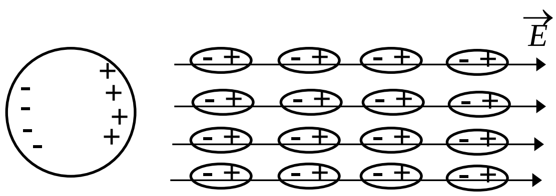
Le molecole che costituiscono un dielettrico possono essere classificate come **polari** e **non polari** . In una **molecola non polare** le cariche negative (**elettroni**) sono distribuite simmetricamente attorno a quelle positive (**protoni** dei nuclei) , in guisa che , la molecola non genera , all'esterno di essa , alcun campo elettrico .Questo significa che in una molecola non polare coincidono i baricentri delle cariche positive del nucleo e delle cariche negative degli elettroni . una molecola non polare (come l'idrogeno H_2 , l' azoto N_2 , l'ossigeno O_2) non costituisce un dipolo elettrico .

molecola



non polare

Le molecole non polari , immerse in un campo elettrico $\vec{E}$, subiscono la polarizzazione per deformazione, cioè le molecole sotto l'azione di $\vec{E}$ si dispongono come in figura .

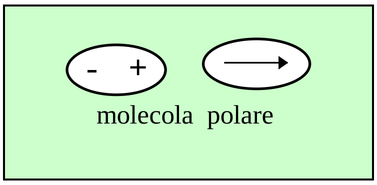


Molecole non polari polarizzat per deformazione dal campo esterno $\vec{E}$

La molecola si dice polarizzata dal campo $\vec{E}$ ed è chiamata un dipolo indotto, con momento di dipolo uguale la prodotto di una delle cariche per la distanza fra le due . L'agitazione termica impedisce l'allineamento completo . [19]

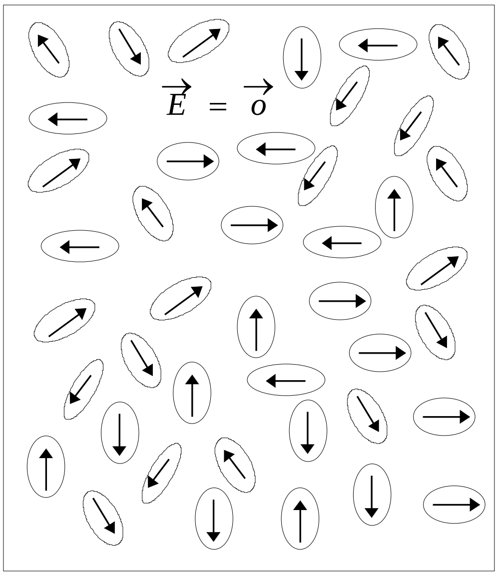
[19] Quando una molecola non polare viene polarizzata , entrano in giuoco delle forze di richiamo sulla cariche spostate che le tengono insieme (come se esse fossero connessa da una molla) . Sotto l'azione del campo esterno $\vec{E}$ le cariche si allontanano finché si raggiunge l'equilibrio tra la forza di richiamo e la forza opposta esercitata dal campo sulle cariche . naturalmente le forze di richiamo variano da molecola a molecola e di conseguenza variano anche gli spostamenti prodotti da un certo campo .

● In **una molecola polare** le cariche positive e negative (uguali in grandezza ma di segno opposto) possono essere pensate concentrate in due punti assai vicini ma non coincidenti . Ogni molecola polare costituisce un **dipolo elettrico** (permanente) e genera nello spazio circostante un campo elettrico .



Una molecola polare può essere rappresentata con uno dei due seguenti simboli , dove il segmento orientato rappresenta il vettore $\vec{p}$ che caratterizza il dipolo .

In una molecola polare (H_2O , HC_ℓ , N_2O =*protossido di azoto*) il baricentro delle cariche negative non coincide col baricentro delle cariche positive . Una molecola polare costituisce un dipolo elettrico. In generale un dielettrico polare non presenta proprietà elettriche macroscopiche in quando i dipoli sono orientati a caso e la somma vettoriale di tutti i momenti di dipolo $\vec{p}$ è zero.



