Unità Didattica N° 31   Calcolo delle probabilità

1) Induzione matematica

2) Introduzione al calcolo combinatorio

3) Disposizioni semplici

4) Disposizioni con ripetizione

5) Permutazioni semplici

6) Permutazioni con ripetizione

7) Combinazioni semplici

8) Combinazioni con ripetizione

9) Binomio di Newton

10) Spazio campionario , spazio degli eventi , spazio di probabilità

11) L ' algebra degli eventi

12) Definizione classica di probabilità

13) Definizione assiomatica di probabilità

14) Teoremi sulla probabilità:

a) Il teorema della probabilità contraria

b) Il teorema della probabilità totale

c) La probabilità condizionata

d) Il teorema della probabilità composta

15) La formula di Bayes

16) Definizione frequentista di probabilità

17) Definizione soggettivista di probabilità

18) Il problema delle prove ripetute (schema di Bernoulli)

19) Distribuzione binomiale

20) Distribuzione di Poisson

Induzione matematica

Principio di induzione matematica: Esso afferma quanto segue:

(1) Se una proposizione $P(n)$ è vera per $n=1$ (2) Se si prova che $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ allora $P(n)$ è vera $\forall n\in N$.

In effetti il numero iniziale da cui si parte può essere diverso da 1, anche se di solito si parte da $n=1$. In simboli abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P(1)} \ \text{è vera} \\ \mathbf{P(n)\Rightarrow P(n+1)} \ \forall \mathbf{n\in N}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{P(n)} \ \text{è vera} \ \forall \mathbf{n\in N}$$

Il matematico Ernst (1984) schematizzava così una tipica dimostrazione per induzione:

Teorema: $P(n)$ (voglio dimostrare la verità dell'affermazione P relativa ai numeri naturali n)

Dimostrazione per induzione matematica:

Base di partenza: dimostrazione di $P(1)$

Ipotesi induttiva: riteniamo $P(n)$ vera

Passo d'induzione: dimostriamo la verità di $P(n+1)$ a partire dalla verità di $P(n)$

Altra formulazione del principio di induzione matematica

Supponiamo che una proposizione P, dipendente da un indice $n\in N$, si vera per $n=1$ [$P(1)$ vera] e che inoltre, supposta vera per $P(n)$ [$P(n)$ vera] possiamo dimostrare che essa è vera anche per il numero successivo $n+1$ [$P(n+1)$ vera]. Allora la proposizione $P(n)$ è vera $\forall n\in N$.

Dimostrare che la somma dei primi n numeri interi vale $\mathbf{S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{j=1}^{j=n} j}$ **[1]**

Base dell'induzione: la proposizione [1] è vera per $n = 1$. Infatti: $1=\frac{1(1+1)}{2}$ cioè $1 = 1$ in quanto $S_1 = 1$

Ipotesi induttiva: Supponiamo che la proposizione [1] sia vera per il generico numero naturale n, cioè supponiamo che valga l'uguaglianza:

$$\mathbf{1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}} \qquad \textbf{[2]}$$

Passo d'induzione: Dimostriamo la verità di $P(n+1)$, cioè dimostriamo che risulta $P(n+1)=1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ($S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$) ammettendo che $P(n)=S_n=\sum_{j=1}^{j=n} j=1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$ sia vera.

Se dimostriamo ciò allora la proposizione [1] è vera $\forall n\in N-\{0\}$.

Aggiungendo ad ambo i membri della [2] il numero naturale $n+1$ otteniamo:

$$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \qquad 1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{cioè} \quad S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La proprietà [1] è così dimostrata.

Facendo uso del principio di induzione matematica dimostrare che la somma di $n+1$ termini di una progressione geometrica di ragione $q\neq 1$ ed avente come primo termine il numero 1 è espressa dalla seguente relazione:

$$\sum_{k=0}^{k=n} q^k = q^0(=1)+q^1+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad [A]$$

Dimostrazione: la formula $[A]$ è vera per $n=1$, in quanto in tal casi essa si riduce alla uguaglianza $1+q=\frac{1-q^2}{1-q}$ $\quad 1+q=\frac{\cancel{(1-q)}\cdot(1+q)}{\cancel{1-q}}$ $\quad 1+q=1+q$

Supponiamo che la formula $[A]$ sia vera per un certo n e verifichiamo che essa risulta vera anche per il numero successivo $n+1$, cioè dobbiamo verificare che risulta:

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

L'identità $[A]$ continua a sussistere se aggiungiamo al primo ed al secondo membro il termine q^{n+1}.

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}$$

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q}$$

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

La somma delle potenze simili dei numeri naturali si indica col seguente simbolo:

$$\mathbf{S_n^{(k)}=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}$$

Dimostrare, applicando il principio di induzione matematica, che:

$$\mathbf{S_n^{(2)}=\sum_{j=1}^{j=n} j^2=1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad [C]$$

Per $n=1$ abbiamo l'uguaglianza: $1=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ $\quad 1=\frac{6}{6}$ $\quad 1=1$

Adesso verifico che se è vera l'identità $[C]$ è vera anche la seguente identità:

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

L'identità $[C]$ continua a sussistere se aggiungiamo al primo ed al secondo membro il termine $(n+1)^2$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)}{6}$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6}$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Introduzione al calcolo combinatorio

Consideriamo $\mathbf{n}$ elementi distinti tra loro ed indichiamoli con i simboli

$$\mathbf{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_n}$$

Diremo che uno qualunque degli **n** oggetti forma un gruppo di classe **1** , due oggetti formano un gruppo di classe **2**, ed, in generale, che **k** oggetti formano un gruppo di classe **k** ($k \leq n$).

Un gruppo di classe **k** verrà indicato scrivendo nell'ordine assegnato, uno accanto all'altro, i simboli che rappresentano i **k** elementi .Le scritture: a_1, a_2 , a_3 indicano gruppi di classe **1**

Le scritture a_1a_3, a_2a_6, a_7a_2 indicano gruppi di classe **3**. Le scritture $a_1a_3a_5a_8$, $a_6a_3a_2a_1$ indicano gruppi di classe **4**. Lo studio del modo di costruire e di calcolare il numero di tutti i possibili gruppi di classe k che si possono formare con n elementi secondo determinate leggi, prende il nome di calcolo combinatorio.

Tale studio si sviluppa in tre tempi: 1) formulazione, mediante definizione, della legge di formazione dei gruppi 2) ricerca del metodo per la loro costruzione 3) ricerca di formule generali per la determinazione del numero totale dei gruppi che verificano la data legge.

Se imponiamo la condizione che gli **n** elementi dati e quelli che concorrono alla formazione di ciascun gruppo siano tutti diversi fra loro, i gruppi ottenuti si dicono semplici. Se invece gli elementi non sono soggetti a questa condizione, i gruppi ottenuti si dicono con ripetizione.

Disposizioni semplici

Dati **n** elementi distinti $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_{n-1}, a_n}$ si dicono disposizioni semplici di classe **k** tutti i gruppi che si possono formare in modo che:

1) ogni gruppo contenga **k** elementi distinti degli **n** dati

2) due gruppi differiscano per qualche elemento o per l'ordine degli elementi.

Nelle disposizioni si fissa l'attenzione non solo sugli elementi che concorrono alla formazione dei gruppi, ma anche sull'ordine con cui tali elementi sono disposti nel gruppo.

$$D_{n,k} = \underset{1}{n}\underset{2}{(n-1)}\underset{3}{(n-2)}\cdots\cdots\underset{k-1}{(n-k+2)}\underset{k}{(n-k+1)} \qquad [2]$$

Il numero delle disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k è uguale al prodotto di k fattori interi decrescenti consecutivi a partire da n.

$D_{n,3} = n(n-1)(n-2)$ $D_{n,4} = n(n-1)(n-2)(-3)$ $D_{5,2} = 5 \times 4 = 20$ $D_{7,4} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

Se risulta $k = n$ la $[2]$ diventa: $D_{n,n} = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ $[3]$

Il simbolo $n!$ si chiama fattoriale di n e rappresenta il **prodotto di n fattori decrescenti consecutivi a partire da n**.

I fattoriali godono delle seguenti proprietà:

$$n! = n[(n-1)!] \qquad n! = n(n-1)[(n-2)!] \qquad n! = n(n-1)(n-2)[(n-3)!]$$

Permutazioni semplici

Dati n elementi distinti $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_n$ si chiamano permutazioni semplici di n elementi tutti i gruppi che si possono formare prendendo tutti gli n elementi dati in modo che ogni gruppo differisca dai rimanenti gruppi soltanto per l'ordine degli elementi stessi. Questo significa che le permutazione semplici di n elementi coincidono con le disposizioni di n elementi di classe n.

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Si dimostra che: $$D_{n,k} = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinazioni semplici

Si chiamano combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k tutti i gruppi che si possono formare in modo che :

1) ogni gruppo contenga k distinti elementi degli n dati

2) due gruppi differiscano fra loro almeno per un elemento, indipendentemente dall'ordine secondo cui gli stessi elementi sono disposti.

Nelle combinazioni, contrariamente a quanto avviene nelle disposizioni, non si tiene conto dell'ordine ma solo della diversità degli elementi che concorrono alla formazione dei singoli gruppi.
Per indicare il numero delle combinazioni di n elementi di classe k utilizziamo uno dei seguenti

simboli: $C_{n,k}$ $\binom{n}{k}$ che si legge <<**n** **su** **k**>>. Si dimostra che:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}$$

In particolare abbiam: $0! = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{0} = 1$

Il simbolo $\binom{n}{n}$ gode delle seguenti proprietà:

Formula abbreviata

Con questa formula il simbolo $\binom{n}{n}$ può essere espresso mediante una frazione nei cui termini compaiono solo fattoriali: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Legge delle classi complementari o legge dei coefficienti simmetrici

Le combinazioni di n elementi di classe k sono uguali alle combinazioni di n elementi di classe $n-k$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Questa formula è utili quando risulta $k > \frac{n}{2}$.

Legge di addizione o di Stieffel

Il numero delle combinazioni di n elementi di classe è uguale alla somma di quelle di classe k e di quelle di classe $k-1$. Cioè: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Dimostrazione: Ricordando che $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ abbiamo

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-k)\cdot(n-1)! + (n-1)!k}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\text{m.c.m.}[k!(n-k-1)!;(k-1)!(n-k)!] = k!(n-k)! \ , \ \frac{k!(n-k)!}{k!(n-k-1)!} = n-k \ , \ \frac{k!(n-k)!}{(k-1)!(n-k)!} = k$$

Legge di ricorrenza: $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

Disposizioni con ripetizione

Le disposizioni con ripetizione sono quelle disposizioni in cui ogni elemento può comparire più di una volta. Il numero delle disposizioni con ripetizione di **n** elementi distinti di classe **k** sarà indicato con uno dei seguenti simboli: $D'_{n,k}$, $D^{(r)}_{n,k}$ con **k** maggiore, uguale o minore di **n**

Definizione: Dati **n** elementi distinti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definiamo disposizioni con ripetizione degli **n** elementi di classe **k** tutti i gruppi che si possono formare in modo che:

1) ogni gruppo contenga **k** elementi

2) in ogni gruppo uno stesso elemento può essere ripetuto fino ad un massimo di **k** volte.

Due gruppi sono da considerarsi distinti quando uno di essi contiene almeno un elemento che non figura nell'altro oppure contengono gli stessi elementi, ma almeno uno di essi è ripetuto un numero diverso di volte; oppure, pur contenendo gli stessi elementi, ripetuti lo stesso numero di volte , questi differiscono per l'ordine con cui sono disposti. Risulta: $D'_{n,k} = n^k$

Se $k = 1$ è: $D'_{n,k} = n$ Se $k = 2$ bisogna fare il seguente ragionamento:

Il primo elemento a_1 associato (di volta in volta) con gli altri n elementi (da a_1 ad a_n)determina n gruppi, il secondo elemento a_2 determina pure n gruppi e così di seguito per tutti gli altri elementi.

Quindi ogni elemento determina n gruppi, essendo n il numero degli elementi, sarà $n \cdot n = n^2$ il numero delle disposizione con ripetizione di n elementi di classe 2, cioè: $D'_{n,2} = n^2$

Per affermare che $D'_{n,2} = n^2$ possiamo utilizzare il seguente schema:

$$\begin{array}{cccccc} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n & 1 \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_na_n & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \end{array}$$

Per ottenere le disposizione con ripetizione di n elementi di classe 3 , basta associare successivamente ad ogni disposizione di classe 2 ciascuno degli n elementi dati . Ogni disposizione con ripetizione di classe 2 dà luogo ad n disposizioni con ripetizione di classe 3 . Tutte le disposizioni con ripetizione di classe 2 sono n^2 , onde le disposizioni con ripetizione di classe 3 saranno n^3 , cioè:

$$D_{n,3}^{(r)} = D_{n,2}^{(r)} \cdot n = n^2 \cdot n = n^3$$

Per induzione si arriva alla formula generale: $\mathbf{D'_{n,k} = n^k}$

Il numero delle colonne diverse che si possono comporre , nel gioco del totocalcio , scrivendo in ognuna delle 13 caselle uno dei tre seguenti simboli 1 , $\times$, 2 è:

$$\mathbf{D'_{3,13} = 3^{13} = 1.594.323}$$

Per vincere con certezza un **13** bisogna spendere la seguente somma

$$1.594.323 \times £800 = £\ 1.275.459.200$$

Permutazioni con ripetizione

Supponiamo che gli **n** elementi $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_n}$ non siano tutti distinti e che, ad esempio, α di questi elementi siano tutti uguali ad a_1, β ad a_2, γ ad a_3, con:

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = n} \ .$$

Le permutazioni distinte che si verranno a formare non sono più $n!$ ma sono di meno in quanto alcune di esse sono fra loro identiche. Si dimostra che: $\mathbf{P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \dfrac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}}$

Indico con $x = P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ $(< n!)$ il numero di tutte queste permutazioni con ripetizione che si possono formare. Consideriamo una qualunque di queste x permutazioni con ripetizioni. Essa contiene α elementi uguali ad a_1, β uguali ad a_2 e γ uguali ad a_3. In essa, al posto di α elementi uguali ad a_1, supponiamo di sostituire α elementi diversi e permutiamo tali elementi in tutti i modi possibili. La permutazione considerata dà luogo (lei compresa) ad $\alpha!$ permutazioni. E poiché tutte le permutazioni con ripetizione sono x si ottengono $x \cdot \alpha!$ permutazioni. In ciascuna di queste $x \cdot \alpha!$

permutazioni vi sono β elementi uguali ad a_2. Supponiamo di considerarli tutti diversi fra loro e permutiamoli in tutti i modi possibili. Ciascuna delle $x \cdot \alpha!$ permutazioni dà luogo (lei compresa) a $\beta!$ permutazioni. E poiché le permutazioni con ripetizione considerate sono $x \cdot \alpha!$ in totale si otterranno $x \cdot \alpha! \cdot \beta!$ permutazioni.

Procedendo in tal guisa si giunge all'ultimo gruppo di γ elementi uguali ad a_3. Supponendo tali elementi fra loro diversi e permutandoli in tutti i modi possibili, per una permutazione con ripetizione si ottengono $\gamma!$ permutazioni e poiché tutte le permutazioni sono $x \cdot \alpha! \cdot \beta!$ si otterranno in totale $x \cdot \alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!$ permutazioni. Se gli n elementi fossero distinti fra loro si otterrebbero $n!$ permutazioni , onde risulta valida la seguente identità: $x \cdot \alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma! = n!$ da cui ricaviamo:

$$P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

Combinazioni con ripetizioni

Definizione: Definiamo **combinazioni con ripetizione** di **n** elementi distinti di classe **k** ($\gtrless$) tutti i gruppi che si possono formare in modo che:

1) ogni gruppo contenga k elementi

2) in ogni gruppo uno stesso elemento può essere ripetuto fino ad un massimo di **k** volte

3) due gruppi si considerano diversi quando uno di essi contiene almeno un elemento che non figura nell'altro, oppure contengano gli stessi elementi ma questi non si presentano con la stessa frequenza

$$C'_{n,k} = C^{(r)}_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)n}{k!}$$

Simboli particolari: Il simbolo Σ (detto **simbolo di sommatoria**) rappresenta sinteticamente una somma di addendi.

Esempi: $\sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4$ $\quad \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n-1+n$

Il simbolo Π (detto **simbolo di produttoria**) rappresenta sinteticamente un prodotto di fattori.

Esempi: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \prod_{k=1}^{n} e_k = e_1\cdot e_2\cdot e_3\cdots e_{n-1}\cdot e_n$

Binomio di Newton

La formula del binomio di Newton ci consente di sviluppare la potenza ennesima di un qualsiasi binomio. Per ogni coppia di numeri reali **a**, **b** e per ogni numero intero **n** si ha:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Questa identità prende il nome di formula del binomio di Newton. I numeri $\binom{n}{k}$ (per $k = 0,1,2,3,....,n$) vengono detti coefficienti binomiali.

Poiché risulta $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ deduciamo che sono uguali i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi (termini coniugati). Tali coefficienti possono essere ricavati utilizzando il triangolo di Tartaglia.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Ogni numero è uguale alla somma dei due numeri che si trovano al di sopra di esso.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll|l}
\binom{0}{0} & & & & & & n=0 \quad (a+b)^0 \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & n=1 \quad (a+b)^1 \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & n=2 \quad (a+b)^2 \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & n=3 \quad (a+b)^3 \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & n=4 \quad (a+b)^4 \\
\hline
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} & n=n \quad (a+b)^n
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
\hline
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Ad ogni riga di questa tabella triangolare troviamo i coefficienti binomiali della corrispondente potenza del binomio. Il loro calcolo può essere effettuato più rapidamente utilizzando la seguente formula:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \qquad \text{(legge di ricorrenza)}$$

Tale proprietà esprime il fatto che ogni coefficiente binomiale (che si trovi sulla riga n) è la somma di due coefficienti binomiali che si trovano sulla riga immediatamente superiore (cioè sulla riga $n-1$) e che sono collocati immediatamente alla sua sinistra e alla sua destra.

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Adesso dimostro mediante il principio di induzione matematica la formula del binomio di Newton.

Per $n=1$ abbiamo: $(a+1)^1 = \binom{1}{0} \cdot a^1 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b \qquad a+b=a+b$

Poi verifico che dall'identità $\qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k =$

$$= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k} \cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \qquad [B]$$

deduco l'identità: $\qquad (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k =$

$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^n\cdot b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}\cdot b^2+\cdots+\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}\cdot b^k+\cdots+\binom{n+1}{n-1}a^2\cdot b^{n-1}+\binom{n+1}{n}a\cdot b^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

Servono la legge di addizione o di Stifel ed una proprietà delle combinazioni:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\qquad \binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1\qquad \binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$$

Moltiplico ambo i membri della $[B]$ prima per a, poi per b e poi sommo membro a membro:

$$(a+b)^n\cdot a=\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{1}a^n\cdot b+\binom{n}{2}a^{n-1}\cdot b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k+1}\cdot b^k+\cdots+\binom{n}{n-1}a^2\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n\cdot a$$

$$(a+b)^n\cdot b=\binom{n}{0}a^n\cdot b+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^2+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^3+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k+1}\cdot b^k+\cdots+\binom{n}{n-1}a\cdot b^n+\binom{n}{n}b^{n+1}$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$(a+b)^n\cdot(a+b)=\binom{n}{0}a^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^n\cdot b+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^{n-1}\cdot b^2+\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right]a^{n-2}\cdot b^3+\cdots+$$

$$+\left[\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}\right]a^2\cdot b^{n-1}+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]a\cdot b^n+\binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^n\cdot b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}\cdot b^2+\binom{n+1}{3}a^{n-2}\cdot b^3+\cdots+$$

$$+\binom{n+1}{n-1}a^2\cdot b^{n-1}+\binom{n+1}{n}a\cdot b^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n+1}\binom{n+1}{k}\cdot a^{n+1-k}\cdot b^k$$

La formula del binomio di Newton è così dimostrata.

I fattoriali

I fattoriali godono delle seguenti proprietà:

$$\mathbf{n! = n\cdot[(n-1)!]}\quad ;\quad \mathbf{n! = n\cdot(n-1)\cdot[(n-2)!]}\quad ;\quad \mathbf{n! = n\times(n-1)\cdot(n-2)\cdot[(n-3)!]}$$

$$\mathbf{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)\cdot[(n-k)!]}$$

Quando n è grande la valutazione di $n!$ è piuttosto laboriosa. In tal caso può essere utile la formula approssimata di Stirling: $n! \cong \frac{n^n \cdot \sqrt{2\pi n}}{e^n}$ con $e = 2{,}71828$ base dei logaritmi naturali o **neperiani** $\ln n! \cong \frac{1}{2} \cdot \ln(2\pi n) + n \ln n - n$

Spazio campionario Spazio degli eventi Spazio di probabilità

Alla base del calcolo delle probabilità stanno i tre seguenti concetti primitivi:

1) la PROVA o l'esperimento

2) l'EVENTO o il risultato

3) la PROBABILITA' che l'evento si verifichi.

Queste tre parole sono legate tra loro dalla seguente frase: <<**la prova genera l'evento con una certa probabilità**>>. Col termine **EVENTO** si intende il risultato di un esperimento o di una osservazione. Un evento si dice casuale o aleatorio se il suo verificarsi dipende da cause ignote o imprevedibili. ♠ Sono eventi:[1]

(1) l'uscita di un numero minore di 5 nel lancio di un dado

(2) l'uscita di una figura quando si estrae una carta da un mazzo di carte da poker

(3) la caduta di un corpo lasciato libero dai vincoli

I primi due eventi possono verificarsi o non verificarsi, il terzo evento si verificherà sicuramente.

I primi due eventi sono eventi aleatori o eventi casuali, il terzo è un evento certo.

Prova è la realizzazione materiale di un evento attraverso la realizzazione di un qualsiasi meccanismo. Prova è, ad esempio, l'estrazione di una pallina da un'urna, o il lancio di una moneta,

---

♠ Diremo che un certo evento è aleatorio per un determinato soggetto umano T (Tizio) se questi non ha informazioni complete sul suo avverarsi , oppure sul suo essersi avverato .Il fatto di essere aleatorio non è una proprietà intrinseca dell'evento , ma è essenzialmente relativo ad un soggetto umano ed alle informazioni che questi possiede sull'evento stesso .

[1] Un EVENTO (o la proposizione che lo traduce) è un ente logico suscettibile di assumere due soli valori: VERO o FALSO. Occorre formulare l'evento (o la proposizione che lo traduce) in modo da potere rispondere senza ambiguità "SI" o "NO" alla domanda se esso si verificherà o meno. Un evento qualsiasi può essere indicato col simbolo E (o con una lettera maiuscola qualsiasi). Col simbolo $\overline{E}$ indichiamo l'evento contrario, cioè l'evento che è vero (falso) se E è falso (vero).

o il lancio di un dado. Un evento si dice certo se esso si verificherà sicuramente. Un evento si dice impossibile se non potrà mai verificarsi. Un evento si dice casuale o aleatorio se il suo verificarsi dipende da cause ignote o non prevedibili.

Definizione: La nozione di evento casuale **o** aleatorio è assunta come primitiva ed è sinonimo di <<**avvenimento il cui verificarsi dipende dal caso**>>.

Evento casuale **o** aleatorio è un avvenimento, un fatto per il quale non è possibile giudicare se esso si verificherà in una determinata prova o esperimento, in quanto il suo verificarsi dipende solo dal caso.

Probabilità è un numero associato al presentarsi di un evento aleatorio e denota l'attendibilità razionale che ha l'evento stesso di verificarsi. Consideriamo un esperimento (o schema probabilistico) **E** (ad esempio il lancio di una moneta, il lancio di due dadi, l'estrazione di una pallina da un'urna,...). Col termine prova intendiamo una singola esecuzione di un determinato esperimento. Da questa prova si ottiene un singolo risultato elementare detto evento aleatorio elementare. All'evento associamo, secondo regole da fissare, un numero che esprime la probabilità che si verifichi l'evento aleatorio.

