Unità didattica N°32:

Equazioni di Maxwell Onde elettromagnetiche

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo: equazioni di Maxwell

Le proprietà locali dei campi elettrici e magnetici costanti nel tempo, che abbiamo studiato nei capitoli precedenti, sono descritte nel vuoto dalle quattro equazioni di Maxwell:

Prima equazione di Maxwell

La prima equazione di Maxwell è una conseguenza della legge di Coulomb dell'elettrostatica , ma è formulata più convenientemente in termini della **legge di Gauss**: $\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_o} \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i$

Il flusso del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie diviso la costante dielettrica del vuoto ε_o.

Nella legge di Gauss è implicito che tutte le linee di un campo elettrico debbono iniziare e terminare su cariche elettriche. Per convenzione queste linee sono scelte con **inizio su cariche positive** e **termine su cariche negative**. Le cariche elettriche sono i **poli** del campo elettrico.

Seconda equazione di Maxwell

La seconda equazione di Maxwell mette in evidenza la differenza essenziale tra le linee del campo magnetico e le linee del campo elettrico. Le **linee del campo magnetico**, che sono dovute a correnti elettriche, non partono o si fermano nello spazio ma formano delle linee continue chiuse. Le **linee del campo magnetico** si chiudono sempre su se stesse perché non esiste l'equivalente magnetico di una carica elettrica isolata; **non esistono monopoli magnetici**. La seconda legge di Maxwell si identifica con la **legge di Gauss per il magnetismo** la quale afferma quanto segue: Il **flusso del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso una superficie chiusa è sempre nullo**. $\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$

Terza equazione di Maxwell

La terza equazione di Maxwell stabilisce semplicemente che un campo magnetico $\vec{B}$ variabile nel tempo genera nello spazio circostante un campo elettrico $\vec{E}$. Essa si identifica con la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Newmann-Lenz la quale stabilisce che un flusso magnetico variabile nel tempo genera una $f.e.m.$ indotta.

In simboli abbiamo: $$C_{l.c.}(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{\Delta t} = \varepsilon$$

la circuitazione del campo elettrico lungo un circuito è uguale al rapporto, cambiato di segno , tra la variazione del flusso del campo magnetico $\vec{B}$ concatenato col circuito e l'intervallo di tempo in cui è avvenuta tale variazione.

Quarta equazione di Maxwell

La quarta equazione di Maxwell si basa sulla legge della circuitazione di Ampere espressa dalla relazione $$\mathbf{C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_o \sum_{k=1}^{n} i_k}$$

Abbiamo scritto le equazioni fondamentali di Maxwell per il campo elettromagnetico. Queste quattro equazioni, insieme con le due equazioni che forniscono le definizioni operative dei campi elettrico e magnetico, ci permettono di risolvere tutti i problemi dell'elettromagnetismo. Abbiamo già introdotto queste due equazioni: $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$ $\qquad$ $\vec{f}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

Esse ci dicono semplicemente che si può ottenere l'intensità del campo elettrico $\vec{E}$ e del campo magnetico $\vec{B}$ misurando la forza che questi campi esercitano rispettivamente su una carica **q** in quiete o in moto con velocità $\vec{v}$. **Il campo elettrostatico $\vec{E}$, conservativo, è generato dalle cariche elettriche fisse ed il campo magnetico statico $\vec{B}$,non conservativo,è generato dalle cariche elettriche in moto stazionario. A parte questo fatto che le sorgenti dei campi statici sono sempre le cariche elettriche, non esiste in un dato sistema di riferimento inerziale nessun'altra connessione tra i fenomeni elettrici e magnetici statici e le relative coppie di equazioni possono essere risolte separatamente. Esperimenti condotti da Faraday in Inghilterra e indipendentemente da Henry negli Stati Uniti misero in evidenza una diversa connessione tra elettricità e magnetismo: un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo che in opportuni dispositivi può dare luogo ad una forza elettromotrice e ad una corrente in un circuito chiuso. Un fenomeno analogo si ottiene in casi di moto relativo tra un circuito ed un campo magnetico costante. Successivamente Maxwell dimostrò che per rendere compatibili le equazioni dei fenomeni variabili con la legge di conservazione della carica nella sua forma più generale occorreva postulare che un campo elettrico variabile nel tempo desse origine ad una campo magnetico. Maxwell arrivò così ad una forma più generale delle equazioni che regolano i fenomeni elettrici e magnetici variabili, la quale contiene le formule scritte in precedenza come caso limite per fenomeni statici.**

Quando generalizziamo la legge della circuitazione di Ampere considerando sia le correnti reali che le correnti di spostamento otteniamo la **quarta equazione di Maxwell** che , in termini matematici, assume la forma: $C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_o \sum_{k=1}^{n} i_k + \mu_o \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_o \sum_{k=1}^{n} i_k + \mu_o \varepsilon_o \cdot \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t}$ **[*]**

