Unità Didattica N° 31

Calcolo delle probabilità

1) Induzione matematica

2) Introduzione al calcolo combinatorio

3) Disposizioni semplici

4) Disposizioni con ripetizione

5) Permutazioni semplici

6) Permutazioni con ripetizione

7) Combinazioni semplici

8) Combinazioni con ripetizione

9) Binomio di Newton

10) Spazio campionario , spazio degli eventi , spazio di probabilità

11) L ' algebra degli eventi

12) Definizione classica di probabilità

13) Definizione assiomatica di probabilità

14) Teoremi sulla probabilità:

a) Il teorema della probabilità contraria

b) Il teorema della probabilità totale

c) La probabilità condizionata

d) Il teorema della probabilità composta

15) La formula di Bayes

16) Definizione frequentista di probabilità

17) Definizione soggettivista di probabilità

18) Il problema delle prove ripetute (schema di Bernoulli)

19) Distribuzione binomiale

20) Distribuzione di Poisson

Induzione matematica

Principio di induzione matematica: Esso afferma quanto segue:

(1) Se una proposizione $P(n)$ è vera per $n=1$ **(2)** Se si prova che $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ allora $P(n)$ è vera $\forall n\in N$.

In effetti il numero iniziale da cui si parte può essere diverso da 1, anche se di solito si parte da $n=1$. In simboli abbiamo: $\left.\begin{array}{l}\mathbf{P(1)\ \ \text{è}\ \ vera}\\ \mathbf{P(n)\Rightarrow P(n+1)\ \forall n\in N}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{P(n)\,\text{è}\,vera\ \forall n\in N}$

Il matematico **Ernst** (1984) schematizzava così una tipica dimostrazione per induzione:

Teorema: $\mathrm{P}(n)$ (voglio dimostrare la verità dell'affermazione P relativa ai numeri naturali n)

Dimostrazione per induzione matematica:

Base di partenza: dimostrazione di $P(1)$

Ipotesi induttiva: riteniamo $P(n)$ vera

Passo d'induzione: dimostriamo la verità di $P(n+1)$ a partire dalla verità di $P(n)$

Altra formulazione del principio di induzione matematica

Supponiamo che una proposizione P, dipendente da un indice $n\in N$, si vera per $n=1$ [$P(1)$ vera] e che inoltre, supposta vera per $P(n)$ [$P(n)$ vera] possiamo dimostrare che essa è vera anche per il numero successivo $n+1$ [$P(n+1)$ vera]. Allora la proposizione $P(n)$ è vera $\forall n\in N$.

Dimostrare che la somma dei primi n numeri interi vale $\mathbf{S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{j=1}^{j=n} j}$ **[1]**

Base dell'induzione: la proposizione [1] è vera per $n = 1$. Infatti: $1=\frac{1(1+1)}{2}$ cioè $1 = 1$ in quanto $S_1 = 1$

Ipotesi induttiva: Supponiamo che la proposizione [1] sia vera per il generico numero naturale n, cioè supponiamo che valga l'uguaglianza:

$$\mathbf{1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}} \qquad \textbf{[2]}$$

Passo d'induzione: Dimostriamo la verità di $P(n+1)$, cioè dimostriamo che risulta $P(n+1)=1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\left(S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$

ammettendo che $P(n)=S_n=\sum_{j=1}^{j=n} j=1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$ sia vera.

Se dimostriamo ciò allora la proposizione [1] è vera $\forall n\in N-\{0\}$.

Aggiungendo ad ambo i membri della [2] il numero naturale $n+1$ otteniamo:

$$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \qquad 1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{cioè} \quad S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La proprietà [1] è così dimostrata.

Facendo uso del **principio di induzione matematica** dimostrare che la somma di $n+1$ termini di una progressione geometrica di ragione $q\neq 1$ ed avente come primo termine il numero 1 è espressa dalla seguente relazione:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \mathbf{q^k = q^0(=1)+q^1+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \qquad [A]$$

Dimostrazione: la formula $[A]$ è vera per $n=1$, in quanto in tal casi essa si riduce alla uguaglianza $1+q=\frac{1-q^2}{1-q}$ $\quad 1+q=\frac{(\cancel{1-q})\cdot(1+q)}{\cancel{1-q}}$ $\quad 1+q=1+q$

Supponiamo che la formula $[A]$ sia vera per un certo n e verifichiamo che essa risulta vera anche per il numero successivo $n+1$, cioè dobbiamo verificare che risulta:

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

L'identità $[A]$ continua a sussistere se aggiungiamo al primo ed al secondo membro il termine q^{n+1}.

