Calcolo delle probabilità

Spazio campionario Spazio degli eventi Spazio di probabilità

Alla base del calcolo delle probabilità stanno i tre seguenti concetti primitivi: **1)** la **PROVA** o l'**esperimento** **2)** l'**EVENTO** o il **risultato** **3)** la **PROBABILITA'** che l'evento si verifichi.

Queste tre parole sono legate tra loro dalla seguente frase: <<**la prova genera l'evento con una certa probabilità**>>. Col termine **EVENTO** si intende il risultato di un esperimento o di una osservazione. Un **evento** si dice **casuale** o **aleatorio** se il suo verificarsi dipende da cause ignote o imprevedibili. ♠

Sono **eventi**:[1]

1) l'uscita di un numero minore di 5 nel lancio di un dado

2) l'uscita di una figura quando si estrae una carta da un mazzo di carte da poker

3) la caduta di un corpo lasciato libero dai vincoli

I primi due eventi possono verificarsi o non verificarsi, il terzo evento si verificherà certamente. I primi due rappresentano **eventi aleatori** o **eventi casuali**, il terzo è un **EVENTO CERTO**.

♠ Diremo che un certo evento è aleatorio per un determinato soggetto umano T (Tizio) se questi non ha informazioni complete sul suo avverarsi , oppure sul suo essersi avverato .Il fatto di essere aleatorio non è una proprietà intrinseca dell'evento , ma è essenzialmente relativo ad un soggetto umano ed alle informazioni che questi possiede sull'evento stesso .

[1] Un **EVENTO** (o la proposizione che lo traduce) è un ente logico suscettibile di assumere due soli valori: **VERO** o **FALSO**. Occorre formulare l'evento (o la proposizione che lo traduce) in modo da potere rispondere senza ambiguità "SI" o "NO" alla domanda se esso si verificherà o meno. Un evento qualsiasi può essere indicato col simbolo E (o con una lettera maiuscola qualsiasi). Col simbolo $\overline{E}$ indichiamo l'evento contrario, cioè l'evento che è vero (falso) se E è falso (vero).

Calcolo delle probabilità

PROVA è la realizzazione materiale di un evento attraverso la realizzazione di un qualsiasi meccanismo. **PROVA** è, ad esempio, l'estrazione di una pallina da un'urna , o il lancio di una moneta, o il lancio di un dado. Un evento si dice **CERTO** se esso si verificherà sicuramente. Un evento si dice **impossibile** se non potrà mai verificarsi. Un evento si dice **casuale** o **aleatorio** se il suo verificarsi dipende da cause ignote o imprevedibili.

Definizione: La nozione di **evento casuale o aleatorio** è assunta come **primitiva** ed è sinonimo di <<**avvenimento il cui verificarsi dipende dal caso**>>.

Evento casuale o aleatorio è un avvenimento, un fatto per il quale non è possibile giudicare se esso si verificherà in una determinata prova o esperimento, in quanto il suo verificarsi dipende solo dal caso.

Probabilità è un numero associato al presentarsi di un evento aleatorio e denota l'attendibilità razionale che ha l'evento stesso di verificarsi. Consideriamo un esperimento (o **schema probabilistico) E** (ad esempio il lancio di una moneta, il lancio di due dadi, l'estrazione di una pallina da un'urna,...).Col termine **prova** intendiamo una singola esecuzione di un determinato esperimento. Da questa prova si ottiene un singolo risultato elementare detto **evento aleatorio elementare**. All'evento associamo, secondo regole da fissare, un numero che esprime la **probabilità** che si verifichi l'evento aleatorio.

Quindi con l'espressione <<**probabilità dell'evento A**>> intendiamo riferirci ad un particolare numero che meglio di altri è in grado di sintetizzare la fiducia che noi riponiamo nella sua realizzazione.

Probabilità = grado di attendibilità che ha un evento di verificarsi

Si chiama **spazio degli eventi elementari (o spazio dei risultati o spazio campionario o spazio fondamentale**) associato ad un determinato esperimento casuale (o **schema probabilistico**) l'insieme Ω di tutti i possibili risultati fra loro **incompatibili**

Calcolo delle probabilità

$\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ = **spazio campionario** o **spazio dei risultati** o **spazio fondamentale**

Quando ad ogni evento elementare $\mathbf{e_i}$ associamo un numero positivo $\mathbf{p_i}$, probabilità che si verifichi l'evento $\mathbf{e_i}$, secondo determinare regole, allora lo **spazio campionario** Ω prende il nome di **spazio di probabilità**.

Un qualsiasi sottoinsieme di Ω dicesi **evento** associato alla **spazio campionario** Ω. Un evento si dice elementare se esso è un sottoinsieme di costituito da un solo elemento, cioè ogni elemento di Ω dicesi **evento elementare** dello **spazio campionario**. Per questo motivo Ω è chiamato anche **spazio degli eventi elementari** e può essere indicato anche col simbolo $\mathbf{U}$. Un **evento, costituito da almeno due eventi elementari**, dicesi **evento complesso**.

Esempi: Consideriamo l'esperimento casuale del lancio di un dado. Questo esperimento fornisce il seguente **spazio campionario** o **spazio dei risultati**: $\mathbf{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$

A tale esperimento possiamo associare sei **eventi elementari** $e_1 = \{1\}$, $e_2 = \{2\}$, $e_3 = \{3\}$, $e_4 = \{4\}$, $e_5 = \{5\}$, $e_6 = \{6\}$ che costituiscono lo **spazio dei risultati** e diversi **Eventi Complessi**.

$A = \{2,4,6\}$ = **comparsa di un numero pari**

$B = \{1,3,5\}$ = **comparsa di un numero dispari**

$C = \{1,2\}$ **= comparsa di un numero minore di** 3

$D = \{5,6\}$ **= comparsa di un numero maggiore di** 4

$E = \{1,6\}$ **= comparsa del numero** 1 **o del numero** 6

Gli eventi $A = \{2,4,6\}$ e $B = \{1,3,5\}$ sono due eventi complessi dello **spazio campionario** $\mathbf{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$.

Calcolo delle probabilità

L'insieme i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi dello spazio campionario Ω, compreso l'**insieme vuoto** e lo **spazio campionario**, prende il nome di **SPAZIO DEGLI EVENTI** in quanto comprende tutti i possibili eventi sia elementari che complessi.

Concludendo possiamo affermare che lo **Spazio degli Eventi** è l'**insieme delle parti** $P(\Omega)$ dello **spazio campionario**.

$P(\Omega)$ = **Spazio degli Eventi** = insieme i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi di Ω.

Lo Spazio degli Eventi lo possiamo indicare anche col simbolo **S** .

Consideriamo l'esperimento (**schema probabilistico**) consistente nel lancio di una moneta con una faccia testa (**T**) e l'altra croce (**C**).

$\Omega = \{T, C\}$ = **spazio degli eventi elementari**

$P(\Omega) = \{\varnothing, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}$ = **Spazio degli Eventi**

Spesso gli **eventi elementari** risultano non distinguibili rispetto ad una certa caratteristica o proprietà.

In questo caso si considerano come eventi elementari dello spazio Ω soltanto quelle eventualità distinguibili rispetto a tale caratteristica. Come schema probabilistico consideriamo l'estrazione di una carta da un mazzo di carte napoletane.

Gli **eventi elementari** sono 40 se nell'estrazione di una carta si considera sia il colore del seme sia il valore numerico della carta. $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_{40}\}$

Se l'attenzione è rivolta al solo seme delle carte abbiamo: $\Omega = \{bastone, spada, coppa, denari\}$

Se la proprietà discriminante è il valore numerico di ciascuna carta, abbiamo: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Un evento si dice **impossibile** se esso non si realizza mai e può essere identificato con l'insieme vuoto $\varnothing = \{\ \}$. Che la non realizzazione di alcun evento di Ω sia un evento è giustificato dal fatto che l'insieme vuoto è sottoinsieme di un qualsiasi insieme.

Calcolo delle probabilità

L'**EVENTO CERTO**, che coincide con Ω, consiste nella realizzazione di almeno uno degli eventi dello spazio campione Ω.

Definizione di spazio delle probabilità

Diciamo che uno spazio di eventi elementari $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ costituisce uno **spazio delle probabilità** se

01) a ciascun evento elementare $\{e_i\}$ possiamo associare un numero non negativo $p_i = p(e_i)$ capace di esprimere il grado di realizzazione dell'evento aleatorio elementare $\{e_i\}$

02) i numeri p_i, che esprimono le **probabilità** degli eventi elementari $\{e_i\}$, verificano le due seguenti condizioni: $\mathbf{p_i \geq 0}$ $\quad$ $\mathbf{p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$

Esempio: Dato lo **spazio campionario** $\Omega = \{e_1, e_2, e_3\}$ con $p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) = \frac{1}{3}$ verificare che Ω è uno **spazio di probabilità**.

Soluzione: Affinché Ω risulti uno **spazio probabilizzato** debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni: $\mathbf{p_i \geq 0}$ $\quad$ $\mathbf{p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$

dato che $p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) = \frac{1}{3}$ e $p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ risulta verificato che Ω è uno spazio delle probabilità.

Esempio: Dato lo spazio

Ω	e_1	e_2	e_3	e_4
$p(e_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

verificare che Ω è uno **spazio di probabilità**

Soluzione: La probabilità di ogni singolo evento è positiva, $\sum_{i=1}^{4} p(e_i) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1$ Quindi Ω è uno **spazio di probabilità**.

Calcolo delle probabilità

Vediamo adesso come è possibile assegnare ad ogni evento aleatorio un numero non negativo **p** in grado di rappresentare la probabilità che l'evento si verifich.

Quando il risultato di un esperimento è un evento aleatorio non è possibile sapere a priori se l'evento si verificherà oppure non si verificherà . Tuttavia sovente è necessario valutare il grado di attendibilità del verificarsi di un tale evento aleatorio . Bisogna allora assegnare un **numero** a ciascun evento capace di esprimere il grado di fiducia che si verifichi l'evento in base alle informazioni a disposizione. Questo numero è detto **probabilità che si verifichi l'evento**.

Questo problema è stato risolto in diversi modi a seconda delle caratteristiche dell'esperimento entro il quale viene definito l'evento aleatorio.

Di solito hanno importanza pratica le **4** seguenti **teorie**:

1) teoria classica dovuta a Laplace (1812) **2) teoria frequentista** dovuta a Cournot (1843) ed utilizzata in statistica **3) teoria soggettivista** dovuta a De Morgan (1850), Ramsey (1920), De Finetti (1960) **4)** la **teoria assiomatica** dovuta a Kolgomorov (1933).

L'algebra degli eventi

Poiché gli eventi sono stati da noi identificati con degli insiemi (sottoinsiemi dello **spazio campionario** Ω) essi possono essere collegati tra loro mediante le operazioni insiemistiche di **unione**, **intersezione** e **complemento**.

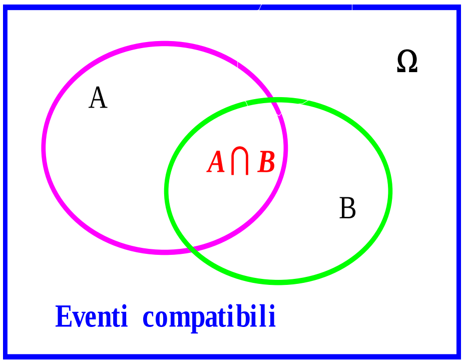
Se Ω è lo **spazio campionario** relativo ad un certo **esperimento casuale** **E** (modello probabilistico), se **A** e **B** sono due eventi relativi a tale esperimento:

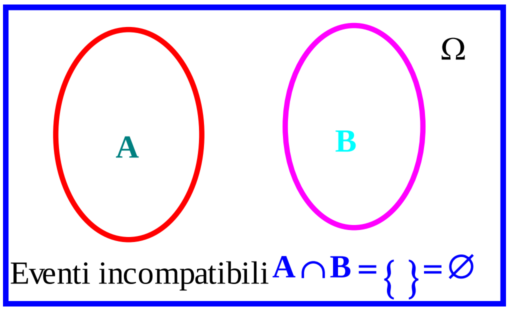
01) si chiama **evento unione** (o **evento somma** o **evento totale**) e si indica col simbolo **AUB** (o **A+B**) l'evento **C** che si verifica quando si realizza almeno uno degli eventi **A** e **B**: **C=AUB**

C si realizza se si realizza **A**, o si realizza **B** o si realizzano entrambi.