La circuitazione del campo magnetico $\vec{B}$ lungo un percorso chiuso è uguale al prodotto della permeabilità magnetica del vuoto μ_o per la somma della corrente effettiva e di quella di spostamento. Questa è la quarta equazione di Maxwell , basata sulla sua brillante intuizione che un campo magnetico può essere generato non solo da una corrente elettrica ordinaria ma anche da un campo elettrico variabile. Fu questo il passo cruciale necessario per introdurre la simmetria fra i campi elettrico e magnetico rendendo cosi completa la **teoria elettromagnetica**. La grande utilità della **corrente di spostamento di Maxwell** sta nel fatto che essa ci aiuta sia a prevedere che a capire la propagazione delle onde elettromagnetiche nello spazio. **Caratteristica fondamentale è che un campo elettrico ed un campo magnetico variabili non possono esistere separatamente , ma vanno riuniti sotto il concetto più generale di campo elettromagnetico. Inoltre la soluzione delle equazioni di Maxwell prevede che il campo elettromagnetico possa propagarsi con velocità che risulta uguale a quella della luce: quest'ultima viene pertanto identificata come un fenomeno elettromagnetico rapidamente variabile.**

Se guardiamo attentamente il secondo addendo dell'equazione $C_{\ell.c.}(\vec{B}) = \mu_o \sum_{k=1}^{n} i_k + \mu_o \varepsilon_o \cdot \frac{d\,\Phi_S(\vec{E})}{d\,t}$,

notiamo che iln termine $\varepsilon_o \cdot \frac{d\,\Phi_S(\vec{E})}{d\,t}$ deve avere le dimensioni di una corrente. Anche se non vi è alcun moto di cariche e quindi l'appellativo non ha apparente giustificazione, è vantaggioso dare a questo termine il nome storico di corrente di spostamento ed indicarlo col simbolo i_s .

Cioè: $i_s = \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$ (**corrente di spostamento**)

Si può dire che un campo magnetico può essere generato sia da una corrente di conduzione i sia da una corrente di spostamento i_s e possiamo scrivere l'equazione **[*]** come:

$$C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_o \sum_{k=1}^{n} i_k + \mu_o \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_o \left(\sum_{k=1}^{n} i_k + \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} \right) = \mu_o \left(i_{l.c.} + \varepsilon_o \lim_{x \to -\infty} i_{s,l.c} \right)$$

(**Legge di Ampère-Maxwell**)

In cui $i_{s,\ell.c}$ è la **corrente di spostamento** racchiusa entro la linea della circuitazione. Si riprende l'idea della continuità della corrente (**corrente di conduzione** + **corrente di spostamento**).

La corrente di spostamento implica un campo elettrico variabile e non un trasporto di carica.

Calcoliamo la **corrente di spostamento** i_s nel caso di un condensatore piano. Quando ai capi di un condensatore piano è applicata una **f.e.m.** ε continua, fra le sue armature non passa corrente e si ha soltanto una separazione di cariche che passano da una armatura all'altra. [In realtà si ha un passaggio di corrente di spostamento per il tempo brevissimo della separazione delle cariche elettriche da una armatura all'altra] Se la **f.e.m.** è alternata lo spazio compreso tra le due armature è attraversato da una corrente di spostamento i_s consistente nella propagazione da una armatura all'altra di un campo elettromagnetico variabile nel tempo. Vogliamo dimostrare che la corrente di spostamento tra le due armature del condensatore vale: $\mathbf{i_s = \varepsilon_o \cdot \dfrac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}}$

Se il condensatore è stato caricato mediante una **f.e.m.** continua il campo elettrico $\vec{E}$ tra le sue armature è uniforme ed il suo modulo vale: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} = \dfrac{q}{\varepsilon_o S}$ dove S è la superficie di ciascuna armatura e q è la carica del condensatore. $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} = \dfrac{q}{\varepsilon_o S} \quad \Rightarrow \quad q = \varepsilon_o S E$

Quando colleghiamo le armature di un condensatore con un generatore di c.a. il campo elettrico $\vec{E}$ esistente tra le sue armature non è più uniforme in quanto la carica q posseduta dal condensatore varia al variare del tempo. Dunque, mentre il circuito è percorso dalla corrente alternata, la quantità di carica presente su ciascuna armatura cambia nel tempo e modifica il campo elettrico nello spazio compreso tra le due armature.. Di conseguenza si ha una variazione del flusso $\Phi\left(\vec{E}\right)$ del campo elettrico attraverso tutte quelle superfici che passano tra le due armature.

Possiamo scrivere: $q = q(t) = \varepsilon_o S E(t)$ $\qquad dq = \varepsilon_o \cdot d(SE)$

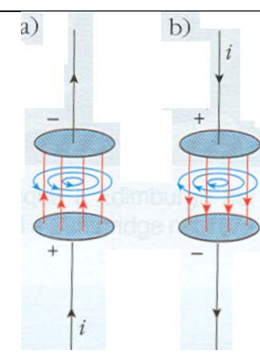
La corrente che attraversa lo spazio interno alle due armature del condensatore vale:

$$i = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_o \cdot \frac{d(SE)}{dt} = \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt} = i_s$$

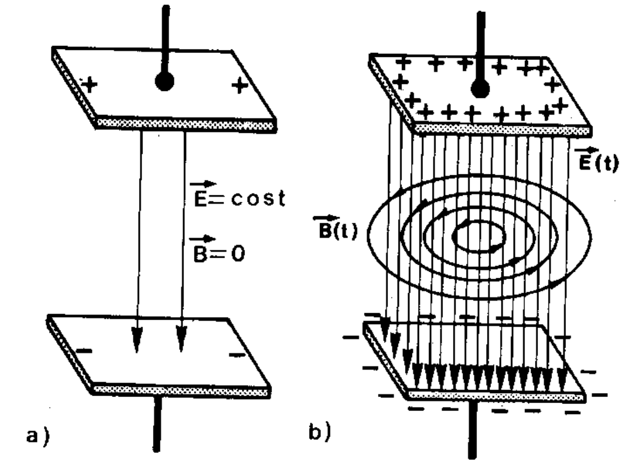
Avendo sempre pensato alla corrente elettrica come a un flusso di cariche, l'idea di assimilare il termine a una corrente può apparire sconcertante.