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}$$

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q}$$

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

La somma delle potenze simili dei numeri naturali si indica col seguente simbolo:

$$\mathbf{S_n^{(k)}=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}$$

Dimostrare, applicando il **principio di induzione matematica**, che:

$$\mathbf{S_n^{(2)}=\sum_{j=1}^{j=n} j^2=1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad [C]$$

Per $n=1$ abbiamo l'uguaglianza: $1=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ $\quad 1=\frac{6}{6}$ $\quad 1=1$

Adesso verifico che se è vera l'identità $[C]$ è vera anche la seguente identità:

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

L'identità $[C]$ continua a sussistere se aggiungiamo al primo ed al secondo membro il termine $(n+1)^2$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Introduzione al calcolo combinatorio

Consideriamo **n** elementi distinti tra loro ed indichiamoli con i simboli

$$\mathbf{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, L, a_n}$$

Diremo che uno qualunque degli **n** oggetti forma un **gruppo di classe 1**, due oggetti formano un **gruppo di classe 2**, ed, in generale, che **k** oggetti formano un **gruppo di classe k** $(k \le n)$.

Un gruppo di classe **k** verrà indicato scrivendo nell'ordine assegnato, uno accanto all'altro, i simboli che rappresentano i **k** elementi .Le scritture: a_1, a_2, a_3 indicano gruppi di classe 1

Le scritture a_1a_3, a_2a_6, a_7a_2 indicano gruppi di classe 3. Le scritture $a_1a_3a_5a_8$, $a_6a_3a_2a_1$ indicano gruppi di classe 4. Lo studio del modo di costruire e di calcolare il numero di tutti i possibili gruppi di classe k che si possono formare con n elementi secondo determinate leggi, prende il nome di **calcolo combinatorio**.

Tale studio si sviluppa in tre tempi: **1)** formulazione, mediante definizione, della legge di formazione dei gruppi **2)** ricerca del metodo per la loro costruzione **3)** ricerca di formule generali per la determinazione del numero totale dei gruppi che verificano la data legge.

Se imponiamo la condizione che gli **n** elementi dati e quelli che concorrono alla formazione di ciascun gruppo siano tutti diversi fra loro, i gruppi ottenuti si dicono **semplici**. Se invece gli elementi non sono soggetti a questa condizione, i gruppi ottenuti si dicono con **ripetizione**.

Disposizioni semplici

Dati **n** elementi distinti $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_{n-1}, a_n}$ si dicono **disposizioni semplici di classe k** tutti i gruppi che si possono formare in modo che:

1) ogni gruppo contenga k elementi distinti degli n dati

2) due gruppi differiscano per qualche elemento o per l'ordine degli elementi.

Nelle disposizioni si fissa l'attenzione non solo sugli elementi che concorrono alla formazione dei gruppi, ma anche sull'ordine con cui tali elementi sono disposti nel gruppo.

$$D_{n,k} = \underset{1}{n}\underset{2}{(n-1)}\underset{3}{(n-2)}\cdots\cdots\underset{k-1}{(n-k+2)}\underset{k}{(n-k+1)} \qquad [2]$$

Il numero delle disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k è uguale al prodotto di k fattori interi decrescenti consecutivi a partire da n.

$D_{n,3}=n(n-1)(n-2)$ $\qquad$ $D_{n,4}=n(n-1)(n-2)(-3)$ $\qquad$ $D_{5,2}=5\times4=20$ $\qquad$ $D_{7,4}=7\times6\times5\times4=840$

Se risulta $k=n$ la [2] diventa: $\qquad D_{n,n} = n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1 = n! \qquad [3]$

Il simbolo $n!$ si chiama **fattoriale** di n e rappresenta il **prodotto di n fattori decrescenti consecutivi a partire da n.**

I fattoriali godono delle seguenti proprietà:

$n!=n[(n-1)!]$ $\qquad$ $n!=n(n-1)[(n-2)!]$ $\qquad$ $n!=n(n-1)(n-2)[(n-3)!]$

Permutazioni semplici

Dati n elementi distinti $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_n$ si chiamano **permutazioni semplici** di n elementi tutti i gruppi che si possono formare prendendo tutti gli n elementi dati in modo che ogni gruppo differisca dai rimanenti gruppi soltanto per l'ordine degli elementi stessi. Questo significa che le permutazione semplici di n elementi coincidono con le disposizioni di n elementi di classe n.