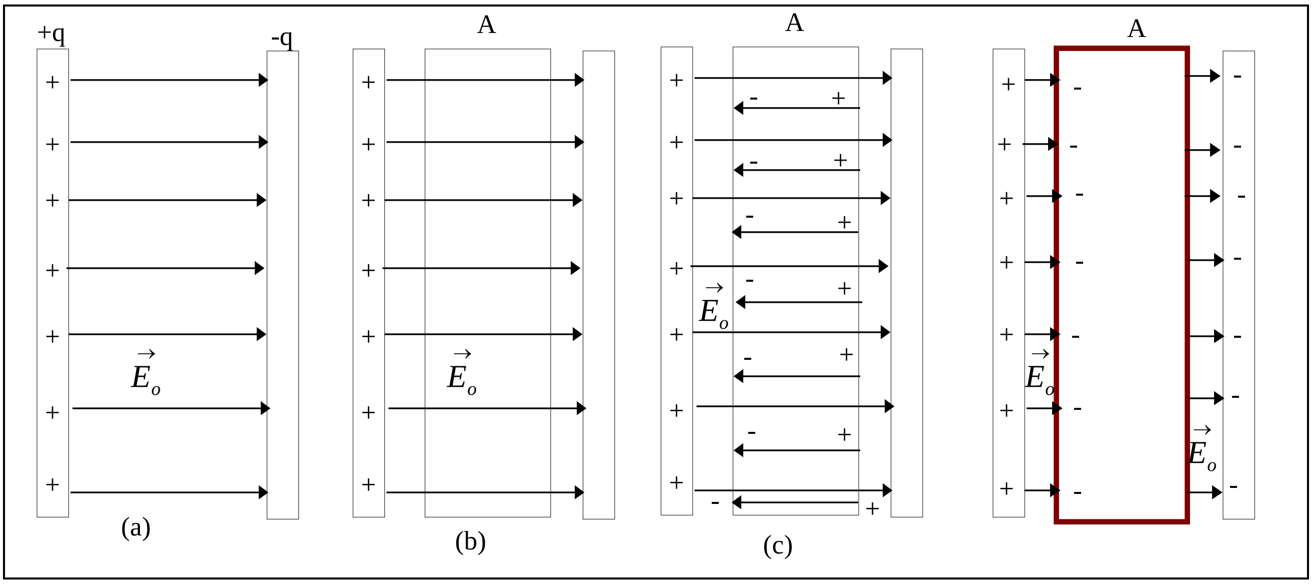
Molecole polari, cioè dotate di momento elettrico permanente di dipolo, orientate a caso in assenza di campo elettrico .

Una molecola polare immersa in un campo elettrico esterno $\vec{E}_o$ si orienta nella direzione e nel verso di $\vec{E}_o$.

In un dielettrico a struttura polare , a causa dell'agitazione termina, i dipoli sono disposti in tutte le direzioni in maniera che, allo stato neutro, esso non genera alcun campo elettrico. Gli effetti di un campo elettrico su una molecola polare sono quelli di **orientarla nella direzione del campo** (**polarizzazione per orientamento**). Le molecole polari subiscono anche una debolissima **polarizzazione per deformazione** trascurabile rispetto a quella per orientamento.

● Quando un corpo qualsiasi (conduttore o isolante) privo di carica viene immerso in un campo elettrico , si ha una nuova disposizione delle cariche in esso contenute . Se il corpo è un conduttore gli elettroni liberi si muovono all'interno di esso in modo da formare un volume equipotenziale in cui non esiste campo elettrico . Se il corpo non è un conduttore [20] , gli elettroni ed il nucleo positivo di ciascuna molecola vengono separati dal campo (si **formano i dipoli**) e siccome essi non sono liberi di muoversi, all'interno del corpo non si ha una regione **equipotenziale** .

La carica totale del corpo rimane zero, ma in certe regioni si hanno addensamenti di cariche positive o negative dette cariche indotte .