Così l'ipotesi di Maxwell circa l'esistenza della corrente di spostamento sembra, a prima vista, un artificio matematico. In realtà, un'analisi più approfondita mette in luce il significato fisico di questa ipotesi, da cui, come vedremo, scaturisce anche la descrizione teorica della propagazione delle onde elettromagnetiche. Maxwell affermò che la corrente di spostamento produce un effetto magnetico al pari della corrente dovuta al movimento delle cariche. Dobbiamo perciò pensare che nella regione di spazio compreso fra le armature del condensatore abbia origine un campo magnetico. Avendo preso in considerazione un condensatore piano ad armature circolari, la corrente di spostamento che fluisce da un'armatura all'altra attraverso lo spazio vuoto è analoga alla corrente che scorre in un filo cilindrico. Le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente di spostamento sono pertanto circolari e con centro sull'asse di simmetria del condensatore. In figura tali linee sono rappresentate sia che la corrente di conduzione (e quindi quella di spostamento) scorra verso l'alto sia che scorra verso il basso, in entrambi i casi con intensità i crescente. Questi risultati possono essere dedotti analizzando da un punto di vista matematico l'equazione 4 , ma anche invocando il principio di simmetria: come un campo magnetico variabile nel tempo produce un campo elettrico, allo stesso modo un campo elettrico variabile nel tempo produce un campo magnetico.

In base all'ipotesi di Maxwell, il campo elettrico variabile nel tempo presente fra le armature del condensatore genera un **campo magnetico indotto**. Le linee del campo magnetico sono mostrate nei due casi in cui il campo elettrico, d'intensità crescente, sia diretto **(a)** verso l'alto e (b) verso il basso



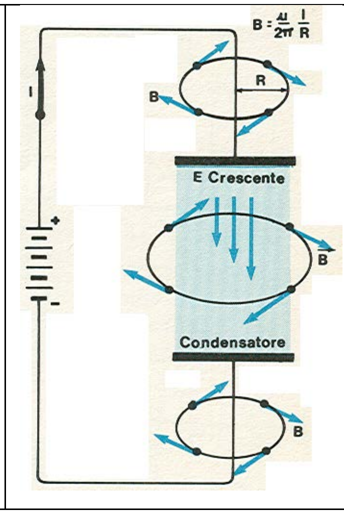
Ad un **campo elettrico** $\vec{E}$ **uniforme** **(a)** **non si accompagna la presenza di un campo magnetico** $\vec{B}$. Se invece il campo elettrico $\vec{E} = \vec{E}(t)$ varia nel tempo **(b)** si genera nello spazio compreso tra le due armature un campo magnetico $\vec{B}$.



Ogni qual volta in una certa regione di spazio c'è un campo elettrico variabile nel tempo nasce in quella stessa zona di spazio un campo magnetico anch'esso variabile nel tempo.

Maxwell riteneva che una variazione del campo elettrico $\vec{E}$ creasse una corrente di spostamento i_s il cui valore era: $\mathbf{i_s = \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}}$.

L'introduzione di questo nuovo concetto **(a)** permetteva di mantenere la nozione di continuità della corrente in un circuito, anche in presenza di un condensatore **(b)** e stabiliva che un campo magnetico può essere prodotto non solo da una **corrente elettrica** (intesa come flusso ordinato di cariche elettriche) ma anche da un campo elettrico variabile



Equazioni di Maxwell e di Lorentz nel caso statico.

Prima di affrontare lo studio dei campi elettromagnetici variabili nel tempo è opportuno riassumere i risultati finora trovati nel vuoto e per campi statici. Il campo elettrico statico ed il campo magnetico statico (generati, rispettivamente, da cariche elettriche in quiete e da correnti costanti) sono descritti dalle seguenti equazioni:

1) $$\boxed{\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i}$$ (1)

= teorema di Gauss
Flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa

conservazione della carica elettrica

2) Seconda equazione di Maxwell

$$\boxed{\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0}$$ (2)

Teorema di Gauss
campo solenoidale
Flusso del vettore $\vec{B}$ attraverso una superficie chiusa

Inesistenza di monopoli elettrici

3) III equazione di Maxwell

(3) $$\boxed{C_{l.c.}(\vec{E}) = 0}$$

Campo conservativo
Circuitazione di $\vec{E}$ attraverso una linea chiusa l.c.
Teorema di Stokes

4) IV equazione di Maxwell

(4) $$\boxed{C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{1}^{M} {}_K\, i_K}$$

Circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo una linea chiusa l.c.