Quindi con l'espressione <<**probabilità dell'evento A**>> intendiamo riferirci ad un particolare numero che meglio di altri è in grado di sintetizzare la fiducia che noi riponiamo nella sua realizzazione.

Probabilità **= grado di attendibilità che ha un evento di verificarsi**

Si chiama **spazio degli eventi elementari** (**o** **spazio dei risultati** **o** **spazio campionario** **o** **spazio fondamentale**) associato ad un determinato esperimento casuale (o schema probabilistico) l'insieme Ω di tutti i possibili risultati fra loro incompatibili

$\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ = **spazio campionario** **o** **spazio dei risultati** **o** **spazio fondamentale**

Quando ad ogni evento elementare $\mathbf{e_i}$ associamo un numero positivo $\mathbf{p_i}$, probabilità che si verifichi l'evento $\mathbf{e_i}$, secondo determinare regole, allora lo **spazio campionario** Ω prende il nome di spazio di probabilità.

Un qualsiasi sottoinsieme di Ω dicesi **evento** associato alla **spazio campionario** Ω. Un evento si dice elementare se esso è un sottoinsieme di costituito da un solo elemento, cioè ogni elemento di Ω dicesi evento elementare dello **spazio campionario**. Per questo motivo Ω è chiamato anche spazio degli eventi elementari e può essere indicato anche col simbolo **U**. Un **evento, costituito da almeno due eventi elementari**, dicesi evento complesso.

Esempi: Consideriamo l'esperimento casuale del lancio di un dado. Questo esperimento fornisce il seguente spazio campionario **o** spazio dei risultati: $\mathbf{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$

A tale esperimento possiamo associare sei eventi elementari $e_1 = \{1\}$, $e_2 = \{2\}$, $e_3 = \{3\}$, $e_4 = \{4\}$, $e_5 = \{5\}$, $e_6 = \{6\}$ che costituiscono lo spazio dei risultati e diversi Eventi Complessi.

$A = \{2,4,6\}$ = **comparsa di un numero pari**

$B = \{1,3,5\}$ = **comparsa di un numero dispari**

$C = \{1,2\}$ **= comparsa di un numero minore di** 3

$D = \{5,6\}$ **= comparsa di un numero maggiore di** 4

$E = \{1,6\}$ **= comparsa del numero** 1 **o del numero** 6

Gli eventi $A = \{2,4,6\}$ e $B = \{1,3,5\}$ sono due eventi complessi dello spazio campionario $\mathbf{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$.

L'insieme i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi dello spazio campionario Ω, compreso l'insieme vuoto e lo spazio campionario, prende il nome di Spazio degli eventi in quanto comprende tutti i possibili eventi sia elementari che complessi.

Concludendo possiamo affermare che lo Spazio degli Eventi è l'insieme delle parti $P(\Omega)$ dello spazio campionario.

$P(\Omega)$ = Spazio degli Eventi = insieme i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi di Ω.

Lo Spazio degli Eventi lo possiamo indicare anche col simbolo **S**.

Consideriamo l'esperimento (schema probabilistico) consistente nel lancio di una moneta con una faccia testa (**T**) e l'altra croce (**C**).

$\Omega = \{T,C\}$ = spazio degli eventi elementari

$P(\Omega) = \{\varnothing,\{T\},\{C\},\{T,C\}\}$ = Spazio degli Eventi

Come schema probabilistico consideriamo l'estrazione di una carta da un mazzo di carte napoletane. Gli eventi elementari sono 40 se nell'estrazione di una carta si considera sia il colore del seme sia il valore numerico della carta. Risulta: $\mathbf{\Omega=\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{40}\}}$

Se l'attenzione è rivolta al solo seme delle carte abbiamo: $\mathbf{\Omega=\{bastone, spada, coppa, denari\}}$

Se la proprietà discriminante è il valore numerico di ciascuna carta, abbiamo:

$$\mathbf{\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}}$$

Un evento si dice impossibile se esso non si realizza mai e può essere identificato con l'insieme vuoto $\varnothing=\{\ \}$. Che la non realizzazione di alcun evento di $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ sia un evento è giustificato dal fatto che l'insieme vuoto è un sottoinsieme di un qualsiasi insieme.

L' evento certo consiste nella realizzazione di almeno uno degli eventi dello spazio campionario $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

Sintesi finale

Definizione

• Un esperimento aleatorio è un fenomeno di cui non riusciamo a prevedere il risultato con certezza.

• L'insieme Ω di tutti i possibili risultati di un esperimento si chiama spazio campionario o universo e può essere indicato anche col simbolo $\mathbf{U}$.

• Un evento è un qualunque sottoinsieme dello spazio campionario; un evento formato da un singolo risultato dell'esperimento è detto evento elementare. Un evento, **costituito da almeno due eventi elementari**, dicesi evento complesso.

Definizione di spazio delle probabilità

Diciamo che uno spazio di eventi elementari $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ costituisce uno spazio delle probabilità se

01) a ciascun evento elementare $\{e_i\}$ possiamo associare un numero non negativo $p_i = p(e_i)$ capace di esprimere il grado di realizzazione dell'evento aleatorio elementare $\{e_i\}$

02) i numeri p_i , che esprimono le probabilità degli eventi elementari $\{e_i\}$, verificano le due seguenti condizioni: $\mathbf{p_i \geq 0}$ $\quad \mathbf{p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$

Esempio: Dato lo spazio campionario $\Omega = \{e_1, e_2, e_3\}$ con $p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) = \frac{1}{3}$ verificare che Ω è uno spazio di probabilità.

Soluzione: Affinché Ω risulti uno spazio probabilizzato debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni: $\mathbf{p_i \geq 0}$ $\quad \mathbf{p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$

dato che $p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) = \frac{1}{3}$ e $p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ risulta verificato che Ω è uno spazio delle probabilità.

Esempio: Dato lo spazio

Ω	e_1	e_2	e_3	e_4
$p(e_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

verificare che Ω è uno spazio di probabilità

Soluzione: La probabilità di ogni singolo evento è positiva, $\sum_{i=1}^{4} p(e_i) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1$ Quindi Ω è uno spazio di probabilità.

Vediamo adesso come è possibile assegnare ad ogni evento aleatorio un numero non negativo **p** in grado di rappresentare la probabilità che l'evento si verifich.

Quando il risultato di un esperimento è un evento aleatorio non è possibile sapere a priori se l'evento si verificherà oppure non si verificherà . Tuttavia sovente è necessario valutare il grado di attendibilità del verificarsi di un tale evento aleatorio . Bisogna allora assegnare un numero a ciascun evento capace di esprimere il grado di fiducia che si verifichi l'evento in base alle informazioni a disposizione. Questo numero è detto probabilità che si verifichi l'evento.

Questo problema è stato risolto in diversi modi a seconda delle caratteristiche dell'esperimento entro il quale viene definito l'evento aleatorio.

Di solito hanno importanza pratica le **4** seguenti teorie:

1) teoria classica dovuta a Laplace (1812) 2) teoria frequentista dovuta a Cournot (1843) ed utilizzata in statistica 3) teoria soggettivista dovuta a De Morgan (1850), Ramsey (1920), De Finetti (1960) 4) la teoria assiomatica dovuta a Kolgomorov (1933).

L'algebra degli eventi

Poiché gli eventi sono stati da noi identificati con degli insiemi (sottoinsiemi dello spazio campionario Ω) essi possono essere collegati tra loro mediante le operazioni insiemistiche di unione, intersezione e complemento.

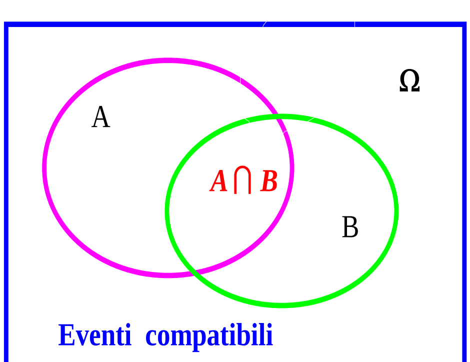
Se Ω è lo spazio campionario relativo ad un certo esperimento casuale **E** (modello probabilistico), se **A** e **B** sono due eventi relativi a tale esperimento:

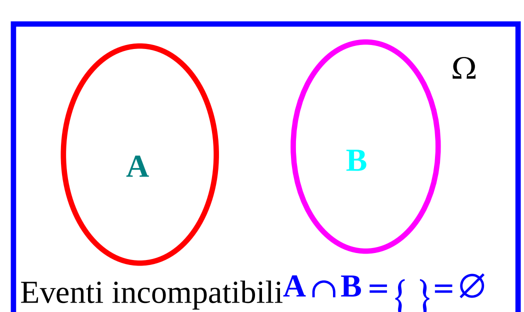
01) si chiama evento unione (o evento somma o evento totale) e si indica col simbolo **AUB** (o **A+B**) l'evento **C** che si verifica quando si realizza almeno uno degli eventi **A** e **B**: **C=AUB**

C si realizza se si realizza **A**, o si realizza **B** o si realizzano entrambi.

02) si chiama evento intersezione (o evento prodotto o evento composto) e si indica con $\mathbf{A \cap B}$ (o $\mathbf{A \cdot B}$) l'evento **C** che si realizza quando si verificano contemporaneamente gli eventi **A** e **B**. $\boxed{\mathbf{C = A \cap B}}$

Due eventi **A** e **B**, appartenenti allo stesso spazio di probabilità, si dicono eventi incompatibili se non si possono realizzare contemporaneamente, cioè se: $A \cap B = \emptyset$, cioè quando gli eventi A e B sono insiemi disgiunti.





Nel lancio di un dado gli eventi **A** = comparsa di un numero pari = $\{2,4,6\}$ e **B** = comparsa di un numero dispari = $\{1,3,5\}$ sono eventi tra loro incompatibili in quanto il verificarsi di uno di essi esclude il verificarsi dell'altro.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{2,4,6}\} \cap \{\mathbf{1,3,5}\} = \varnothing$$

Due eventi **A** e **B**, appartenenti allo stesso spazio di probabilità**,** si dicono eventi compatibili se si possono verificare contemporaneamente, cioè se:

$$A \bigcap B \neq \varnothing$$

Due eventi **A** e **B**, appartenenti allo stesso spazio di probabilità, si dicono eventi necessari se almeno uno di essi deve presentarsi. Con parole diverse possiamo dire che **A** e **B** sono eventi necessari se risulta $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} = \Omega$

La negazione di un evento

Si dice negazione di un evento **A** l'evento $\overline{\mathbf{A}}$ (si legge **non A**) che è **vero** se **A** è **falso** ed è **falso** se **A** è **vero**. L'evento $\overline{\mathbf{A}}$, negazione dell'evento **A**, è detto evento opposto (o evento contrario) dell'evento **A**.

Due eventi **A** e $\overline{\mathbf{A}}$, appartenenti allo stesso spazio di probabilità si dicono eventi complementari o eventi opposti se **A** non si verifica quando si verifica $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ non si verifica quando si verifica **A**:

$$A \bigcup \overline{A} = \Omega \quad , \quad A \bigcap \overline{A} = \varnothing \quad , \quad \overline{\Omega} = \varnothing \quad , \quad \overline{\varnothing} = \Omega$$

Con parole diverse possiamo dire che due eventi $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ si dicono opposti (o complementari) se uno di essi non si verifica quando si verifica l'altro.

Nel lancio di una moneta l'evento $\overline{\mathbf{A}} = \{\mathbf{T}\}$ = compare testa è l'evento contrario dell'evento $\mathbf{A} = \{\mathbf{C}\}$ = compare croce.

Si chiama evento differenza e si denota col simbolo **A - B** l'evento che si verifica quando si verifica l'evento **A** ma non si verifica l'evento **B**. $A - B = A \bigcap \overline{B}$

Nel lancio del dado, dati gli eventi $A=\{2,4,6\}$ = comparsa di un numero pari, $B=\{1,2\}$ = comparsa del numero **1** o **2**, l' evento differenza ci viene fornito da: $A-B=\{4,6\}$ = comparsa del numero 4 o del numero 6

- Se la realizzazione dell'evento **A** comporta la realizzazione dell'evento **B** diciamo che **A** implica **B** e scriviamo: $A \subseteq B$
- **p(A)** = probabilità incondizionata = probabilità dell'evento **A** indipendentemente dal fatto che si sia verificato o che possa verificarsi un qualsiasi altro evento.

$p(A/B)$ = **probabilità dell'evento A condizionata dall'evento B = probabilità dell'evento A quando si è verificato l'evento B**

Si dice che due eventi **A** e **B** sono dipendenti se:

$$p(A/B) \neq p(A) \quad \text{oppure} \quad p(B/A) \neq p(B)$$

Si dice che due eventi sono indipendenti se:

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{oppure} \quad p(B/A) = p(B)$$

Esempi

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ è lo spazio campionario del lancio di un dado.

$A = \{1,3,5\}$ = esce un numero dispari; $B = \{3,6\}$ = esce un numero multiplo del 3 $D = \{1,2,3,6\}$ = esce un numero divisore di 6, $M = \{3,4,5,6\}$ = esce un numero non inferiore a 3

EVENTO TOTALE

$C = A \cup B = \{1,3,5,6\}$ = esce un numero dispari o un multiplo del 3 = evento totale o somma logica degli eventi **A** e **B**

EVENTO COMPOSTO

$C = A \cap D = \{1,3\}$ = esce un numero dispari e divisore del 6 = evento composto o prodotto logico degli eventi **A** e **D**

Evento Differenza

$M = \{3,4,5,6\}$ = esce un numero non inferiore a 3

$\mathbf{C = D - M = \{1,2\}}$ = esce un numero che è divisore del 6 ed è minore del 3 =

esce un numero dell'insieme D non appartenente all'insieme M

Evento contrario

$\mathbf{N = \{1,2,3\}}$ = esce un numero minore di 4

$\overline{\mathrm{N}} = \{4,5,6\}$ = evento contrario dell'evento **N** = esce un numero maggiore o uguale a 4

$A = \{1,3,5\}$ = esce un numero dispari

$\overline{\mathrm{A}} = \{2,4,6\}$ = esce un numero pari **= evento contrario dell'evento A**

Linguaggio insiemistico	**Linguaggio probabilistico**
Ω insieme	Ω spazio di probabilità
$e \in \Omega$ (e elemento di Ω)	**e risultato possibile**
$\{e\}$ insieme costituito da un solo elemento	$\{e\}$ evento elementare
$A \subseteq \Omega$ (**A** sottoinsieme di Ω)	**A** evento casuale
$\varnothing$ sottoinsieme vuoto	$\varnothing$ evento impossibile
Ω	Ω evento certo
$\mathbf{A \cap B \neq \varnothing}$	**A** e **B** eventi compatibili
$\mathbf{A \cap B = \varnothing}$ (**A** e **B** insiemi disgiunti)	**A** e **B** eventi incompatibili
$\mathbf{A \cup B}$ (unione tra gli insiemi **A** e **B**)	$\mathbf{A \cup B}$ evento unione di **A** e **B** o evento totale
$\mathbf{A \cap B}$ intersezione tra gli insiemi **A** e **B**	$\mathbf{A \cap B}$ evento intersezione di **A** e **B** o evento composto

$$\overbrace{\begin{array}{l} incompatibili \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing \\ Compatibili \begin{cases} DIPENDENTI \Leftrightarrow p(A/B) \neq p(A) \\ INDIPENDENTI \Leftrightarrow p(A/B) = p(A) \end{cases} \\ \quad\Updownarrow \\ A \cap B \neq \varnothing \end{array}}^{\text{EVENTI}}$$

Definizione classica di probabilità

Quando il risultato di un esperimento è un evento aleatorio non è possibile sapere, prima di effettuare l'esperimento, se l'evento si verificherà. Tuttavia sovente è necessario valutare il grado di attendibilità del verificarsi di tale evento. Bisogna allora assegnare un **numero** a ciascun evento; tanto più elevata è la possibilità che l'evento si verifichi , tanto maggiore è il numero assegnato .

Questo numero è detto **probabilità dell'evento** e rappresenta la misura del grado di possibilità o grado di fiducia che l'evento ha di verificarsi.

Questo problema è stato risolto in diversi modi a seconda delle caratteristiche dell'esperimento entro il quale viene definito l'evento aleatorio.

Prima di dare la definizione classica di probabilità di un evento, occorre precisare il significato di **eventi aleatori equiprobabili** cioè eventi aleatori aventi le stessa probabilità di verificarsi.

Due eventi **A** e **B**, relativi ad uno **stesso schema probabilistico** (stesso esperimento casuale), sono **equiprobabili** (o **ugualmente possibili**) se non vi è alcun motivo di ritenere che, in una prova, l'evento **A** possa verificarsi più o meno facilmente dell'evento **B** .

Nel lancio del dado possiamo ritenere equiprobabili tutti e sei gli eventi elementari

$$e_1 = \{1\} \ , \ e_2 = \{2\} \ , \ e_3 = \{3\} \ , \text{v} \ , \ e_5 = \{5\} \ , \ e_6 = \{6\} \quad , \ \{e_i\}$$

Nel lancio di una moneta possiamo ritenere equiprobabili i due eventi elementari testa e croce, cioè:

$$e_1 = \{T\} \quad , \quad e_2 = \{C\}$$

Sia **A** un evento casuale relativo allo spazio di probabilità Ω, cioè sia $A \subseteq \Omega$. Tra i risultati possibili (*) ve ne saranno alcuni che appartengono ad **A** ed altri che non vi appartengono.

I primi si dicono **casi favorevoli** ad A, gli altri **casi contrari** ad A.

Definizione classica di probabilità

La definizione classica di probabilità riconduce la nozione di probabilità di un evento alla nozione di eventi equiprobabili. Tale nozione viene assunta come **assioma** e quindi non necessita di una definizione formale. La probabilità di un evento A viene determinata a priori, senza effettuare alcuna prova sperimentale.

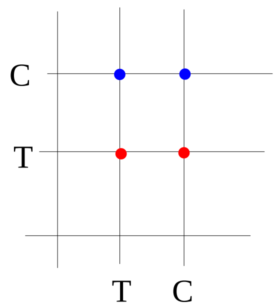
La definizione classica di probabilità enunciata da Laplace afferma quanto segue: **la probabilità $p(A)$ di un evento aleatorio A coincide col rapporto tra il numero m dei casi favorevoli all'evento A ed il numero n dei casi possibili nell'ipotesi che essi siano tutti equiprobabili**. In formule abbiamo: $p(A)=\frac{m}{n}$ con $m \leq n$ $0 \leq p(A) \leq 1$

$m=0 \Rightarrow p(A) = 0 \Rightarrow$ l'evento A è impossibile, cioè non può verificarsi mai

$m=n \Rightarrow p(A) = 1 \Rightarrow$ l'evento A è certo, $n=2m \Rightarrow p(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ l'evento A si dice equiprobabile $p(A) < \frac{1}{2}$ l'evento A è detto improbabile, $p(A) > \frac{1}{2}$ l'evento A è detto probabile

La definizione classica di probabilità è applicabile quando siamo in grado di definire il numero dei casi possibili ed equiprobabili. La definizione classica di probabilità non ci consente di stabilire quale probabilità ha una persona di 30 anni di essere in vita tra 10 anni. In casi del genere può essere utile utilizzare la definizione frequentista di probabilità.

Una moneta viene lanciata tre volte. Dire qual è la probabilità che escano solo due croci



Lo spazio campionario del lancio di una sola moneta è : $\Omega_1 = \{T, C\}$

In questo caso abbiamo due soli eventi elementari.

Lo spazio campionario del lancio di due monete è:

$$\Omega_2 = \{TT, TC, CT, CC\}$$

In questo caso abbiamo i seguenti **4** eventi elementari:

$$e_1 = \{TT\} \; , \; e_2 = \{TC\} \; , \; e_3 = \{CT\} \; , \; e_4 = \{CC\}$$

Lo spazio campionario nel caso di tre lanci:

$$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CCT, CTC, CCC\}$$

In questo caso gli eventi elementari (che rappresentano i casi possibili) sono i seguenti 8:

$e_1 = \{TTT\}$, $e_2 = \{TTC\}$, $e_3 = \{TCT\}$, $e_4 = \{TCC\}$, $e_5 = \{CTT\}$, $e_6 = \{CCT\}$,

$e_7 = \{CTC\}$, $e_8 = \{CCC\}$

I casi favorevoli sono 3 , precisamente $e_4 = \{TCC\}$, $e_6 = \{CCT\}$, $e_7 = \{CTC\}$

$A = (TCC, CCT, CTC)$

Otteniamo: $\mathbf{p(A) = \frac{3}{8}}$ **Si osservi che il numero degli eventi possibili è dato dalle disposizioni con ripetizione di due elementi (testa, croce) di classe 3.**

La probabilità come funzione

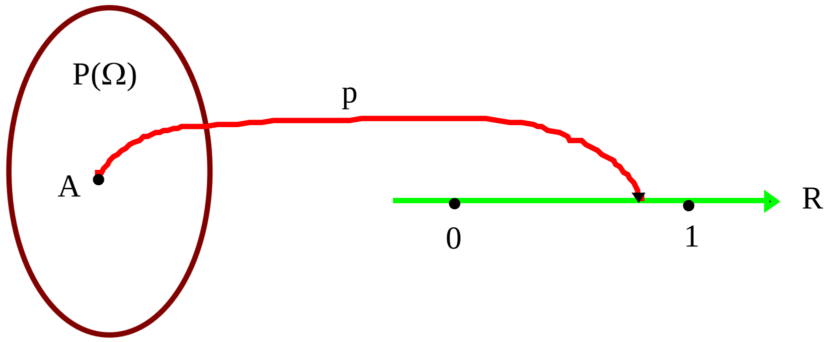
La probabilità che si verifichi l'evento **A** può anche essere interpretata come una funzione che ad ogni evento casuale $A \in P(\Omega)$ associa un numero reale appartenente all'intervallo limitato e chiuso $[0,1]$.

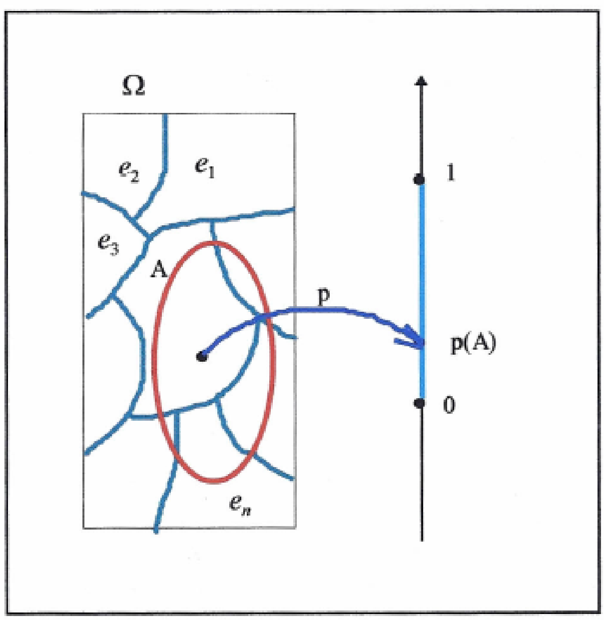
Definizione: La probabilità di un evento **A** è una funzione che ad ogni elemento $A \in P(\Omega)$ associa un numero reale $p(A) \in [0,1]$, cioè la probabilità di un evento **A** è una funzione di $P(\Omega)$ in $[0,1]$. In simboli possiamo scrivere:

$$p : P(\Omega) \to [0,1] \qquad \text{o meglio:} \qquad p : A \in P(\Omega) \to p(A) \in [0,1]$$

La funzione probabilità $p(A)$ ha come dominio lo spazio degli eventi $P(\Omega)$ e come codominio l'intervallo limitato e chiuso $[0,1]$.