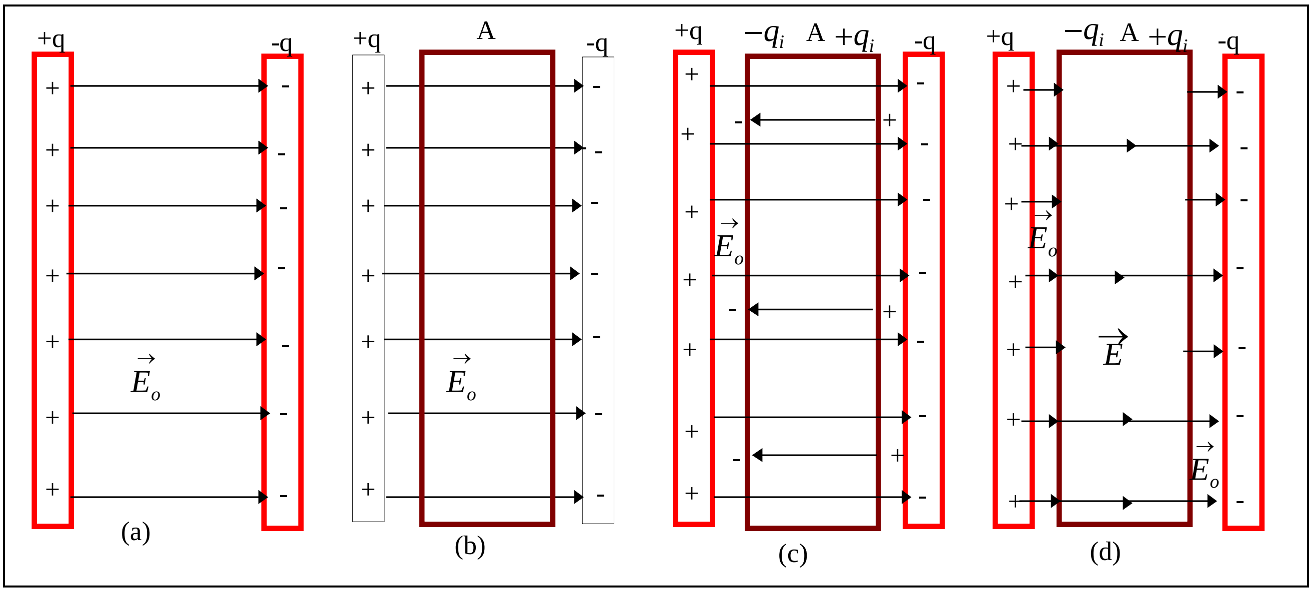


a) $\vec{E}_o$ è il campo elettrico esistente tra le armature del condensatore posto nel vuoto

b) Introduzione di un conduttore **A**

c) Cariche indotte e loro campo $\vec{E}_i$

d) Campo risultante quando un conduttore è posto tra le due armature



[20] le molecole diventano **dipoli** orientati nella direzione del campo

a) $\vec{E}_o$ è il campo elettrico esistente tra due armature cariche di un condensatore piano posto nel vuoto

b) Introduzione di un dielettrico **A**

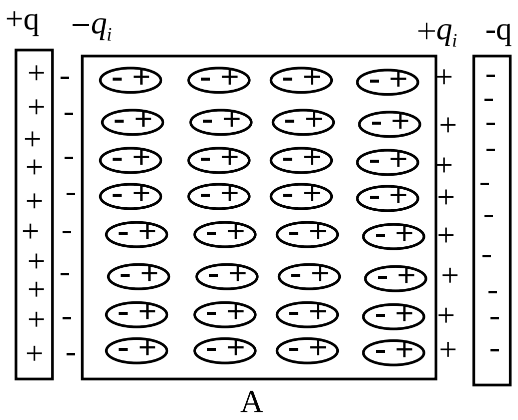
c) Cariche di superficie indotte e loro campo $\vec{E}_i$

d) campo risultante quando un dielettrico è posto tra le due armature cariche

Per semplicità studiamo il campo elettrico creato da un condensatore piano ed il corpo **A** da introdurre nel campo abbia la forma di una lastra piatta . Sia **q** la carica del condensatore , $\vec{E}_o$ il campo elettrico quando fra le armature c'è il vuoto , $\vec{E}$ quando c'è il corpo **A** .