Relazione tra campo magnetico e corrente.
Teorema di Stokes

5) Equazione di Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$ (5)

forza esercitata dai campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sulla carica elettrica q.

Come si vede, le due equazioni che contengono le grandezze elettriche non contengono quelle magnetiche e viceversa. Le prime quattro equazioni non stabiliscono alcun legame

fra campo elettrico e campo magnetico.
Le prime quattro equazioni ci permettono di determinare i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ nel vuoto una volta note le cariche elettriche e le correnti.
L'equazione (5) dà la forza esercitata dai campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ su una carica elettrica q.
Le equazioni (1) e (2) collegano i valori dei campi elettrico e magnetico su una superficie chiusa (s.c.) con le sorgenti (cariche elettriche) contenute in essa.
Esse hanno validità universale.
Le equazioni (3) e (4) collegano i valori dei campi elettrico e magnetico sulla linea chiusa (l.c.) alle correnti che attraversano una qualsiasi superficie limitata dalla l.c.
Esse sono valide solo in casi particolari, cioè per campi elettromagnetici che non variano nel tempo e per linee chiuse fisse.
La equazione (5) afferma che la forza agente su una carica elettrica è la somma di due termini, uno di tipo elettrostatico, presente anche se la carica è ferma ($v=0$) e l'altro di tipo magnetico, proporzionale

alla velocità della carica (e nullo quando la carica è in quiete). Tale equazione è sempre valida.

La situazione descritta da tali equazioni mostra che il campo $\vec{E}$ e il campo $\vec{B}$ non sono tra loro correlati nel caso statico: essi sono indipendenti uno dall'altro.

Però sappiamo che un campo magnetico variabile produce un campo elettrico.

Per potere descrivere i due campi nel caso generale occorre trovare delle equazioni che contengano sia $\vec{E}$ sia $\vec{B}$ e che si riducano alle equazioni precedenti nel caso particolare in cui i campi siano costanti nel tempo.

A questo scopo osserviamo subito che il campo elettrico prodotto da un campo magnetico variabile, a differenza del campo elettrico statico, può mettere in moto le cariche lungo un circuito chiuso.

Questo significa che la sua circuitazione lungo un percorso chiuso (l. c.) non può essere nulla.

Il valore di tale circuitazione si ricava dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz, cioè:

$$\boxed{\underset{l.c.}{C}(\vec{E}) = -\frac{d\,\phi(\vec{B})}{dt} = \mathcal{E}} \qquad (6)$$

Il campo elettrico non è più conservativo in quanto la sua circuitazione è diversa da zero.

Maxwell dimostrò che la (6) non dipende dal particolare cammino scelto per il calcolo di $\underset{l.c.}{C}(\vec{E})$ e che, inoltre, è irrilevante il fatto che a tale cammino corrisponda realmente un circuito (cioè un filo conduttore): in altre parole, possiamo calcolare $C(\vec{E})$ lungo un qualsiasi cammino, scelto arbitrariamente in una qualsiasi regione dello spazio sede di un campo magnetico variabile.

In conclusione la (6) ha validità generale ed afferma quanto segue:

«un campo magnetico variabile genera nello spazio un campo elettrico variabile la cui circuitazione, calcolata lungo un qualsiasi cammino chiuso, è proporzionale alla variazione istantanea del flusso del campo magnetico concatenato con quel circuito»

Osserviamo infine che la differenza tra l'equazione di Faraday-Neumann-Lenz e quella di Maxwell sembrerebbe ridursi ad un semplice cambiamento di nomi: ciò che nella relazione $\mathcal{E} = -\dfrac{d\,\phi(\vec{B})}{dt}$ viene chiamata forza elettromotrice indotta, nella ⑥ prende il nome di circuitazione. In realtà, il passaggio dalla relazione $\mathcal{E} = -\dfrac{d\,\phi(\vec{B})}{dt}$ alla relazione

$$C_{l.c.}(\vec{E}) = -\frac{d\,\phi(\vec{B})}{dt}$$

presuppone un profondo cambiamento concettuale: mentre Neumann si occupa ancora delle cariche elettriche e delle forze che su di esse agiscono, Maxwell rivolge la sua attenzione esclusivamente al campo.

Concludendo possiamo riscrivere le prime 4 equazioni precedenti nella seguente forma:

$$(1')\quad \Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}\ ;\qquad \Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0 \quad (2')$$

$$(3')\quad C_{l.c.}(\vec{E}) = -\frac{d\,\Phi(\vec{B})}{dt} \qquad C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum i_K \quad (4')$$

La corrente di spostamento

Gli esperimenti di Faraday avevano dimostrato che un campo magnetico variabile nel tempo crea un campo elettrico. E' allora del tutto naturale domandarsi se un campo elettrico variabile nel tempo può creare un campo magnetico.

La risposta affermativa a questa domanda è dovuta a Maxwell, il cui contributo più originale nella sistemazione da lui data alle leggi dell'elettromagnetismo fu l'introduzione nella quarta equazione di un nuovo termine contenente la variazione del flusso del campo elettrico $\vec{E}$.

Egli scoprì che un campo elettrico variabile nel tempo crea un campo magnetico indipendentemente dalla presenza di correnti o conduttori.