02) si chiama **evento intersezione** (o **evento prodotto** o **evento composto**) e si indica con $\mathbf{A \cap B}$ (o $\mathbf{A \cdot B}$) l'evento **C** che si realizza quando si verificano contemporaneamente gli eventi **A** e **B** . $\boxed{\mathbf{C = A \cap B}}$

Due eventi **A** e **B**, appartenenti allo stesso **spazio di probabilità**, si dicono **eventi incompatibili** se non si possono realizzare contemporaneamente, cioè se: $A \bigcap B = \varnothing$, cioè quando gli eventi A e B sono insiemi disgiunti.





Nel lancio di un dado gli eventi **A** = **comparsa di un numero pari** = $\{2,4,6\}$ e **B** = **comparsa di un numero dispari** = $\{1,3,5\}$ sono **eventi tra loro incompatibili** in quanto il verificarsi di uno di essi esclude il verificarsi dell'altro.

$$\mathbf{A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \varnothing}$$

Due eventi **A** e **B**, appartenenti allo stesso **spazio di probabilità,** si dicono **eventi compatibili** se si possono verificare contemporaneamente, cioè se:

$$A \bigcap B \neq \varnothing$$

Due eventi **A** e **B**, appartenenti allo stesso **spazio di probabilità**, si dicono **eventi necessari** se almeno uno di essi deve presentarsi. Con parole diverse possiamo dire che **A** e **B** sono **eventi necessari** se risulta $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} = \Omega$

Calcolo delle probabilità

La negazione di un evento

Si dice **negazione** di un evento $\mathbf{A}$ l'evento $\bar{\mathbf{A}}$ (si legge **non** $\mathbf{A}$) che è **vero** se $\mathbf{A}$ è **falso** ed è **falso** se $\mathbf{A}$ è **vero**. L'evento $\bar{\mathbf{A}}$, negazione dell'evento $\mathbf{A}$, è detto **evento opposto** (o **evento contrario**) dell'evento $\mathbf{A}$.

Due eventi $\mathbf{A}$ e $\bar{\mathbf{A}}$, appartenenti allo stesso **spazio di probabilità** si dicono **eventi complementari** o **eventi opposti** se $\mathbf{A}$ non si verifica quando si verifica $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{A}}$ non si verifica quando si verifica $\mathbf{A}$:

$$A \bigcup \bar{A} = \Omega \quad , \quad A \bigcap \bar{A} = \varnothing \quad , \quad \bar{\Omega} = \varnothing \quad , \quad \bar{\varnothing} = \Omega$$

Con parole diverse possiamo dire che due eventi $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{A}}$ si dicono **opposti** (o **complementari**) se uno di essi non si verifica quando si verifica l'altro.

Nel lancio di una moneta l'evento $\bar{\mathbf{A}}=\{\mathbf{T}\}$ = compare testa è l'evento contrario dell'evento $\mathbf{A}=\{\mathbf{C}\}$ = compare croce.

Si chiama **evento differenza** e si denota col simbolo $\mathbf{A-B}$ l'evento che si verifica quando si verifica l'evento $\mathbf{A}$ ma non si verifica l'evento $\mathbf{B}$. $A - B = A \bigcap \bar{B}$

Nel lancio del dado, dati gli eventi $\mathbf{A}=\{2,4,6\}$ = comparsa di un numero pari, $\mathbf{B}=\{1,2\}$ = comparsa del numero $\mathbf{1}$ o $\mathbf{2}$, l' **evento differenza** ci viene fornito da: $\mathbf{A-B}=\{4,6\}$ = **comparsa del numero 4 o del numero 6**

- Se la realizzazione dell'evento $\mathbf{A}$ comporta la realizzazione dell'evento $\mathbf{B}$ diciamo che $\mathbf{A}$ implica $\mathbf{B}$ e scriviamo: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$
- $\mathbf{p(A)}$ = **probabilità incondizionata** = probabilità dell'evento $\mathbf{A}$ indipendentemente dal fatto che si sia verificato o che possa verificarsi un qualsiasi altro evento.

$\mathbf{p(A/B)}$ = **probabilità dell'evento $\mathbf{A}$ condizionata dall'evento $\mathbf{B}$ = probabilità dell'evento $\mathbf{A}$ quando si è verificato l'evento $\mathbf{B}$**

Calcolo delle probabilità

Si dice che due eventi **A** e **B** sono **dipendenti** se:

$$p(A/B) \neq p(A) \quad \text{oppure} \quad p(B/A) \neq p(B)$$

Si dice che due eventi sono **indipendenti** se:

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{oppure} \quad p(B/A) = p(B)$$

Esempi

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ è lo **spazio campionario** del lancio di un dado.

$A = \{1,3,5\}$ = **esce un numero dispari**; $B = \{3,6\}$ = **esce un numero multiplo del 3** $D = \{1,2,3,6\}$ = **esce un numero divisore di 6**, $M = \{3,4,5,6\}$ = **esce un numero non inferiore a 3**

EVENTO TOTALE

$C = A \cup B = \{1,3,5,6\}$ = **esce un numero dispari o un multiplo del 3** = **evento totale** o somma logica degli eventi **A** e **B**

EVENTO COMPOSTO

$C = A \cap D = \{1,3\}$ = **esce un numero dispari e divisore del 6** = **evento composto** o prodotto logico degli eventi **A** e **D**

Evento Differenza

$M = \{3,4,5,6\}$ = **esce un numero non inferiore a 3**

$\mathbf{C = D - M = \{1,2\}}$ = **esce un numero che è divisore del 6 ed è minore del 3** = **esce un numero dell'insieme D non appartenente all'insieme M**

Calcolo delle probabilità

Evento contrario

$N = \{1,2,3\}$ = **esce un numero minore di 4**

$\bar{N} = \{4,5,6\}$ = evento contrario dell'evento N = esce un numero maggiore o uguale a 4

$A = \{1,3,5\}$ = **esce un numero dispari**

$\bar{A} = \{2,4,6\}$ = **esce un numero pari** = **evento contrario dell'evento A**

Linguaggio insiemistico	Linguaggio probabilistico
Ω insieme	Ω **spazio di probabilità**
$e \in \Omega$ (e elemento di Ω)	**e risultato possibile**
$\{e\}$ insieme costituito da un solo elemento	$\{e\}$ **evento elementare**
$A \subseteq \Omega$ (**A** sottoinsieme di Ω)	**A evento casuale**
$\varnothing$ sottoinsieme vuoto	$\varnothing$ **evento impossibile**
Ω	Ω **evento certo**
$A \cap B \neq \varnothing$	**A** e **B** **eventi compatibili**
$A \cap B = \varnothing$ (**A** e **B** **insiemi disgiunti**)	**A** e **B** **eventi incompatibili**
$A \cup B$ (**unione** tra gli insiemi **A** e **B**)	$A \cup B$ **evento unione** di **A** e **B** o **evento totale**
$A \cap B$ **intersezione** tra gli insiemi **A** e **B**	$A \cap B$ **evento intersezione** di **A** e **B** o **evento composto**

$$\overbrace{\text{incompatibili} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing \qquad \text{Compatibili}\begin{cases} \text{DIPENDENTI} \Leftrightarrow p(A/B) \neq p(A) \\ \text{INDIPENDENTI} \Leftrightarrow p(A/B) = p(A) \end{cases}}^{\text{EVENTI}}$$

$$\Updownarrow$$

$$A \cap B \neq \varnothing$$

Definizione classica di probabilità

Quando il risultato di un esperimento è un evento aleatorio non è possibile sapere, prima di effettuare l'esperimento, se l'evento si verificherà. Tuttavia sovente è necessario valutare il grado di attendibilità del verificarsi di tale evento. Bisogna allora assegnare un **numero** a ciascun evento; tanto più elevata è la possibilità che l'evento si verifichi , tanto maggiore è il numero assegnato .

Questo numero è detto **probabilità dell'evento** e rappresenta la misura del grado di possibilità o grado di fiducia che l'evento ha di verificarsi.

Questo problema è stato risolto in diversi modi a seconda delle caratteristiche dell'esperimento entro il quale viene definito l'evento aleatorio.

Prima di dare la definizione classica di probabilità di un evento, occorre precisare il significato di **eventi aleatori equiprobabili** cioè eventi aleatori aventi le stessa probabilità di verificarsi.

Due eventi **A** e **B**, relativi ad uno **stesso schema probabilistico** (stesso esperimento casuale), sono **equiprobabili** (o **ugualmente possibili**) se non vi è alcun motivo di ritenere che, in una prova, l'evento **A** possa verificarsi più o meno facilmente dell'evento **B** .

Nel lancio del dado possiamo ritenere equiprobabili tutti e sei gli eventi elementari

$$e_1 = \{1\} \ , \ e_2 = \{2\} \ , \ e_3 = \{3\} \ , \text{v} \ , \ e_5 = \{5\} \ , \ e_6 = \{6\} \quad , \ \{e_i\}$$

Nel lancio di una moneta possiamo ritenere equiprobabili i due eventi elementari testa e croce, cioè:

$$e_1 = \{T\} \quad , \quad e_2 = \{C\}$$

Sia **A** un evento casuale relativo allo spazio di probabilità Ω, cioè sia $A \subseteq \Omega$. Tra i risultati possibili (*) ve ne saranno alcuni che appartengono ad **A** ed altri che non vi appartengono.

I primi si dicono **casi favorevoli** ad **A** , gli altri **casi contrari** ad **A** .

Calcolo delle probabilità

Definizione classica di probabilità

La definizione classica di probabilità riconduce la nozione di probabilità di un evento alla nozione di eventi equiprobabili. Tale nozione viene assunta come **assioma** e quindi non necessita di una definizione formale. La probabilità di un evento A viene determinata a priori, senza effettuare alcuna prova sperimentale.

La **definizione classica di probabilità** enunciata da Laplace afferma quanto segue: **la probabilità $p(A)$ di un evento aleatorio A coincide col rapporto tra il numero m dei casi favorevoli all'evento A ed il numero n dei casi possibili nell'ipotesi che essi siano tutti equiprobabili**. In formule abbiamo: $p(A)=\frac{m}{n}$ con $m \leq n$ $0 \leq p(A) \leq 1$

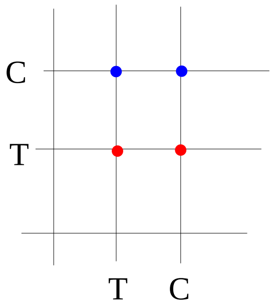
$m=0 \Rightarrow p(A)=0 \Rightarrow$ l'evento A è **impossibile**, cioè non può verificarsi mai

$m=n \Rightarrow p(A)=1 \Rightarrow$ l'evento A è **certo**, $n=2m \Rightarrow p(A)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ l'evento A si dice **equiprobabile** $p(A)<\frac{1}{2}$ l'evento A è detto **improbabile**, $p(A)>\frac{1}{2}$ l'evento A è detto **probabile**

La definizione classica di probabilità è applicabile quando siamo in grado di definire il numero dei casi possibili ed equiprobabili. La definizione classica di probabilità non ci consente di stabilire quale probabilità ha una persona di 30 anni di essere in vita tra 10 anni. In casi del genere può essere utile utilizzare la definizione **frequentista** di probabilità.

Una moneta viene lanciata tre volte. Dire qual è la probabilità che escano solo due croci

Calcolo delle probabilità



Lo **spazio campionario** del lancio di una sola moneta è :

$\Omega_1 = \{T, C\}$

In questo caso abbiamo due soli eventi elementari.