La probabilità di un evento **A** è una funzione che ha come **dominio** lo spazio degli eventi $P(\Omega)$ e come codominio l'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$.





La probabilità di un evento A è una funzione che ha come **dominio** lo spazio campionario Ω e come **codominio** l'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$.

In generale il dominio della funzione $p(A)$ è un insieme Ω discreto sia che Ω contempli un numero finito di eventi o che contempli una infinità numerabile di eventi. Nel caso in cui Ω ha la **potenza del continuo** (ad esempio Ω è l'insieme dei numeri reali appartenenti all'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$) non è possibile determinare la probabilità degli eventi utilizzando le proprietà ed i teoremi descritti per il caso discreto.

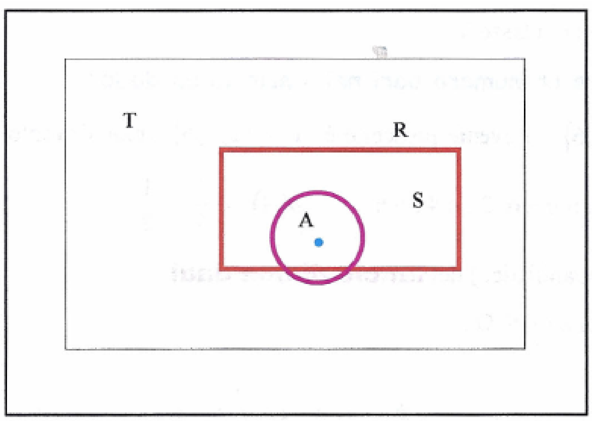
In generale, nel caso del **continuo**, ogni sottoinsieme di Ω non può essere definito come evento aleatorio. In questo caso bisogna introdurre assiomi e definizioni supplementari.

Tuttavia, ipotizzando l'**equiprobabilità**, in diversi casi la probabilità di alcuni eventi può essere determinata geometricamente.

In una città gli autobus di una linea si susseguono in una data direzione ad intervalli di 5 minuti. Calcolare la probabilità che un passeggera attenda non più di due minuti.

E = l'attesa è $\leq$ 2 minuti $p(e) = \frac{2}{5}$

Si lanci una moneta di area A su un tavolo T e sopra questo tavolo si disegni un rettangolo R di area S. Calcolare la probabilità che il centro della moneta cada all'interno dell'area S .



E = il centro della moneta è interno al rettangolo R

$\boxed{p(E) = \frac{A}{S}}$

Un'urna contiene 20 palline di cui 7 sono rosse, 10 sono nere e 3 sono gialle. Calcolare, estraendo dall'urna una sola pallina, qual è l'evento che ha maggiore probabilità di verificarsi?

$$p(R) = \frac{7}{20} = 35\% \quad , \quad p(N) = \frac{10}{20} = 50\% \quad , \quad p(G) = \frac{3}{20} = 15\%$$

Confrontando la probabilità dei singoli eventi si può osservare che l'evento che ha maggiore probabilità di verificarsi è l'evento <<**estrazione di una pallina nera**>> .

Determinare la probabilità di ottenere un numero pari nel lancio di un dado

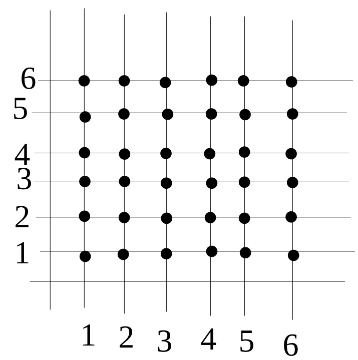
Lo spazio campionario è: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e l'evento prescelto è $A = \{2,4,6\}$, cioè l'evento A si verifica quando il risultato del lancio è il numero 2 , o 4 , o 6 . $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

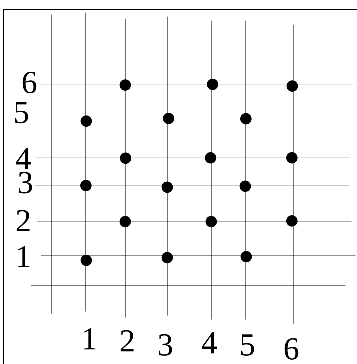
Determinare la probabilità di ottenere un numero pari nel lancio di due dadi

Consideriamo ora l'esperimento (schema probabilistico) del **lancio di due dadi**. Il risultato di ogni lancio sarà questa volta una coppia (a,b) appartenente al prodotto cartesiano $S \times S$ ove $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, cioè appartenente all'insieme $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ che è lo spazio campionario associato al lancio di due dadi.

In figura abbiamo rappresentato tutti i 36 elementi di Ω.

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6





Gli **eventi elementari**, tutti ugualmente possibili , sono 36 e pertanto ognuno di essi ha probabilità uguale a: $\frac{1}{36}$.

A = il risultato del lancio è un numero pari   I casi favorevoli all'evento A sono 18

v

Calcolare la probabilità che, nel lancio di due dadi, si ottenga come somma il numero 7 .

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Per comodità costruiamo la seguente tabella ottenuta dalla precedente ponendo, al posto di ciascuna coppia, la somma delle sue coordinate. Dei 36 casi possibili ve ne sono 6 che danno luogo al caso favorevole che la somma valga 7, cioè all'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità.

Pertanto la probabilità cercata è: $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Nel lancio di due dadi qual è la probabilità che la somma dei due numeri apparsi sia uguale a 6?

$$p(A) = \frac{5}{36}$$

Nel lancio di due dadi qual è la probabilità che i due dadi presentino lo stesso numero?

Le coppie aventi due numeri uguali sono 6 : (1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6) e quindi il numero dei casi favorevoli è 6. Poiché il numero dei casi possibili è 36 la probabilità cercata è:

$$p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Calcolare la probabilità che esca almeno un 6 nel lancio simultaneo di due dadi

L'evento considerato è costituito dalle seguenti coppie:

(1,6) , (2,6) , (3,6) , (4,6) , (5,6) , (6,6) , (6,5) , (6,4) , (6,3) , (6,2) , (6,1)

e dunque il numero dei casi favorevoli è 11 . La probabilità cercata è:

$$p(A) = \frac{11}{36}$$

Qual è la probabilità che fra i cinque numeri estratti al lotto, su una certa ruota, vi sia il numero 1?

Il risultato di ciascuna estrazione è una cinquina di numeri compresi fra 1 e 90. Lo **spazio di probabilità** associato all'estrazione è allora costituito dalle combinazioni dei primi 90 numeri interi positivi, presi a 5 a 5 Le combinazioni di 90 elementi di classe 5 ci vengono fornite dalla seguente formula: $n = \binom{90}{5} = \frac{90!}{5!85!}$.

I **casi possibili** sono n ed i **casi favorevoli** al nostro evento sono tanti quante sono le cinquine che contengono il numero 1. Queste ultime sono tante quante sono le combinazioni di classe 4 degli 89 numeri interi che vanno da 2 a 90 e cioè sono:

$$m = \binom{89}{4} = \frac{89!}{4!85!}$$

La probabilità richiesta è: $p(A)=\dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}}=\dfrac{\frac{89!}{4!85!}}{\frac{90!}{5!85!}}=\dfrac{5!}{4!}\cdot\dfrac{89!}{90!}$

Ricordando che per ogni $n \in N$ si ha $\dfrac{(n+1)!}{n!}=n+1$ possiamo scrivere: $\dfrac{5!}{4!}=5$, $\dfrac{90!}{89!}=90$ e

quindi: $p(A)=\dfrac{5}{90}=\dfrac{1}{18}=0{,}0555\cdots$

Calcolare la probabilità di vincere un terno al lotto

numero degli eventi possibili = $n=\binom{90}{5}=\dfrac{90!}{5!85!}=\dfrac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1!}=43\cdot 949\cdot 268$

Se il giocatore ha puntato sull'uscita di 3 numeri determinati gli eventi favorevoli sono tutti i gruppi in cui compaiono i 3 numeri giocati e due qualsiasi dei rimanenti 87 numeri. Il numero degli eventi favorevoli coincide con quello delle cinquine che si possono formare associando, ai tre numeri giocati, 2 di quelli che possono essere estratti dagli 87 numeri rimasti nell'urna.

Gli eventi favorevoli sono : $C_{87,2}=\binom{87}{2}$.

La probabilità richiesta è: $p(C)=\dfrac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}=\dfrac{\frac{87\cdot 86}{2\cdot 1}}{\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\dfrac{1}{11.748}$

Posso applicare il teorema della probabilità di eventi complessi e dipendenti (evento composto)

E = esce il terno sul quale ha puntato il giocatore

A = esce il primo numero del terno

B = esce il secondo numero del terno

C = esce il terzo numero del terno $E=A\cap B\cap C$

$$p(E)=p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B/A)\cdot p(C/A\cap B)=\frac{5}{90}\cdot\frac{4}{89}\cdot\frac{3}{87}=\frac{1}{11748}$$

01) **Un'urna contiene 16 palline bianche, 9 rosse e 5 nere. Calcolare la probabilità che estraendo contemporaneamente (cioè in blocco) 2 palline esse siano: a)**

entrambe bianche b) entrambe nere c) una bianca ed una rossa d) almeno una sia bianca.

Nell'urna sono presenti $16+9+5=30$ palline. Il numero degli eventi possibili che si possono presentare estraendo contemporaneamente due palline coincide col numero delle combinazioni di 30 elementi di classe $\mathbf{2}$.

$\mathbf{n}$ = numero degli eventi possibili $= C_{30,2} = \binom{30}{2}$

a) Evento $\mathbf{E}$ **= le 2 palline estratte sono bianche** L'evento $\mathbf{E}$ richiesto è l'estrazione contemporanea di due palline bianche.

Il numero dei casi favorevoli coincide col numero di combinazioni di 16 elementi di classe $\mathbf{2}$

numero degli eventi favorevoli $= C_{16,2} = \binom{16}{2}$ $\quad p(E) = \dfrac{\binom{16}{2}}{\binom{30}{2}} = \dfrac{\frac{16\cdot 15}{2\cdot 1}}{\frac{39\cdot 29}{2\cdot 1}} = \dfrac{8}{29}$

b) Evento $\mathbf{F}$ **= le 2 palline estratte sono nere** L'evento $\mathbf{F}$ richiesto è l'estrazione contemporanea di due palline nere

numero degli eventi favorevoli $= C_{5,2} = \binom{5}{2}$ $\quad p(F) = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} = \dfrac{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}{\frac{30\cdot 29}{2\cdot 1}} = \dfrac{2}{87}$

c) Evento $\mathbf{G}$ **= le 2 palline estratte sono una bianca ed una rossa**

L'evento $\mathbf{G}$ richiesto è l'estrazione contemporanea di una pallina bianca e di una rossa.

Ciascuna pallina bianca , potendo essere associata a ciascuna delle 9 palline rosse , dà luogo a 9 delle coppie richieste per cui le 16 palline bianche possono dare luogo a $9\cdot 16$ diverse coppie ciascuna delle quali è costituita da due palline , una bianca ed una rossa

numero dei casi favorevoli $= 9\cdot 16 = 144$ $\quad p(G) = \dfrac{144}{\binom{30}{2}} = \dfrac{144}{\frac{30\cdot 29}{2\cdot 1}} = \dfrac{48}{145}$

d) Evento $\mathbf{D}$ **= almeno una pallina estratta è bianca**

Evento $\overline{\mathbf{D}}$ = **nessuna pallina estratta è bianca**

$$p(\overline{D}) = \frac{\binom{14}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{14 \cdot 13}{30 \cdot 29} = \frac{91}{435}$$ = **probabilità che nessuna delle palline estratte sia bianca**

$$p(D) = 1 - p(\overline{D}) = 1 - \frac{91}{435} = \frac{435 - 91}{435} = \frac{344}{435}$$

La definizione assiomatica di probabilità (*)

La definizione assiomatica di probabilità si basa su tre assiomi:

Assioma 1 o assioma della non negatività

Ad ogni evento **A** dello spazio degli eventi è associabile un numero reale non negativo detto probabilità dell'evento **A** $\mathbf{p(A) \geq 0}$

Assioma 2 o assioma della certezza

La probabilità dello spazio campionario Ω è **1**: $\mathbf{p(\Omega) = 1}$

Assioma 3 o assioma dell'additività degli eventi incompatibili

Se gli eventi $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ sono a due a due incompatibili allora:

$$\mathbf{p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \cdots + p(A_n)}$$

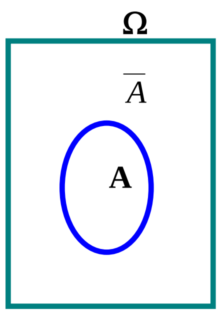
La definizione assiomatica di probabilità, dovuta al matematico russo KOLMOGOROV (1933), include come casi particolari sia la definizione classica di probabilità che quella di probabilità frequentista.

(*) Il metodo assiomatico si fonda sulle seguenti osservazioni: 1) In ogni campo del sapere umano è impossibile dare una definizione di ogni parola, senza presupporre noto il significato di altre parole. Ogni definizione richiede termini già noti. Vi debbono quindi essere termini che non si definiscono e che si chiamano termini primitivi. Dunque ogni scienza deduttiva deve presupporre conosciuti alcuni termini primitivi 2) Per lo stesso motivo non è possibile dimostrare tutte le affermazioni di una teoria. Quando si fa un ragionamento si stabilisce la verità di una affermazione sulla base di altre affermazioni che si suppongono vere. Vi debbono essere delle affermazioni che non si dimostrano ma che si ammettono vere cosi come sono; esse si dicono assiomi o postulati.

Teoremi sulla probabilità

a) Teorema della probabilità dell'evento contrario

La somma della probabilità di un evento **A** e di quella dell'evento contrario $\overline{\mathbf{A}}$ è uguale ad 1: $\mathbf{p(A)+p(\overline{A})=1}$



Dimostrazione

$$\Omega = A\cup\overline{A} \Rightarrow p(\Omega) = p(A\cup\overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{p(A)+p(\overline{A})=1} \qquad p(\overline{A}) = 1-p(A)$$

Un dado viene lanciato due volte. Determinare la probabilità che esca il numero 6 in almeno una delle due facce

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$ è lo spazio degli eventi elementari associato allo schema probabilistico proposto. In figura abbiamo rappresentato tutti i 36 elementi di Ω.

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

A = esce il numero 6 in almeno una delle due facce $\qquad p(A)=\dfrac{11}{36}$

$\overline{\mathbf{A}}$ = il numero 6 non esce in nessuna delle due facce $\qquad p(\overline{A}) = \dfrac{25}{36}$

Quindi: $\qquad p(\mathbf{A})=1-p(\overline{\mathbf{A}})=1-\dfrac{25}{36}=\dfrac{36-25}{36}=\dfrac{11}{36}$

Calcolare la probabilità che, nel lancio di due dadi, si ottenga come somma il numero 6

$$p(A) = \frac{5}{36}$$

6	7	8	9	10	11	12
5	(6)	7	8	9	10	11
4	5	(6)	7	8	9	10
3	4	5	(6)	7	8	9
2	3	4	5	(6)	7	8
1	2	3	4	5	(6)	7
	1	2	3	4	5	6

b) Teorema della probabilità totale

Dati due eventi **A** e **B** compatibili (cioè tali che $A \cap B \neq \emptyset$) la probabilità dell'evento unione $A \cup B$ è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi diminuita della probabilità dell'evento intersezione: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Per tre eventi **A**, **B**, **C** compatibili abbiamo:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Per eventi incompatibili abbiamo:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \qquad p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$$

Dimostrazione: Siano A e B due eventi sottoinsiemi di uno spazio di probabilità Ω tali che $C = A \cap B \neq \emptyset$. Questo significa che gli eventi A e B sono compatibili fra loro, cioè il verificarsi di uno dei due eventi non esclude il verificarsi dell'altro .

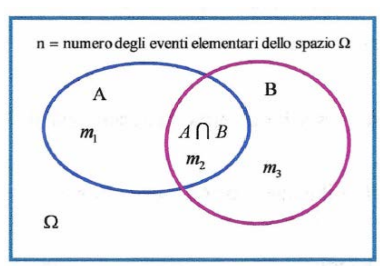
Indicato con n il numero dei casi possibili, siano:

m_2 = numero di casi favorevoli all'evento $A \cap B$

m_1 = numero di casi favorevoli all'evento $A - A \cap B$

m_3 = numero di casi favorevoli all'evento $B - A \cap B$

$p(A) = m_1 + m_2 \qquad p(B) = m_2 + m_3 \qquad p(A \cap B) = m_2$



$$p(A \cup B) = m_1 + m_2 + m_3 = p(A) + m_3 = p(A) + (m_2 + m_3) - m_2 = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Adesso consideriamo il caso di **tre eventi A, B, C compatibili**.

Indicato con n il numero dei casi possibili, siano:

$m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ i casi favorevoli all'evento A $\quad m_2 + m_3 + m_5 + m_6$ i casi favorevoli all'evento B

$m_3+m_4+m_6+m_7$ i casi favorevoli all'evento C

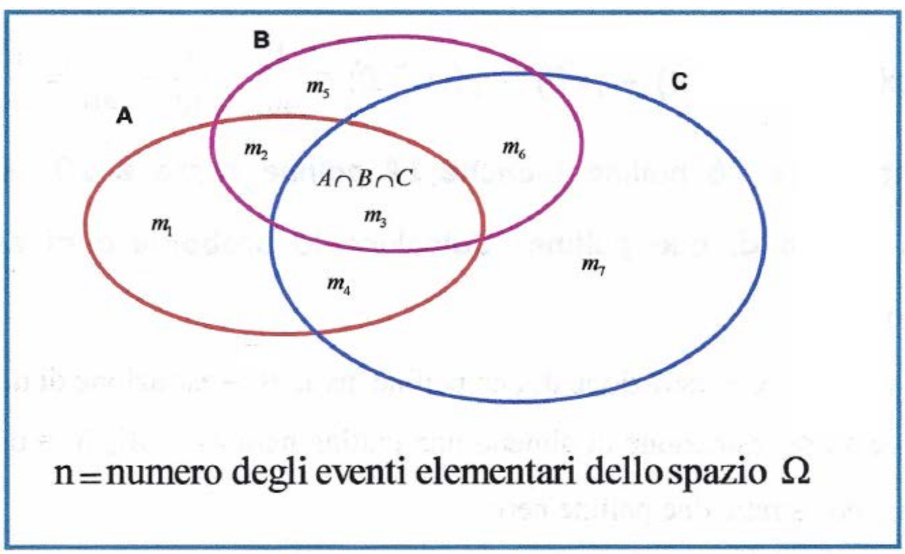
$$p(A)=\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{n} \qquad p(B)=\frac{m_2+m_3+m_5+m_6}{n} \qquad p(C)=\frac{m_3+m_4+m_6+m_7}{n}$$

$$p(A\cap B\cap C)=\frac{m_3}{n} \qquad p(A\cap B)=\frac{m_2+m_3}{n} \qquad p(A\cap C)=\frac{m_3+m_4}{n} \qquad p(B\cap C)=\frac{m_3+m_6}{n}$$

$$p(A\cup B\cup C)=\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7}{n}$$

$$m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7=(m_1+m_2+m_3+m_4)+(m_2+\cancel{m_3}+m_5+m_6)+$$
$$+(\cancel{m_3}+\cancel{m_4}+m_6+m_7)-(m_2+\cancel{m_3})-(\cancel{m_3}+\cancel{m_4})-(\cancel{m_3}+m_6)+\cancel{m_3} \Rightarrow$$

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$



Calcolare la probabilità che, lanciando un dado, esca un numero x che sia dispari oppure minore di 4

I due eventi $A=\{1,3,5\}$ = esce un numero dispari, $B=\{1,2,3\}$ = esce un numero minore di 4 sono compatibili fra loro in quanto $A\cap B=\{1,3\}$ $\qquad A\cup B=\{1;2;3;5\}$

Ricordando che $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ possiamo scrivere:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$p(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ definizione classica di probabilità

Calcolare la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di carte di 40, questa sia una figura o una carta di cuori

I due eventi **A** (estrazione di una figura) e **B** (estrazione di una carta di cuori) sono fra loro compatibili in quanto: $A\cap B = \{\text{fante di cuori , donna di cuori , re di cuori}\}$

Tenuto presente che le figure, presenti in un mazzo di carte da 40 sono 12 e che le carte di cuori sono 10 , abbiamo: $p(A) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$, $p(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$, $p(A\cap B) = \frac{3}{40}$

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$$

Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte. Calcolare la probabilità che la carta estratta sia un asso (evento A) o una carta di cuori (evento B).

Gli eventi A e B sono fra loro compatibili in quanto la loro intersezione dà luogo all'asso di cuori .

$p(A) = \frac{4}{40}$, $p(B) = \frac{10}{40}$, $p(A\cap B) = \frac{1}{40}$ $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$

Da un'urna contenente 16 palline bianche,14 palline rosse e 10 nere si effettua un'estrazione in blocco di due palline. Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina nera

Consideriamo gli eventi: **A** = estrazione di una pallina nera, **B** = estrazione di due palline nere
$A\cup B$ indica l 'evento << estrazione di almeno una pallina nera >> . $A\cup B$ = o viene estratta una pallina nera o vengono estratte due palline nere .

Poiché gli eventi **A** e **B** sono fra loro **incompatibili** ($A\cap B = \varnothing$) abbiamo:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{\binom{10}{1}\binom{30}{1}}{\binom{40}{2}}+\frac{\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{345}{780}=\frac{23}{52}$$

Altra risoluzione: L'evento contrario dell'evento <<**estrazione di almeno una pallina nera**>> è <<**estrazione di zero palline nere**>>

$$p(A\cup B)=1-p\left(\overline{A\cap B}\right)=1-\frac{\binom{30}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{345}{780}=\frac{23}{52}$$

Da un mazzo di 40 carte si effettua una estrazione in blocco di 4 carte. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi: A) almeno una carta sia un asso B) al massimo ci siano 3 assi C) almeno una carta sia di cuori D) al massimo ci siano tre carte di cuori

Invece di calcolare direttamente la probabilità dell'evento A (almeno una carta sia un asso) calcoliamo la probabilità dell'evento contrario $\overline{A}$ (zero assi)

$$p(\overline{A})=\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}} \quad \text{e quindi} \quad p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}$$

L'evento B (al massimo tre assi) è contrario dell'evento $\overline{B}$ (quattro assi)

$$p(\overline{B})=\frac{1}{\binom{40}{4}} \qquad p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{1}{\binom{40}{4}}$$

In maniera del tutto analoga possiamo ricavare le altre due probabilità:

$$p(C)=1-\frac{\binom{30}{4}}{\binom{40}{4}} \quad , \quad p(D)=1-\frac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}}$$

c) Probabilità condizionata

In uno spazio di probabilità Ω, fissato un evento B con probabilità prestabilita $p(B) > 0$, la probabilità che un evento **A** di Ω si verifichi , nell'ipotesi che B si sia verificato, si chiama probabilità condizionata dell'evento **A** rispetto all'evento **B** e si indica col simbolo $p(A/B)$ e si legge << **probabilità di A condizionata da B o subordinata a B**>>oppure <<**probabilità dell'evento A quando l'evento B si è verificato**>> .