Nelle equazioni dei campi modificate per tenere conto dell'induzione elettromagnetica

① $\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \dfrac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$ $\qquad$ $\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$ ②

③ $C_{l.c.}(\vec{E}) = -\dfrac{d\,\Phi(\vec{B})}{dt}$ $\qquad$ $C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum i_K$ ④

compariva una asimmetria:
« mentre la circuitazione di $\vec{E}$ risultava legata al flusso di $\vec{B}$, nessuna relazione sembrava esserci tra la circuitazione di $\vec{B}$ ed il flusso di $\vec{E}$ ».
Sulla base di questa osservazione, Maxwell si chiese se non fosse il caso di modificare anche la quarta equazione $\left[\underset{l.c.}{C}(\vec{B}) = \mu_0 \Sigma i_k \right]$ e la risposta, affermativa, gli venne dallo studio di un paradosso che aveva suscitato molte discussioni tra i fisici del suo tempo. Il paradosso è il seguente.
Quando la corrente non è stazionaria, il teorema della circuitazione di Ampere non è valido come si può vedere nel processo di scarica di un condensatore.
Si considerino due armature metalliche affacciate e dotate di cariche di segno opposto $+Q$ e $-Q$ (condensatore piano) collegate mediante un filo conduttore.
Se chiudiamo l'interruttore I, attraverso il conduttore si ha un flusso di cariche positive dall'armatura A all'armatura B (corrente $i = \frac{dQ}{dt}$) fino a quando

le due armature si neutralizzano.
La quarta equazione di Maxwell come è stata scritta nel caso statico afferma che la circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo la una linea chiusa l è proporzionale all'intensità di corrente che attraversa una qualsiasi superficie avente l per contorno.
Esaminando la linea l della figura, otteniamo il seguente risultato paradossale

$$\boxed{C_l(\vec{B}) = \mu_0 i} \qquad (6)$$

se consideriamo la superficie S_2 di contorno l che taglia il filo conduttore:

$$\boxed{C_l(\vec{B}) = 0} \qquad (7)$$

se consideriamo invece la superficie S_1 di contorno l che passa tra le armature del condensatore non incontrando il filo conduttore.
Per eliminare tale contraddizione, Maxwell ipotizzò che anche tra le due armature, pur non essendovi un effettivo passaggio di corrente, vi sia una corrente

chiamata da Maxwell corrente di spostamento i_s.
Per calcolare e giustificare tale corrente, Maxwell osservò che il campo elettrico esiste tra le due armature quando sono cariche e si annulla allorchè esse si neutralizzano. Pertanto, contemporaneamente al passaggio della corrente i nel filo, si ha una variazione del campo elettrico $\vec{E}$ tra le armature e di conseguenza una variazione del flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie chiusa $S = S_1 + S_2$.

$$\underset{S}{\Phi}(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow d_S\phi(\vec{E}) = \frac{dQ}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\frac{d\phi_S(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{i}{\varepsilon_0}$$

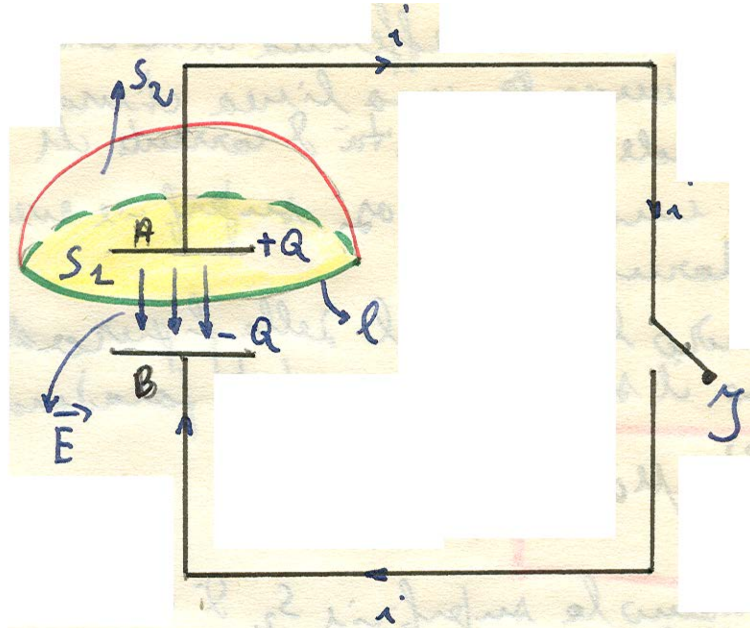
Se poniamo $\boxed{i_s = \varepsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}}$

le equazioni (6) e (7) danno lo stesso risultato e la contraddizione viene eliminata.

Il merito di Maxwell fu quello di avere rilevato questa discrepanza e di avere completato la quarta equazione scrivendola nella forma generalizzata:

$$\boxed{\underset{l.c.}{C}(\vec{B}) = \mu_0 \Sigma i_k + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\,\phi(\vec{E})}{dt}} \qquad (8)$$

Una caratteristica significativa della generalizzazione di Maxwell è che un campo magnetico può essere prodotto da un campo elettrico variabile oltre che da correnti elettriche vere (cioè da un flusso ordinato di cariche elettriche).
Con tale ardita ipotesi si può dire che sia stato completato l'elettromagnetismo classico. Innumerevoli conferme sperimentali hanno mostrato la correttezza di tale ipotesi da cui scaturì la sorprendente scoperta che la luce è un fenomeno elettromagnetico.
La corrente di spostamento e la legge delle correnti indotte di Faraday-Neumann-Lenz stabiliscono una simmetria tra i campi elettrici e magnetici variabili nel tempo. Si osservi che nel caso di campi non stazionari non è più lecito considerare $\vec{E}$ e $\vec{B}$ come entità indipendenti.