Lo **spazio campionario** del lancio di due monete è:

$$\Omega_2 = \{TT, TC, CT, CC\}$$

In questo caso abbiamo i seguenti 4 eventi elementari:

$$e_1 = \{TT\}\ ,\ e_2 = \{TC\}\ ,\ e_3 = \{CT\}\ ,\ e_4 = \{CC\}$$

Lo **spazio campionario** nel caso di tre lanci:

$$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CCT, CTC, CCC\}$$

In questo caso gli eventi elementari (che rappresentano i casi possibili) sono i seguenti 8:

$e_1 = \{TTT\}\ ,\ e_2 = \{TTC\}\ ,\ e_3 = \{TCT\}\ ,\ e_4 = \{TCC\}\ ,\ e_5 = \{CTT\}\ ,\ e_6 = \{CCT\}\ ,$

$e_7 = \{CTC\}\ ,\ e_8 = \{CCC\}$

I casi favorevoli sono 3 , precisamente $e_4 = \{TCC\}\ ,\ e_6 = \{CCT\}\ ,\ e_7 = \{CTC\}$

$A = (TCC, CCT, CTC)$

Otteniamo: $\mathbf{p(A) = \frac{3}{8}}$ **Si osservi che il numero degli eventi possibili è dato dalle disposizioni con ripetizione di due elementi (testa, croce) di classe 3.**

La probabilità come funzione

La **probabilità** che si verifichi l'evento $\mathbf{A}$ può anche essere interpretata come una **funzione** che ad ogni evento casuale $A \in P(\Omega)$ associa un numero reale appartenente all'intervallo limitato e chiuso $[0,1]$.

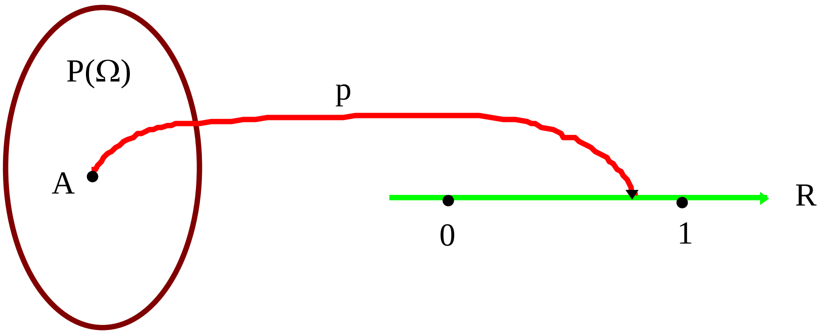
Definizione: La **probabilità** di un evento $\mathbf{A}$ è una funzione che ad ogni elemento $A \in P(\Omega)$ associa un numero reale $p(A) \in [0,1]$, cioè la probabilità di un evento $\mathbf{A}$ è una funzione di $P(\Omega)$ in $[0,1]$. In simboli possiamo scrivere:

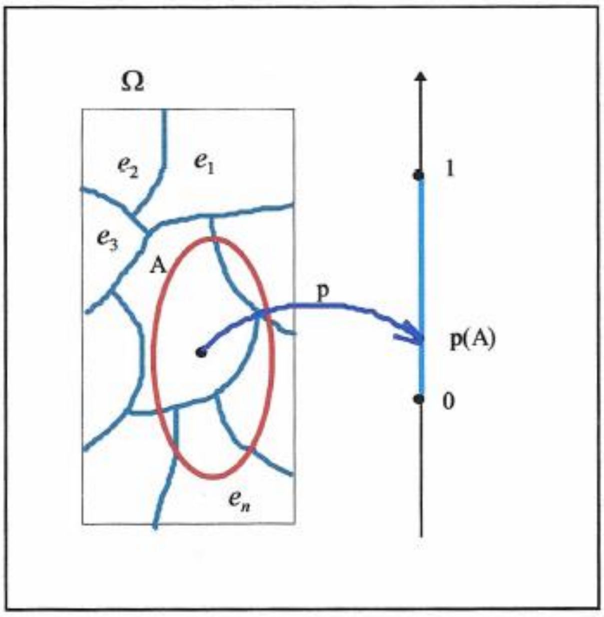
$$p : P(\Omega) \to [0,1] \qquad \text{o meglio:} \qquad p : A \in P(\Omega) \to p(A) \in [0,1]$$

Calcolo delle probabilità

La **funzione probabilità** $p(A)$ ha come **dominio** lo spazio degli eventi $P(\Omega)$ e come **codominio** l'intervallo limitato e chiuso $[0,1]$.

La probabilità di un evento **A** è una funzione che ha come **dominio** lo spazio degli eventi $P(\Omega)$ e come **codominio** l'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$.





La probabilità di un evento A è una funzione che ha come **dominio** lo spazio campionario Ω e come **codominio** l'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$.

In generale il dominio della funzione $p(A)$ è un insieme Ω discreto sia che Ω contempli un numero finito di eventi o che contempli una infinità numerabile di eventi. Nel caso in cui Ω ha la **potenza del continuo** (ad esempio Ω è l'insieme dei numeri reali appartenenti all'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$) non è possibile determinare la probabilità degli eventi utilizzando le proprietà ed i teoremi descritti per il caso discreto.

In generale, nel caso del **continuo**, ogni sottoinsieme di Ω non può essere definito come evento aleatorio. In questo caso bisogna introdurre assiomi e definizioni supplementari.

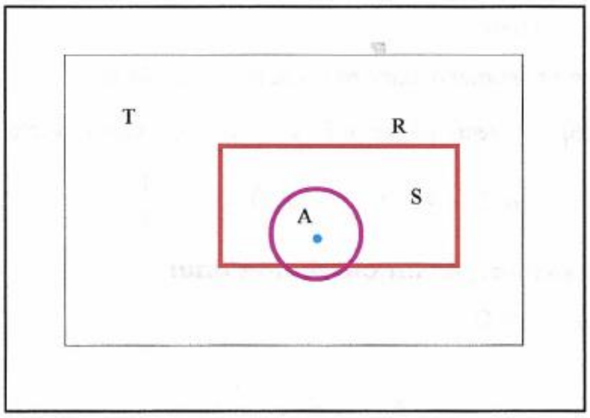
Tuttavia, ipotizzando l'**equiprobabilità**, in diversi casi la probabilità di alcuni eventi può essere determinata geometricamente.

In una città gli autobus di una linea si susseguono in una data direzione ad intervalli di 5 minuti. Calcolare la probabilità che un passeggera attenda non più di due minuti.

A 3 minuti B 2 minuti C

E = l'attesa è $\leq$ 2 minuti $p(e) = \dfrac{2}{5}$

Si lanci una moneta di area A su un tavolo T e sopra questo tavolo si disegni un rettangolo R di area S. Calcolare la probabilità che il centro della moneta cada all'interno dell'area S .



E = il centro della moneta è interno al rettangolo R

$$\boxed{p(E) = \frac{A}{S}}$$

Un'urna contiene 20 palline di cui 7 sono rosse, 10 sono nere e 3 sono gialle. Calcolare, estraendo dall'urna una sola pallina, qual è l'evento che ha maggiore probabilità di verificarsi?

$$p(R) = \frac{7}{20} = 35\% \quad , \quad p(N) = \frac{10}{20} = 50\% \quad , \quad p(G) = \frac{3}{20} = 15\%$$

Confrontando la probabilità dei singoli eventi si può osservare che l'evento che ha maggiore probabilità di verificarsi è l'evento <<**estrazione di una pallina nera**>> .

Determinare la probabilità di ottenere un numero pari nel lancio di un dado

Lo spazio campionario è: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e l'evento prescelto è $A = \{2,4,6\}$, cioè l'evento A si verifica quando il risultato del lancio è il numero 2 , o 4 , o 6 .

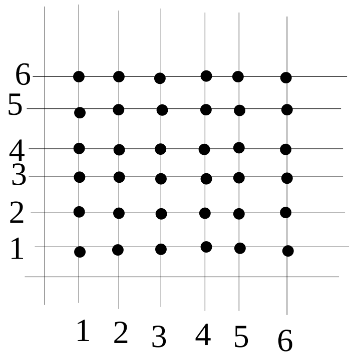
$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

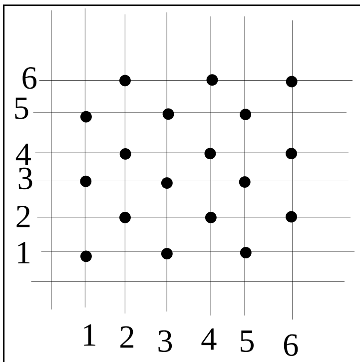
Determinare la probabilità di ottenere un numero pari nel lancio di due dadi

Consideriamo ora l'esperimento (schema probabilistico) del **lancio di due dadi**. Il risultato di ogni lancio sarà questa volta una coppia (a,b) appartenente al prodotto cartesiano $S \times S$ ove $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, cioè appartenente all'insieme $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ che è lo **spazio campionario** associato al lancio di due dadi.

In figura abbiamo rappresentato tutti i 36 elementi di Ω.

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6





Gli **eventi elementari**, tutti ugualmente possibili , sono 36 e pertanto ognuno di essi ha probabilità uguale a: $\frac{1}{36}$.

A = il risultato del lancio è un numero pari   I casi favorevoli all'evento A sono 18

v

Calcolare la probabilità che, nel lancio di due dadi, si ottenga come somma il numero 7 .

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Per comodità costruiamo la seguente tabella ottenuta dalla precedente ponendo, al posto di ciascuna coppia, la somma delle sue coordinate. Dei 36 casi possibili ve ne sono 6 che danno luogo al caso favorevole che la somma valga 7, cioè all'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità.

Pertanto la probabilità cercata è: $p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Nel lancio di due dadi qual è la probabilità che la somma dei due numeri apparsi sia uguale a 6?

$$p(A) = \frac{5}{36}$$

Nel lancio di due dadi qual è la probabilità che i due dadi presentino lo stesso numero?

Le coppie aventi due numeri uguali sono 6 : (1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6) e quindi il numero dei casi favorevoli è 6. Poiché il numero dei casi possibili è 36 la probabilità cercata è: $p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Calcolare la probabilità che esca almeno un 6 nel lancio simultaneo di due dadi

L'evento considerato è costituito dalle seguenti coppie:

(1,6) , (2,6) , (3,6) , (4,6) , (5,6) , (6,6) , (6,5) , (6,4) , (6,3) , (6,2) , (6,1)

e dunque il numero dei casi favorevoli è 11 . La probabilità cercata è: $p(A) = \dfrac{11}{36}$

Qual è la probabilità che fra i cinque numeri estratti al lotto, su una certa ruota, vi sia il numero 1?

Il risultato di ciascuna estrazione è una cinquina di numeri compresi fra 1 e 90. Lo **spazio di probabilità** associato all'estrazione è allora costituito dalle combinazioni dei primi 90 numeri interi positivi, presi a 5 a 5 Le combinazioni di 90 elementi di classe 5 ci vengono fornite dalla seguente formula: $n = \binom{90}{5} = \dfrac{90!}{5!85!}$.

Calcolo delle probabilità

I **casi possibili** sono n ed i **casi favorevoli** al nostro evento sono tanti quante sono le cinquine che contengono il numero 1. Queste ultime sono tante quante sono le combinazioni di classe 4 degli 89 numeri interi che vanno da 2 a 90 e cioè sono:

$$m = \binom{89}{4} = \frac{89!}{4!85!}$$

La probabilità richiesta è: $p(A) = \dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \dfrac{\frac{89!}{4!85!}}{\frac{90!}{5!85!}} = \dfrac{5!}{4!} \cdot \dfrac{89!}{90!}$

Ricordando che per ogni $n \in N$ si ha $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$ possiamo scrivere: $\dfrac{5!}{4!} = 5$, $\dfrac{90!}{89!} = 90$ e quindi: $p(A) = \dfrac{5}{90} = \dfrac{1}{18} = 0{,}0555\cdots$

Calcolare la probabilità di vincere un terno al lotto

numero degli eventi possibili = $n = \binom{90}{5} = \dfrac{90!}{5!85!} = \dfrac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!} = 43 \cdot 949 \cdot 268$

Se il giocatore ha puntato sull'uscita di 3 numeri determinati gli eventi favorevoli sono tutti i gruppi in cui compaiono i 3 numeri giocati e due qualsiasi dei rimanenti 87 numeri. Il numero degli eventi favorevoli coincide con quello delle cinquine che si possono formare associando, ai tre numeri giocati, 2 di quelli che possono essere estratti dagli 87 numeri rimasti nell'urna.

