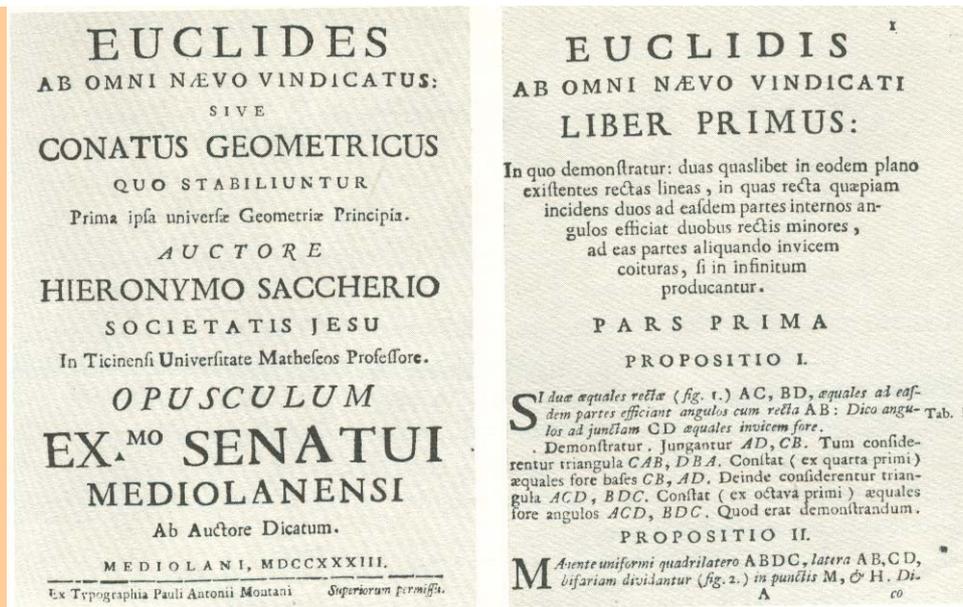


Il quinto postulato di Euclide e le geometrie non euclidee

Il tentativo di dimostrare il V postulato di Euclide



Frontespizio e pagina della prima edizione dell' **'Euclides ab omni naevo vindicatus** di **Giovanni Gerolamo Saccheri**

Una delle questioni più celebri dell'intera storia della matematica è certamente il problema della dimostrabilità del quinto postulato di Euclide . Dimostrare il V postulato vuole dire dedurlo utilizzando soltanto i primi 4 postulati e le prime 28 proposizioni del primo libro degli elementi . Se ciò fosse vero il V postulato di Euclide sarebbe un teorema . Encomiabili ma infruttuosi si dimostrano i tentativi effettuati da **Proclo** , **Posidonio** , **Cataldi** , *Wallis* e **Saccheri** .

Di particolare rilevanza storica è il contributo dato dal gesuita **Girolamo Saccheri** nato a San Remo nel 1667 e morto a Milano nel 1733 .

Saccheri , con l'opera **Euclides ab omni naevo vindicatus** (Euclide liberato da ogni neo) si illuse di avere liberato l'immortale opera di Euclide da ogni difetto ma , inconsapevolmente , diventa un precursore delle geometrie non euclidee , che sostituiscono il V postulato con un altro postulato .

Saccheri pensa di dimostrare il V postulato servendosi dei primi 4 postulati e delle prime 28 proposizioni che negli Elementi precedono il postulato delle parallele. Egli decide di sviluppare il seguente ragionamento . Ammettiamo i primi quattro postulati di Euclide e , quindi , anche le prime 28 proposizioni , neghiamo il V postulato e seguiamo nello sviluppo logico della teoria fino a quando non perveniamo ad un assurdo rispetto alle premesse .

Se nel corso delle nostre deduzioni troviamo un assurdo allora il V postulato è dimostrato ed esso è una conseguenza dei primi quattro postulati e delle prime 28 proposizioni . Se questo non si verifica allora il V postulato è indimostrabile e quindi non dipende né dai primi 4 postulati né dalle 28 proposizioni di Euclide .

Nell'opera **Euclides ab omni naevo vindicatus** , il Nostro riconosce che il V postulato equivale all'ipotesi che esiste un quadrilatero con 4 angoli retti . Infatti dimostra che se si costruisce un quadrilatero con 3 angoli retti , il quarto potrà essere :

a) **retto** , ed è il caso della geometria euclidea b) **acuto** ed è il caso della geometria iperbolica di Lobacevski c) **ottuso** ed è il caso della geometria parabolica di Riemann .