Due superfici S_1 ed S_2 limitate dalla stessa curva chiusa l. La corrente d'intensità i attraversa la superficie S_2 ma non la superficie S_1. Il teorema di Ampere, che stabilisce una relazione fra la circuitazione di $\vec{B}$ lungo la curva l e l'intensità della corrente totale che attraversa qualunque superficie limitata da l, non è valido quando la corrente non è continua, come in questo caso, in cui si arresta sull'armatura del condensatore. Applicando il teorema della circuitazione nella forma datagli da Ampere si ottiene il seguente paradosso:

$C(\vec{B}) = 0$ o $\left[C_l(\vec{B}) = \mu_0 i\right]$ se scegliamo come superficie che si appoggia ad l S_1 $[S_2]$.

Le equazioni di Maxwell in forma elementare

I	$\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_o} \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i$	**Legge di Gauss per il campo elettrico**
II	$\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$	**Legge di Gauss per il campo magnetico**
III	$C_{\ell.c.}(\vec{E}) = -\frac{d\,\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{d\,t} = -\frac{\Delta\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{\Delta t} = \varepsilon$	Legge di **Faraday-Newmann-Lenz_Henry**
IV	$C_{\ell.c.}(\vec{B}) = \mu_o \sum_{k=1}^{n} i_k + \mu_o \varepsilon_o \cdot \frac{d\,\Phi_S(\vec{E})}{d\,t} = \mu_o \sum_{k=1}^{n} i_k + \mu_o \varepsilon_o \cdot \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t}$	Legge di **Ampère-Maxwell**

Le equazioni di Maxwell in forma integrale

I	$\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \oint_{s.c} \vec{E} \times \vec{n}\, d\,S = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_o}$	**Legge di Gauss per il campo elettrico**
II	$\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = \oint_{s.c.} \vec{B} \times \vec{n}\, d\,S = 0$	**Legge di Gauss per il campo magnetico**
III	$C_{\ell.c.}(\vec{E}) = \oint_{\ell.c.} \vec{E} \times d\,\vec{\ell} = -\frac{d}{d\,t} \int_S \vec{B} \times \vec{n}\, d\,S$	Legge di **Faraday-Newmann-Lenz_Henry**
IV	$C_{\ell.c.}(\vec{B}) = \oint_{\ell.c.} \vec{B} \times d\,\vec{\ell} = \mu_o \sum_{k=1}^{n} i_k + \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{d\,t} \int_S \vec{E} \times \vec{n}\, d\,S$	Legge di **Ampère-Maxwell**

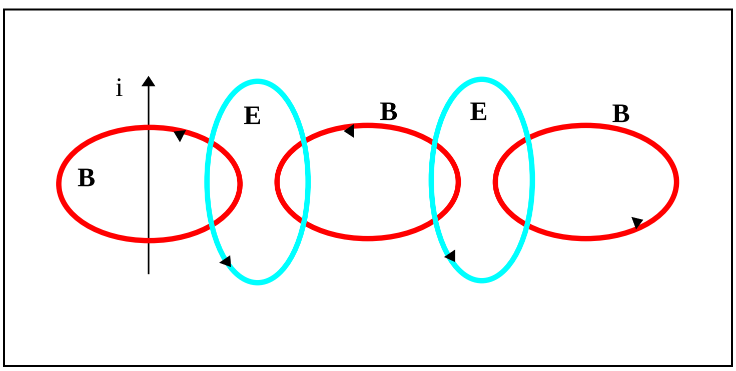
Le equazioni di Maxwell in forma differenziale

I	$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$	**II**	$div\,\vec{B} = 0$
III	$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	**IV**	$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_o J + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t}$

Natura delle onde elettromagnetiche

Una volta capito il contenuto delle equazioni di Maxwell, la natura della **onde elettromagnetiche** diviene più chiara. **Campi elettrici variabili nel tempo** muovendosi nello spazio generano dei campi magnetici anch'essi variabili nel tempo. Questi campi magnetici variabili a loro volta producono campi elettrici. Pertanto anche nelle regioni dello spazio nelle quali non vi sono cariche e non vi sono magneti e non vi è alcuna corrente reale, possono esistere **onde elettromagnetiche**.

Avviene continuamente che campi elettrici variabili generano campi magnetici e questi a loro volta generano campi elettrici. Col trascorrere del tempo l'**intero pacchetto di campi elettrici e magnetici** si muove continuamente attraverso lo spazio in quanto ogni campo generato si trova in una regione diversa da quella del campo variabile che l'ha generato. Perciò l'energia dei campi elettrico e magnetico è trasportata attraverso lo spazio dalle onde elettromagnetiche anche in regioni nelle quali non esiste materia. Il lavoro di Maxwell ha suggerito l'idea che sia questo il modo col quale anche la luce si propaga nello spazio.