Gli **eventi favorevoli** sono : $C_{87,2} = \binom{87}{2}$.

La probabilità richiesta è: $p(C) = \dfrac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \dfrac{\frac{87 \cdot 86}{2 \cdot 1}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \dfrac{1}{11.748}$

Posso applicare il teorema della probabilità di eventi complessi e dipendenti (evento composto)

E = esce il terno sul quale ha puntato il giocatore

A = esce il primo numero del terno

B = esce il secondo numero del terno

C = esce il terzo numero del terno $\quad E = A \cap B \cap C$

$$p(E) = p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A \cap B) = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{87} = \frac{1}{11748}$$

01) Un'urna contiene 16 palline bianche, 9 rosse e 5 nere. Calcolare la probabilità che estraendo contemporaneamente (cioè in blocco) 2 palline esse siano: a) entrambe bianche b) entrambe nere c) una bianca ed una rossa d) almeno una sia bianca.

Nell'urna sono presenti $16+9+5=30$ palline. Il numero degli eventi possibili che si possono presentare estraendo contemporaneamente due palline coincide col numero delle combinazioni di 30 elementi di classe **2**.

n = numero degli eventi possibili $= C_{30,2} = \binom{30}{2}$

a) Evento **E** **= le 2 palline estratte sono bianche** L'evento **E** richiesto è l'estrazione contemporanea di due palline bianche.

Il numero dei casi favorevoli coincide col numero di combinazioni di 16 elementi di classe **2**

numero degli eventi favorevoli $= C_{16,2} = \binom{16}{2}$

$$p(E) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{\frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1}}{\frac{39 \cdot 29}{2 \cdot 1}} = \frac{8}{29}$$

b) Evento **F** **= le 2 palline estratte sono nere** L'evento **F** richiesto è l'estrazione contemporanea di due palline nere

numero degli eventi favorevoli $= C_{5,2} = \binom{5}{2}$

$$p(F) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}}{\frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1}} = \frac{2}{87}$$

c) Evento **G** **= le 2 palline estratte sono una bianca ed una rossa**

L'evento **G** richiesto è l'estrazione contemporanea di una pallina bianca e di una rossa.

Ciascuna pallina bianca , potendo essere associata a ciascuna delle 9 palline rosse , dà luogo a 9 delle coppie richieste per cui le 16 palline bianche possono dare luogo a $9 \cdot 16$ diverse coppie ciascuna delle quali è costituita da due palline , una bianca ed una rossa

numero dei casi favorevoli $= 9 \cdot 16 = 144$ $\qquad p(G) = \dfrac{144}{\binom{30}{2}} = \dfrac{144}{\frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1}} = \dfrac{48}{145}$

d) Evento **D** **= almeno una pallina estratta è bianca**

Evento $\bar{\mathbf{D}}$ **= nessuna pallina estratta è bianca**

$$p(\overline{D}) = \frac{\binom{14}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{14 \cdot 13}{30 \cdot 29} = \frac{91}{435}$$ = **probabilità che nessuna delle palline estratte sia bianca**

$$p(D) = 1 - p(\overline{D}) = 1 - \frac{91}{435} = \frac{435 - 91}{435} = \frac{344}{435}$$

La definizione assiomatica di probabilità (*)

La **definizione assiomatica di probabilità** si basa su tre assiomi:

Assioma 1 o assioma della non negatività

Ad ogni evento **A** dello spazio degli eventi è associabile un numero reale non negativo detto **probabilità dell'evento A** $\qquad \mathbf{p(A) \geq 0}$

Assioma 2 o assioma della certezza

La probabilità dello **spazio campionario** Ω è **1**: $\qquad \mathbf{p(\Omega) = 1}$

Assioma 3 o assioma dell'additività degli eventi incompatibili

(*) Il **metodo assiomatico** si fonda sulle seguenti osservazioni: **1)** In ogni campo del sapere umano è impossibile dare una definizione di ogni parola, senza presupporre noto il significato di altre parole. Ogni definizione richiede termini già noti. Vi debbono quindi essere termini che non si definiscono e che si chiamano **termini primitivi**. Dunque ogni **scienza deduttiva** deve presupporre conosciuti alcuni termini primitivi **2)** Per lo stesso motivo non è possibile dimostrare tutte le affermazioni di una teoria. Quando si fa un ragionamento si stabilisce la verità di una affermazione sulla base di altre affermazioni che si suppongono vere. Vi debbono essere delle affermazioni che non si dimostrano ma che si ammettono vere cosi come sono; esse si dicono **assiomi** o **postulati**.

Calcolo delle probabilità

Se gli eventi $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ sono a due a due incompatibili allora:

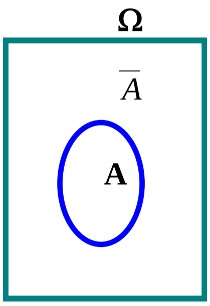
$$\mathbf{p}(\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \cup \mathbf{A_3} \cup \cdots \cup \mathbf{A_n}) = \mathbf{p}(\mathbf{A_1}) + \mathbf{p}(\mathbf{A_2}) + \mathbf{p}(\mathbf{A_3}) + \cdots + \mathbf{p}(\mathbf{A_n})$$

La definizione assiomatica di probabilità, dovuta al matematico russo **KOLMOGOROV** (1933), include come casi particolari sia la definizione classica di probabilità che quella di probabilità frequentista.

Teoremi sulla probabilità

a) Teorema della probabiltà dell'evento contrario

La somma della probabilità di un evento **A** e di quella dell'evento contrario $\bar{\mathbf{A}}$ è uguale ad 1: $\mathbf{p}(\mathbf{A}) + \mathbf{p}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{1}$



Dimostrazione

$$\Omega = A \cup \bar{A} \quad \Rightarrow \quad p(\Omega) = p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{A}) + \mathbf{p}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{1} \qquad \mathrm{p}(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{p}(\mathrm{A})$$

Un dado viene lanciato due volte. Determinare la probabilità che esca il numero 6 in almeno una delle due facce

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ è lo **spazio degli eventi elementari** associato allo schema probabilistico proposto. In figura abbiamo rappresentato tutti i 36 elementi di Ω.

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

A = esce il numero 6 in almeno una delle due facce $\qquad p(A) = \dfrac{11}{36}$

$\bar{\mathbf{A}}$ = il numero 6 non esce in nessuna delle due facce $\qquad p(\bar{A}) = \dfrac{25}{36}$

Quindi: $$p(\mathbf{A})=1-p(\bar{\mathbf{A}})=1-\frac{25}{36}=\frac{36-25}{36}=\frac{11}{36}$$

Calcolare la probabilità che, nel lancio di due dadi, si ottenga come somma il numero 6

$$p(A)=\frac{5}{36}$$

6	7	8	9	10	11	12
5	(6)	7	8	9	10	11
4	5	(6)	7	8	9	10
3	4	5	(6)	7	8	9
2	3	4	5	(6)	7	8
1	2	3	4	5	(6)	7
	1	2	3	4	5	6

b) Teorema della probabilità totale

Dati due eventi **A** e **B** compatibili (cioè tali che $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\neq\varnothing$) la probabilità dell'evento unione $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi diminuita della probabilità dell'evento intersezione: $\mathbf{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$

Per **tre eventi A, B, C compatibili** abbiamo:

$$\mathbf{p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)}$$

Per **eventi incompatibili** abbiamo:

$$\mathbf{p(A\cup B)=p(A)+p(B)} \qquad \mathbf{p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)}$$

Dimostrazione: Siano A e B due eventi sottoinsiemi di uno spazio di probabilità Ω tali che $C = A\cap B \neq \varnothing$. Questo significa che gli eventi A e B sono compatibili fra loro, cioè il verificarsi di uno dei due eventi non esclude il verificarsi dell'altro.

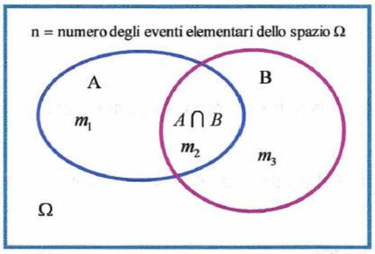
Indicato con n il numero dei casi possibili, siano:

m_2 = numero di casi favorevoli all'evento $A\cap B$

m_1 = numero di casi favorevoli all'evento $A-A\cap B$

m_3 = numero di casi favorevoli all'evento $B-A\cap B$

$p(A)=m_1+m_2 \qquad p(B)=m_2+m_3 \qquad p(A\cap B)=m_2$



$$p(A\cup B)=m_1+m_2+m_3=p(A)+m_3=p(A)+(m_2+m_3)-m_2=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

Adesso consideriamo il caso di **tre eventi A, B, C compatibili**.

Indicato con n il numero dei casi possibili, siano:

$m_1+m_2+m_3+m_4$ i casi favorevoli all'evento A $\quad m_2+m_3+m_5+m_6$ i casi favorevoli all'evento B

$m_3+m_4+m_6+m_7$ i casi favorevoli all'evento C

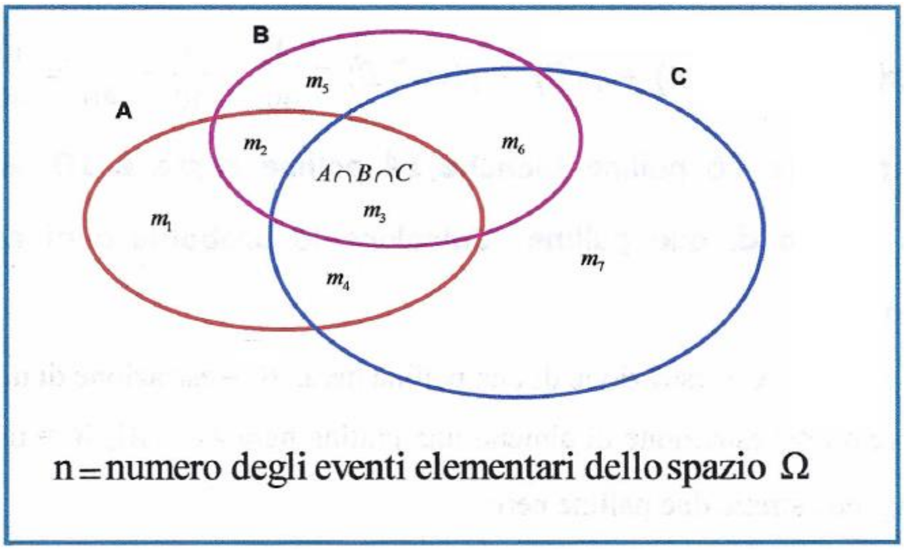
$$p(A)=\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{n} \qquad p(B)=\frac{m_2+m_3+m_5+m_6}{n} \qquad p(C)=\frac{m_3+m_4+m_6+m_7}{n}$$

$$p(A\cap B\cap C)=\frac{m_3}{n} \qquad p(A\cap B)=\frac{m_2+m_3}{n} \qquad p(A\cap C)=\frac{m_3+m_4}{n} \qquad p(B\cap C)=\frac{m_3+m_6}{n}$$

$$p(A\cup B\cup C)=\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7}{n}$$

$$m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7=(m_1+m_2+m_3+m_4)+(m_2+\cancel{m_3}+m_5+m_6)+$$
$$+(\cancel{m_3}+\cancel{m_4}+m_6+m_7)-(m_2+\cancel{m_3})-(\cancel{m_3}+\cancel{m_4})-(\cancel{m_3}+m_6)+\cancel{m_3} \Rightarrow$$

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$



Calcolare la probabilità che, lanciando un dado, esca un numero x che sia dispari oppure minore di 4

I due eventi $A=\{1,3,5\}=$ esce un numero dispari, $B=\{1,2,3\}=$ esce un numero minore di 4 sono compatibili fra loro in quanto $A\cap B=\{1,3\}$ $\quad A\cup B=\{1;2;3;5\}$

Ricordando che $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ possiamo scrivere:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$p(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \quad \text{definizione classica di probabilità}$$

Calcolo delle probabilità

Calcolare la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di carte di 40, questa sia una figura o una carta di cuori

I due eventi **A** (estrazione di una figura) e **B** (estrazione di una carta di cuori) sono fra loro compatibili in quanto: $A \cap B = \{\text{fante di cuori , donna di cuori , re di cuori}\}$

Tenuto presente che le figure, presenti in un mazzo di carte da 40 sono 12 e che le carte di cuori sono 10 , abbiamo: $p(A) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$, $p(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$, $p(A \cap B) = \frac{3}{40}$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$$

Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte. Calcolare la probabilità che la carta estratta sia un asso (evento A) o una carta di cuori (evento B).