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1 = n!$$

Si dimostra che: $\qquad D_{n,k} = \dfrac{P_n}{P_{n-k}} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Combinazioni semplici

Si chiamano **combinazioni semplici di $\mathbf{n}$ elementi distinti di classe $\mathbf{k}$** tutti i gruppi che si possono formare in modo che :

1) ogni gruppo contenga $\mathbf{k}$ distinti elementi degli $\mathbf{n}$ dati

2) due gruppi differiscano fra loro almeno per un elemento, indipendentemente dall'ordine secondo cui gli stessi elementi sono disposti.

Nelle **combinazioni**, contrariamente a quanto avviene nelle disposizioni, non si tiene conto dell'ordine ma solo della diversità degli elementi che concorrono alla formazione dei singoli gruppi. Per indicare il numero delle combinazioni di $\mathbf{n}$ elementi di classe $\mathbf{k}$ utilizziamo uno dei seguenti simboli: $C_{n,k}$ $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ che si legge

<<$\mathbf{n}$ **su** $\mathbf{k}$>>. Si dimostra che: $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \mathbf{C_{n,k}} = \frac{\mathbf{D_{n,k}}}{\mathbf{P_k}} = \frac{\mathbf{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+2)(n-k+1)}}{\mathbf{k!}}$

In particolare abbiam: $\mathbf{0!=1}$ $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}} = \mathbf{1}$ $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$

Il simbolo $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}}$ gode delle seguenti proprietà:

Formula abbreviata

Con questa formula il simbolo $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}}$ può essere espresso mediante una frazione nei cui termini compaiono solo fattoriali: $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-k)!k!}}$

Legge delle classi complementari o legge dei coefficienti simmetrici

Le combinazioni di $\mathbf{n}$ elementi di classe $\mathbf{k}$ sono uguali alle combinazioni di $\mathbf{n}$ elementi di classe $\mathbf{n-k}$: $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n-k}}$ Questa formula è utili quando risulta $\mathbf{k > \frac{n}{2}}$.

Legge di addizione o di Stieffel

Il numero delle combinazioni di n elementi di classe è uguale alla somma di quelle di classe k e di quelle di classe $k-1$. Cioè: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

Dimostrazione: Ricordando che $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ abbiamo

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-k)\cdot(n-1)!+(n-1)!k}{k!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!\cdot(n-k+k)}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!\cdot n}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

$$\text{m.c.m.}[k!(n-k-1)!;(k-1)!(n-k)!]=k!(n-k)!\ ,\ \frac{k!(n-k)!}{k!(n-k-1)!}=n-k\ ,\ \frac{k!(n-k)!}{(k-1)!(n-k)!}=k$$

Legge di ricorrenza: $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}$

Disposizioni con ripetizione

Le **disposizioni con ripetizione** sono quelle disposizioni in cui ogni elemento può comparire più di una volta. Il numero delle disposizioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k sarà indicato con uno dei seguenti simboli: $D'_{n,k}$, $D^{(r)}_{n,k}$ con k maggiore, uguale o minore di n

Definizione: Dati n elementi distinti $a_1, a_2, ..., a_n$ definiamo **disposizioni con ripetizione** degli n elementi di classe k tutti i gruppi che si possono formare in modo che:

1) ogni gruppo contenga k elementi

2) in ogni gruppo uno stesso elemento può essere ripetuto fino ad un massimo di k volte.

Due gruppi sono da considerarsi distinti quando uno di essi contiene almeno un elemento che non figura nell'altro oppure contengono gli stessi elementi, ma almeno uno di essi è ripetuto un numero diverso di volte; oppure, pur contenendo gli stessi elementi, ripetuti lo stesso numero di volte , questi differiscono per l'ordine con cui sono disposti.   Risulta: $\mathbf{D'_{n,k} = n^k}$

Se $k = 1$ è: $D'_{n,k} = n$ Se $k = 2$ bisogna fare il seguente ragionamento:

Il primo elemento a_1 associato (di volta in volta) con gli altri n elementi (da a_1 ad a_n)determina n gruppi, il secondo elemento a_2 determina pure n gruppi e così di seguito per tutti gli altri elementi.