- La **propagazione di un'onda elettromagnetica**. Un campo magnetico variabile $\vec{B}$ genera un campo elettrico $\vec{E}$ che a sua volta genera un campo magnetico $\vec{B}$ e cosi via . Così si trasporta attraverso lo spazio energia elettromagnetica .

Vediamo, in un caso particolare, quale può essere la genesi di una **perturbazione elettromagnetica**. Supponiamo che in una certa regione dello spazio ed in un certo istante si determini una variazione del campo elettrico, originato, per esempio, da un moto accelerato di cariche elettriche. Nei punti immediatamente vicini si genera, per la **quarta equazione di Maxwell**, un campo magnetico anch'esso variabile nel tempo. La variazione del campo magnetico, per la **terza equazione di Maxwell**, genera nei punti immediatamente vicini un campo elettrico anch'esso variabile, e cosi di seguito. Nasce in tal modo una **perturbazione elettromagnetica** che si propaga nello spazio.

Proprietà delle onde elettromagnetiche

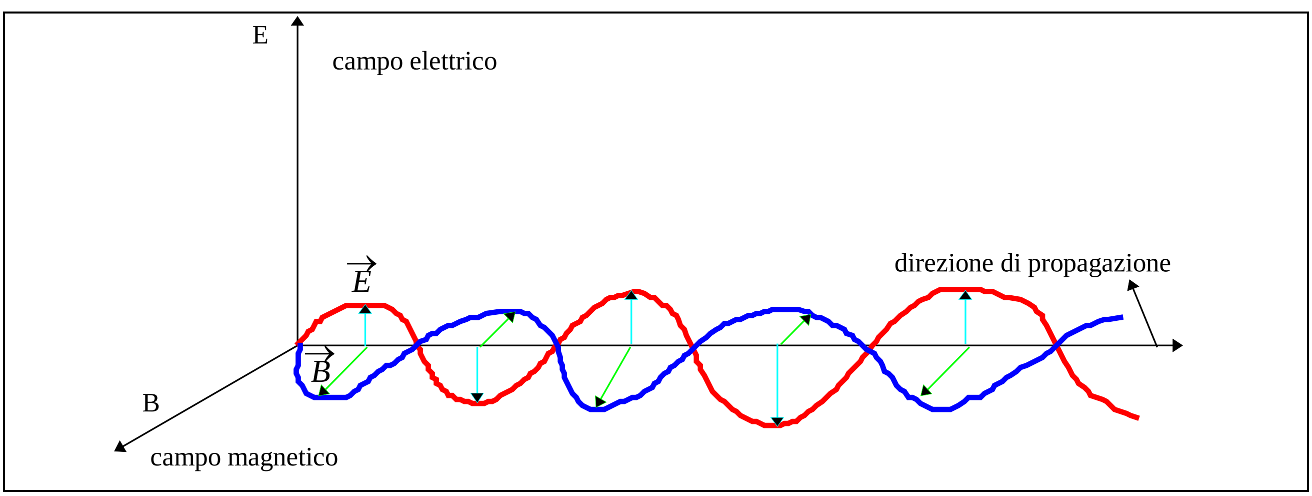
● Le **onde elettromagnetiche** sono **onde trasversali**. Infatti, il campo elettrico $\vec{E}$ ed il campo magnetico $\vec{B}$ che sono tra loro perpendicolari sono perpendicolari anche alla direzione di propagazione.

● Tutte le **onde elettromagnetiche** si propagano nel vuoto con la stessa velocità: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$

In un mezzo di **costante dielettrica** ε e di **permeabilità magnetica** μ , la velocità di propagazione delle **onde elettromagnetiche** risulta: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$. Il valore della velocità di propagazione delle **onde elettromagnetiche** nel vuoto coincideva con buona approssimazione con quello della luce. Questo fu un risultato clamoroso , che mise in evidenza lo straordinario potere unificante delle equazioni di Maxwell. Egli , avendo notato che le onde elettromagnetiche e la luce, oltre ad essere caratterizzate entrambe da vibrazioni trasversali , si propagano con la stessa velocità, avanzò l'ipotesi della **natura elettromagnetica** della luce.

● I vari tipi di onde elettromagnetiche differiscono fra loro per la frequenza ν e per la loro lunghezza d'onda λ . Frequenza e lunghezza d'onda sono legate fra loro dalla seguente relazione:

$\lambda \cdot \nu = c$ dove **c** rappresenta la velocità della luce nel vuoto .



Rappresentazione di un'onda elettromagnetica sinusoidale polarizzata rettilineamente. Le vibrazioni del campo elettrico e del campo magnetico avvengono in piani ortogonali fissi. Si noti che i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono costantemente in fase , oltre che in un dato istante, anche nei vari punti dello spazio, anche in ogni punto nei successivi istanti.