Gli eventi A e B sono fra loro compatibili in quanto la loro intersezione dà luogo all'asso di cuori .

$p(A) = \frac{4}{40}$, $p(B) = \frac{10}{40}$, $p(A \cap B) = \frac{1}{40}$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$

Da un'urna contenente 16 palline bianche,14 palline rosse e 10 nere si effettua un'estrazione in blocco di due palline. Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina nera

Consideriamo gli eventi: **A** = estrazione di una pallina nera, **B** = estrazione di due palline nere
$A \cup B$ indica l 'evento << estrazione di almeno una pallina nera >> . $A \cup B$ = o viene estratta una pallina nera o vengono estratte due palline nere .

Poiché gli eventi **A** e **B** sono fra loro **incompatibili** ($A \cap B = \varnothing$) abbiamo:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{\binom{10}{1}\binom{30}{1}}{\binom{40}{2}} + \frac{\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{345}{780} = \frac{23}{52}$$

Altra risoluzione: L'evento contrario dell'evento <<**estrazione di almeno una pallina nera**>> è <<**estrazione di zero palline nere**>>

$$p(A\cup B)=1-p\left(\overline{A\cap B}\right)=1-\frac{\binom{30}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{345}{780}=\frac{23}{52}$$

Da un mazzo di 40 carte si effettua una estrazione in blocco di 4 carte. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi: A) almeno una carta sia un asso B) al massimo ci siano 3 assi C) almeno una carta sia di cuori D) al massimo ci siano tre carte di cuori

Invece di calcolare direttamente la probabilità dell'evento A (almeno una carta sia un asso) calcoliamo la probabilità dell'evento contrario $\overline{A}$ (zero assi)

$$p(\overline{A}) = \frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}} \qquad \text{e quindi} \quad p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}$$

L'evento B (al massimo tre assi) è contrario dell'evento $\overline{B}$ (quattro assi)

$$p(\overline{B}) = \frac{1}{\binom{40}{4}} \qquad p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{\binom{40}{4}}$$

In maniera del tutto analoga possiamo ricavare le altre due probabilità:

$$p(C) = 1 - \frac{\binom{30}{4}}{\binom{40}{4}} \quad , \quad p(D) = 1 - \frac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}}$$

c) Probabilità condizionata

In uno spazio di probabilità Ω, fissato un evento B con probabilità prestabilita $p(B) > 0$, la probabilità che un evento **A** di Ω si verifichi , nell'ipotesi che B si sia verificato, si chiama **probabilità condizionata dell'evento A rispetto all'evento B** e si indica col simbolo $p(A/B)$ e si legge << **probabilità di A condizionata da B o subordinata a B**>>oppure <<**probabilità dell'evento A quando l'evento B si è verificato**>> .

$p(A)$ = **probabilità incondizionata**

$p(A/B)$ = **probabilità dell'evento A condizionata dall'evento B**

Nella teoria assiomatica di probabilità, $p(A/B)$, cioè la **probabilità condizionata dell'evento A quando sappiamo che si è verificato l'evento B**, per definizione ,è uguale al rapporto tra la probabilità che si verifichi l'evento $A \cap B$ e la probabilità che si verifichi l'evento **B**. In formule abbiamo:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\text{card}\, A \cap B}{\text{card}\, B} = \frac{n_{A \cap B}}{n_B} \qquad [§]$$

Essa coincide numericamente col rapporto tra il numero **r** dei casi favorevoli all'evento $A \cap B$ ed il numero **k** dei casi favorevoli all'evento **B**, quando lo spazio campionario è Ω.

Analogamente, la probabilità condizionata dell'evento **B** rispetto all'evento **A**, con $p(A) > 0$ è definita dalla formula (si noti che $A \cap B = B \cap A$)

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\text{card}\, A \cap B}{\text{card}\, A} = \frac{n_{A \cap B}}{n_A}$$

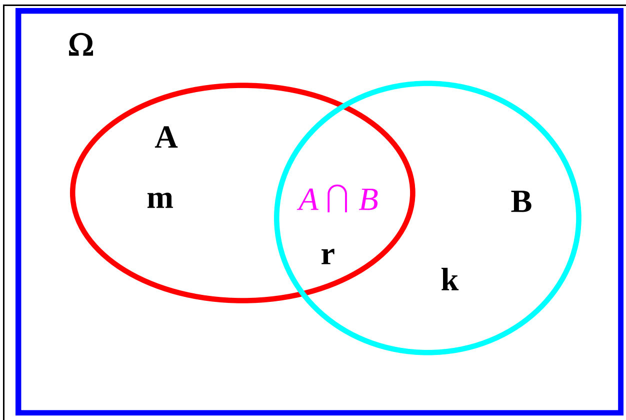
$p(A\cap B)=p(B\cap A)=p(A)\cdot p(B/A)=p(B)\cdot p(A/B)$ che esprime il teorema della probabilità composta.

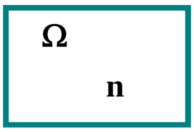
Se sappiamo che l'evento **B** si è verificato allora il numero di eventi elementari dell'insieme $A\cap B$ rappresenta il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento **A** quando si è verificato l'evento **B**, mentre il numero il numero degli eventi elementari dell'insieme **B** rappresenta il numero dei casi possibili perché si verifichi l'evento A sapendo che si è verificato l'evento **B**.

Nella teoria classica di probabilità la suddetta formula **[§]** è dimostrabile in base alle seguenti considerazioni. Sia Ω lo **spazio campionario** avente **n** **eventi elementari**. Siano inoltre: **1)** **m** gli eventi elementari di Ω favorevoli all'evento **A**, cioè l'insieme **A** è costituito da m eventi elementari di **A**

2) **r** gli eventi elementari di Ω favorevoli all'evento $A\cap B$ 3) **k** gli eventi elementari di Ω favorevoli all'evento **B** (dove $r\leq m$, $r\leq k$)

Supporre vero **B** significa affermare che si è verificato uno degli eventi elementari di Ω appartenenti a **B**. Tutti gli eventi elementari di $\Omega \notin B$ sono **impossibili**.





Si può riassumere sinteticamente la situazione dicendo che **B** è il nuovo **spazio campionario**, cioè Ω si è ridotto a **B**

Possiamo dire che gli eventi favorevoli ad **A** (cioè $A\cap B$) sono **r** mentre gli eventi possibili (in $\Omega\equiv B$) sono **k** per cui possiamo scrivere:

$$p(A/B)=\frac{r}{k}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{card\ A\cap B}{card\ B}$$

La formula trovata che, nella definizione classica, può essere dimostrata, nella definizione assiomatica di probabilità viene assunta come **definizione di probabilità condizionata**, cioè la probabilità condizionata dell'evento $\mathbf{A}$, rispetto all'evento $\mathbf{B}$, ci viene espressa dalla seguente formula:

$$\mathbf{p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}}$$

$\mathbf{card\,A\cap B}$ = numero di volte in cui si presenta l'evento $\mathbf{A\cap B}$

$\mathbf{card\,B}$ = numero di volte in cui si presenta l'evento $\mathbf{B}$

ESEMPIO

Si lancino contemporaneamente due dadi. Qual è la probabilità che la somma dei numeri delle due facce valga 8 (evento $\mathbf{A}$) sapendo che il risultato ottenuto è un numero pari (evento $\mathbf{B}$) ?

Evento $\mathbf{A}$ = la somma dei numeri presenti nelle facce dei due dadi vale 8

Evento $\mathbf{B}$ = la somma dei numeri presenti nelle facce dei due dadi è un numero pari

Sappiamo che esistono 36 risultati possibili ed i lanci favorevoli all'evento $\mathbf{A}$ sono i 5 seguenti: $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

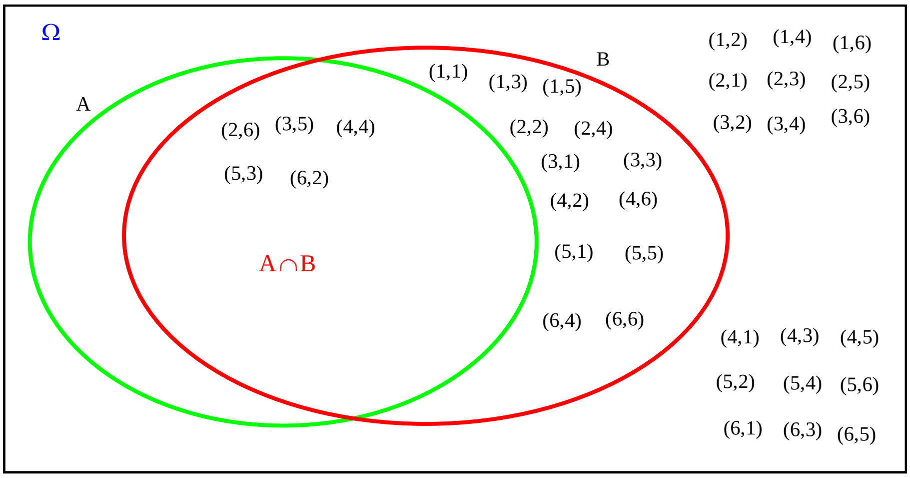
Quindi la **probabilità incondizionata** (cioè senza la conoscenza dell'evento $\mathbf{B}$) dell'evento $\mathbf{A}$ è: $p(A) = \frac{5}{36}$

Se si è verificato l'evento $\mathbf{B}$ i casi possibili sono 18 e non 36 mentre i casi favorevoli sono ancora 5 e , di conseguenza , la probabilità dell'evento $\mathbf{A}$ condizionata dall'evento $\mathbf{B}$ vale:

$$p(A/B) = \frac{5}{18} \qquad \boxed{p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{5}{18}}$$

In Ω i casi favorevoli all'evento $A\cap B$ sono **5**, mentre i casi possibili sono 36. In Ω i casi favorevoli all'evento $\mathbf{B}$ sono 18, mentre i casi possibili sono 36.

Calcolo delle probabilità



Si dice che due eventi **A** e **B** sono **stocasticamente dipendenti** o **statisticamente dipendenti** se:

$$p(A/B) \neq p(A) \qquad p(B/A) \neq p(B)$$

Si dice che due eventi **A** e **B** sono **stocasticamente indipendenti** o **statisticamente indipendenti** se:

$$p(A/B) = p(A) \qquad p(B/A) = p(B)$$

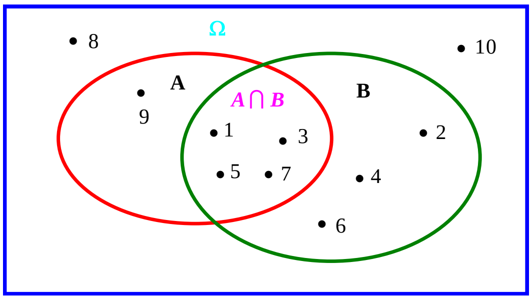
eventi stocasticamente dipendenti significa eventi dipendenti in probabilità

eventi stocasticamente indipendenti significa eventi non dipendenti in probabilità

Si dice che l'evento **A** è **indipendente** dall'evento **B** se il verificarsi dell'evento **B** non altera la probabilità di verificarsi dell'evento **A** e viceversa.