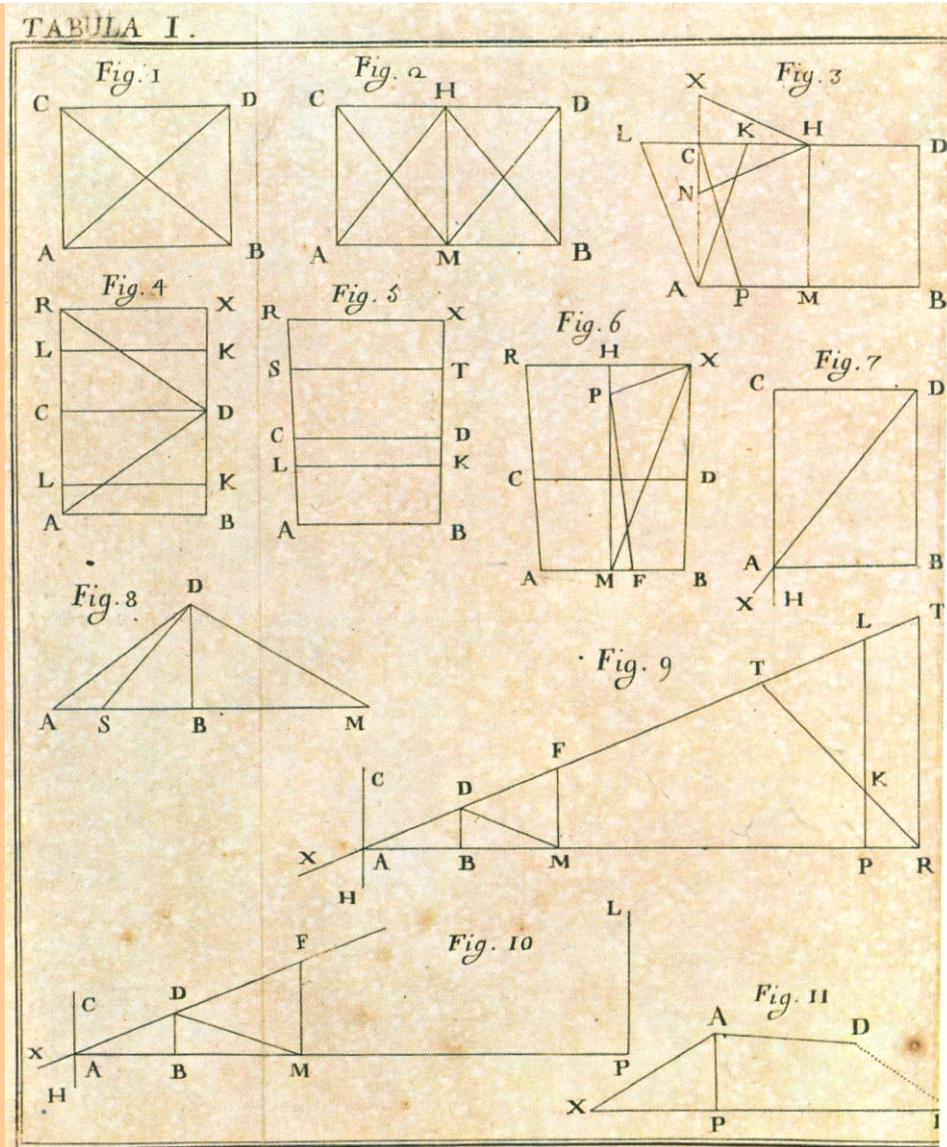
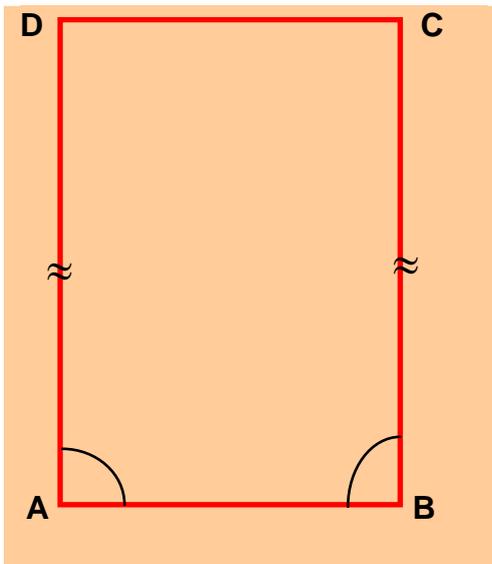