$p(A)$ = **probabilità incondizionata**

$p(A/B)$ = **probabilità dell'evento A condizionata dall'evento B**

Nella teoria assiomatica di probabilità, $p(A/B)$, cioè la probabilità condizionata dell'evento **A** quando sappiamo che si è verificato l'evento **B**, per definizione ,è uguale al rapporto tra la probabilità che si verifichi l'evento $A \cap B$ e la probabilità che si verifichi l'evento **B**. In formule abbiamo:

$$\mathbf{p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{card\,A\cap B}{card\,B}=\frac{n_{A\cap B}}{n_B}} \qquad \textbf{[§]}$$

Essa coincide numericamente col rapporto tra il numero **r** dei casi favorevoli all'evento $A \cap B$ ed il numero **k** dei casi favorevoli all'evento **B**, quando lo spazio campionario è Ω.

Analogamente, la probabilità condizionata dell'evento **B** rispetto all'evento **A**, con $p(A) > 0$ è definita dalla formula (si noti che $A \cap B = B \cap A$)

$$\mathbf{p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{card\,A\cap B}{card\,A}=\frac{n_{A\cap B}}{n_A}}$$

$p(A\cap B)=p(B\cap A)=p(A)\cdot p(B/A)=p(B)\cdot p(A/B)$ che esprime il teorema della probabilità composta.

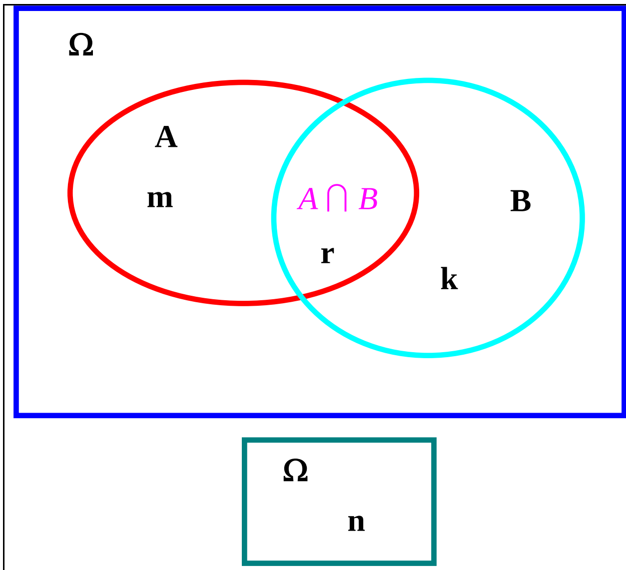
Se sappiamo che l'evento **B** si è verificato allora il numero di eventi elementari dell'insieme $A \cap B$ rappresenta il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento **A** quando si è verificato l'evento **B**, mentre il numero il numero degli eventi elementari dell'insieme **B** rappresenta il numero dei casi possibili perché si verifichi l'evento A sapendo che si è verificato l'evento **B**.

Nella teoria classica di probabilità la suddetta formula **[§]** è dimostrabile in base alle seguenti considerazioni. Sia Ω lo spazio campionario avente **n** eventi elementari. Siano inoltre:

1) **m** gli eventi elementari di Ω favorevoli all'evento **A**, cioè l'insieme **A** è costituito da m eventi elementari di **A**

2) **r** gli eventi elementari di Ω favorevoli all'evento $A \cap B$ 3) **k** gli eventi elementari di Ω favorevoli all'evento **B** (dove $r \leq m$, $r \leq k$)

Supporre vero **B** significa affermare che si è verificato uno degli eventi elementari di Ω appartenenti a **B**. Tutti gli eventi elementari di $\Omega \notin B$ sono impossibili.



Si può riassumere sinteticamente la situazione dicendo che **B** è il nuovo spazio campionario, cioè Ω si è ridotto a **B**

Possiamo dire che gli eventi favorevoli ad **A** (cioè $A \cap B$) sono **r** mentre gli eventi possibili (in $\Omega \equiv B$) sono **k** per cui possiamo scrivere:

$$p(A/B)=\frac{r}{k}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{p(A \cap B)}{p(B)}=\frac{card\ A \cap B}{card\ B}$$

La formula trovata che, nella definizione classica, può essere dimostrata, nella definizione assiomatica di probabilità viene assunta come definizione di probabilità condizionata, cioè la probabilità condizionata dell'evento **A**, rispetto all'evento **B**, ci viene espressa dalla seguente formula:

$$\mathbf{p(A/B)=\frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

card A ∩ B = numero di volte in cui si presenta l'evento **A ∩ B**

card B = numero di volte in cui si presenta l'evento **B**

ESEMPIO

Si lancino contemporaneamente due dadi. Qual è la probabilità che la somma dei numeri delle due facce valga 8 (evento A) sapendo che il risultato ottenuto è un numero pari (evento B) ?

Evento **A** = la somma dei numeri presenti nelle facce dei due dadi vale 8

Evento **B** = la somma dei numeri presenti nelle facce dei due dadi è un numero pari

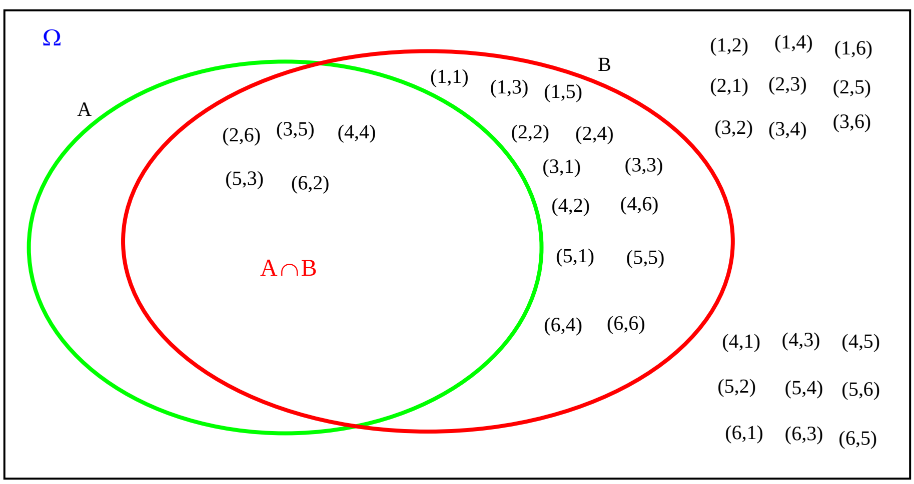
Sappiamo che esistono 36 risultati possibili ed i lanci favorevoli all'evento **A** sono i 5 seguenti: $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

Quindi la probabilità incondizionata (cioè senza la conoscenza dell'evento **B**) dell'evento **A** è: $p(A) = \dfrac{5}{36}$

Se si è verificato l'evento **B** i casi possibili sono 18 e non 36 mentre i casi favorevoli sono ancora 5 e , di conseguenza , la probabilità dell'evento **A** condizionata dall'evento **B** vale:

$$p(A/B) = \frac{5}{18} \qquad \boxed{p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{5}{18}}$$

In Ω i casi favorevoli all'evento $A \cap B$ sono **5**, mentre i casi possibili sono 36. In Ω i casi favorevoli all'evento **B** sono 18, mentre i casi possibili sono 36.



Si dice che due eventi **A** e **B** sono stocasticamente dipendenti o statisticamente dipendenti se:

$$p(A/B) \neq p(A) \qquad p(B/A) \neq p(B)$$

Si dice che due eventi **A** e **B** sono stocasticamente indipendenti o statisticamente indipendenti se:

$$p(A/B) = p(A) \qquad p(B/A) = p(B)$$

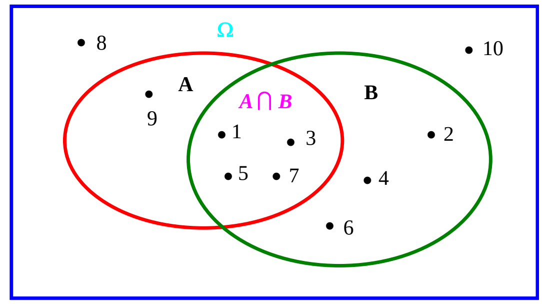
eventi stocasticamente dipendenti significa eventi dipendenti in probabilità

eventi stocasticamente indipendenti significa eventi non dipendenti in probabilità

Si dice che l'evento **A** è indipendente dall'evento **B** se il verificarsi dell'evento **B** non altera la probabilità di verificarsi dell'evento **A** e viceversa.

ESEMPIO

In un'urna vi sono 10 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Qual è la probabilità di estrarre una pallina contrassegnata con un numero dispari (evento A) minore di 8 (evento B)?



$A = \{1;3;5;7;9\}$ $B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ $A \cap B = \{1;3;5;7\}$ $p(A \cap B) = \dfrac{card\ A \cap B}{card\ B} = \dfrac{4}{7}$

$p(A/B) = \dfrac{4}{7}$ in quanto i casi possibili sono 7 (cioè i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) e non 10 perché supponiamo che l'evento **B** si sia verificato , mentre i casi favorevoli sono 4 (precisamente 1,3 , 5) . Applicando la formula della probabilità condizionata abbiamo:

$$p(A \cap B) = \frac{4}{10} \qquad p(B) = \frac{7}{10} \qquad p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

Il teorema della probabilità composta

Per gli eventi compatibili **e** indipendenti vale il primo teorema di Laplace: **La probabilità di verificarsi di un evento C composto di due eventi A e B compatibili e indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi**

$\mathbf{p(C) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$ [*]

Per gli eventi compatibili e dipendenti vale il secondo teorema di Laplace: **La probabilità di verificarsi di un evento composto C, formato da due eventi A e B compatibili e dipendenti, è data dal prodotto della probabilità che ha il primo evento** di verificarsi per la probabilità che ha il secondo nell'ipotesi che il primo si sia verificato.

$$p(C)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)=p(B)\cdot p(A/B) \qquad [**]$$

Nel caso di tre eventi A, B, C vale quanto segue:

• Eventi A, B, C stocasticamente indipendenti:

$$p(C)=p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p(B)\times p(C)$$

• Eventi A, B, C stocasticamente dipendenti

$$p(D)=p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B/A)\cdot p(C/A\cap B)$$

Nel caso di quattro eventi stocasticamente dipendenti abbiamo:

$$p(E)=p(A\cap B\cap C\cap D)=p(A)\cdot p(B/A)\cdot p(C/A\cap B)\times p(D/A\cap B\cap C)$$

Da un'urna contenente 8 palline rosse e 2 palline bianche estraiamo successivamente due palline. Calcolare la probabilità che le due palline estratte siano entrambe bianche

L'evento E << uscita di due palline bianche >> è un evento complesso costituito da due eventi parziali B_1 = la prima pallina estratta è bianca e B_2 = la seconda pallina estratta è bianca.

L'estrazione può essere effettuata in due maniere diverse.

$E = B_1\cap B_2$ = le due palline estratte sono entrambe bianche

Primo modo: Dopo la prima estrazione rimettiamo la pallina dentro l'urna. In questo caso i due eventi A e B sono indipendenti in quanto l'eventuale prima estrazione di una pallina bianca non altera la probabilità di una seconda eventuale uscita di una pallina bianca.

$$p(C)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{25}$$

Secondo modo: Dopo la prima estrazione non rimettiamo la pallina dentro l'urna.

I due eventi A e B questa volta sono dipendenti.

$$p(C)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

Teorema di Bayes

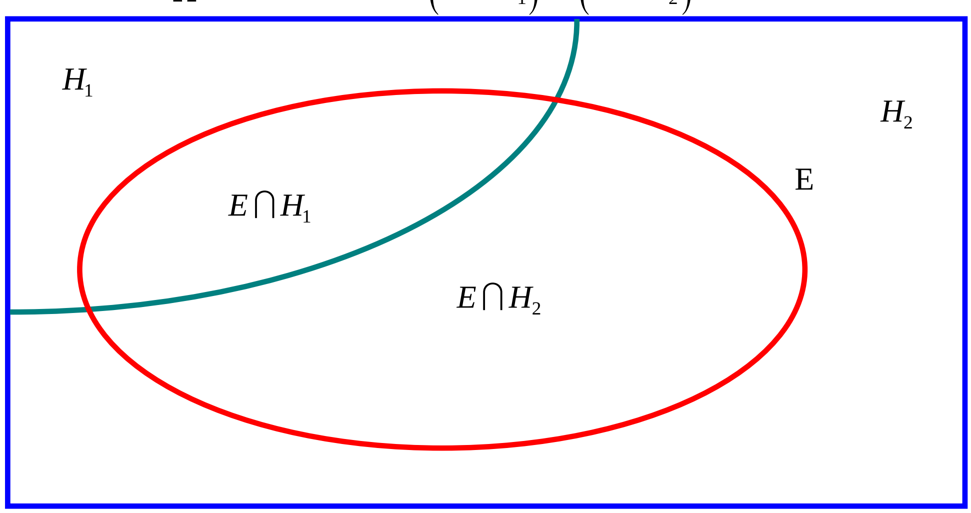
Consideriamo due eventi H_1, H_2 aventi rispettivamente probabilità $p(H_1)$, $p(H_2)$ e supponiamo che essi costituiscano un sistema completo di eventi. Questo significa che gli eventi H_1 ed H_2 sono fra loro incompatibili ($\mathbf{H_1 \cap H_2 = \varnothing}$) e la loro unione è l'insieme degli eventi elementari Ω, cioè $\mathbf{H_1 \cup H_2 = \Omega}$.

H_1 ed H_2 costituiscono una partizione di Ω in quanto risulta:

$$\mathbf{H_1 \cap H_2 = \varnothing} \qquad \mathbf{H_1 \cup H_2 = \Omega}$$

cioè gli insiemi H_1 ed H_2 sono disgiunti e la loro unione è l'insieme campionario Ω.

Ω $\qquad E = (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2)$



Consideriamo un altro evento **E** dello spazio campionario Ω. Se conosciamo le probabilità $p(H_1)$, $p(H_2)$ degli eventi H_1, H_2 e le probabilità condizionate $p(E/H_1)$, $p(E/H_2)$ possiamo calcolare la probabilità incondizionata $p(E)$.

Poiché gli eventi $E \cap H_1$, $E \cap H_2$ sono fra loro incompatibili posso applicare il teorema della probabilità totale (o teorema della somma)

$$\boxed{\mathbf{p(E) = p(E \cap H_1 \cup E \cap H_2) = p(E \cap H_1) + p(E \cap H_2)}}$$

Infatti la probabilità che si verifichi l'evento **E** è data dalla somma della probabilità che si verifichi l'evento **E** quando si è verificato l'evento H_1 e di quella dell'evento **E** quando si è verificato l'evento H_2. Ricordando che:

$$p(E\cap H_1)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)=p(H_1\cap E) \qquad p(E\cap H_2)=p(H_2)\cdot p(E/H_2)=p(H_2\cap E)$$

possiamo scrivere: $$p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)=\sum_{i=1}^{2}p(H_i)\times p(E/H_i)$$

Supponiamo adesso di sapere che l'evento **E** si è verificato, cioè supponiamo di conoscere $p(E)$ e vediamo se è possibile determinare anche la probabilità dell'evento H_i $(i=1,2)$, cioè vediamo se è possibile determinare $p(H_1/E)$, $p(H_2/E)$.

Applicando il teorema della probabilità composta all'evento composto $E\cap H_1$ possiamo scrivere: $$p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)$$

da cui ricaviamo: $\boxed{p(H_1/E)=\dfrac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(E)}}$, ma noi abbiamo dimostrato che:

$$p(E) = p(H_1)\cdot p(E/H_1) + p(H_2)\cdot p(E/H_2) + p(H_3)\cdot p(E/H_3)$$

per cui la formula precedente assume la forma:

$$p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{\sum_{i=1}^{2}p(H_i)\times p(E/H_i)}$$

che rappresenta la formula di Bayes relativa ad un sistema completo di due eventi.

Applicando il teorema della probabilità composta all'evento composto $E\cap H_2$ ed operando come prima ci ricaviamo la seguente formula.

$$p(H_2/E)=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{\sum_{i=1}^{2}p(H_i)\times p(E/H_i)}$$

Questa formula può essere ricavata ricordando che: $p(H_1/E)+p(H_2/E)=1$

Il teorema di **Bayes** è detto anche teorema delle cause di un evento in quanto esso risolve il seguente problema: ammesso che si sia verificato l'evento **E**, qual è la probabilità che esso sia stato generato dalla causa H_1 (o dalla causa H_2) nell'ipotesi che gli eventi H_1 ed H_2 costituiscano un sistema completo di eventi.

Ulteriori precisazioni sui simboli della seguente formula di Bayes:

$$p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{\sum_{i=1}^{2}p(H_i)\times p(E/H_i)} \qquad \text{[§§]}$$

$p(H_1/E)$ = probabilità che, essendosi presentato l'evento **E**, esso sia stato generato dalla causa H_1 = probabilità che la causa H_1 abbia generato l'evento E

$p(H_1)$ = probabilità che agisca la causa H_1

$p(H_2)$ = probabilità che agisca la causa H_2

$p(E/H_1)$ = probabilità che l'evento E si verifichi in dipendenza della causa H_1

$p(E/H_2)$ = probabilità che l'evento E si verifichi in dipendenza della causa H_2

$p(H_1)\cdot p(E/H_1)$ = probabilità che agisca la causa H_1 e che, subordinatamente a tale fatto , si verifichi **E**

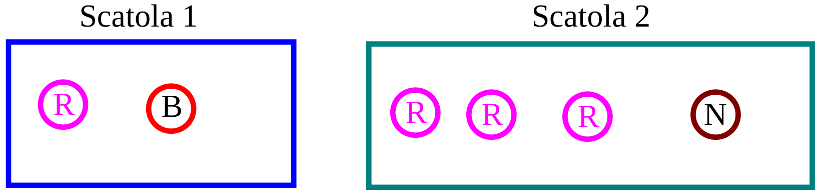
$p(H_2)\cdot p(E/H_2)$ = probabilità che agisca la causa H_2 e che, subordinatamente a tale fatto, si verifichi **E**

Ne segue che il denominatore della **[§§]** $p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)$ esprime la probabilità che l'evento E si verifichi, non importa per quale causa. Il significato della **[§§]** risulta evidente**.** Essa dice precisamente che :

$$\text{probabilità che E sia stato generato dalla causa } H_1 = \frac{\text{probabilità che agisca } H_1 \text{ e che in dipendenza di ciò si verifichi E}}{\text{probabilità che si verifichi E non importa per quale causa}}$$

Consideriamo due scatole . Nella prima sono contenute 1 pallina rossa ed 1 bianca, nella seconda sono contenute 3 palline rosse ed 1 pallina nera. Le due scatole si presentano come segue: Supponiamo ora che, scelta a caso una scatola, si estragga una pallina da essa senza conoscere la scatola da cui avviene l'estrazione. Ammesso che la pallina estratta sia rossa, calcolare la probabilità che essa provenga dalla scatola 1.

Scatola 1 Scatola 2



In questo caso le scatole sono le cause che possono originare l'evento **E** = la pallina estratta è rossa

H_1 = la pallina estratta proviene dalla **scatola 1** ,

H_2 = la pallina estratta proviene dalla **scatola 2** ,

E = pallina estratta è rossa

$p(H_1/E)$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla scatola 1 sapendo che essa è rossa**

$p(H_1)$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla prima scatola** $= \dfrac{1}{2}$

$p(H_2)$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla seconda scatola** $= \dfrac{1}{2}$

$p(E/H_1)$ =**probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla prima scatola** $= \dfrac{1}{2}$

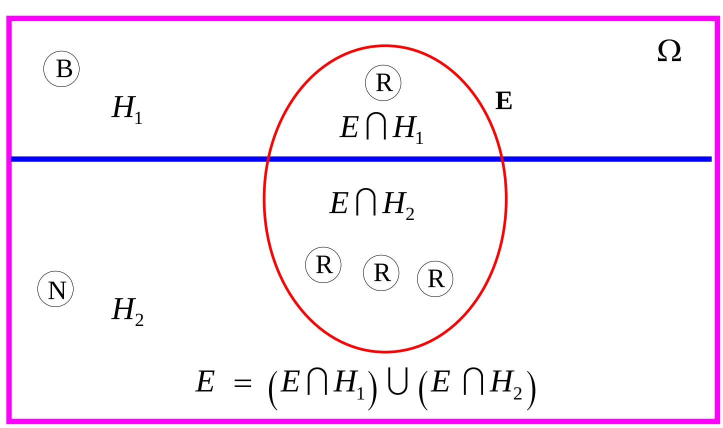
$p(E/H_2)$ = **probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla seconda scatola** $= \dfrac{3}{4}$

$p(H_1)\cdot p(E/H_1)$ = **probabilità che, essendo stata scelta la prima scatola, venga estratta una pallina rossa** $= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} \quad = \quad p(E\cap H_1)$

$p(H_2)\cdot p(E/H_2)$ = **probabilità che, essendo stata scelta la seconda scatola, venga estratta una pallina rossa** $= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4} \quad = \quad p(E\cap H_2)$

Applicando la formula di Bayes relativa ad un sistema di due eventi completi H_1 ed H_2 abbiamo:

$$p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}=\frac{2}{5}$$



Come si vede:

- Al numeratore abbiamo la probabilità che la pallina rossa provenga dalla scatola 1

$$p(E\cap H_1)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

- Al denominatore abbiamo la probabilità di avere pallina rossa non interessando da quale scatola essa possa provenire $\mathbf{p(E)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{8}}$

Osservazione

Se vogliamo conoscere la probabilità che la pallina rossa provenga dalla scatola due abbiamo:

$$\mathbf{p(H_2/E)=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{3}{5}}$$

Naturalmente abbiamo: $p(H_1/E)+p(H_2/E)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$

Osservazione: Le probabilità $p(H_1)$ e $p(H_2)$ sono dette probabilità a priori. Quando diciamo che $p(H_1)=\frac{1}{2}=0{,}5$ intendiamo dire che, a priori, la causa H_1 può agire con probabilità $\frac{1}{2}$.

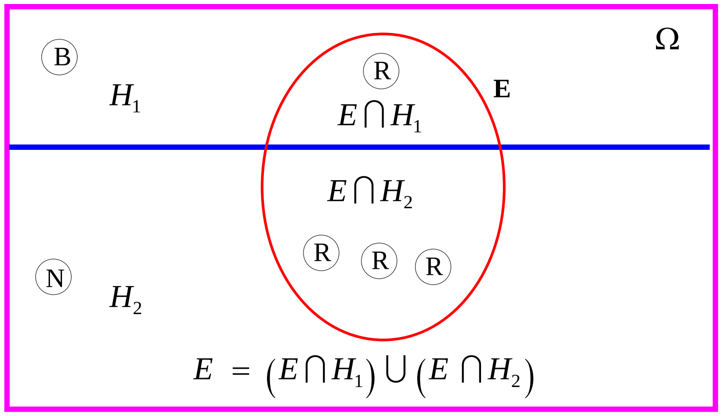
La medesima probabilità, stimata a posteriori, cioè dopo che l'evento si è verificato, è $p(H_1/E)=\frac{2}{5}=0{,}4\neq p(H_1)=\frac{1}{2}=0{,}5$. Tale fatto è ovvio. Infatti, occorre notare che mentre, a priori, essendo due le scatole, si può ritenere che esse abbiano uguale probabilità di generare una pallina rossa ciò non è possibile a posteriori. Se è stata generata una pallina rossa è meno verosimile che essa provenga dalla scatola 1 mentre è più verosimile pensare che essa provenga dalla scatola 2. A tale proposito occorre tenere presente che nella scatola 1 abbiamo una sola pallina rossa su 2 mentre nella scatola 2 abbiamo 3 palline rosse su 4.