ESEMPIO

In un'urna vi sono 10 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Qual è la probabilità di estrarre una pallina contrassegnata con un numero dispari (evento **A**) minore di 8 (evento **B**)?



$A = \{1;3;5;7;9\}$ $B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ $A \cap B = \{1;3;5;7\}$ $p(A \cap B) = \dfrac{card\ A \cap B}{card\ B} = \dfrac{4}{7}$

$p(A/B)=\frac{4}{7}$ in quanto i **casi possibili** sono 7 (cioè i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) e non 10 perché supponiamo che l'evento **B** si sia verificato , mentre i **casi favorevoli** sono 4 (precisamente 1,3 , 5) . Applicando la formula della probabilità condizionata abbiamo:

$$p(A\cap B)=\frac{4}{10} \qquad p(B)=\frac{7}{10} \qquad p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}}=\frac{4}{7}$$

Il teorema della probabilità composta

Per gli **eventi compatibili** e **indipendenti** vale il **primo teorema di Laplace**: *La probabilità di verificarsi di un evento C composto di due eventi A e B compatibili e indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi* $p(C)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$ [*]

Per gli **eventi compatibili e dipendenti** vale il **secondo teorema di Laplace**: *La probabilità di verificarsi di un evento composto C, formato da due eventi A e B compatibili e dipendenti, è data dal prodotto della probabilità che ha il primo evento di verificarsi per la probabilità che ha il secondo nell'ipotesi che il primo si sia verificato*.

$$p(C)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)=p(B)\cdot p(A/B) \qquad [**]$$

Nel caso di tre eventi **A**, **B**, **C** vale quanto segue:

- Eventi **A**, **B**, **C** **stocasticamente indipendenti**:

$$p(C)=p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p(B)\times p(C)$$

- Eventi **A**, **B**, **C** **stocasticamente dipendenti**

$$p(D)=p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B/A)\cdot p(C/A\cap B)$$

Nel caso di quattro eventi **stocasticamente dipendenti** abbiamo:

Calcolo delle probabilità

$$p(E)=p(A\cap B\cap C\cap D)=p(A)\cdot p(B/A)\cdot p(C/A\cap B)\times p(D/A\cap B\cap C)$$

Da un'urna contenente 8 palline rosse e 2 palline bianche estraiamo successivamente due palline. Calcolare la probabilità che le due palline estratte siano entrambe bianche

L'evento **E** << **uscita di due palline bianche** >> è un evento complesso costituito da due eventi parziali B_1 = **la prima pallina estratta è bianca** e B_2 = **la seconda pallina estratta è bianca**.

L'estrazione può essere effettuata in due maniere diverse.

$E = B_1 \cap B_2$ = **le due palline estratte sono entrambe bianche**

Primo modo: Dopo la prima estrazione rimettiamo la pallina dentro l'urna. In questo caso i due eventi **A** e **B** sono **indipendenti** in quanto l'eventuale prima estrazione di una pallina bianca non altera la probabilità di una seconda eventuale uscita di una pallina bianca. $p(C)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{25}$

Secondo modo: Dopo la prima estrazione non rimettiamo la pallina dentro l'urna.

I due eventi **A** e **B** questa volta sono **dipendenti**.

$$p(C)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

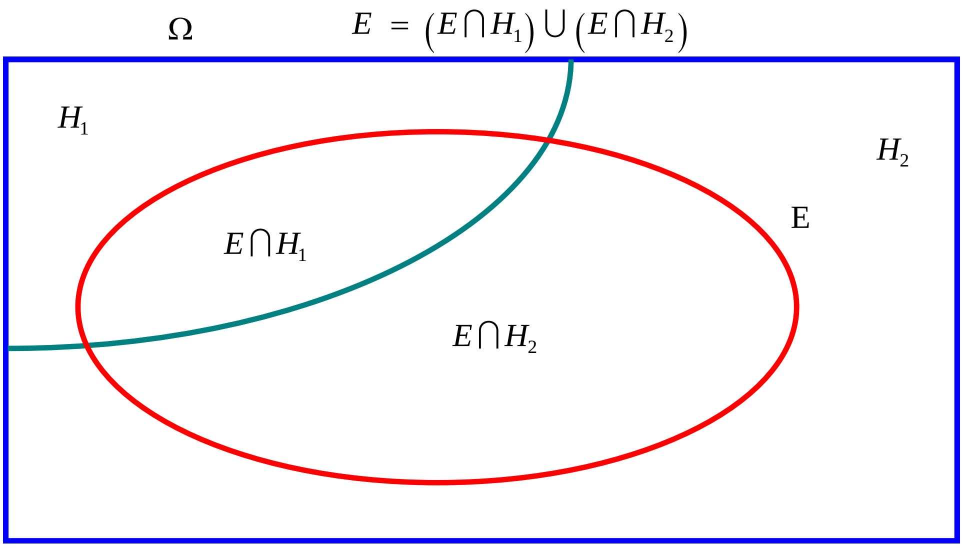
Teorema di Bayes

Consideriamo due eventi H_1, H_2 aventi rispettivamente probabilità $p(H_1)$, $p(H_2)$ e supponiamo che essi costituiscano un **sistema completo di eventi**. Questo significa che gli eventi H_1 ed H_2 sono fra loro **incompatibili** $(H_1\cap H_2=\varnothing)$ e la loro unione è l'**insieme degli eventi elementari** Ω, cioè $H_1 \cup H_2=\Omega$.

H_1 ed H_2 costituiscono una **partizione** di Ω in quanto risulta:

$$H_1\cap H_2=\varnothing \qquad H_1\cup H_2=\Omega$$

cioè gli insiemi H_1 ed H_2 sono **disgiunti** e la loro unione è l'**insieme campionario** Ω.



Consideriamo un altro evento **E** dello spazio campionario Ω.Se conosciamo le probabilità $p(H_1)$, $p(H_2)$ degli eventi H_1, H_2 e le probabilità condizionate $p(E/H_1)$, $p(E/H_2)$ possiamo calcolare la **probabilità incondizionata** $p(E)$.

Poiché gli eventi $E \cap H_1$, $E \cap H_2$ sono fra loro **incompatibili** posso applicare il **teorema della probabilità totale** (o **teorema della somma**)

$$\boxed{\mathbf{p(E)=p(E \cap H_1 \; U \; E \cap H_2)=p(E \cap H_1)+p(E \cap H_2)}}$$

Infatti la probabilità che si verifichi l'evento **E** è data dalla somma della probabilità che si verifichi l'evento **E** quando si è verificato l'evento H_1 e di quella dell'evento **E** quando si è verificato l'evento H_2.   Ricordando che:

$$\mathbf{p(E \cap H_1)=p(H_1) \cdot p(E/H_1)=p(H_1 \cap E)} \qquad \mathbf{p(E \cap H_2)=p(H_2) \cdot p(E/H_2)=p(H_2 \cap E)}$$

possiamo scrivere: $$\mathbf{p(E)=p(H_1) \cdot p(E/H_1)+p(H_2) \cdot p(E/H_2)=\sum_{i=1}^{2} p(H_i) \times p(E/H_i)}$$

Supponiamo adesso di sapere che l'evento **E** si è verificato, cioè supponiamo di conoscere $p(E)$ e vediamo se è possibile determinare anche la probabilità dell'evento H_i $(i=1,2)$, cioè vediamo se è possibile determinare $p(H_1/E)$, $p(H_2/E)$.

Applicando il **teorema della probabilità composta** all'evento composto $E \cap H_1$ possiamo scrivere: $p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)$

da cui ricaviamo: $\boxed{p(H_1/E)=\dfrac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(E)}}$, ma noi abbiamo dimostrato che:

$$p(E) = p(H_1)\cdot p(E/H_1) + p(H_2)\cdot p(E/H_2) + p(H_3)\cdot p(E/H_3)$$

per cui la formula precedente assume la forma:

$$p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{\sum_{i=1}^{2} p(H_i)\times p(E/H_i)}$$

che rappresenta la **formula di Bayes** relativa ad un sistema completo di due eventi.

Applicando il teorema della probabilità composta all'evento composto $E \cap H_2$ ed operando come prima ci ricaviamo la seguente formula.

$$p(H_2/E)=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{\sum_{i=1}^{2} p(H_i)\times p(E/H_i)}$$

Questa formula può essere ricavata ricordando che: $p(H_1/E)+p(H_2/E)=1$

Il teorema di **Bayes** è detto anche **teorema delle cause di un evento** in quanto esso risolve il seguente problema: ammesso che si sia verificato l'evento E, qual è la probabilità che esso sia stato generato dalla causa H_1 (o dalla causa H_2) nell'ipotesi che gli eventi H_1 ed H_2 costituiscano un sistema completo di eventi.

Ulteriori precisazioni sui simboli della seguente formula di Bayes:

$$p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{\sum_{i=1}^{2} p(H_i)\times p(E/H_i)} \qquad [§§]$$

$p(H_1/E)$ = probabilità che, essendosi presentato l'evento E, esso sia stato generato dalla causa H_1 = probabilità che la causa H_1 abbia generato l'evento E

$p(H_1)$ = probabilità che agisca la causa H_1

$p(H_2)$ = probabilità che agisca la causa H_2

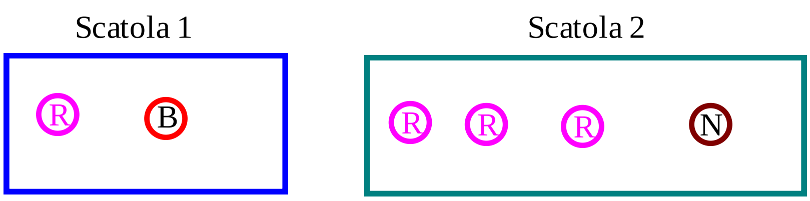
$p(E/H_1)$ = probabilità che l'evento E si verifichi in dipendenza della causa H_1

$\mathbf{p(E/H_2)}$ = probabilità che l'evento E si verifichi in dipendenza della causa H_2
$\mathbf{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}$ = probabilità che agisca la causa H_1 e che, subordinatamente a tale fatto , si verifichi **E**
$\mathbf{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}$ = probabilità che agisca la causa H_2 e che, subordinatamente a tale fatto, si verifichi **E**

Ne segue che il denominatore della **[§§]** $\mathbf{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}$ **esprime la probabilità che l'evento E si verifichi**, non importa per quale causa. Il significato della **[§§]** risulta evidente**.** Essa dice precisamente che :

$$\begin{matrix}\text{probabilità che E sia stato} \\ \text{generato dalla causa } H_1\end{matrix} = \frac{\text{probabilità che agisca } H_1 \text{ e che in dipendenza di ciò si verifichi E}}{\text{probabilità che si verifichi E non importa per quale causa}}$$

Consideriamo due scatole . Nella prima sono contenute 1 pallina rossa ed 1 bianca, nella seconda sono contenute 3 palline rosse ed 1 pallina nera. Le due scatole si presentano come segue: Supponiamo ora che, scelta a caso una scatola, si estragga una pallina da essa senza conoscere la scatola da cui avviene l'estrazione. Ammesso che la pallina estratta sia rossa, calcolare la probabilità che essa provenga dalla scatola 1.