Onde elettromagnetiche di tipo sinusoidale

Abbiamo detto che un'onda elettromagnetica consiste in un campo elettrico ed in un campo magnetico oscillanti. Tutte le possibili frequenze che le onde elettromagnetiche possono assumere costituiscono lo **spettro**, del quale una porzione piccolissima è visibile sotto forma di luce. Le equazioni che descrivono un' onda elettromagnetica piana sinusoidale, o **monocromatica** sono:

$$\mathbf{E = E_m \cdot \sin(kx - \omega t) = E_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = E_m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]}$$

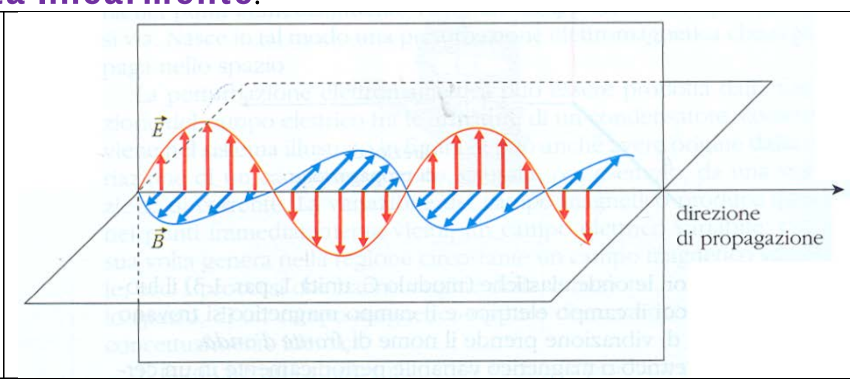
$$\mathbf{B = B_m \cdot \sin(kx - \omega t) = B_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = B_m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]}$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = numero d'onda angolare dell'onda $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = pulsazione dell' onda elettromagnetica

λ = **lunghezza d'onda** **T** = periodo

Le ampiezze E_m, B_m rappresentano i valori massimi del modulo del campo elettrico e di quello magnetico. Le due equazioni trovate esprimono i moduli E e B dei due campi in ogni istante t ed in ogni punto x lungo la direzione di propagazione dell'onda. In ogni punto, la direzione del campo elettrico $\vec{E}$ e quella del campo magnetico $\vec{B}$ variano in generale col tempo mantenendosi perpendicolari fra loro ed alla direzione di propagazione. Il campo elettrico $\vec{E}$ (ed anche il campo magnetico $\vec{B}$) è sempre perpendicolare alla direzione di propagazione, ma cambia continuamente direzione in modo casuale. Questo significa che, in generale, le **onde elettromagnetiche non sono polarizzate**. Se invece le direzioni di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ rimangono fisse nel tempo, si dice che l' onda elettromagnetica è **polarizzata linearmente**.

Rappresentazione di un'onda elettromagnetica sinusoidale polarizzata linearmnente. Le oscillazioni del campo elettrico e di quello magnetico avvengono in piano ortogonali fissi.



Si dimostra che i valori massimi E_m e B_m del campo elettrico e del campo magnetico di un'onda monocromatica sono legati dalla relazione:

$\frac{E_m}{B_m} = c = \frac{E}{B}$ dove $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$ è la **velocità della luce nel vuoto**

In un mezzo di costante dielettrica relativa ε_r e di permeabilità magnetica relativa μ_r la velocità di propagazione della luce è: $\text{v} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$

L'energia trasportata da un'onda elettromagnetica

Come tutte le onde, anche quelle elettromagnetiche trasportano energia. Noi sappiamo che il campo elettrico e il campo magnetico, in condizioni statiche, immagazzinano energia. Precisamente la densità di energia posseduta da un campo elettrico di modulo E vale: $u_E = \dfrac{U}{V} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_o E^2$ mentre quella posseduta da un campo magnetico di modulo B vale: $u_B = \dfrac{U}{V} = \dfrac{1}{2\mu_o} B^2$

Le stesse espressioni valgono anche quando il campo elettrico e quello magnetico sono funzioni del tempo e della posizione x che occupano. Valgono le seguenti formule:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{1}{2\mu_o} B^2 \quad \frac{E_m}{B_m} = c = \frac{E}{B} \quad \Rightarrow \quad E = B \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \quad \wedge \quad B = E\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{1}{2\mu_o} B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{\varepsilon_o \cancel{\mu_o}}{2\cancel{\mu_o}} E^2 \qquad u = \varepsilon_o E^2 = \frac{B^2}{\mu_o}$$

Queste relazioni mostrano che l'energia dell'onda elettromagnetica è immagazzinata in uguale misura dal campo elettrico e dal campo magnetico.

Per un'onda monocromatica, se E_m (B_m) è l'ampiezza del campo elettrico (magnetico) la **densità media di energia** $\overline{u}$ di un' onda elettromagnetica è l'energia immagazzinata in media, per unità di volume, dai campi elettrico e magnetico dell'onda. Essa va calcolata applicando la seguente formula: $\overline{u} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_o E_o^2 = \dfrac{1}{2\mu_o} B_o^2$

Se $\overline{u}$ è la **densità media di energia** dell'onda e c la sua velocità di propagazione, l'**intensità I** di un'onda elettromagnetica è l'energia per unità di area ed unità di tempo che attraversa una superficie unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

Essa va calcolata applicando la seguente formula: $I = \dfrac{U}{S \cdot t} = \overline{u} \cdot c == \dfrac{1}{2} c \cdot \varepsilon_o E_o^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{\mu_o} B_o^2$

Essa rappresenta la **potenza media** trasportata attraverso un'area unitaria da un' onda elettromagnetica incidente perpendicolarmente.