Sintetizzando possiamo scrivere la formula di Bayes nella seguente maniera:

$$\mathbf{p(H_1/E)=\frac{p(E\cap H_1)}{p(E)}=\frac{p(E\cap H_1)}{p(E\cap H_1)+p(E\cap H_2)}=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)}}$$

$$\mathbf{p(H_2/E)=\frac{p(E\cap H_2)}{p(E)}=\frac{p(E\cap H_2)}{p(E\cap H_1)+p(E\cap H_2)}=\frac{p(H_2)\times p(E/H_2)}{p(H_1)\times p(E/H_1)+p(H_2)\times p(E/H_2)}}$$

$$\mathbf{E\cap H_1=H_1\cap E}$$



Se H_1**,** H_2**,** H_3 sono tre eventi mutuamente incompatibili e costituente un sistema completo di eventi **(** $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega$ **)** ed **E** è un evento che si verifica assieme ad uno solo dei tre eventi H_1, H_2, H_3 dati, allora vale il teorema della probabilità totale che ci consente di scrivere:

$$\mathbf{p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}$$

Un evento **E** si verifichi a diverse condizioni, sulla natura delle quali si fanno 3 ipotesi H_1, H_2, H_3. Si esegue un esperimento nel quale si realizza l'evento **E**. Questa determina una rivalutazione delle tre ipotesi H_1, H_2, H_3, cioè le loro probabilità mutano in quanto adesso si hanno ulteriori informazioni. Abbiamo il teorema di Bayes**:**

$$\mathbf{p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}}$$

$$\mathbf{p(H_2/E)=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}}$$

$$\mathbf{p(H_3/E)=\frac{p(H_3)\cdot p(E/H_3)}{p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}}$$

Altro esempio

Vi sono 3 urne. La prima contiene 12 palline bianche, la seconda contiene 8 palline bianche e 2 rosse, la terza contiene 20 palline rosse. Si sceglie a caso un'urna e da questa si estrae una pallina che risulta rossa. Qual è la probabilità che la pallina rossa sia stata estratta:

a) dalla prima urna b) dalla seconda urna c) dalla terza urna.

H_1 = la pallina estratta proviene dal'urna **1**,

H_2 = la pallina estratta proviene dal'urna **2**

H_3 = la pallina estratta proviene dal'urna **3**

$p(H_1)=\frac{1}{3}$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla prima urna**

$p(H_2)=\frac{1}{3}$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla seconda urna**

$p(H_3)=\frac{1}{3}$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla terza urna**

E = la pallina estratta è rossa

$p(H_1/E)$ = **probabilità che la pallina estratta provenga dalla scatola 1 sapendo che essa è rossa**

$p(E/H_1)=0$ = **probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla prima scatola**

$p(E/H_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ = **probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla seconda scatola**

$p(E/H_3)=\frac{20}{20}=1$ = **probabilità che la pallina rossa venga estratta dalla rossa scatola**

$\mathbf{p(E\cap H_1)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)=\frac{1}{3}\cdot 0=0}$ **probabilità che, essendo stata scelta la prima scatola, venga estratta una pallina rossa**

$$\mathbf{p(H_1/E)=\frac{p(E\cap H_1)}{p(E)}=\frac{p(E\cap H_1)}{p(E\cap H_1)+p(E\cap H_2)+p(E\cap H_3)}}$$

$$\mathbf{p(H_1/E)=\frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(E)=p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}}$$

$$\mathbf{p(H_1/E)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1}=0}$$

$\mathbf{p(E\cap H_2)=p(H_2)\cdot p(E/H_2)}$ = **probabilità che, essendo stata scelta la seconda scatola, venga estratta una pallina rossa**

$$p(H_2/E)=\frac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}$$

$$p(H_2/E)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{1}{6}$$

$p(E\cap H_3)=p(H_3)\cdot p(E/H_3)$ = **probabilità che , essendo stata scelta la terza urna, venga estratta una pallina rossa**

$$p(H_3/E)=\frac{p(H_3)\cdot p(E/H_3)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1)+p(H_2)\cdot p(E/H_2)+p(H_3)\cdot p(E/H_3)}$$

$$p(H_3/E)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{5}{6}$$

Vi sono 3 urne. La prima contiene 12 palline bianche, la seconda contiene 8 palline bianche e 2 rosse, la terza contiene 20 palline rosse. Si sceglie a caso un'urna e da questa si estrae una pallina che risulta bianca. Qual è la probabilità che la pallina rossa sia stata estratta:

a) dalla prima urna **b)** dalla seconda urna **c)** dalla terza urna.

B = la pallina estratta è bianca

$$p(H_1/B)=\frac{p(H_1)\cdot p(B/H_1)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

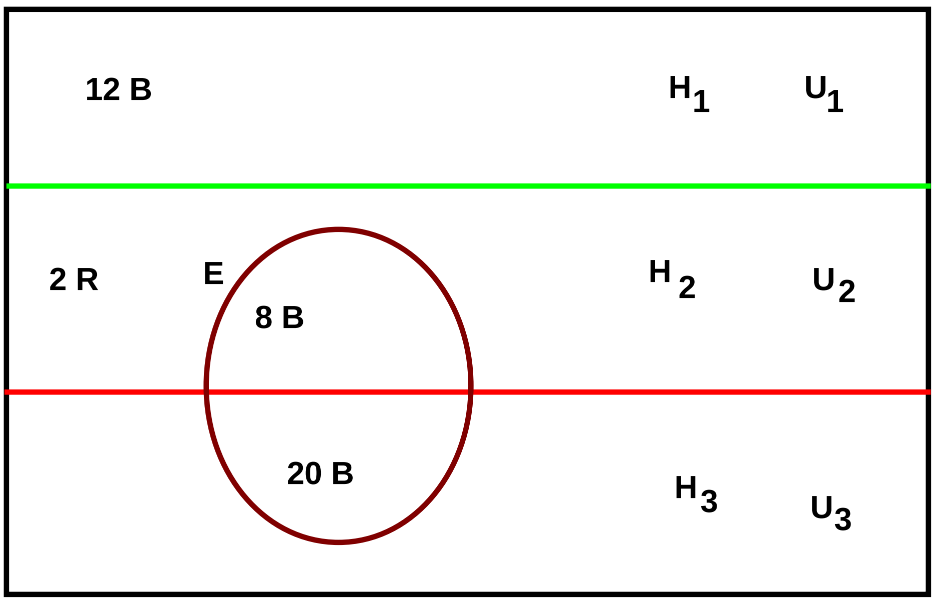
$$p(H_1/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{8}{30}}$$

$$p(H_2/B)=\frac{p(H_2)\cdot p(B/H_2)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

$$p(H_2/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{15}}$$

$$p(H_3/B)=\frac{p(H_3)\cdot p(B/H_3)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

$$p(H_3/B) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0} = 0$$



Osservazione

Le probabilità $p(H_1)$ e $p(H_2)$ sono dette probabilità a priori. Quando diciamo che $p(H_1)=\frac{1}{2}=0,5$ intendiamo dire che, a priori, la causa H_1 può agire con probabilità $\frac{1}{2}$. La medesima probabilità, stimata a posteriori, cioè dopo che l'evento si è verificato, è $p(H_1/E)=\frac{2}{5}=0,4^{1}\,p(H_1)=\frac{1}{2}=0,5$. Tale fatto è ovvio. Infatti, occorre notare che mentre, a priori, essendo due le scatole, si può ritenere che esse abbiano uguale probabilità di generare una pallina rossa ciò non è possibile a posteriori. Se è stata generata una pallina rossa è meno verosimile che essa provenga dalla scatola 1 mentre è più verosimile pensare che essa provenga dalla scatola 2. A tale proposito occorre tenere presente che nella scatola 1 abbiamo una sola pallina rossa su 2 mentre nella scatola 2 abbiamo 3 palline rosse su 4.

Vi sono 3 urne. La prima contiene 12 palline bianche, la seconda contiene 8 palline bianche e 2 rosse, la terza contiene 20 palline rosse. Si sceglie a caso un'urna e da questa si estrae una pallina che risulta bianca. Qual è la probabilità che la pallina rossa sia stata estratta:

a) dalla prima urna b) dalla seconda urna c) dalla terza urna.

B = la pallina estratta è bianca

$$p(H_1/B)=\frac{p(H_1)\cdot p(B/H_1)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

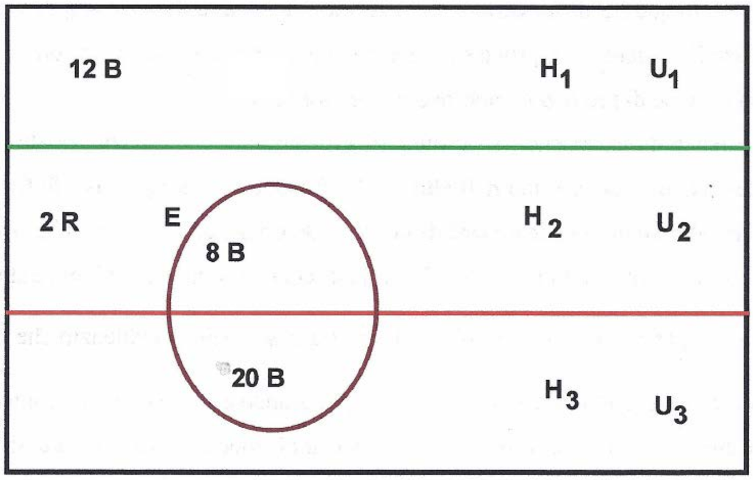
$$p(H_1/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}$$

$$p(H_2/B)=\frac{p(H_2)\cdot p(B/H_2)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

$$p(H_2/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}$$

$$p(H_3/B)=\frac{p(H_3)\cdot p(B/H_3)}{p(H_1)\cdot p(B/H_1)+p(H_2)\cdot p(B/H_2)+p(H_3)\cdot p(B/H_3)}$$

$$p(H_3/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\cdot 0}=0$$



Osservazione: Le probabilità $p(H_1)$ e $p(H_2)$ sono dette **probabilità a priori**. Quando diciamo che $p(H_1) = \frac{1}{2} = 0,5$ intendiamo dire che, a priori , la causa H_1 può agire con probabilità $\frac{1}{2}$.

La medesima probabilità, stimata a posteriori, cioè dopo che l'evento si è verificato, è $p(H_1 / E) = \frac{2}{5} = 0,4 \neq p(H_1) = \frac{1}{2} = 0,5$. Tale fatto è ovvio. Infatti, occorre notare che mentre, a priori, essendo due le scatole, si può ritenere che esse abbiano uguale probabilità di generare una pallina rossa ciò non è possibile a posteriori. Se è stata generata una pallina rossa è meno verosimile che essa provenga dalla scatola 1 mentre è più verosimile pensare che essa provenga dalla scatola 2. A tale proposito occorre tenere presente che nella scatola 1 abbiamo una sola pallina rossa su 2 mentre nella scatola 2 abbiamo 3 palline rosse su 4.

Definizione frequentista di probabilità

La definizione classica di probabilità è applicabile soltanto quanto siamo in grado di definire il numero dei casi possibili ed equiprobabili . Quando questo non è possibile può essere utile fare ricorso alla teoria frequentista di probabilità di un evento . Concetto base per i frequentisti è quello della frequenza relativa di un evento intesa come il rapporto fra il numero $\mathbf{h}$ di volte in cui l'evento $\mathbf{A}$ si è verificato ed il numero $\mathbf{n}$ delle prove effettuate: $\mathbf{f(A) = \frac{h}{n}}$

Evidentemente la frequenza di un certo evento **A** varia al variare delle prove e , addirittura, pur mantenendo fisso il numero delle prove sullo stesso evento **A** e nelle stesse condizioni le frequenze di ogni singolo insieme di prove potranno risultare tra loro diverse. Tuttavia l'esperienza dimostra che, se il numero **n** di prove è abbastanza grande, i valori delle frequenze differiscono di poco l'uno dall'altro. Il più grande dei frequentisti fu Cournot. Egli si dedicò dapprima allo studio dei fenomeni di massa. Osservò, ad esempio, che il rapporto tra il numero delle nascite maschili e nascite totali in grandi città ed in intere nazioni tendeva a rimanere quasi immutato o, per meglio dire, stabile. Da questa osservazione evidenziò che il rapporto $\frac{h}{n}$ assume un valore tendenzialmente costante quanto più grande è **n**, ove con **h** si intenda il numero delle volte in cui l'evento A si verifica su n prove indipendenti. Tale valore si assume come probabilità dell'evento **A**, enunciando in tal modo la legge dei grandi numeri.

Legge empirica del caso o Legge dei grandi numeri

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte e tutte nelle stesse condizioni, un evento casuale **A** si verifica con una frequenza **f** che varia di poco al variare del numero delle prove e le variazioni, in generale, sono tanto più piccole quanto più grande è il numero delle prove ripetute.
Teoricamente la probabilità frequentista $p(A)$, secondo la definizione di **Von Mises**, ci viene fornita dal seguente limite:

$$\mathbf{p(A) = \lim_{n \to +\infty} f(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{h}{n}}$$

secondo il quale **la probabilità matematica** $p(A)$ **dell'evento A coincide con il limite a cui tende la frequenza relativa** $f(A)$ **dell'esito A di un esperimento ripetibile quanto si vuole, al tendere all'infinito del numero delle prove effettuate**.

A volte , molti sinteticamente, il postulato empirico del caso si enuncia nella seguente maniera: **all'aumentare del numero delle prove, la frequenza relativa di un evento tende alla probabilità matematica dell'evento stesso**.

Questa probabilità è chiamata probabilità empirica di un evento o **probabilità a posteriori** o *probabilità statistica* in contrapposizione a quella classica detta probabilità teorica o probabilità a priori.

Quindi la probabilità statistica di un evento aleatorio **A** è un numero atto a prevedere la frequenza relativa dell'evento **A** in un gran numero di prove fatte tutte nelle medesime condizioni.
La definizione frequentista di probabilità va incontro a notevoli difficoltà quando non è possibile disporre di dati sperimentali su un numero molto grande di prove , e resta sempre da discutere il significato di numero di termini molto grande o tendente ad infinito e, infine, che le condizioni identiche siano veramente tali. Concludendo possiamo sintetizzare le seguenti considerazioni sulla frequenza relativa e la legge empirica del caso. In generale risulta $p(A) \neq f(A)$, anzi il valore di $f(A)$ dipende dal numero di prove effettuate ed, a parità di prove effettuate, possiamo trovare valori diversi di $f(A)$. Tuttavia quando il numero delle prove effettuate è abbastanza grande (teoricamente infinito) il valore di $f(A)$ tende a stabilizzarsi attorno ad un valore ben preciso che si discosta poco dalla probabilità matematica **p(A)** dell'evento A. Osservazioni ripetute hanno portato alla formulazione della seguente legge che, traendo origine dall'esperienza, non è dimostrabile ed è detta, per questo motivo, legge empirica del caso o legge dei grandi numeri: <<su un numero molto grande di prove, effettuate tutte nelle medesime condizioni, la frequenza $f(A)$ con la quale si presenta un certo evento A assume generalmente valori molto prossimi a quello della probabilità **p(A)** dello stesso evento e tale approssimazione è tanto migliore quanto più elevato è il numero delle prove effettuate>>

Osservazioni

- la frequenza è un concetto a posteriori, cioè si calcola dopo avere compiuto l'esperimento, mentre la probabilità è un concetto a priori, cioè si calcola prima dell'esperimento e senza che sia necessario effettuarlo
- la tendenza della frequenza relativa verso la probabilità di un evento non deve essere interpretata nel senso dell'analisi matematica (cioè come il limite di una successione numerica). Essa scaturisce soltanto da una universale convinzione circa il comportamento degli eventi casuali.

Definizione soggettivista di probabilità

La probabilità soggettivista di un evento rappresenta il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al presentarsi di un evento.

Probabilità soggettivista secondo la definizione di De Finetti (**1906 - 1985**)

La probabilità di un evento E è espressa dal rapporto tra la somma s che un individuo coerente è disposto a pagare per ricevere un compenso S nel caso in cui si verifichi l'evento E , e la somma S stessa. In formule abbiamo: $p(E)=\frac{s}{S}$ con $s \leq S$

$p(E)$ è il prezzo che si ritiene equo pagare per ricevere un importo unitario nel caso in cui si verifichi l'evento E . E' appena il caso di ricordare che il prezzo che si ritiene equo pagare in un approccio soggettivo alla probabilità è di importo inferiore o uguale alla lira. Ad esempio nello schema probabilistico del lancio di una moneta, la probabilità che, secondo l'individuo coerente, la faccia contraddistinta da **testa** si presenti dopo il lancio, è: $p(T) = \frac{1}{2}$

Solo se l'individuo coerente è disposto a pagare 250 lire prima del lancio, per riceverne 500 al verificarsi dell'evento testa. Secondo un altro individuo coerente ha probabilità $p(T) = \frac{1}{3}$ se egli pensa sia giusto pagare 150 lire prima del lancio per riceverne 450 al verificarsi dell'evento testa.

Come si vede, per il soggettivismo è accettabile che due individui giungano a valutazioni diverse della probabilità di uno stesso evento , purché ognuno di essi sia coerente con le proprie opinioni. Un individuo si considera coerente nella propria valutazione se è disposto ad accettare indifferentemente il ruolo di scommettitore o quello di controparte. Concludiamo affermando che sia la scuola frequentista che quella soggettivista hanno contribuito ad esplicitare con chiarezza le origini e le conseguenze del concetto di probabilità. E' notevole che entrambe le scuole pervengano agli stessi postulati (che giustificano in modo diverso) e dimostrano gli stessi teoremi.

Norme generali per la risoluzione di problemi di calcolo delle probabilità

Per la risoluzione dei problemi di calcolo delle probabilità occorre tenere presente quanto segue:

• individuare correttamente lo schema probabilistico e l'esperimento cui dà luogo. Individuare, poi, gli **eventi elementari** verificare se sono **necessari** , **incompatibili ed equiprobabili**. ♠

• distinguere correttamente se gli eventi elementari consistono in un solo elemento (una faccia, una pallina, un numero) o, invece, risultano costituiti da più elementi (una coppia di facce, una coppia di palline, una terna di numeri)

• esplicitare gli **eventi complessi** di cui vogliamo calcole le probabilità come **unione, intersezione o negazione** di eventi elementari o di eventi più semplici

• per l'**unione** di più eventi stabilire se sono **incompatibili**

• per l'**intersezione** di più eventi stabilire se sono **dipendenti o indipendenti**

• per la **negazione** di uno o più eventi , valgono i seguenti teoremi che generalizzano le leggi di **De Morgan**:

$$\mathbf{p}\left(\overline{\mathbf{A}}\cap\overline{\mathbf{B}}\cap\cdots\right)=\mathbf{1}-\mathbf{p}\left(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\cdots\right) \qquad \mathbf{p}\left(\overline{\mathbf{A}}\cup\overline{\mathbf{B}}\cup\cdots\right)=\mathbf{1}-\mathbf{p}\left(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\cdots\right)$$

Norme generali per la risoluzione di problemi di calcolo delle probabilità

Per la risoluzione dei problemi di calcolo delle probabilità occorre tenere presente quanto segue:

• individuare correttamente lo schema probabilistico e l'esperimento cui dà luogo. Individuare, poi, gli **eventi elementari** verificare se sono **necessari** , **incompatibili ed equiprobabili**. ♠

♠ Consideriamo un esperimento (schema probabilistico) che genera k eventi elementari $e_1, e_2, \cdots, e_k$ necessari , incompatibili ed equiprobabili . Questo significa che gli eventi elementari verificano le tre seguenti relazioni :
1) **necessarietà** $e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_k = \Omega$ 2) **incompatibilità** $e_r \cap e_s = 0 \quad \forall r \neq s$ 3) **equiprobabilità** $p(e_1) = p(e_2) = \cdots = p(e_k)$

♠ Consideriamo un esperimento (schema probabilistico) che genera k eventi elementari $e_1, e_2, \cdots, e_k$ necessari , incompatibili ed equiprobabili . Questo significa che gli eventi elementari verificano le tre seguenti relazioni :
1) **necessarietà** $e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_k = \Omega$ 2) **incompatibilità** $e_r \cap e_s = 0 \quad \forall r \neq s$ 3) **equiprobabilità** $p(e_1) = p(e_2) = \cdots = p(e_k)$

• distinguere correttamente se gli eventi elementari consistono in un solo elemento (una faccia, una pallina, un numero) o, invece, risultano costituiti da più elementi (una coppia di facce, una coppia di palline, una terna di numeri)

• esplicitare gli eventi complessi di cui vogliamo calcole le probabilità come unione, intersezione o negazione di eventi elementari o di eventi più semplici

• per l'unione di più eventi stabilire se sono incompatibili

• per l'intersezione di più eventi stabilire se sono dipendenti o indipendenti

• per la negazione di uno o più eventi , valgono i seguenti teoremi che generalizzano le leggi di De Morgan:

$$\mathbf{p}\left(\overline{\mathbf{A}}\cap\overline{\mathbf{B}}\cap\cdots\right)=\mathbf{1}-\mathbf{p}\left(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\cdots\right) \qquad \mathbf{p}\left(\overline{\mathbf{A}}\cup\overline{\mathbf{B}}\cup\cdots\right)=\mathbf{1}-\mathbf{p}\left(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\cdots\right)$$

Definizione di variabile casuale

In alcuni settori della scienza e della tecnica intervengono delle grandezze variabili i cui valori numerici dipendono dalla probabilità che si verifichino certi eventi casuali. Tali grandezze prendono il nome di variabili casuali e possono essere di due tipi: discrete e continue.

Una variabile casuale si dice discreta se può assumere un numero finito o un'infinità numerabile di valori, si dice continua se può assumere tutti i valori appartenenti ad un intervallo o all'unione di più intervalli.

Si dice variabile casuale discreta o variabile casuale aleatoria una variabile **X** che può assumere i valori $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ al verificarsi di un sistema completo di eventi casuali $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots, E_n$ le cui probabilità sono rispettivamente uguali a $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$. Essendo gli eventi $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots, E_n$ incompatibili e complementari vuol dire che il verificarsi di uno di essi esclude il verificarsi contemporaneo di qualsiasi altro evento fermo restando che uno di essi deve necessariamente verificarsi. Ne segue che l'evento $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots\cdots \cup E_n = \Omega$ è l'evento certo per cui possiamo scrivere:

$$p\left(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots\cdots \cup E_n\right) = p\left(E_1\right) + p\left(E_2\right) + p\left(E_3\right) + \cdots\cdots + p\left(E_n\right) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots + p_n = 1$$

Di solito, le variabili casuali sono indicate con le lettere maiuscole **X** , **Y** , dell'alfabeto latino, mentre i valori che esse assumono [2] sono indicati con le corrispondenti lettere minuscole dell'alfabeto latino x_i , y_i .

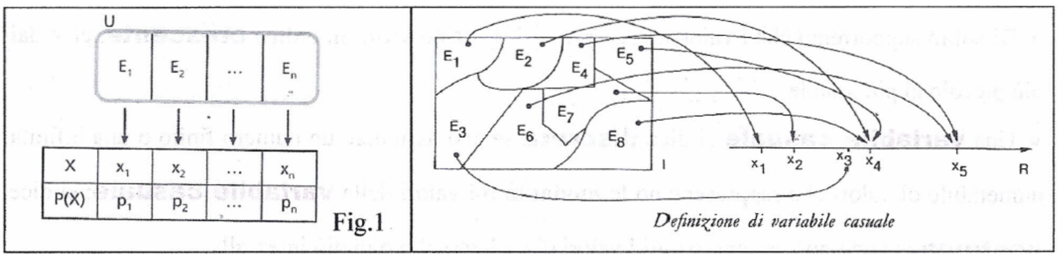


Fig.1

Definizione di variabile casuale

Nella figura 1 ad ogni evento E_i corrisponde una modalità (valore) x_i della **variabile casuale X** e la probabilità p_i di verificarsi. Gli insiemi (eventi aleatori) $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sono **disgiunti** e la loro unione è l'insieme universo U, quindi tali insiemi costituiscono una **partizione** di U.