In questo caso le scatole sono le cause che possono originare l'evento **E** = **la pallina estratta è rossa**

$\mathbf{H_1}$ = la pallina estratta proviene dalla **scatola 1** ,

$\mathbf{H_2}$ = la pallina estratta proviene dalla **scatola 2** ,

E = **pallina estratta è rossa**

$p(H_1/E)$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla scatola 1 sapendo che essa è rossa**

$p(H_1)$= **probabilità che la pallina estratta provenga dalla prima scatola** $= \frac{1}{2}$

$p(H_2)$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla seconda scatola** $= \frac{1}{2}$

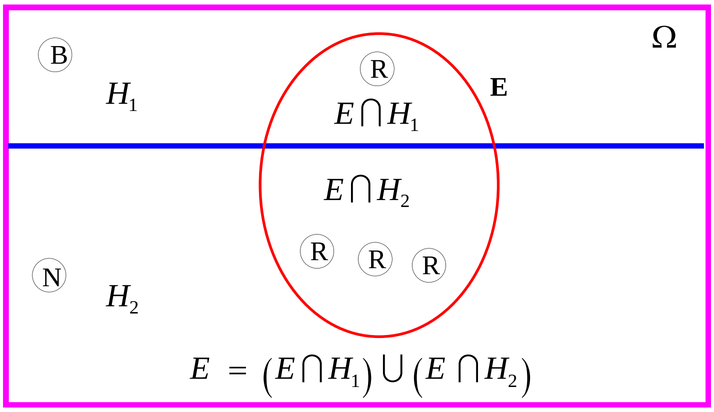
$p(E/H_1)$ =**probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla prima scatola** $= \frac{1}{2}$

$p(E/H_2)$ = **probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla seconda scatola** $= \frac{3}{4}$

$p(H_1)\cdot p(E/H_1)$ = **probabilità che, essendo stata scelta la prima scatola, venga estratta una pallina rossa** $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = p(E\cap H_1)$

$p(H_2)\cdot p(E/H_2)$ = **probabilità che, essendo stata scelta la seconda scatola, venga estratta una pallina rossa** $= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = p(E\cap H_2)$

Applicando la formula di Bayes relativa ad un sistema di due eventi completi H_1 ed H_2 abbiamo: $p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}=\frac{2}{5}$



Come si vede:

- Al numeratore abbiamo la probabilità che la pallina rossa provenga dalla scatola 1

$$p(E\cap H_1)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

- Al denominatore abbiamo la probabilità di avere pallina rossa non interessando da quale scatola essa possa provenire $\mathbf{p(E)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{8}}$

Osservazione

Se vogliamo conoscere la probabilità che la pallina rossa provenga dalla scatola due abbiamo: $\mathbf{p(H_2/E)=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{3}{5}}$

Naturalmente abbiamo: $p(H_1/E)+p(H_2/E)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$

Osservazione: Le probabilità $p(H_1)$ e $p(H_2)$ sono dette **probabilità a priori**.

Quando diciamo che $p(H_1)=\frac{1}{2}=0{,}5$ intendiamo dire che, a priori, la causa H_1 può agire con probabilità $\frac{1}{2}$.

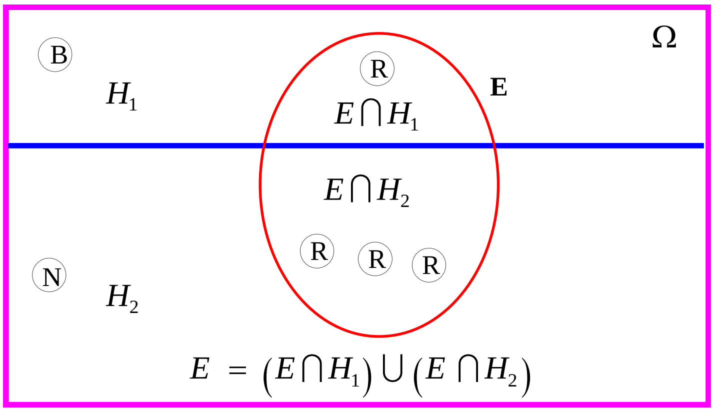
La medesima probabilità, stimata a posteriori, cioè dopo che l'evento si è verificato, è $p(H_1/E)=\frac{2}{5}=0{,}4\neq p(H_1)=\frac{1}{2}=0{,}5$. Tale fatto è ovvio. Infatti, occorre notare che mentre, a priori, essendo due le scatole, si può ritenere che esse abbiano uguale probabilità di generare una pallina rossa ciò non è possibile a posteriori. Se è stata generata una pallina rossa è meno verosimile che essa provenga dalla scatola 1 mentre è più verosimile pensare che essa provenga dalla scatola 2. A tale proposito occorre tenere presente che nella scatola 1 abbiamo una sola pallina rossa su 2 mentre nella scatola 2 abbiamo 3 palline rosse su 4.

Sintetizzando possiamo scrivere la formula di Bayes nella seguente maniera:

$$\mathbf{p(H_1/E)=\frac{p(E\cap H_1)}{p(E)}=\frac{p(E\cap H_1)}{p(E\cap H_1)+p(E\cap H_2)}=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}}$$

$$\mathbf{p(H_2/E)=\frac{p(E\cap H_2)}{p(E)}=\frac{p(E\cap H_2)}{p(E\cap H_1)+p(E\cap H_2)}=\frac{p(H_2)\times p(E/H_2)}{p(H_1)\times p(E/H_1)+p(H_2)\times p(E/H_2)}}$$

$$\mathbf{E\cap H_1=H_1\cap E}$$



Se H_1**,** H_2**,** H_3 **sono tre eventi mutuamente incompatibili e costituente un sistema completo di eventi** **(**$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega$**)** ed **E** è un evento che si verifica assieme ad uno solo dei tre eventi H_1, H_2, H_3 dati, allora vale il teorema della probabilità totale che ci consente di scrivere:

$$\mathbf{p(E) = p(H_1) \cdot p(E/H_1) + p(H_2) \cdot p(E/H_2) + p(H_3) \cdot p(E/H_3)}$$

Un evento **E** si verifichi a diverse condizioni, sulla natura delle quali si fanno 3 ipotesi H_1, H_2, H_3. Si esegue un esperimento nel quale si realizza l'evento **E**. Questa determina una rivalutazione delle tre ipotesi H_1, H_2, H_3, cioè le loro probabilità mutano in quanto adesso si hanno ulteriori informazioni. Abbiamo il **teorema di Bayes**:

$$\mathbf{p(H_1/E) = \frac{p(H_1) \cdot p(E/H_1)}{p(E) = p(H_1) \cdot p(E/H_1) + p(H_2) \cdot p(E/H_2) + p(H_3) \cdot p(E/H_3)}}$$

$$\mathbf{p(H_2/E) = \frac{p(H_2) \cdot p(E/H_2)}{p(E) = p(H_1) \cdot p(E/H_1) + p(H_2) \cdot p(E/H_2) + p(H_3) \cdot p(E/H_3)}}$$

$$\mathbf{p(H_3/E) = \frac{p(H_3) \cdot p(E/H_3)}{p(E) = p(H_1) \cdot p(E/H_1) + p(H_2) \cdot p(E/H_2) + p(H_3) \cdot p(E/H_3)}}$$

Altro esempio

Vi sono 3 urne. La prima contiene 12 palline bianche, la seconda contiene 8 palline bianche e 2 rosse, la terza contiene 20 palline rosse. Si sceglie a caso un'urna e da questa si estrae una pallina che

risulta rossa. Qual è la probabilità che la pallina rossa sia stata estratta:

a) dalla prima urna b) dalla seconda urna c) dalla terza urna.

H_1 = la pallina estratta proviene dal'urna **1**,

H_2 = la pallina estratta proviene dal'urna **2**

H_3 = la pallina estratta proviene dal'urna **3**

$p(H_1)=\frac{1}{3}$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla prima urna**

$p(H_2)=\frac{1}{3}$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla seconda urna**

$p(H_3)=\frac{1}{3}$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla terza urna**

E = la pallina estratta è rossa

$p(H_1/E)$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla scatola 1 sapendo che essa è rossa**

$p(E/H_1)=0$ = **probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla prima scatola**

$p(E/H_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ = **probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla seconda scatola**

$p(E/H_3)=\frac{20}{20}=1$ = **probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla rossa scatola**

$\mathbf{p(E\cap H_1)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)=\frac{1}{3}\cdot 0=0}$ **probabilità che, essendo stata scelta la prima scatola, venga estratta una pallina rossa**

$$\mathbf{p(H_1/E)=\frac{p(E\cap H_1)}{p(E)}=\frac{p(E\cap H_1)}{p(E\cap H_1)+p(E\cap H_2)+p(E\cap H_3)}}$$

$$\mathbf{p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}}$$

$$\mathbf{p(H_1/E) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot 1} = 0}$$

$\mathbf{p(E\cap H_2)=p(H_2)\cdot p(E/H_2)}$ = **probabilità che, essendo stata scelta la seconda scatola, venga estratta una pallina rossa**

$$p(H_2/E)=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}$$

$$\mathbf{p(H_2/E)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1}{6}}$$

$\mathbf{p(E\cap H_3)=p(H_3)\cdot p(E/H_3)}$ = **probabilità che , essendo stata scelta la terza urna, venga estratta una pallina rossa**

$$p(H_3/E)=\frac{p(H_3)\cdot p(E/H_3)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}$$

$$\mathbf{p(H_3/E)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{5}{6}}$$

Vi sono 3 urne. La prima contiene 12 palline bianche, la seconda contiene 8 palline bianche e 2 rosse, la terza contiene 20 palline rosse. Si sceglie a caso un'urna e da questa si estrae una pallina che risulta bianca. Qual è la probabilità che la pallina rossa sia stata estratta:

a) dalla prima urna **b)** dalla seconda urna **c)** dalla terza urna.

B = **la pallina estratta è bianca**

$$p(H_1/B)=\frac{p(H_1)\cdot p(B/H_1)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

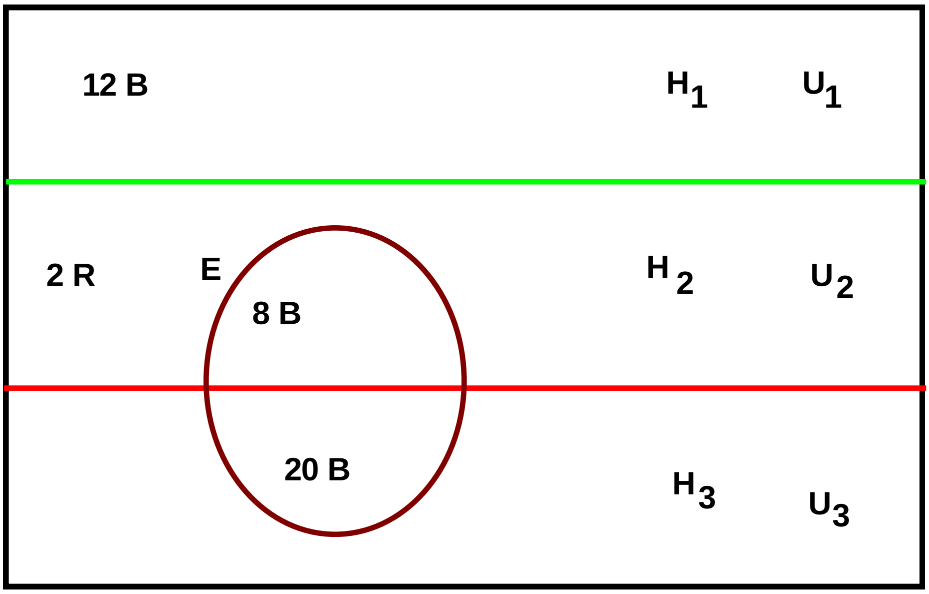
$$\mathbf{p(H_1/B)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10} + \frac{1}{3}\cdot 0} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{8}{30}}}$$

$$p(H_2/B)=\frac{p(H_2)\cdot p(B/H_2)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

$$\mathbf{p(H_2/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{15}}}$$

$$p(H_3/B)=\frac{p(H_3)\cdot p(B/H_3)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

$$\mathbf{p(H_3/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}=0}$$



Osservazione

Le probabilità $p(H_1)$ e $p(H_2)$ sono dette **probabilità a priori**. Quando diciamo che $\mathbf{p(H_1)=\frac{1}{2}=0{,}5}$ intendiamo dire che, a priori, la causa H_1 può agire con probabilità $\frac{1}{2}$. La medesima probabilità, stimata a posteriori, cioè dopo che l'evento si è verificato, è $\mathbf{p(H_1/E)=\frac{2}{5}=0{,}4^{1}\,p(H_1)=\frac{1}{2}=0{,}5}$. Tale fatto è ovvio. Infatti, occorre notare che mentre, a priori, essendo due le scatole, si può ritenere che esse abbiano uguale probabilità di generare una pallina rossa ciò non è possibile a posteriori. Se è stata generata una pallina rossa è meno verosimile che essa provenga dalla scatola 1 mentre è più verosimile pensare che essa provenga dalla scatola 2. A tale proposito occorre tenere presente che nella scatola 1 abbiamo una sola pallina rossa su 2 mentre nella scatola 2 abbiamo 3 palline rosse su 4.