Quindi ogni elemento determina n gruppi, essendo n il numero degli elementi, sarà $n \cdot n = n^2$ il numero delle disposizione con ripetizione di n elementi di classe 2, cioè: $D'_{n,2} = n^2$

Per affermare che $D'_{n,2} = n^2$ possiamo utilizzare il seguente schema:

$$\begin{array}{cccccc} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n & 1 \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_na_n & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \end{array}$$

Per ottenere le disposizione con ripetizione di n elementi di classe 3 , basta associare successivamente ad ogni disposizione di classe 2 ciascuno degli n elementi dati . Ogni disposizione con ripetizione di classe 2 dà luogo ad n disposizioni con ripetizione di classe 3 . Tutte le disposizioni con ripetizione di classe 2 sono n^2 , onde le disposizioni con ripetizione di classe 3 saranno n^3 , cioè:

$$D^{(r)}_{n,3} = D^{(r)}_{n,2} \cdot n = n^2 \cdot n = n^3$$

Per induzione si arriva alla formula generale: $\mathbf{D'_{n,k} = n^k}$

Il numero delle colonne diverse che si possono comporre , nel gioco del totocalcio , scrivendo in ognuna delle 13 caselle uno dei tre seguenti simboli 1 , $\times$, 2 è:

$$\mathbf{D'_{3,13} = 3^{13} = 1.594.323}$$

Per vincere con certezza un **13** bisogna spendere la seguente somma

$$1.594.323 \times £800 = £\ 1.275.459.200$$

Permutazioni con ripetizione

Supponiamo che gli $\mathbf{n}$ elementi $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_n}$ non siano tutti distinti e che, ad esempio, α di questi elementi siano tutti uguali ad a_1, β ad a_2, γ ad a_3, con:

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=n} \ .$$

Le permutazioni distinte che si verranno a formare non sono più $n!$ ma sono di meno in quanto alcune di esse sono fra loro identiche. Si dimostra che: $P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$

Indico con $x = P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ ($< n!$) il numero di tutte queste permutazioni con ripetizione che si possono formare. Consideriamo una qualunque di queste x permutazioni con ripetizioni. Essa contiene α elementi uguali ad a_1, β uguali ad a_2 e γ uguali ad a_3. In essa, al posto di α elementi uguali ad a_1, supponiamo di sostituire α elementi diversi e permutiamo tali elementi in tutti i modi possibili. La permutazione considerata dà luogo (lei compresa) ad $\alpha!$ permutazioni. E poiché tutte le permutazioni con ripetizione sono x si ottengono $x \cdot \alpha!$ permutazioni. In ciascuna di queste $x \cdot \alpha!$ permutazioni vi sono β elementi uguali ad a_2. Supponiamo di considerarli tutti diversi fra loro e permutiamoli in tutti i modi possibili. Ciascuna delle $x \cdot \alpha!$ permutazioni dà luogo (lei compresa) a $\beta!$ permutazioni. E poiché le permutazioni con ripetizione considerate sono $x \cdot \alpha!$ in totale si otterranno $x \cdot \alpha! \cdot \beta!$ permutazioni.

Procedendo in tal guisa si giunge all'ultimo gruppo di γ elementi uguali ad a_3. Supponendo tali elementi fra loro diversi e permutandoli in tutti i modi possibili, per una permutazione con ripetizione si ottengono $\gamma!$ permutazioni e poiché tutte le permutazioni sono $x \cdot \alpha! \cdot \beta!$ si otterranno in totale $x \cdot \alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!$ permutazioni. Se gli n elementi fossero distinti fra loro si otterrebbero $n!$ permutazioni, onde risulta valida la seguente identità: $x \cdot \alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma! = n!$ da cui ricaviamo:

$$P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

Combinazioni con ripetizioni

Definizione: Definiamo **combinazioni con ripetizione** di **n** elementi distinti di classe **k** ($\gtreqless$) tutti i gruppi che si possono formare in modo che:

1) ogni gruppo contenga k elementi

2) in ogni gruppo uno stesso elemento può essere ripetuto fino ad un massimo di $\mathbf{k}$ volte

3) due gruppi si considerano diversi quando uno di essi contiene almeno un elemento che non figura nell'altro, oppure contengano gli stessi elementi ma questi non si presentano con la stessa frequenza

$$C'_{n,k} = C^{(r)}_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)n}{k!}$$

Simboli particolari: Il simbolo Σ (detto **simbolo di sommatoria**) rappresenta sinteticamente una somma di addendi.

Esempi: $\sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4 \qquad \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n-1+n$

Il simbolo Π (detto **simbolo di produttoria**) rappresenta sinteticamente un prodotto di fattori.

Esempi: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \prod_{k=1}^{n} e_k = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdots e_{n-1} \cdot e_n$

Binomio di Newton

La formula del binomio di Newton ci consente di sviluppare la potenza ennesima di un qualsiasi binomio. Per ogni coppia di numeri reali $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e per ogni numero intero $\mathbf{n}$ si ha:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Questa identità prende il nome di formula del **binomio di Newton**. I numeri $\binom{n}{k}$ (per $k = 0,1,2,3,....,n$) vengono detti **coefficienti binomiali**.