● Il corpo **A** (conduttore inizialmente privo di cariche) è stato inserito nel campo senza toccare le armature . Le cariche libere nel conduttore cominciano a muoversi appena il conduttore viene messo nel campo , ma per il momento supponiamo che ciò non avvenga . Il campo $\vec{E}_o$ penetra quindi nel conduttore . Sotto l'influenza di tale campo gli elettroni liberi del conduttore si muovono verso la superficie sinistra di esso , lasciando una carica positiva su quella di destra . Questo moto continua fino a quando in tutti i punti interni al conduttori il campo $\vec{E}_i$ determinato dagli strati di cariche superficiali (**cariche indotte**) è uguale ed opposto al campo preesistente . A questo punto il moto delle cariche cessa . Le cariche accumulate sulla superficie sono dette **cariche indotte** . La carica totale del conduttore rimane **nulla** . All'interno del conduttore il campo risultante $\vec{E}$ è zero fig.(d)
Nel vuoto che rimane tra il conduttore e le armature del condensatore il campo elettrico rimane lo stesso di quello che esisteva prima che venisse inserito il conduttore , cioè $\vec{E}_o$. Le cariche indotte sulle due facce del conduttore sono uguali ed opposte in segno alle cariche esistenti sulle armature .

● Il dielettrico **A** è stato inserito fra le armature del condensatore piano . tanto nel caso della polarizzazione per orientamento quanto in quella per deformazione , la distribuzione delle cariche all'interno del dielettrico immerso nel campo esterno $\vec{E}_o$ sarà come quella illustrata nella figura (§)
L'effetto finale è un accumulo di carica positiva sulla faccia di destra della lastra e di carica negativa sulla faccia sinistra senza che alcun eccesso di carica appaia in qualsiasi volume nell'interno della lastra .



In questo processo gli elettroni sono spostati a distanze minori dei diametri atomici , quindi non c'è trasporto di cariche come accade quando una corrente percorre un conduttore .

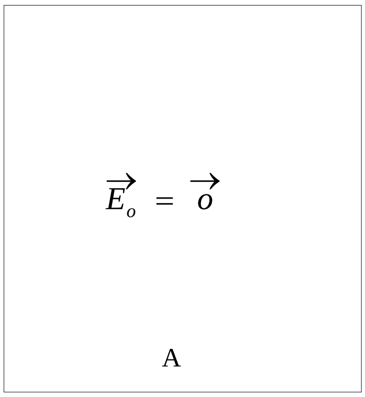
$\vec{E}_i$ è il campo elettrico generato nel dielettrico dalle **cariche superficiali indotte** q_i (< q). $\vec{E}_i$ ha la stessa direzione di $\vec{E}_o$, verso opposto e modulo minore

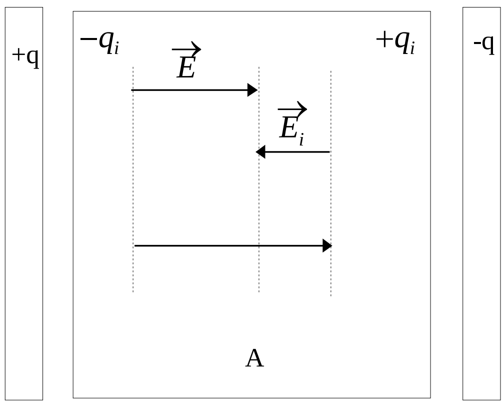
$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_i}$ è il **campo risultante** all'interno del dielettrico. $\vec{E}_i$ è opposto ad $\vec{E}_o$, ma siccome le cariche in un dielettrico non possono muoversi indefinitamente , il loro spostamento non è tale da determinare un **campo indotto** che uguagli in modulo il **campo esterno** .