Dallo schema della seconda tabella si possono dedurre le due seguenti tabelle:

Eventi	Probabilità
E_1	p_1
E_2	p_2
E_3	p_3
E_4	p_4
E_5	p_5
E_6	p_6
E_7	p_7
E_8	p_8
Totale	1

$\longrightarrow$

Valori della v.c. X	Probabilità
x_1	p_1
x_2	p_7
x_3	p_3
x_4	$p_2 + p_5 + p_8$
x_5	$p_4 + p_6$
Totale	1

Dal punto di vista formale per l'evento E_1 scriveremo $P(E_1) = P(X = x_1) = p_1$ in quanto l'affermazione che "si verifica l'evento E_1 con probabilità $P(E_1)$" è equivalente all'affermazione che "la variabile casuale X assume il valore x_1 con probabilità $P(E_1)$"

Sostanzialmente una **variabile casuale discreta X** è un insieme discreto di coppie (x_i, p_i), dove p_i rappresenta la probabilità che la **variabile casuale discreta X** assuma la modalità x_i .

Spesso una variabile casuale **X** è rappresentata mediante una tabella del tipo:

[2] Sono le **modalità** o i valori della variabile casuale

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad \text{o del tipo} \quad X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{cases}$$

o anche, in maniera ancora più sintetica : $X = \left[x_i , p(x_i)\right]$ con $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$ e $p(x_i)$ rappresenta la probabilità che la variabile casuale discreta **X** assuma il valore x_i (ovvero la modalità x_i).

La prima riga rappresenta l'insieme di tutte le modalità che la variabile casuale discreta **X** può assumere; la seconda riga rappresenta la sua funzione di probabilità o la sua legge di distribuzione di probabilità o, più semplicemente , la sua distribuzione di probabilità.

Precisazioni

- Una variabile casuale discreta **X** è definita quando conosciamo l'insieme dei valori x_i che essa assume, nonché l'insieme delle probabilità p_i corrispondenti
- i valori x_i che la variabile casuale discreta **X** assume prendono il nome di modalità della variabile casuale discreta **X**
- l'insieme delle probabilità p_i costituisce la distribuzione di probabilità della variabile casuale discreta **X**, detta anche funzione di probabilità o funzione di massa o funzione di densità e spesso viene indicata col simbolo $f(x)$, cioè: $\mathbf{f(x)=P(X=x)}$
- Di solito supporremo che i valori $x_1 , x_2 , x_3 , \cdots\cdots , x_n$ siano scritti in ordine crescente, cioè dal più piccolo al più grande
- Una variabile casuale **X** si dice discreta se può assumere un numero finito o una infinità numerabile di valori che rappresentano le modalità della variabile casuale; si dice continua quando può assumere tutti i valori di un intervallo o di più intervalli

Esempi di variabili casuali discrete

Si lanciano in aria tre monete e si considera la variabile casuale $\mathbf{X = \text{numero di croci}}$. Costruire la tabella della variabile casuale

Lo spazio degli eventi elementari è il seguente:

$$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$$ [3]

in quanto gli eventi elementari sono i seguenti:

$e_1 = T \cap T \cap T = TTT$, $e_2 = T \cap T \cap C = TTC$, $e_3 = T \cap C \cap T = TCT$

$e_4 = C \cap T \cap T = CTT$, $e_5 = T \cap C \cap C = TCC$, $e_6 = C \cap T \cap C = CTC$

$e_7 = C \cap C \cap T = CCT$, $e_8 = C \cap C \cap C = CCC$

La **probabilità di ogni evento elementare** è $\frac{1}{8}$, cioè:

$$p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) = p(e_4) = p(e_5) = p(e_6) = p(e_7) = p(e_8) = \frac{1}{8}$$

La variabile casuale **X** può assumere i valori **0, 1, 2, 3** (cioè possiamo avere 0 croci, una croce, due croci, tre croci) con le probabilità di seguito indicate:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix}$$

0, 1, 2, 3 rappresentano le modalità della variabile casuale **X**.

Se vogliamo calcolare la probabilità che la variabile casuale **X** assuma il valore 2, cioè se vogliamo calcolare la probabilità che in un lancio si abbiano due croci dovremo procedere come segue:

$$p(X = 2) = p(e_5 \cup e_6 \cup e_7) = p(e_5) + p(e_6) + p(e_7) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Una tabella più completa della precedente può essere la seguente :

Modalità x_i della v.c X	**Eventi corrispondenti E_i**	**Probabilità p_i di ciascun evento**
$x_1 = 0$	$E_1 = e_1$	$p_1 = \frac{1}{8}$

[3] Nel lancio di tre monete diverse si hanno 8 diversi casi possibili , corrispondenti alle disposizioni con ripetizione di 2 elementi di classe 3 :

$x_2 = 1$	$E_2 = e_5 \cup e_6 \cup e_7$	$p_2 = \frac{3}{8}$
$x_3 = 2$	$E_3 = e_2 \cup e_3 \cup e_4$	$p_3 = \frac{3}{8}$
$x_4 = 3$	$E_4 = e_8$	$p_4 = \frac{1}{8}$
$e_1 = TTT$, $e_2 = TTC$, $e_3 = TCT$ $e_4 = CTT$, $e_5 = TCC$, $e_6 = CTC$ $e_7 = CCT$, $e_7 = CCC$		

Calcolare la probabilità che nel lancio delle tre monete si ottenga più di una croce.

$$p(X>1) = p[(X=2) \cup (X=3)] = p(X=2) + p(X=3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Ovviamente la somma di tutte le probabilità è uguale ad 1 , come prevede la teoria .

Caratteristiche numeriche delle variabili casuali discrete

La legge di distribuzione di probabilità di una variabile casuale **X** descrive completamente la variabile casuale **X** .Nella pratica, spesso capita di essere interessati alla conoscenza di alcuni parametri numerici che mettono in evidenza alcune proprietà delle variabili casuali, quali la tendenza centrale, la variabilità, l'interdipendenza. Spesso è sufficiente conoscere soltanto alcuni parametri numerici che caratterizzano i tratti essenziali della variabile casuale in esame. Per esempio, un valore medio attorno al quale si raggruppano i valori possibili della variabile casuale; un numero qualsiasi che caratterizza la dispersione di questi valori attorno al valore medio. Si tratta di valori caratteristici o sintetici che forniscono un'immagine riassuntiva sufficiente per gli scopi che ci prefiggiamo.

Le caratteristiche numeriche utilizzate nel calcolo della probabilità sono numerose, ma noi ci limiteremo a considerarne alcune fra le più importanti quali la speranza matematica, la varianza, i momenti, lo scarto quadratico medio (o deviazione standard). Come esistono un valore medio, una varianza e dei momenti per una variabile statistica così esistono un valore medio, una varianza e dei momenti per una variabile casuale **X** .

Definizione di speranza matematica

Una delle caratteristiche numeriche di una variabile casuale **X** è la speranza matematica detta anche valore medio [4]

Sia data la variabile casuale **X** le cui modalità $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ abbiano, rispettivamente, probabilità $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$. Si chiama speranza matematica della variabile casuale **X** la somma dei prodotti delle modalità di questa variabile per le rispettive probabilità.

$$\mathbf{E(X)=M(X)=\mu(X)=x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \cdots + x_n \times p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i}$$

Ricordando che $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots + p_n = 1$ possiamo scrivere:

$$\mathbf{E(X)=M(X)=\frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i}$$

In tal modo si osserva che la speranza matematica di una variabile casuale **X** rappresenta la media aritmetica ponderata delle modalità $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ della variabile casuale **X** per i pesi $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$.

La speranza matematica di una variabile casuale **X** ci fornisce un valore singolo che rappresenta tutti i valori della X e per mesto motivo è chiamato anche una misura di tendenza centrale.

Varianza

La varianza è un particolare parametro numerico di dispersione della variabile casuale **X**.

Essa è definita in maniera del tutto analoga alla varianza di una variabile statistica.

Definizione di varianza: Si chiama varianza della variabile casuale **X** la speranza matematica del quadrato dello scarto $(x - \mu)$ tra i valori x della variabile casuale **X** ed il suo valore medio μ

[4] O **valore atteso** o **valore sperato** o **misura di tendenza centrale** o **media aritmetica**

In simboli abbiamo: $\mathbf{Var(X)=\sigma^2=V(X)=E\left[(X-\mu)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot p(x_i)}$

Formula pratica per il calcolo della varianza

La varianza, che per definizione è il valore medio dello scarto al quadrato, può essere calcolata in base alla seguente regola pratica:

$$\mathbf{Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p(x_i)-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p(x_i)\right]^2}$$

cioè la varianza di una variabile casuale **X** è uguale alla differenza fra la media dei quadrati della variabile casuale **X** ed il quadrato del valore medio della variabile casuale **X**.

$\mathbf{E(X^2)=M(X^2)}$ = speranza matematica o media aritmetica o valore medio della variabile casuale **X** $\quad Y = X^2$

$\mathbf{E(X)=M(X)}$ = speranza matematica della variabile casuale **X**

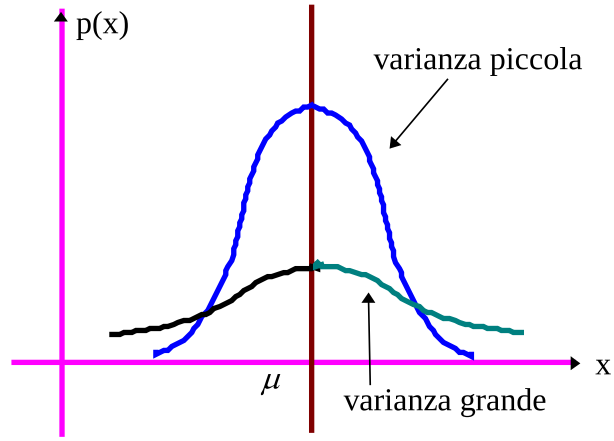
La varianza gode delle seguenti proprietà :

- $Y = aX \Rightarrow Var(Y) = a^2\cdot Var(X)$ cioè $\quad \mathbf{Var(a\cdot X)=a^2\cdot Var(X)}$
- $Y = X + b \Rightarrow Var(Y) = Var(X)$ cioè : $\quad \mathbf{Var(X+b)=Var(X)}$
- $Y = aX + b \Rightarrow Var(Y) = a^2\cdot Var(X)$ cioè $\quad \mathbf{Var(a\cdot X+b)=a^2\cdot Var(X)}$

la varianza σ^2 (o la deviazione standard σ) è una misura della dispersione dei valori della variabile casuale **X** attorno al valore medio μ. Se i valori di probabilità delle modalità della variabile casuale **X** sono concentrati vicino alla media μ , la varianza è piccola , mentre la varianza è grande quando i valori sono dispersi lontani dalla media .

Per questo motivo, quanto minore è la varianza (che è un valore costante) di una variabile casuale **X**, tanto più i valori di probabilità $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$ sono concentrati intorno al valore medio μ, come mostrato schematicamente in figura.

Nel caso particolare $Var(X) = 0$ non c'è dispersione dei valori della variabile casuale **X** intorno al valore medio . In questo caso la variabile casuale **X** è una costante che coincide col valore medio: **X = μ**



Scarto quadratico medio o deviazione standard

Se si è scelto il valore medio μ come indicatore di localizzazione è normale scegliere la varianza come indicatore della dispersione. Tuttavia la varianza è una quantità di secondo grado in **x** per cui spesso si preferisce usale la deviazione standard (o lo scarto quadratico medio) definita come la radice quadrata aritmetica della varianza . In simboli abbiamo:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)}$$

Se **X** è una variabile casuale con media μ e varianza σ^2 allora la trasformata:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad [\ X = \sigma Y + \mu\ ]$$

è detta variabile casuale standardizzata della variabile casuale **X**, cioè una variabile casuale standardizzata è una nuova variabile casuale che gode di particolari proprietà.

La variabile casuale standardizzata **Y** gode delle seguenti proprietà:

a) è una grandezza adimensionata b) $E(Y) = 0$ c) $Var(Y) = 1$ cioè la sua varianza vale **1**

La varianza è un ottimo criterio per stabilire la dispersione in una distribuzione di probabilità che abbia valore medio μ finito ed univocamente definito. Tuttavia non sempre è possibile usare il valore medio come parametro di localizzazione. In questi casi si può ricorrere al altri parametri di dispersione.

Distribuzione di probabilità

Data una **variabile casuale X**, con valori $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$, la successione delle probabilità $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$ ad essi associata si chiama **distribuzione di probabilità** della **variabile casuale X**. Essa può essere rappresentata con una tabella come la seguente dove sono indicate le modalità della **X** e le corrispondenti probabilità.

X	$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$
p	$p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$

La legge di distribuzione di probabilità è detta anche funzione di probabilità o funzione di massa o funzione di densità della **variabile casuale X** e spesso viene indicata col simbolo $f(x)$, cioè:

$\mathbf{f(x) = P(X = x)}$.

Funzione di ripartizione

La **variabile casuale X** può essere descritta oltre che dalla funzione di massa $f(x)$ anche da un'altra funzione detta **funzione di ripartizione** (o **funzione di probabilità cumulata** o **funzione di distribuzione cumulativa**) indicata col simbolo $\mathbf{F(x)}$.

Sia **X** una **variabile casuale** che può assumere le modalità $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ disposte in ordine crescente e con distribuzione di probabilità $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$.

Definizione: Si chiama **funzione di ripartizione** della **variabile casuale X**, una funzione $\mathbf{F(x)}$ della variabile reale $\mathbf{x}$ che è uguale, per ogni valore della $\mathbf{x}$, alla probabilità che **X** assuma un valore minore o uguale ad $\mathbf{x}$, cioè:

$$\mathbf{F(x_k) = P(X \le x_k) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + L, + p(x_k)} \quad \text{dove } \mathbf{p(x_i) = P(X = x_i)}$$

Dalla definizione data segue che:

- $x < x_1 \Rightarrow F(x) = 0$
- $x_1 \le x < x_2 \Rightarrow F(x) = p_1 = P(x \le x_1)$
- $x_2 \le x < x_3 \Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 = P(x \le x_2)$
- $x_3 \le x < x_4 \Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = P(x \le x_3)$

- $x_k \le x < x_{k+1} \Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k = P(x \le x_k)$
- $x \ge x_n \Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots + p_n = 1$

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
P(X)	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n
F(X)	p_1	p_1+p_2	$p_1+p_2+p_3$	$\cdots$	$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n$

Teorema: Se $F(x)$ è la funzione di ripartizione della variabile casuale **X**, allora:

$$x_i \le x < x_{i+1} \Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_i = P(X \le x_i)$$

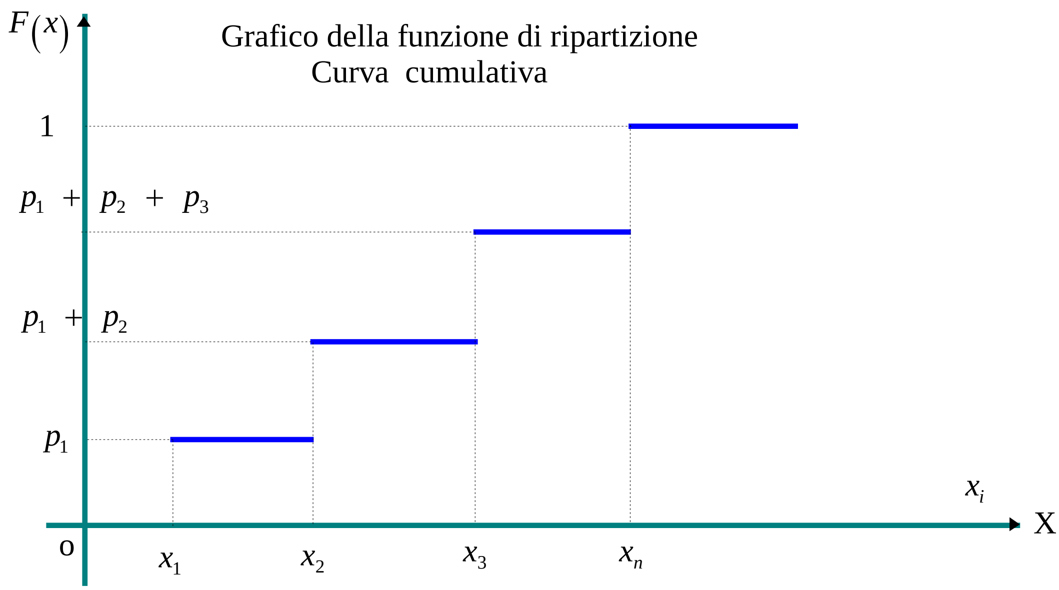
Per la variabile casuale discreta **X**, avente la seguente funzione di probabilità

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{cases}$$

la funzione di ripartizione è la seguente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se & x < x_1 \\ p_1 & se & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & se & x_2 \le x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & se & x_3 \le x < x_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_i & se & x_i \le x < x_{i+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 & se & x \ge x_n \end{cases}$$

Il grafico della funzione di ripartizione è quello riportato in figura e prende il nome di curva cumulativa.



A causa del suo grafico, la funzione di ripartizione è detta funzione a gradini.

- E' importante rilevare che la conoscenza della funzione di ripartizione di una variabile casuale **X** ci consente di ricavare, mediante semplici differenze, la probabilità dei singoli eventi elementari, cioè:

$$\mathbf{p}(\mathbf{X}=\mathbf{x_k})=\mathbf{p}(\mathbf{x_{k-1}}<\mathbf{X}\leq\mathbf{x_k})=\mathbf{F}(\mathbf{x_k})-\mathbf{F}(\mathbf{x_{k-1}})$$

Mediante la funzione di ripartizione possiamo calcolare la probabilità che la variabile casuale **X** assuma un valore x appartenente ad un intervallo di estremi a,b:

$$\mathbf{p}(\mathbf{a}<\mathbf{X}\leq\mathbf{b})=\mathbf{F}(\mathbf{b})-\mathbf{F}(\mathbf{a})$$

La funzione di densità (o di massa) di una variabile casuale **X** concettualmente rappresenta la probabilità che la variabile casuale **X** assuma un ben determinato valore.

La funzione di ripartizione di una variabile casuale **X** rappresenta la probabilità che la variabile casuale **X** assuma un valore $\leq$ ad $\mathbf{x}$:

$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{p}(\mathbf{X}\leq\mathbf{x})$ e quindi la probabilità che la variabile casuale **X** assuma un valore maggiore di **X** è: $\mathbf{1-F}(\mathbf{x})$

Il problema delle prove ripetute e la variabile casuale con distribuzione binomiale

Definiamo variabile casuale binomiale una variabile aleatoria con due soli esiti possibili.

Un problema di grande importanza pratica è quello delle prove ripetute tutte nelle stesse condizioni.

Si tratta di un problema che porta alla costruzione della variabile casuale con distribuzione binomiale.

Si dice esperimento di *B*ernoulli una sequenza di $\mathbf{n}$ prove con le seguenti caratteristiche**:**

1) ogni prova è un esperimento che può avere soltanto due esiti possibili, uno lo chiameremo successo (si verifica l'evento $\mathbf{E}$) ed ha probabilità $\mathbf{p}$, l'altro lo chiameremo insuccesso (su verifica l'evento contrario $\overline{\mathbf{E}}$ cioè non si verifica l'evento $\mathbf{E}$) ed ha probabilità $\mathbf{q = 1 - p}$

2) il risultato di ciascuna prova è indipendente dai risultati delle prove precedenti. [5]

3) la probabilità $\mathbf{p}$ di successo e quindi la probabilità $\mathbf{q = 1 - p}$ di insuccesso sono costanti in ciascuna prova.

Il problema delle prove ripetute si presenta quando consideriamo un evento $\mathbf{E}$ che ha probabilità $\mathbf{p}$ costante di verificarsi in qualsiasi prova effettuata e volgiamo calcolare la probabilità che ha tale evento (detto anche successo) di verificarsi $\mathbf{h}$ su $\mathbf{n}$ prove effettuate, con $0 \le h \le n$.

Consideriamo un evento $\mathbf{E}$ ripetibile quanto si vuole e supponiamo di fare con esso $\mathbf{n}$ prove, tutte nelle stesse condizioni, per cui la probabilità che l'evento $\mathbf{E}$ si realizzi sia uguale in ogni prova effettuata. Indichiamo con $\mathbf{p}$ la probabilità che in ciascuna prova l'evento $\mathbf{E}$ si verifichi e con $\mathbf{q = 1 - p}$ la probabilità che l'evento $\mathbf{E}$ non si verifichi (insuccesso) e quindi si verifichi l'evento contrario $\overline{\mathbf{E}}$.

Vogliamo determinare la probabilità $p_{n,h}(E)$ che nelle n prove effettuate l'evento $\mathbf{E}$ si verifichi $\mathbf{h}$ volte.

Possiamo distinguere due casi:

---

[5] Questo significa che se si tratta dell'estrazione di una pallina da un'urna, dopo l'estrazione la pallina va rimessa nell'urna, altrimenti la probabilità dell'evento (che abbiamo chiamato successo) non sarebbe costante.

a) **è fissato l'ordine delle prove in cui l'evento E deve verificarsi**

b) **non è fissato l'ordine delle prove in cui l'evento E deve verificarsi**

a) In questo caso le n prove sono eventi semplici, fra loro compatibili ed indipendenti in quanto la probabilità p è costante.

Pertanto, fissato l'ordine delle **h** prove in cui l'evento **E** deve realizzarsi, ed indicando con **q** la probabilità dell'evento contrario, per il teorema della probabilità composta abbiamo:

$$\mathbf{p_{n,h}(E)} = \overbrace{\mathbf{p \cdot p \cdot p \cdots p}}^{\text{h volte}} \cdot \overbrace{\mathbf{q \cdot q \cdot q \cdots q}}^{\text{n - h volte}} = \mathbf{p^h \cdot q^{n-h}}$$

Un dado viene lanciato 10 volte. Calcolare la probabilità che ha la faccia contraddistinta dal numero 3, di presentarsi nel primo, nel secondo, nel sesto, nel settimo lancio.

$p = \frac{1}{6}$ = probabilità che ha la faccia contraddistinta dal numero **3** di presentarsi in un lancio

$q = \frac{5}{6}$ = probabilità che ha la faccia contraddistinta dal numero **3** di non presentarsi in un lancio

L'evento considerato $\mathbf{E_{1,2,6,7}}$ si verifica quando si ottiene il punto **3** nel primo (evento E_1) e nel secondo (evento E_2), si ottiene un punto diverso dal **3** nel terzo (evento E_3), nel quarto (evento E_4), nel quinto (evento E_5), si ottiene il punto **3** nel sesto (evento E_6) e nel settimo (evento E_7) lancio, si ottiene un punto diverso dal **3** nell'ottavo (evento E_8), nel nono (evento E_9) e decimo (evento E_{10}) lancio.

$$p(E)=p(E_1)\cdot p(E_2)\cdots p(E_{10})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6=0,026=p^4q^6$$

$$n=10 \qquad h=4 \qquad n-h=10-4=6$$

$\mathbf{E_{1,2,6,7}}$ = probabilità che il numero **3** si presenti nel primo, secondo, sesto, settimo lancio.

E' evidente che i seguenti eventi elementari hanno tutti la stessa probabilità, cioè:

$$p\left(\mathbf{E_{1,2,6,7}}\right)=p\left(\mathbf{E}_{2,5,8,10}\right)=p\left(\mathbf{E}_{7,9,5,3}\right)=\cdots=p^4q^6=0,026$$

Cosa succede quando non è fissato l'ordine delle prove? Il fatto che l'evento **E** si verifichi **h** implica che l'evento contrario $\overline{\mathbf{E}}$ si presenta **n - h** volte.