Poiché risulta $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ deduciamo che sono uguali i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi (**termini coniugati**). Tali coefficienti possono essere ricavati utilizzando il **triangolo di Tartaglia**.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Ogni numero è uguale alla somma dei due numeri che si trovano al di sopra di esso.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{0}{0} \qquad n=0 \quad (a+b)^0$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \qquad n=1 \quad (a+b)^1$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \qquad n=2 \quad (a+b)^2$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \qquad n=3 \quad (a+b)^3$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \qquad n=4 \quad (a+b)^4$$
$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \mathrm{L} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n} \qquad n=n \quad (a+b)^n$$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	L	$\binom{n}{n-1}$	$\binom{n}{n}$

Ad ogni riga di questa tabella triangolare troviamo i coefficienti binomiali della corrispondente potenza del binomio. Il loro calcolo può essere effettuato più rapidamente utilizzando la seguente formula:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \qquad \text{(legge di ricorrenza)}$$

Tale proprietà esprime il fatto che ogni coefficiente binomiale (che si trovi sulla riga n) è la somma di due coefficienti binomiali che si trovano sulla riga immediatamente superiore (cioè sulla riga $n-1$) e che sono collocati immediatamente alla sua sinistra e alla sua destra.

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Adesso dimostro mediante il **principio di induzione matematica** la formula del **binomio di Newton**.

Per $n=1$ abbiamo: $(a+1)^1 = \binom{1}{0} \cdot a^1 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b \qquad a+b=a+b$

Poi verifico che dall'identità $$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{n}}=\sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{k}=\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{a}^{\mathbf{n-k}}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{k}}=$$

$$=\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{0}}\mathbf{a}^{\mathbf{n}}+\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{1}}\mathbf{a}^{\mathbf{n-1}}\cdot\mathbf{b}+\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}\mathbf{a}^{\mathbf{n-2}}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{2}}+\cdots+\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\mathbf{a}^{\mathbf{n-k}}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{k}}+\cdots+\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n-1}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{n-1}}+\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}}\mathbf{b}^{\mathbf{n}}\qquad [B]$$

deduco l'identità: $$(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n+1}\binom{n+1}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k=$$

$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^n\cdot b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}\cdot b^2+\cdots+\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}\cdot b^k+\cdots+\binom{n+1}{n-1}a^2\cdot b^{n-1}+\binom{n+1}{n}a\cdot b^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

Servono la **legge di addizione o di Stifel** ed una proprietà delle combinazioni: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ $\quad\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$ $\quad\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$

Moltiplico ambo i membri della $[B]$ prima per a, poi per b e poi sommo membro a membro:

$$(a+b)^n\cdot a=\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{1}a^n\cdot b+\binom{n}{2}a^{n-1}\cdot b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k+1}\cdot b^k+\cdots+\binom{n}{n-1}a^2\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n\cdot a$$

$$(a+b)^n\cdot b=\binom{n}{0}a^n\cdot b+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^2+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^3+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k+1}\cdot b^k+\cdots+\binom{n}{n-1}a\cdot b^n+\binom{n}{n}b^{n+1}$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$(a+b)^n\cdot(a+b)=\binom{n}{0}a^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^n\cdot b+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^{n-1}\cdot b^2+\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right]a^{n-2}\cdot b^3+\cdots+$$

$$+\left[\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}\right]a^2\cdot b^{n-1}+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]a\cdot b^n+\binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^n\cdot b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}\cdot b^2+\binom{n+1}{3}a^{n-2}\cdot b^3+\cdots+$$

$$+\binom{n+1}{n-1}a^2\cdot b^{n-1}+\binom{n+1}{n}a\cdot b^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n+1}\binom{n+1}{k}\cdot a^{n+1-k}\cdot b^k$$

La formula del binomio di Newton è così dimostrata.

I fattoriali

I fattoriali godono delle seguenti proprietà:

$$\mathbf{n! = n\cdot\left[(n-1)!\right]} \quad ; \quad \mathbf{n! = n\cdot(n-1)\cdot\left[(n-2)!\right]} \quad ; \quad \mathbf{n! = n\times(n-1)\cdot(n-2)\cdot\left[(n-3)!\right]}$$

$$\mathbf{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)\cdot\left[(n-k)!\right]}$$

Quando n è grande la valutazione di $n!$ è piuttosto laboriosa. In tal caso può essere utile la **formula** approssimata di **Stirling**: $n! \cong \dfrac{n^n\cdot\sqrt{2\pi n}}{e^n}$ con $e = 2{,}71828$ base dei logaritmi naturali o **neperiani** $\ln n! \cong \dfrac{1}{2}\cdot\ln(2\pi n) + n\ln n - n$