In un dielettrico il campo elettrico all'interno è indebolito ma non ridotto a zero .

Conclusione

Se si pone un dielettrico in un campo elettrico $\vec{E}_o$, appaiono sul dielettrico cariche superficiali indotte che tendono a ridurre (ma non ad annullare) nel dielettrico il campo elettrico precedentemente esistente .

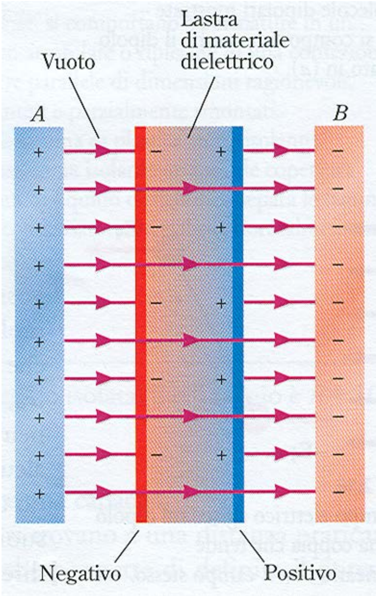


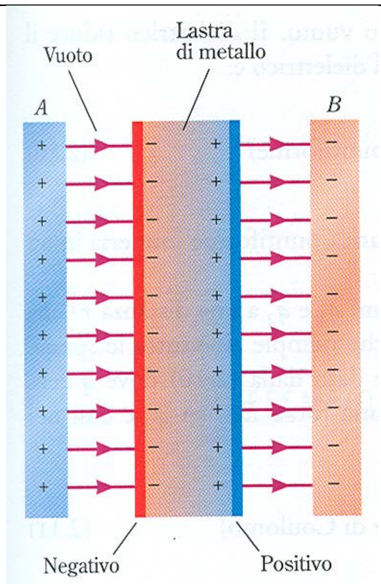


Sia $\vec{E}_o$ il campo elettrico tra le armature **A** e **B** di un condensatore piano posto neol vuoto, Se tra le armature poniamo una lastra di materiale dielettrico si verificano i seguenti fatti:

a) il campo elettrico $\vec{E}$ all'interno della lastra si indebolisce a causa della cariche indotte dalla polarizzazione del dielettrico

b) tra le armature **A** e **B** e la lastra il campo elettrico rimane lo stesso.



Sia $\vec{E}_o$ il campo elettrico tra le armature **A** e **B** di un condensatore piano posto neol vuoto, Se tra le armature poniamo una lastra metallica si verificano i seguenti fatti: a) il campo elettrico all'interno della lastra metallica, a causa della cariche indotte dalla polarizzazione del dielettrico, è nullo. Si ha il fenomeno dell'**induzione completa**. b) tra le armature **A** e **B** e la lastra metallica il campo elettrico rimane lo stesso.	

● In figura sono messi in evidenza il campo elettrico esistente fra le armature di un condensatore piano carico e le cariche indotte sulle superfici di un dielettrico adiacente alle armature, ma nel disegno , per chiarezza si è lasciato un poco di spazio .

Quando fra le due armature non c'è dielettrico, il campo $\vec{E}_o$ in un punto qualsiasi all'interno delle armature vale : $\boxed{E_o = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{q}{\varepsilon_o S}}$

Quando si introduce il dielettrico , in esso si generano delle cariche indotte q_i che generano a loro volta , all'interno del dielettrico , un campo indotto $\vec{E}_i$, tale che : $\boxed{E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_o} = \frac{q_i}{\varepsilon_o S}}$

Il campo risultante nel dielettrico è : $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_i}$

Scalarmente abbiamo : $\boxed{E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} - \dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_o} = \dfrac{q}{\varepsilon_o S} - \dfrac{q_i}{\varepsilon_o S}}$

Il seguente rapporto : $\chi = \dfrac{\sigma_i}{E} = \dfrac{q_i}{\varepsilon_o S E}$ $[\sigma_i = \chi E]$ dicesi **suscettività elettrica** del mezzo (dielettrico) .