Valgono le seguenti considerazioni:

- l'evento "**E** si verifica **h** volte su **n** prove" può presentarsi con $\binom{n}{h}$ modalità (configurazioni)
- la probabilità di ogni singola modalità, per il teorema della probabilità composta, è:

$$\overbrace{p\cdot p\cdot p\cdots p}^{\text{h volte}}\cdot\overbrace{q\cdot q\cdot q\cdots q}^{\text{n - h volte}} = p^h\cdot q^{n-h}$$

- essendo le $\binom{n}{h}$ modalità (configurazioni) diverse fra loro e a due a due incompatibili, per il teorema della probabilità totale, la probabilità dell'evento "**E** si verifica **h** volte su **n** prove", è:

$$p_{n,h}(E) = \underbrace{p^h\cdot q^{n-h}+p^h\cdot q^{n-h}+\cdots+p^h\cdot q^{n-h}}_{\binom{n}{h}} = \binom{n}{h}\cdot p^h\cdot q^{n-h}$$

Se, come abbiamo detto in precedenza, non è fissato l'ordine delle prove, l'evento complesso può presentarsi in tanti modi quante sono le combinazioni di **n** elementi (prove effettuate) di classe **h** (numero delle prove favorevoli o successi). Tali modi di presentarsi sono eventi complessi tra loro incompatibili in quanto uno di essi esclude il verificarsi degli altri. La probabilità di ciascuno di tali eventi è data dalla relazione precedente: $p_{n,h}(E)=p^h\cdot q^{n-h}$ in quanto ciascuno di essi differisce per l'ordine in cui le **h** prove favorevoli (**h** successi) all'evento elementare **E** considerato si sono presentate rispetto alle **n** prove effettuate. La probabilità dell'evento richiesto sarà la somma delle singole probabilità, tante volte quante sono le combinazioni semplici delle **n** prove effettuate rispetto alle **h** prove favorevoli. In simboli abbiamo:

$$p_{n,h}(E) = \binom{n}{h}\cdot p^h\cdot q^{n-h} = \frac{n!}{h!(n-h)!}\cdot p^h\cdot q^{n-h}$$

$p_{n,h}(E)$ = probabilità che l'evento **E** si verifichi **h** volte in **n** prove = probabilità che in **n** prove si abbiano **h** successi ed **n-h** insuccessi.

Chiariamo meglio quanto detto con un esempio particolare. "Si lancia una moneta 5 (n) volte. Si chiede di calcolare la probabilità che esca **testa** 2 (h) volte."

$p=\frac{2}{5}$ = probabilità che esca **testa** in una singola prova

$q=1-p=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ = probabilità che in una singola prova non esca **testa**

Innanzitutto osserviamo che $T T \bar{T} \bar{T} \bar{T}$ [1] è una (ma non la sola) configurazione (modalità) dell'evento E = la testa esce due volte in 5 lanci

$p(E) = p(T T \bar{T} \bar{T} \bar{T}) = p(T)\cdot p(T)\cdot p(\bar{T})\cdot p(\bar{T})\cdot p(\bar{T}) = p^2\cdot(1-q)^3$ [2]

Nel caso di h successi in n prove abbiamo: $p(E) = p^h\cdot(1-p)^{n-h}$

Ma la configurazione (modalità) [1] non è la sola che risolve la nostra richiesta perché, anche la configurazione (modalità) $\bar{T} T T \bar{T} \bar{T}$ va altrettanto bene e si presenta con la stessa probabilità [2].

Ne consegue la necessità di accertare quante sono le configurazioni (modalità) equiprobabili che soddisfano il quesito proposto. Esse sono tante quante le permutazioni con ripetizione di 5 elementi di cui 2 (successi) uguali tra loro e 3 (insuccessi) pure uguali tra loro ma distinti dai precedenti.

Ricordando che $P_n^{(\alpha,\beta)} = \dfrac{n!}{\alpha!\beta!}$ = permutazioni di n elementi dei quali α uguali tra loro e β uguali tra loro ma diversi da α con $\alpha+\beta=n$

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \text{combinazioni semplici di } n \text{ elementi di classe } k$$

Ritornando all'esempio precedente possiamo scrivere: $P_5^{(2,3)} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dbinom{5}{2} = C_{5,2}$

Nel caso di h successi in n prove le configurazioni (modalità) sono: $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k} = C_{n,k}$

Il quesito proposto richiede di determinare la probabilità che si presentino due teste (2 successi) in 5 prove. Abbiamo:

$$p(X=2) = \underbrace{p(T T \bar{T} \bar{T} \bar{T})\cdot p(T \bar{T} T \bar{T} \bar{T})\cdots p(\bar{T} \bar{T} \bar{T} T T)}_{\binom{5}{2}\text{ addendi}} = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$$

$$p(X=2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = 10\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{27}{125} = \frac{216}{625} = 0,3456$$

Nel caso generale, la probabilità di avere h successi (h teste) in n prove (n lanci) è:

$$p(X=h) = \binom{n}{h}\cdot p^h\cdot(1-p)^{n-h}$$

Un dado viene lanciato 4 volte. Qual è la probabilità che la faccia contrassegnata col numero 6 si presenti 3 volte?

$p = \dfrac{1}{6}$, $q = \dfrac{5}{6}$, $\dbinom{4}{3} = \dfrac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2} = 4$ $\quad \mathbf{p_{4,3}(E) = \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{324} = 0.015}$

E = la faccia del dado segnata col numero 6 esce 3 volte in 4 lanci

$\mathbf{E_1}$ = la faccia del dado segnata col numero 6 esce al primo lancio

$\mathbf{E_2}$ = la faccia del dado segnata col numero 6 esce al secondo lancio

$\mathbf{E_3}$ = la faccia del dado segnata col numero 6 esce al terzo lancio

$\mathbf{E_4}$ = la faccia del dado segnata col numero 6 esce al quarto lancio

Gli eventi $B_1 = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \overline{E}_4 = 6 \cap 6 \cap 6 \cap \overline{6}$, $B_2 = E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4 = 6 \cap 6 \cap \overline{6} \cap 6$, $B_3 = E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3 \cap E_4 = 6 \cap \overline{6} \cap 6 \cap 6$, $B_4 = \overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 = \overline{6} \cap 6 \cap 6 \cap 6$ hanno tutti la stessa probabilità $p = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6}$ di verificarsi.

$$\mathbf{p(B_1) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3) \cdot p(\overline{E}_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6}}$$

Il numero di eventi B_i coincide col numero che esprime le combinazioni di 4 elementi di classe 3.

$\mathbf{E = B_1 \cup B_2 \cup b_3 \cup B_4}$

$$\boxed{p(E) = p(B_1 \cup B_2 \cup b_3 \cup B_4) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_3) + p(B_4) = \binom{4}{3} \cdot p(B_1) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 0{,}015}$$

Calcolare la probabilità che su 12 lanci di una moneta si ottengano 8 volte croce.

E = la croce della moneta esce 8 volte su 12 lanci

Si tratta di un esperimento di Bernoulli nel quale il successo coincide con l'evento esce croce e l'insuccesso coincide con l'evento esce testa.

Risulta: $n = 12$, $h = 8$, $p = q = \frac{1}{2}$

$$p_{12,8}(E) = \binom{12}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \binom{12}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{12}} = 0{,}1208$$

Calcolare la probabilità che estraendo per 5 volte una carta da un mazzo di 40 (reinserendo ogni volta la carta estratta e rimescolando bene le carte) si ottengano:

a) tre figure b) almeno tre figure c) almeno una figura d) al massimo una figura

Se non reintroducessimo la carta nel mazzo, l'esperimento non sarebbe di Bernoulli in quanto la probabilità di estrarre una figura cambierebbe ad ogni successiva estrazione. Nel caso nostro si tratta di un esperimento di Bernoulli in cui il successo coincide con l'estrazione di una figura e l' insuccesso con l'estrazione di una carta diversa da una figura.

$$p = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} \ , \ q = 1 - p = \frac{7}{10}$$

a) **E** = la carta estratta è una figura

$p_{5,3}(E) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{1323}{10000} = 0{,}1323$ = probabilità che la figura esca 3 volte in 5 estrazioni

b) La probabilità di ottenere almeno 3 figure coincide con la somma delle probabilità di ottenere 3, 4, 5 figure. $p = p_{5,3} + p_{5,4} + p_{5,5}$

$$\mathbf{p} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{10}\right) + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 = \frac{1323}{10000} + \frac{567}{20000} + \frac{243}{100000} = 0{,}16308$$

c) Per rispondere alla terza domanda potremmo procedere come per la domanda 2 calcolando: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{5,1} + \mathbf{p}_{5,2} + \mathbf{p}_{5,3} + \mathbf{p}_{5,4} + \mathbf{p}_{5,5}$

Però è molto più rapido considerare la probabilità dell'evento contrario, ossia la probabilità di non ottenere alcuna figura:

$$\mathbf{p}_{5,0} = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{16807}{100000} = 0{,}16807$$

La probabilità di ottenere almeno una figura è: $\mathbf{p} = 1 - \mathbf{p}_{5,0} = 1 - 0{,}16807 = 0{,}83193$

d) $$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{5,0} + \mathbf{p}_{5,1} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{16807}{100000} + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^5 = \frac{16807}{100000} » 0{,}16807$$

Distribuzione binomiale o distribuzione di Bernoulli

Indichiamo con **X** la variabile casuale binomiale che rappresenta il numero **h** di successi in **n** prove.

Definizione di variabile casuale binomiale: Si dice che una variabile casuale discreta **X**, con valori $x = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$, ha una distribuzione di probabilità binomiale di parametri **n** e **h** se la sua funzione di massa è data da:

$$f(x)=P(X=h)=p_{n,h}(X)=p_n(X=h)=\binom{n}{h}\cdot p^h\cdot q^{n-h}=\frac{n!}{h!(n-h)!}\cdot p^h\cdot q^{n-h}$$

dove si hanno **h** successi ed **n-h** insuccessi, e **p** rappresenta la probabilità che si abbia un successo (si verifica un singolo evento **E**) e **q = 1 - p** rappresenta la probabilità che si abbia un insuccesso (si verifica un singolo insuccesso cioè si verifica l'evento contrario $\overline{\mathbf{E}}$).

Una variabile casuale con distribuzione binomiale descrive il numero di volte **h** che si può verificare un evento aleatorio **E** di probabilità **p** su **n** prove.

In forma tabellare una variabile casuale binomiale **X** assume la seguente forma:

$$X=\begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_h & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & h & \cdots & n \\ p(x_1)=p_{n,0} & p(x_2)=p_{n,1} & p(x_3)=p_{n,2} & \cdots & p(x_h)=p_{n,h} & \cdots & p(x_n)=p_{n,n} \\ q^n & \binom{n}{1}p\,q^{n-1} & \binom{n}{2}p^2q^{n-2} & \cdots & \binom{n}{h}p^hq^{n-h} & \cdots & p^n \end{cases}$$

Spesso, in un esperimento con prove ripetute, ognuna delle quali ha la probabilità **p** di successo, la probabilità di ottenere **h** successi si indica con la scrittura:

$$P(n,h,p)$$

Ad esempio la scrittura $P\left(12,4,\frac{2}{7}\right)$ significa che si sono effettuate 12 prove ottenendo 4 successi sapendo che è uguale a $\frac{2}{7}$ la probabilità di avere un successo (che cioè si verifichi l'evento **E**.

La funzione di ripartizione $F(X)$ della variabile casuale binomiale **X** è:

$$F(X)=P(X\le h)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+\cdots+p(X=h)=\sum_{k=0}^{k=h}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

La probabilità che in **n** prove il numero di successi sia compreso tra x_3 ed x_5 ci viene data da:

$$P_n(x_3\le X\le x_5)=p_n(X=x_3)+p_n(X=x_4)+p_n(X=x_5)$$

$P_n(E=h)$ =probabilità che in **n** prove l'evento **E** si presenti **h** volte

$$P_n(E=h)=\binom{n}{h}\cdot p^h\cdot q^{n-h}=\frac{n!}{h!(n-h)!}\cdot p^h\cdot q^{n-h}$$

$P_n(E \leq h)$ = probabilità che in **n** prove l'evento **E** si presenti al massimo **h** volte

$$P_n(E \leq h) = p_n(E=1) + p_n(E=2) + \cdots + p_n(E=h)$$

$P_n(h \leq E \leq n)$ = probabilità che in **n** prove l'evento **E** si presenti al almeno **h** volte

$$P_n(h \leq E \leq n) = p_n(E=h) + p_n(E=h+1) + \cdots + p_n(E=n)$$

B = in **n** prove l'evento **E** si presenti al almeno **h** volte

$\overline{\mathbf{B}}$ = in **n** prove l'evento **E** si presenti al massimo **h-1** volte

$$\mathbf{p}(\mathbf{B}) + \mathbf{p}(\overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{1} \qquad \mathbf{p}(\mathbf{B}) = \mathbf{1} - \mathbf{p}(\overline{\mathbf{B}})$$

Gli eventi **B** e $\overline{\mathbf{B}}$ sono uno opposto dell'altro.

Le principali proprietà della distribuzione binomiale sono:

Media	$\mu = M(X) = np$
Varianza	$\sigma^2 = npq = np(1-p)$
Deviazione standard o scarto quadratico medio	$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$

Si lanci **6** volte una moneta non truccata. Sia <<esce croce>> il successo. Calcolare: a) la probabilità che si presentino **2** croci b) la probabilità di ottenere almeno **4** croci c) la probabilità che l'evento croce non si presenti mai (cioè che tutti gli eventi siano insuccessi).

a) Calcoliamo la probabilità che si presentino **2** croci.

E = nel lancio di una moneta esce croce

Abbiamo: $n=6$, $p(E)=q(E)=\dfrac{1}{2}$, $h=2$ $\qquad p_6(E=2)=\binom{6}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{15}{64}$

$p_6(E=2)$ = probabilità che lanciando **6** volte una moneta la croce esca **2** volte

b) Calcoliamo la probabilità di ottenere almeno **4** croci

$P_6(4 \leq E \leq 6) = p_6(4 \leq E \leq 6)$ = probabilità che lanciando **6** volte una moneta la croce esca almeno **2** volte

$$P_6(4 \leq E \leq 6) = p_6(E=4) + p_6(E=5) + p_6(X=6) = \binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$p_6(4 \leq E \leq 6) = \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

c) Calcoliamo la probabilità che l'evento croce non si presenti mai

$$P_6(E=0)=p_6(E=0)=q^n=q^6=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

e quindi, la probabilità di ottenere nei 6 lanci almeno una croce è data da:

$$P_6(1\le E\le 6)=1-P_6(E=0)=1-q^6=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

Un'urna contiene 7 palline rosse e 3 nere. Una prova consiste nell'estrarre, una di seguito all'altra, tre palline. Si considera successo il caso in cui le 3 palline estratte siano rosse. Determinare, nell'ipotesi che la prova venga ripetuta 96 volte, i parametri μ, σ^2, σ quando:

a) ogni prova prevede la reimmissione della pallina estratta

b) la reimmissione non è prevista

a) $\mathbf{E_1}$ = la prima pallina estratta è rossa $\mathbf{E_2}$ = la seconda pallina estratta è rossa

$\mathbf{E_3}$ = la terza pallina estratta è rossa

$\mathbf{E}=\mathbf{E_1}\cap\mathbf{E_2}\cap\mathbf{E_3}$ = tutte e tre le palline estratte sono rosse $p(E_1)=p(E_2)=p(E_3)=\frac{7}{10}$

$p(\mathbf{E_1}\cap\mathbf{E_2}\cap\mathbf{E_3})=p(E_1)\cdot p(E_2)\cdot p(E_3)=\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}=\left(\frac{7}{10}\right)^3$ = probabilità di successo in ogni prova

$q=1-p=1-\left(\frac{7}{10}\right)^3$ = probabilità di insuccesso in ogni prova

$$\mu=n\,p=96\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^3=\mu=n\,p=96\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{4116}{125}=32{,}93$$

$$\sigma^2=npq=\frac{4116}{125}\cdot\left[1-\left(\frac{7}{10}\right)^3\right]=\frac{676053}{31250}=21{,}63 \qquad \sigma=\sqrt{n\,p\,q}=\sqrt{21{,}63}=4{,}65$$

b) Se ad ogni prova la reinserimento non è previsto abbiamo:

$$p(E_1)=\frac{7}{10}\ ,\ p(E_2)=\frac{6}{9}\ ,\ p(E_3)=\frac{5}{8}$$

$$p(\mathbf{E_1}\cap\mathbf{E_2}\cap\mathbf{E_3})=p(E_1)\cdot p(E_2)\cdot p(E_3)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{210}{720}=\frac{7}{24}=0,29$$

$$q=1-p=1-\frac{210}{720}=\frac{510}{720}=\frac{17}{24}=0,71$$

$$\mu=n\,p=96\cdot\frac{210}{720}=28 \qquad \sigma^2=npq=28\cdot\frac{410}{720}=19,83 \qquad \sigma=\sqrt{n\,p\,q}=\sqrt{19,83}=4,45$$

Da un mazzo di 40 carte si effettuano 4 estrazioni con rimessa della carta nel mazzo. Descrivere la variabile casuale X = numero di assi.

Si tratta di una variabile casuale che segue la legge di distribuzione binomiale avente come parametri $n=4$, $p=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$, $q=1-p=\frac{9}{10}$

$$p(\mathbf{X}=0)=\left(\frac{9}{10}\right)^4=0,66 \qquad p(\mathbf{X}=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^3=0,29$$

$$p(\mathbf{X}=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^2=0,05 \qquad p(\mathbf{X}=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)^1=0,0036$$

$$X=\begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left(\frac{9}{10}\right)^4=0,66 & \binom{4}{1}\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^3=0,29 & \binom{4}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^2=0,05 & \binom{4}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3\frac{9}{10}=0,0036 & \left(\frac{1}{10}\right)^4=0,0001 \end{cases}$$

$$X=\begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,66 & 0,29 & 0,05 & 0,0036 & 0,0001 \end{cases}$$

Si supponga di lanciare 3 monete. Si vuole sapere qual è la probabilità di avere: (1) due teste (2) al massimo una testa

Lanciare tre monete equivale a lanciare una moneta tre volte; siamo nel caso delle prove ripetute, cioè nella distribuzione binomiale.

(1) **E** = nel lancio di una moneta esce testa.

$n=3,\ p(\mathbf{E})=q(\overline{\mathbf{E}})=\dfrac{1}{2},\ h=2 \quad n-h=1$

$$p_3(\mathbf{E}=2)=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3=3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}=0,375$$

(2) $$p_3(\mathbf{E}\leq 1)=p_3(\mathbf{E}=0)+p_3(\mathbf{E}=1)=\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{3!}{2!\cdot 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 7$$

$$p_3(\mathbf{E}\leq 1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}=0,5$$

Un'urna contiene 12 palline delle quali 4 sono bianche ed 8 sono nere. Si vuole conoscere la probabilità che estraendo 5 palline (cioè facendo 5 prove) 4 siano bianche ed 1 sia nera. Si sa che dopo ogni estrazione la pallina estratta viene rimessa nell'urna per cui le successive estrazioni sono effettuate sempre nelle stesse condizioni.

$\mathbf{E}$ =si estrae una pallina bianca $\overline{\mathbf{E}}$ = si estrae una pallina nera, cioè non si estrae una pallina bianca

$n=5,\ h=4 \quad n-h=1 \quad p(\mathbf{E})=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3} \quad q(\overline{\mathbf{E}})=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$

La probabilità che estraendo 5 palline 4 siano bianche ed una nera è:

$$p_5(\mathbf{E}=4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\cdot\frac{1}{3^5}=0,04115$$

Lanciando una coppia di dadi cinque volte qual è la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte?

evento A = in un lancio di due dadi otteniamo un punteggio totale maggiore di **7**

I casi possibili sono **36**, i casi favorevoli sono **15**

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

$$p(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12} \qquad p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

Si tratta di una distribuzione binomiale: Indicando con n il numero di prove, con k il numero di "successi", con p la probabilità del "successo" e con q la probabilità dell'insuccesso abbiamo:

$$p_{n,k}(A)=P_n(A=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

La probabilità che che l'evento A si verifichi $k=2$ volte in $n=5$ lanci è:

$$p_{5,2}(A)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^3$$

B= l'evento A si verifica in cinque lanci almeno due volte

$$p(B)=p_5(A=2)+p_5(A=3)+p_5(A=4)+p_5(A=5)$$

Però è molto più rapido considerare la probabilità dell'evento contrario, ossia la probabilità che l'evento A non si verifichi due volte, cioè al massimo si verifica una volta:

$$p(\overline{B})=P_5(A=0)+P_5(A=1)=\binom{5}{0}\left(\frac{5}{12}\right)^0\left(\frac{7}{12}\right)^{5-0}+\binom{5}{1}\left(\frac{5}{12}\right)^1\left(\frac{7}{12}\right)^{5-1}=\binom{5}{0}\left(\frac{5}{12}\right)^0\left(\frac{7}{12}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\frac{5}{12}\right)^1\left(\frac{7}{12}\right)^4$$

Adesso possiamo calcolare la probabilità che l'evento A si verifichi almeno due volte

$$p(B)=1-p(\overline{B})=1-p_5(A=0)-p_5(A=1)=1-\binom{5}{0}\left(\frac{5}{12}\right)^0\left(\frac{7}{12}\right)^5-\binom{5}{1}\left(\frac{5}{12}\right)^1\left(\frac{7}{12}\right)^4$$

$$p(B)=1-\left(\frac{7}{12}\right)^5-5\cdot\left(\frac{5}{12}\right)\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^4=1-\frac{16807}{248832}-5\cdot\left(\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{2401}{20736}$$

$$p(B)=1-\frac{16807}{248832}-\frac{60025}{248832}=\frac{5375}{7776}\approx 0,691\approx 69\%$$

Una prova scritta di matematica è strutturata come test a risposta multipla: vi sono 9 domande, ognuna con 4 possibili risposte, tra le quali una sola è esatta. Per ottenere la sufficienza occorre rispondere esattamente ad almeno 6 domande.

Uno studente impreparato indica le risposte a caso: qual è la probabilità che lo studente ottenga la sufficienza?

E = l'alunno raggiunge la sufficienza

Se la risposta a ciascuna domanda è scelta a caso, la probabilità che sia stata scelta la risposta è $p=\frac{1}{4}$. Anche in questo caso siamo in presenza di prove ripetute, e dunque il numero di risposte esatte è una variabile casuale **X** a distribuzione binomiale, con:

$$n=9 \qquad p=\frac{1}{4} \qquad q=1-p=\frac{3}{4}$$

Lo studente ottiene la sufficienza se $\mathbf{X}=6 \vee \mathbf{X}=7 \vee \mathbf{X}=8 \vee \mathbf{X}=9$

L'evento **E** è l'unione di **4** eventi disgiunti e la sua probabilità sarà la somma di tali probabilità, ossia: $p(\mathbf{E})=p_9(X=6)+p_9(X=7)+p_9(X=8)+p_9(X=9)$

$$p_9(X=6)=\binom{9}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=0,008651 \qquad p_9(X=7)=\binom{9}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=0,001235$$

$$p_9(X=8)=\binom{9}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1=0,000103 \qquad p_9(X=9)=\binom{9}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=0,0000038$$

$$p(\mathbf{E})=0,008651+0,001235+0,000103+0,0000038=0,009994\approx 1\%$$

Distribuzione di Poisson

Definizione: Sia **X** una variabile casuale discreta che può assumere i valori $0,1,2,3,\cdots,n$ in modo che la distribuzione di probabilità di **X** sia: $\mathbf{P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}$ con $x=0,1,2,3,\cdots,n$ dove λ rappresenta una costante positiva assegnata. Tale distribuzione di probabilità è detta distribuzione di Poisson di parametro λ e la variabile casuale **X**

$$X=\begin{cases} x: & 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ p: & e^{-\lambda} & \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \end{cases}$$

si chiama variabile casuale di Poisson di parametro λ.