Vi sono 3 urne. La prima contiene 12 palline bianche, la seconda contiene 8 palline bianche e 2 rosse, la terza contiene 20 palline rosse. Si sceglie a caso un'urna e da questa si estrae una pallina che risulta bianca. Qual è la probabilità che la pallina rossa sia stata estratta:

a) dalla prima urna b) dalla seconda urna c) dalla terza urna.

B = la pallina estratta è bianca

$$p(H_1/B)=\frac{p(H_1)\cdot p(B/H_1)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

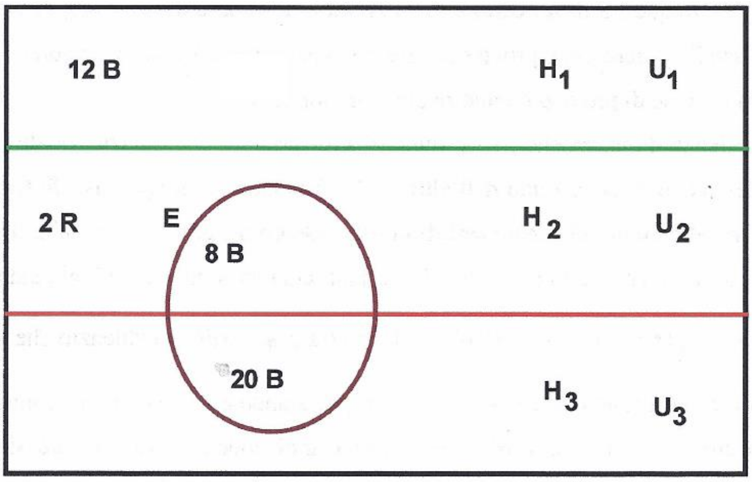
$$p(H_1/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}$$

$$p(H_2/B)=\frac{p(H_2)\cdot p(B/H_2)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

$$p(H_2/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}$$

$$p(H_3/B)=\frac{p(H_3)\cdot p(B/H_3)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

$$p(H_3/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}=0$$



Osservazione: Le probabilità $p(H_1)$ e $p(H_2)$ sono dette **probabilità a priori**. Quando diciamo che $p(H_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ intendiamo dire che, a priori , la causa H_1 può agire con probabilità $\frac{1}{2}$.

La medesima probabilità, stimata a posteriori, cioè dopo che l'evento si è verificato, è $p(H_1/E) = \frac{2}{5} = 0{,}4 \neq p(H_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Tale fatto è ovvio. Infatti, occorre notare che mentre, a priori, essendo due le scatole, si può ritenere che esse abbiano uguale probabilità di generare una pallina rossa ciò non è possibile a posteriori. Se è stata generata una pallina rossa è meno verosimile che essa provenga dalla scatola 1 mentre è più verosimile pensare che essa provenga dalla scatola 2. A tale proposito occorre tenere presente che nella scatola 1 abbiamo una sola pallina rossa su 2 mentre nella scatola 2 abbiamo 3 palline rosse su 4.

Definizione frequentista di probabilità

La definizione classica di probabilità è applicabile soltanto quanto siamo in grado di definire il numero dei casi possibili ed equiprobabili . Quando questo non è possibile può essere utile fare ricorso alla teoria frequentista di probabilità di un evento . Concetto base per i frequentisti è quello della **frequenza relativa di un**

evento intesa come il rapporto fra il numero **h** di volte in cui l'evento **A** si è verificato ed il numero **n** delle prove effettuate: $\mathbf{f(A) = \frac{h}{n}}$

Evidentemente la frequenza di un certo evento **A** varia al variare delle prove e , addirittura, pur mantenendo fisso il numero delle prove sullo stesso evento **A** e nelle stesse condizioni le frequenze di ogni singolo insieme di prove potranno risultare tra loro diverse. Tuttavia l'esperienza dimostra che, se il numero **n** di prove è abbastanza grande, i valori delle frequenze differiscono di poco l'uno dall'altro. Il più grande dei frequentisti fu Cournot. Egli si dedicò dapprima allo studio dei fenomeni di massa. Osservò, ad esempio, che il rapporto tra il numero delle nascite maschili e nascite totali in grandi città ed in intere nazioni tendeva a rimanere quasi immutato o, per meglio dire, stabile. Da questa osservazione evidenziò che il rapporto $\frac{h}{n}$ assume un valore tendenzialmente costante quanto più grande è **n**, ove con **h** si intenda il numero delle volte in cui l'evento A si verifica su n prove indipendenti. Tale valore si assume come **probabilità dell'evento** **A**, enunciando in tal modo la **legge dei grandi numeri**.

Legge empirica del caso o Legge dei grandi numeri

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte e tutte nelle stesse condizioni, un evento casuale **A** si verifica con una frequenza **f** che varia di poco al variare del numero delle prove e le variazioni, in generale, sono tanto più piccole quanto più grande è il numero delle prove ripetute.

Teoricamente la probabilità frequentista $p(A)$, secondo la definizione di **Von Mises**, ci viene fornita dal seguente limite: $\mathbf{p(A) = \lim_{n \to +\infty} f(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{h}{n}}$

secondo il quale **la probabilità matematica** $p(A)$ **dell'evento *A* coincide con il limite a cui tende la frequenza relativa** $f(A)$ **dell'esito *A* di un**

esperimento ripetibile quanto si vuole, al tendere all'infinito del numero delle prove effettuate.

A volte , molti sinteticamente, il postulato empirico del caso si enuncia nella seguente maniera: **all'aumentare del numero delle prove, la frequenza relativa di un evento tende alla probabilità matematica dell'evento stesso.**

Questa probabilità è chiamata **probabilità empirica** di un evento o **probabilità a posteriori** o *probabilità statistica* in contrapposizione a quella classica detta **probabilità teorica** o **probabilità a priori**.

Quindi la **probabilità statistica** di un evento aleatorio **A** è un numero atto a prevedere la frequenza relativa dell'evento **A** in un gran numero di prove fatte tutte nelle medesime condizioni.

La definizione frequentista di probabilità va incontro a notevoli difficoltà quando non è possibile disporre di dati sperimentali su un numero molto grande di prove , e resta sempre da discutere il significato di numero di termini molto grande o tendente ad infinito e, infine, che le condizioni identiche siano veramente tali. Concludendo possiamo sintetizzare le seguenti considerazioni sulla frequenza relativa e la legge empirica del caso. In generale risulta $p(A) \neq f(A)$, anzi il valore di $f(A)$ dipende dal numero di prove effettuate ed, a parità di prove effettuate, possiamo trovare valori diversi di $f(A)$. Tuttavia quando il numero delle prove effettuate è abbastanza grande (teoricamente infinito) il valore di $f(A)$ tende a stabilizzarsi attorno ad un valore ben preciso che si discosta poco dalla probabilità matematica **p(A)** dell'evento A. Osservazioni ripetute hanno portato alla formulazione della seguente legge che, traendo origine dall'esperienza, non è dimostrabile ed è detta, per questo motivo, **legge empirica del caso** o **legge dei grandi numeri**: <<su un numero molto grande di prove, effettuate tutte nelle medesime condizioni, la **frequenza** $f(A)$ con la quale si presenta un certo evento A assume generalmente valori molto

prossimi a quello della probabilità **p(A)** dello stesso evento e tale approssimazione è tanto migliore quanto più elevato è il numero delle prove effettuate>>

Osservazioni

• la **frequenza** è un concetto **a posteriori**, cioè si calcola dopo avere compiuto l'esperimento, mentre la **probabilità** è un concetto **a priori**, cioè si calcola **prima** dell'esperimento e senza che sia necessario effettuarlo

• la **tendenza** della frequenza relativa verso la probabilità di un evento **non deve essere interpretata** nel senso dell'analisi matematica (cioè come il limite di una successione numerica). Essa scaturisce soltanto da una universale convinzione circa il comportamento degli eventi casuali.

Definizione soggettivista di probabilità

La probabilità soggettivista di un evento rappresenta il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al presentarsi di un evento.

Probabilità soggettivista secondo la definizione di **De Finetti** (1906 - 1985)

La probabilità di un evento E *è espressa dal rapporto tra la somma* s *che un individuo coerente è disposto a pagare per ricevere un compenso* S *nel caso in cui si verifichi l'evento* E*, e la somma* S *stessa.* In formule abbiamo: $p(E) = \frac{s}{S}$ con $s \leq S$

$p(E)$ è il prezzo che si ritiene equo pagare per ricevere un importo unitario nel caso in cui si verifichi l'evento E. E' appena il caso di ricordare che il prezzo che si ritiene equo pagare in un approccio soggettivo alla probabilità è di importo inferiore o uguale alla lira. Ad esempio nello schema probabilistico del lancio di una moneta, la probabilità che, secondo l'individuo coerente, la faccia contraddistinta da **testa** si presenti dopo il lancio, è: $p(T) = \frac{1}{2}$

Solo se l'individuo coerente è disposto a pagare 250 lire prima del lancio, per riceverne 500 al verificarsi dell'evento **testa**. Secondo un altro individuo coerente ha probabilità $p(T) = \frac{1}{3}$ se egli pensa sia giusto pagare 150 lire prima del lancio per riceverne 450 al verificarsi dell'evento **testa**.

Come si vede, per il **soggettivismo** è accettabile che due individui giungano a valutazioni diverse della probabilità di uno stesso evento , purché ognuno di essi sia coerente con le proprie opinioni. Un individuo si considera coerente nella propria valutazione se è disposto ad accettare indifferentemente il ruolo di **scommettitore** o quello di **controparte**. Concludiamo affermando che sia la **scuola frequentista** che **quella soggettivista** hanno contribuito ad esplicitare con chiarezza le origini e le conseguenze del concetto di probabilità. E' notevole che entrambe le scuole pervengano agli stessi postulati (che giustificano in modo diverso) e dimostrano gli stessi teoremi.

Norme generali per la risoluzione di problemi di calcolo delle probabilità

Per la risoluzione dei problemi di calcolo delle probabilità occorre tenere presente quanto segue:

- individuare correttamente lo schema probabilistico e l'esperimento cui dà luogo. Individuare, poi, gli **eventi elementari** verificare se sono **necessari** , **incompatibili ed equiprobabili**. ♠
- distinguere correttamente se gli eventi elementari consistono in un solo elemento (una faccia, una pallina, un numero) o, invece, risultano costituiti da più elementi (una coppia di facce, una coppia di palline, una terna di numeri)

♠ Consideriamo un esperimento (schema probabilistico) che genera k eventi elementari $e_1, e_2, \cdots, e_k$ necessari , incompatibili ed equiprobabili . Questo significa che gli eventi elementari verificano le tre seguenti relazioni :
1) **necessarietà** $e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_k = \Omega$ 2) **incompatibilità** $e_r \cap e_s = 0 \quad \forall r \neq s$ 3) **equiprobabilità** $p(e_1) = p(e_2) = \cdots = p(e_k)$

Calcolo delle probabilità

- esplicitare gli **eventi complessi** di cui vogliamo calcole le probabilità come **unione, intersezione o negazione** di eventi elementari o di eventi più semplici
- per l'**unione** di più eventi stabilire se sono **incompatibili**
- per l'**intersezione** di più eventi stabilire se sono **dipendenti o indipendenti**
- per la **negazione** di uno o più eventi , valgono i seguenti teoremi che generalizzano le leggi di **De Morgan**:

$$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\cdots\right)=1-p\left(A\cup B\cup\cdots\right) \qquad p\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\cdots\right)=1-p\left(A\cap B\cap\cdots\right)$$