Più grande è la suscettività del dielettrico , maggiori sono le **cariche indotte** in un dato campo elettrico. L'esperienza dimostra che a temperatura costante e per campi non troppo elevati la **suscettività** di un dato materiale è costante e indipendente da $\vec{E}$. Questo vuole dire che la densità delle cariche indotte è proporzionale al campo **E** .

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} - \dfrac{\chi E}{\varepsilon_o}$ $(\varepsilon_o + \chi)E = \sigma$ $\left(1 + \dfrac{\chi}{\varepsilon_o}\right)E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$ Ponendo $\varepsilon_r = 1 + \dfrac{\chi}{\varepsilon_o} > 1$ si ha :

$\boxed{E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = \dfrac{E_o}{\varepsilon_r}}$ $\boxed{\varepsilon_e = \dfrac{E_o}{E} > 1}$

ε_r è detta **costante dielettrica relativa** al mezzo che si considera (o **permettività** o **permeabilità dielettrica relativa**) ed è una grandezza adimensionata .

$\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$ = **costante dielettrica assoluta o permettività dielettrica assoluta**

$[\varepsilon] = \dfrac{[\sigma]}{[E]} = [M^{-1} \cdot L^{-3} \cdot T^4 \cdot I^2]$ $\{\varepsilon\} = \dfrac{F}{m} = \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$

Le equazioni $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} - \dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_o}$ $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{E_o}{\varepsilon_r}$ sono completamente equivalenti da un punto di vista fisico .

La prima esprime il campo risultante $\vec{E}$ nel dielettrico come differenza fra il campo delle cariche libere e quello delle cariche indotte . La seconda esprime **E** come una frazione del campo delle cariche libere . Le proprietà dielettriche di un materiale sono completamente individuate quando conosciamo una delle tre quantità χ , ε_r , ε . Le tre quantità sono legate dalle equazioni :

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_o} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \qquad \varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r = \varepsilon_o + \chi \qquad \chi = \varepsilon_o(\varepsilon_r - 1) = \varepsilon - \varepsilon_o$$

La sola ragione per cui si introducono tutte e tre le grandezze è per semplificare certi tipi di equazioni .

Osservazione

$$E = \frac{E_o}{\varepsilon_r} = \frac{q}{\varepsilon_o \varepsilon_r S} \qquad E = \frac{q}{\varepsilon_o S} - \frac{q_i}{\varepsilon_o S} \qquad \frac{q}{\varepsilon_o \varepsilon_r S} = \frac{q}{\varepsilon_o S} - \frac{q_i}{\varepsilon_o S} \qquad q = \varepsilon_r q - \varepsilon_r q_i$$

$\varepsilon_r q_i = (\varepsilon_r - 1)q \quad q_i = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)q \quad \varepsilon_r > 1 \Rightarrow \quad q_i < q$ cioè **la carica superficiale indotta** q_i **è sempre minore in valore assoluto della carica libera q** .

Conclusione

La presenza di un dielettrico fra le armature di un condensatore determina : 1) una diminuzione del campo elettrico e della $d.d.p.$ fra le armature 2) un aumento della capacità del condensatore .

In simboli abbiamo :

$\frac{C}{C_o} = \varepsilon_r$	$C = \varepsilon_r C_o$	$\frac{\Delta V_o}{\Delta V} = \varepsilon_r$	$\Delta V_o = \varepsilon_r \Delta V$	$C = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon \frac{S}{d}$

- Ad ogni dielettrico possiamo associare una **costante dielettrica relativa** ε_r definita come il rapporto tra la capacità di un condensatore quando tra le sue armature viene posto il dielettrico e quella dello stesso condensatore nel vuoto , ossia : $\boxed{\frac{C}{C_o} = \varepsilon_r}$ **[*]**

L'equazione [*] rappresenta una definizione operativa della costante dielettrica relativa , in quanto indica un metodo sperimentale per misurare ε_r e mostra che essa è un numero puro in quanto rapporto di due grandezze omogenee .