Si può dimostrare che il parametro λ di una distribuzione di Poisson coincide col valore medio e la varianza della variabile casuale **X**, cioè risulta:

$$\lambda = M(X) = var(X) = \sigma^2$$

Questo significa che il parametro λ ha il significato di media e di varianza della variabile casuale di Poisson (detta anche legge degli eventi rari o legge dei piccoli numeri) è una variabile casuale discreta che può assumere una infinità numerabile di valori. Essa ha un grande interesse applicativo, poiché si presta a rappresentare il numero di manifestazioni di un dato fenomeno in un intervallo di tempo.

La distribuzione di Poisson è una buona approssimazione della distribuzione binomiale quando n è grande e p è piccolo. Sotto queste ipotesi risulta: $\lambda = np$ dove n il numero di modalità (valori)che può assumere la variabile casuale X e p rappresenta la probabilità dell'evento.

Esempio: Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Determinare il numero di volte in cui può uscire, effettuando 4 estrazioni nelle stesse condizioni, la pallina col numero 1.

In questo caso possiamo utilizzare la distribuzione di Poisson in quanto è un valore la probabilità dell'evento esce il numero 1. $P(X=1) = \dfrac{1}{30}$

$n = 4$ in quanto si effettuano 4 estrazioni $\lambda = np = 4 \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{2}{15}$

In questo caso la distribuzione di Poisson diventa: $P(X = x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \dfrac{\left(\frac{2}{15}\right)^x}{x!} \times e^{-\frac{2}{15}}$

$$P(X=1) = \frac{\left(\frac{2}{15}\right)^1}{1!} \cdot e^{-\frac{2}{15}} = \frac{2}{15} \cdot e^{-\frac{2}{15}} \approx 0,35 \qquad \lambda = \frac{2}{15}$$

La distribuzione di Poisson può essere considerata una approssimazione della distribuzione binomiale, approssimazione tanto più precisa e nello stesso tempo più utile quando il parametro n è grande e risulta disagevole il calcolo dei coefficienti binomiali. Quando nella distribuzione binomiale n è grande mentre la probabilità p è vicina allo zero così che $q = 1 - p$ è vicino ad 1, l'evento è detto raro. Nella pratica si considera raro un evento se il numero n delle prove sarà maggiore di 50 mentre np sarà minore di 5. In questi casi la distribuzione binomiale è approssimata dalla distribuzione di Poisson ponendo $\lambda = np$.

Per tale motivo tale distribuzione trova applicazione in tutte quelle situazioni che possono essere ricondotte al problema delle prove ripetute, laddove il numero delle prove **n** sia molto alto. Si osservi infine che, mentre la distribuzione binomiale dipende da due parametri (n, p), la distribuzione di Poisson dipende solo dal parametro λ, che rappresenta la media. E' questo l'unico dato richiesto per potere applicare la distribuzione di Poisson: in particolare, non è necessario conoscere il numero **n** delle prove.

Problema N°1: **All'arrivo in un aeroporto, i passeggeri passano la dogana alla media di 2 ogni 30 secondi. Ammettendo che il numero di passeggeri che attraversano la dogana in un dato intervallo di tempo segua la legge della distribuzione di Poisson, determinare la probabilità che non più di 2 passeggeri abbiano attraversato la dogana, sempre in un periodo di 30 secondi.**

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \quad \text{con} \quad \lambda = 2$$

Gli eventi sono $0, 1, 2$ passeggeri hanno attraversato la dogana

$$P(x=0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0{,}13534 \quad P(x=1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0{,}27067 \quad P(x=2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0{,}27067$$

$$P(X \leq 2) = 0{,}13534 + 0{,}27067 + 0{,}27067 = 0{,}67668$$

Problema N°2: **Una macchina produce pezzi difettosi con una probabilità** $p = 0{,}006$. **Calcoliamo la probabilità che su** $n = 500$ **pezzi:**

(a) nessun pezzo risulti difettoso **(b)** risultino difettosi 3 pezzi **(c)** risultino difettosi più di 5 pezzi

La variabile casuale relativa al numero di pezzi difettosi ha valore medio:

$\lambda = \mu = n \cdot = 500 \cdot 0{,}006 = 3$ e distribuzione di probabilità $P(X = x) = \dfrac{\lambda^x e^{-3}}{x!}$

(a) la probabilità che nessun pezzo risulti difettoso è: $P(X=0) = \dfrac{3^0 e^{-3}}{0!} \simeq 0{,}04979$

(b) la probabilità che risultino difettosi 3 pezzi è: $P(X=3) = \dfrac{3^3 e^{-3}}{3!} \simeq 0{,}22404$

(c) Per calcolare la probabilità che risultino difettosi più di 5 pezzi bisogna procedere come segue.

Mi calcolo la probabilità che non vi siano meno di 5 pezzi difettosi, cioè: $P(X \le 5)$

La probabilità che risultino difettosi più di 5 pezzi si calcola applicando la seguente formula:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5)$$

$$P(X \le 5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$P(X \le 5) = 0{,}049787 + 0{,}149361 + 0{,}224042 + 0{,}224042 + 0{,}168031 + 0{,}100819 = 0{,}916082$$

Problema N°3: **Ad uno sportello bancario arrivano in media 30 persone all'ora. Calcolare la probabilità che in 5 minuti: (a) arrivino 4 persone (b) arrivino meno di 3 persone.**

Per calcolare il valore del parametro positivo λ della distribuzione di Poisson bisogna applicare la seguente proporzione: $30 : 60 = y : 5$ in quanto $1\,\text{ora} = 60\,\text{minuti}$ $\quad y = \lambda = \dfrac{30 \cdot 5}{60} = 2{,}5$

Questo significa che ad uno sportello bancario arrivano in media $2{,}5$ persone ogni 5 minuti

Il parametro λ può essere determinato calcolando la probabilità che una sola persona si presenti ogni minuto. Bisogna applicare la seguente formula: $p = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \lambda = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$

(a) la probabilità che arrivino 4 persone è: $\quad P(X=4) = \dfrac{2{,}5^4 e^{-\lambda}}{4!} = 0{,}133602$

(b) la probabilità che arrivino meno di 3 persone è:

$$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$P(X \le 3) = 0{,}082085 + 0{,}205212 + 0{,}256516 + 0{,}213763 + 0{,}133602 = 0{,}891178$$

Problema N°4: **In una stazione di servizio autostradale arrivano in media 3 automobili ogni minuto. Calcolare la probabilità che: (a) che in un minuto arrivi una sola automobile (b) che in un minuto arrivino meno di 4 automobili (c) che in un minuto almeno una sola automobile (d) che in due minuti consecutivi arrivi una sola automobile (e) che in due minuti consecutivi arrivino due automobili**

- Il problema posto può essere ricondotto a quello delle prove ripetute: ogni automobilista può essere considerato una "**prova**" che, nel corso del minuto considerato può recarsi alla stazione di servizio (**successo**) o non recarvisi (**insuccesso**). Poiché il numero delle prove, ossia degli automobilisti, è incognito ma comunque molto grande, si può applicare la distribuzione di Poisson con $\lambda = 3$.

(a) la probabilità che in un minuto arrivi una sola automobile è: $P(X=1) = \dfrac{3^1 e^{-3}}{3!} = 0{,}149$

(b) la probabilità che in un minuto arrivino meno di 4 automobili.

Dobbiamo calcolare la probabilità che in un dato minuto arrivino $0,1,2,3,4$ automobili. Applicando il teorema della probabilità totale e tenendo presente che tali eventi sono incompatibili, otteniamo:

$P(X \le 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$ $\quad P(X \le 4) = \dfrac{3^0 e^{-3}}{0!} + \dfrac{3^1 e^{-3}}{1!} + \dfrac{3^2 e^{-3}}{2!} + \dfrac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0{,}647$

(c) la probabilità che in un minuto almeno una sola automobile

Conviene utilizzare il teorema della probabilità contraria: l'evento di cui si chiede la probabilità è l'evento contrario dell'evento "**arrivano 0 automobili**", che ha la seguente probabilità:

$$P(X=0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = e^{-3}$$

Perciò la probabilità che in un minuto almeno una sola automobile è: $P(X \ge 1) = 1 - e^{-3} = 0{,}9502$

(d) la probabilità che in due minuti consecutivi arrivi una sola automobile

L'evento considerato è l'unione di due eventi incompatibili: "**nel primo minuto arriva una sola automobile e nel secondo minuto non ne arriva nessuna**" oppure "**nel primo minuto non arriva nessuna automobile e nel secondo minuto ne arriva una**". Ciascuno di tali due eventi può a sua volta essere considerato come l'intersezione di due eventi indipendenti. La probabilità richiesta è:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + P(E_2) = P(X=1)\cdot P(X=0) + P(X=0)\cdot P(X=1) = 2P(X=0)\cdot P(X=1)$$

$$p(E_1 \cup E_2) = 2P(X=1)\cdot P(X=0) = 2\cdot\frac{3^0 e^{-3}}{0!}\cdot\frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 6\cdot e^{-3} = 0{,}0148$$

(e) la probabilità che in due minuti consecutivi arrivino due automobili

Ragionando come nel caso precedente otteniamo:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = P(X=0)\cdot P(X=2) + P(X=1)\cdot P(X=1) + P(X=2)\cdot P(X=0)$$

$$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 2P(X=0)\cdot P(X=2) + P^2(X=1) = 2\frac{3^0 e^{-3}}{0!}\frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \left(\frac{3^1 e^{-3}}{1!}\right)^2 = 18e^{-6} = 0,0446$$

I quesiti **(d)** e **(e)** possono essere risolti anche considerando la variabile casuale che indica il numero di automobili che arrivano alla stazione in due minuti. Tale variabile casuale ha una distribuzione di Poisson con media $\lambda = 6$. Infatti, se in un minuto arrivano in media 2 due automobili, in due minuti arrivano in media 6 automobili. $\lambda = 6$.

Nel quesito **(d)** abbiamo: $P(X=1) = \dfrac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} = 6 \cdot e^{-6} = 0,0148$

Nel quesito **(e)** abbiamo: $P(X=2) = \dfrac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} = \dfrac{6^2}{2!} \cdot e^{-6} = 18 \cdot e^{-6} = 0,0446$

Simulazione del 22 Aprile 2015 Quesito 10

In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino, arrivano in media ogni 20 minuti 2 treni. Determinare la probabilità che in 20 minuti: (a) non arrivi alcun treno (b) ne arrivi uno solo (c) ne arrivino al massimo 4.

Per calcolare le probabilitàrichieste dobbiamo per prima cosa capire come modellizzare gli eventi, cioè trovare la variabile casuale che descrive gli arrivi dei treni. La variabile casuale che descrive il numero di successi (in questo caso il numero di treni che arrivano) in un determinato tempo è la variabile di Poisson. Per definire tale variabile abbiamo bisogno di un parametro che descrive la media dei successi che vine inbdicata col simbolo λ. Per la risoluzione del problema possiamo applicare in tutti e tre i casi la distribuzione di probabilità di Poisson secondo cui la probabilità che l'evento si verifichi è data dalla relazione: $P(X=x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$

Sappiamo che in media ogni 20 minuti arrivano 2 treni, quindi la media è $\lambda = 2$ per cui la formula precedente diventa: $P(X=x) = \dfrac{2^x}{x!} \cdot e^{-2}$

(a) $x = 0 \Rightarrow P(X=0) = \dfrac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = e^{-2} \approx 0,135 = 13,5\%$

(b) $x=1 \Rightarrow P(X=1)=\frac{2^1}{1!}\cdot e^{-2}=\frac{2}{e^2}\approx 0,271=27,1\%$

(c) $x\leq 4 \Rightarrow P(X\leq 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$$P(X\leq 4)=\frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2}+\frac{2^1}{1!}\cdot e^{-2}+\frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2}+\frac{2^3}{3!}\cdot e^{-2}+\frac{2^4}{4!}\cdot e^{-2}$$

$$P(X\leq 4)=\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}+\frac{2}{e^2}+\frac{4}{3e^2}+\frac{2}{3e^2}=\frac{1}{e^2}\left(1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{e^2}\left(1+2+2+\frac{6}{3}\right)$$

$$P(X\leq 4)=\frac{1}{e^2}(1+2+2+2)=\frac{7}{e^2}\approx 0,947=94,7\%$$

Formulario di Calcolo Combinatorio

Disposizioni semplici di n elementi di classe k

$$D_{n,k}=\underset{1}{n}\underset{2}{(n-1)}\underset{3}{(n-2)}\cdots\cdots\underset{k-1}{(n-k+2)}\underset{k}{(n-k+1)}$$

$D_{n,3}=n(n-1)(n-2)$, $D_{n,4}=n(n-1)(n-2)(-3)$, $D_{5,2}=5\cdot 4=20$, $D_{7,4}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=$
$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$ **fattoriale** di n e rappresenta il **prodotto di n fattori decrescenti consecutivi a partire da n**

$n!=n[(n-1)!]$, $n!=n(n-1)[(n-2)!]$, $n!=n(n-1)(n-2)[(n-3)!]$

Permutazioni semplici di n elementi

$$P_n=D_{n,n}=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n! \qquad D_{n,k}=\frac{P_n}{P_{n-k}}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinazioni semplici di n elementi di classe k

$$\binom{n}{k}=C_{n,k}=\frac{D_{n,k}}{P_k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}$$

Formula abbreviata $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$

Legge delle classi complementari o legge dei coefficienti simmetrici

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Legge di addizione o di Stieffel : $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

Legge di ricorrenza : $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

DISPOSIZIONI con RIPETIZIONE $D'_{n,k} = n^k$

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE $P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$

Supponiamo che gli n elementi $a_1, a_2, ..., a_n$ non siano tutti distinti e che , ad esempio , α di questi elementi siano tutti uguali ad a_1 , β ad a_2 , γ ad a_3, con : $\alpha + \beta + \gamma = n$.

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONI di n elementi di classe k

$$C'_{n,k} = C^{(r)}_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k|} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)n}{k!}$$

Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Calcolo delle probabilità

$\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ = **spazio campionario o spazio dei risultati o spazio degli eventi elementari**

S = $P(\Omega)$ = **spazio degli eventi** = **insieme delle parti** dello spazio campionario

L ' algebra degli eventi

$\boxed{C = A \cup B}$ = **evento unione** o **evento somma** o *evento totale*

$\boxed{C = A \cap B}$ = **evento intersezione** o **evento prodotto** o *evento composto*

$\overline{A}$ (si legge **non A**) = **negazione** dell' evento **A**

Gli eventi A e $\overline{A}$ si dicono **eventi complementari** o **eventi opposti**

$A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$

$A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow$ **A** e **B eventi compatibili**

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ **A** e **B eventi incompatibili**

p(A) = **probabilità incondizionata**

$p(A/B)$ = **probabilità dell'evento A condizionata dall'evento B =**

probabilità dell'evento A quando si è verificato l'evento B

$$
\text{EVENTI}
\begin{cases}
\text{INCOMPATIBILI} \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset \\[2ex]
\text{COMPATIBILI}
\begin{cases}
\text{DIPENDENTI} \Longleftrightarrow p(A|B) \neq p(A) \\[2ex]
\text{INDIPENDENTI} \Longleftrightarrow p(A|B) = p(A)
\end{cases} \\
\Updownarrow \\
A \cap B \neq \emptyset
\end{cases}
$$

Definizione classica di probabilità

$$p(E)=\frac{m}{n} \qquad \text{con} \qquad m \leq n \qquad 0 \leq p(E) \leq 1$$

La probabilità $p(E)$ dell'evento **E** è uguale al rapporto tra il numero m dei casi favorevoli ed il numero n dei casi possibili .

Definizione frequentista di probabilità

La **probabilità in senso frequentista** di un evento **E** è il valore al quale tende il rapporto $f(A) = \frac{h}{n}$ tra il numero h di prove che hanno dato esito favorevole ed il numero n di prove effettuate .

$$p(A) = \lim_{n \to +\infty} f(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{h}{n}$$

Definizione soggettivista di probabilità

La **probabilità in senso soggettivo** di un evento **E** è il rapporto $p(E)$ fra il prezzo P che un individuo coerente è disposto a pagare e la somma S che riceverebbe in caso di esito favorevole all'evento E :

$$p(E) = \frac{P}{S}$$

Un individuo si considera coerente nella propria valutazione se è disposto ad accettare indifferentemente il ruolo di **scommettitore** o quello di **controparte** .

Teorema della probabilità dell'evento contrario

$\boxed{p(E)+p(\overline{E})=1}$ $p(\overline{E}) = 1-p(E)$

Teorema della probabilità totale

Per **eventi compatibili** abbiamo : $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$$p(A\cup B\cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A\cap B) - p(A\cap C) - p(B\cap C) + p(A\cap B\cap C)$$

Per **eventi incompatibili** abbiamo :

$p(A\cup B) = p(A) + p(B)$ $p(A\cup B\cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$

Probabilità condizionata

$p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{card\ A\cap B}{card\ B} = \dfrac{n_{A\cap B}}{n_B}$ $p(B/A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)} = \dfrac{card\ A\cap B}{card\ A} = \dfrac{n_{A\cap B}}{n_A}$

$p(A/B)$ = **probabilità dell'evento A condizionata dall'evento B =**

= probabilità dell'evento A quando sappiamo che si è verificato l'evento B

$p(B/A)$ = **probabilità dell'evento B condizionata dall'evento A =**

= probabilità dell'evento B quando sappiamo che si è verificato l'evento A

Il teorema della probabilità composta

Primo teorema di Laplace per eventi **compatibili e indipendenti**

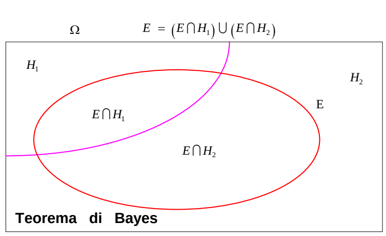
$p(E) = p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$ $p(E) = p(A\cap B\cap C) = p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)$

Secondo teorema di Laplace per eventi compatibili e dipendenti :

$$p(C) = p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B/A) = p(B)\cdot p(A/B)$$

$$p(D) = p(A\cap B\cap C) = p(A)\cdot p(B/A)\cdot p(C/A\cap B)$$

$$p(E) = p(A\cap B\cap C\cap D) = p(A)\cdot p(B/A)\cdot p(C/A\cap B)\cdot p(D/A\cap B\cap C)$$



$$p(H_1/E) = \frac{p(H_1)\cdot p(E/H_1)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1) + p(H_2)\cdot p(E/H_2)}$$

$p(H_2/E) = \dfrac{p(H_2)\cdot p(E/H_2)}{p(H_1)\cdot p(E/H_1) + p(H_2)\cdot p(E/H_2)}$ $p(H_1/E) + p(H_2/E) = 1$

Il teorema di **Bayes** è detto anche **teorema delle cause di un evento** in quanto esso risolve il seguente problema: ammesso che si sia verificato l'evento E , qual è la probabilità che esso sia stato generato dalla causa H_1 (o dalla causa H_2) nell'ipotesi che gli eventi H_1 ed H_2 costituiscano un sistema completo di eventi. La relazione $p(H_1)\cdot p(E/H_1) + p(H_2)\cdot p(E/H_2)$ **esprime la probabilità che l'evento E si verifichi**, non importa per quale causa .

Il problema delle prove ripetute (schema di Bernoulli)

E' fissato l'ordine delle prove in cui l'evento E deve verificarsi

$$p_{n,h}(E) = \underbrace{p\cdot p\cdot p\cdots p}_{h\ volte}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot q\cdots q}_{n-h\ volte} = p^h\cdot q^{n-h}$$

p probabilità che l'evento **E** si verifica in una prova

$q=1-p$ = probabilità che l'evento **E** non si verifichi (**insuccesso**) e quindi si verifichi l'evento contrario $\overline{E}$

Non è fissato l'ordine delle prove in cui l'evento E deve verificarsi

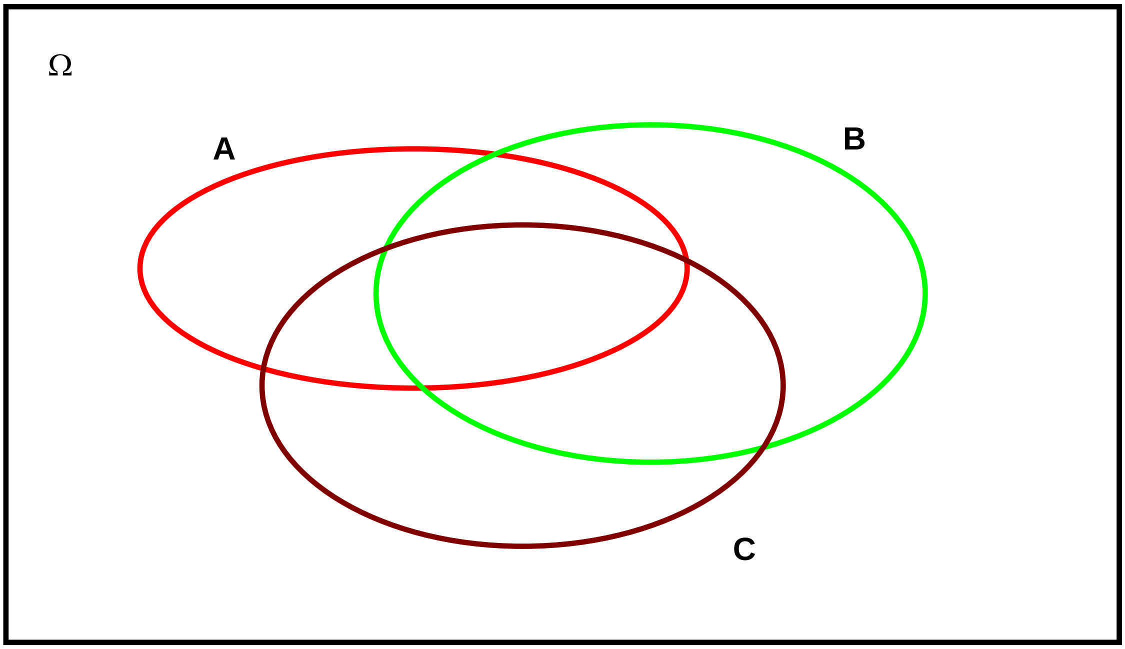
$p_{n,h}(E) = \binom{n}{h}\cdot p^h\cdot q^{n-h}$ = probabilità che l'evento **E** si verifica **h** su n prove effettuate con $0 \le h \le n$

L'evento E si verifica h volte su n prove effettuate, L'evento E non si verifica $n-h$ **volte su n prove effettuate**

Marangoni pagina 44

Siano A, B, C tre eventi definiti nello stesso spazio campionario Ω. Calcolare la probabilità che si verifichino:

1) 2 dei 3 eventi 2) almeno 2 dei 3 eventi 3) al massimo 2 eventi



1) **D = si verificano 2 dei 3 eventi**

$$p(D) = p(A \cap B) + p(A \cap C) + p(B \cap C) - p(A \cap B \cap C) - p(B \cap C \cap A) - p(C \cap A \cap B)$$

$$p(D) = p(A \cap B) + p(A \cap C) + p(B \cap C) - 3p(A \cap B \cap C)$$

2) **E = si verificano almeno 2 dei 3 eventi**

$$p(E) = p(A \cap B) + p(A \cap C) + p(B \cap C) - 2p(A \cap B \cap C)$$

3) **F = si verificano al massimo 2 dei 3 eventi**

$$p(F) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C)$$

I valori delle probabilità $p(A \cap B)$, $p(A \cap C)$, $p(B \cap C)$, $p(A \cap B \cap C)$ **variano a seconda che gli eventi A, B, C siano compatibili o incompatibili, dipendenti o indipendenti.**