- La rigidità dielettrica, espressa in $\frac{kV}{mm}$, indica la massima $d.d.p.$ appplicabile alle facce di uno strato dielettrico dello spessore di $1mm$ senza che s'inneschi una scarica elettrica , con conseguente perforazione del dielettrico.

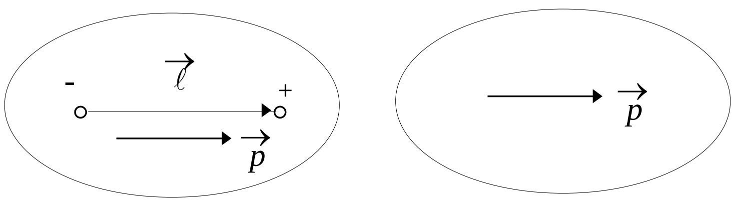
Risultati analoghi si trovano in tutti i fenomeni di elettrostatica quando al posto del vuoto mettiamo un dielettrico . In questo caso si ha una **diminuzione dell'intensità del campo** generato da una distribuzione di carica e di conseguenza una diminuzione della forza agente su una qualsiasi carica di prova q , cioè : $\frac{F_o}{F} = \varepsilon_r \qquad \frac{E_o}{E} = \varepsilon_r$

Le formule di elettrostatica valide nel vuoto continuano a sussistere se al posto di ε_o poniamo $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$.

Le equazioni dell'elettrostatica già ricavate nel vuoto, in un dielettrico assumono la forma:

$F = \frac{F_o}{\varepsilon_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{q\,q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q\,q_1}{r^2}$	Legge di Coulomb
$E = \frac{E_o}{\varepsilon_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$	Campo radiale generato da una carica puntiforme **Q**
$V = \frac{V_o}{\varepsilon_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$	Potenziale in un punto di un campo radiale generato dalla carica puntiforme **Q**
$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_o\varepsilon_r} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon}$	Teorema di Gauss
$C = \varepsilon_r C_o = \varepsilon_o\varepsilon_r\frac{S}{d} = \varepsilon_r\frac{S}{d}$	capacità di un Condensatore piano
$C = 4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r = 4\pi\varepsilon r$	Capacità di una sfera
$E = \frac{E_o}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$	**Teorema di Coulomb**

Osservazione N° 1



Rappresentazione schematica di una molecola polare. I centri della carica positiva e della carica negativa sono separati da una distanza ℓ . La molecola si comporta come un dipolo elettrico di momento $\vec{p} = q\,\vec{\ell}$. Il centro di carica è definito in maniera analoga al centro di massa , con la massa sostituita dalla carica . Spesso si può semplificare la descrizione del comportamento di una molecola polare in un campo elettrico sostituendo la complicata distribuzione di carica della molecola con un semplice dipolo elettrico costituito da due cariche $-q$ e $+q$ separate da una distanza ℓ ed avente lo stesso momento di dipolo della molecola.

Osservazione N° 2

La maggior parte delle molecole e tutti gli atomi sono non polari. Questo significa che il centro della carica positiva ed il centro della carica negativa coincidono e non c'è un momento di dipolo elettrico permanente.

Ma se si applica un campo elettrico esterno , le orbite degli elettroni vengono modificate ed il centro di massa degli elettroni non coincide più col centro di massa delle cariche positive . Questo significa che c'è stata una separazione del tratto ℓ della distribuzione delle cariche positive e negative inducendo così un momento di dipolo.

Poiché la carica positiva è spostata nella direzione del campo e la carica negativa è spostata nella direzione del campo ma in verso opposto, il momento di dipolo indotto è sempre orientato come il campo elettrico esterno . Perciò non si esercita sul dipolo un momento motore in quanto l'angolo ϑ fra il momento di dipolo $\vec{p}$ e l'intensità del campo elettrico $\vec{E}$ è zero.

Però se il campo elettrico esterno non fosse uniforme, sul dipolo agirebbe una forza esterna che lo farebbe traslare.