Tavola della prima edizione dell' **'Euclides ab omni naevo vindicatus**
di **Giovanni Gerolamo Saccheri**

Nel 1693 pubblicò a Milano un opuscolo dal titolo **Quaesita geometrica** contenenti interessanti soluzioni di problemi di geometria. A Torino, dove era stato inviato ad insegnare filosofia e teologia, pubblicò un volume dal titolo **Logica dimostrativa** che include alcune questioni di storia della matematica. Analizziamo il modo di procedere di Saccheri. Questi vuole dimostrare il postulato delle parallele per assurdo.

Il modo di procedere per assurdo è quello di negare la tesi che si vuole dimostrare e dalle conseguenze di questa negazione pervenire a qualche contraddizione , cioè a qualche cosa che contrasti con l'ipotesi , o con i postulati precedenti , o con i teoremi già dimostrati . Poiché questo non è possibile la tesi non può essere negata e quindi è vera .

Nella propria opera , l'Autore accetta i primi 4 postulati e le prime 28 proposizioni del primo libro degli elementi e tenta di dimostrare per assurdo il V postulato : ne propone la negazione e spera di trovare tra le conseguenze di tale negazione , qualche risultato in contrasto con quanto affermato o dedotto in precedenza . Ciò proverebbe la verità del V postulato che assurgerebbe al rango di teorema .



Saccheri non parte dalla negazione del V postulato, ma inizia la sua dissertazione considerando una figura geometrica che chiama quadrilatero birettangolo (oggi chiamato quadrilatero di Saccheri) : considera un generico segmento AB , traccia i segmenti AD e BC ad esso perpendicolari e tra loro uguali e congiunge C con D . Cosa si può dire degli angoli \hat{C} e \hat{D} ?

Saccheri dimostra che essi sono uguali e per quanto riguarda la loro ampiezza ipotizza tre possibilità :

- **Ipotesi dell'angolo acuto** : gli angoli interni \hat{C} e \hat{D} sono **acuti** . Questo equivale a negare il V postulato di Euclide .
- **Ipotesi dell'angolo ottuso** : gli angoli interni \hat{C} e \hat{D} sono **ottusi** . Questo equivale a negare il V postulato di Euclide .
- **Ipotesi dell'angolo retto** : gli angoli interni \hat{C} e \hat{D} sono **retti** . Questo equivale all'accettazione del V postulato di Euclide .

L'ipotesi dell'angolo acuto porta a concludere che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due angoli retti e che per un punto P esterno ad una retta r passano infinite rette che non incontrano la r , le quali , in base alla definizione di Euclide , sono parallele .

L'ipotesi dell'angolo ottuso permette di dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due angoli retti e che tutte le rette passanti per un punto P non appartenente ad r incontrano la r ; non esistono rette parallele .

L'ipotesi dell'angolo retto permette di dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto e che per un punto P esterno ad una retta r si può condurre una ed una sola parallela alla r . Questa ipotesi è equivalente al V postulato . Saccheri , con argomentazioni di carattere intuitivo , crede di dimostrare che le ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso sono assurde . Non rimane che l'ipotesi dell'angolo retto e quindi il V postulato è dimostrato .

70
 eam BX , ac propterea fit ipsa limes partim intrinsecus; partim extrinsecus; tum earum omnium, quæ sub minoribus acutis angulis ad finitam distantiam incidunt in prædictam BX ; tum etiam aliarum, quæ sub majoribus angulis acutis, usque ad angulum rectum inclusivè, commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendiculum cum eadem BX . Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIII.

Hypothesis anguli acuti est absolutè falsa; quia repugnans naturæ lineæ rectæ.

Demonstratur. Ex præmissis Theorematis constare potest eò tandem perducere Geometriæ Euclidæ inimicam hypothesin anguli acuti, ut agnoscere debeamus duas in eodem plano existentes rectas AX , BX , quæ in infinitum protractæ versùs eas partes punctorum X in unam tandem eandemque rectam lineam coire debeant, nimirum recipiendo, in uno eodemque infinitè disito puncto X , commune in eodem cum ipsis plano perpendiculum. Quoniam verò de primis ipsis principiis agendum mihi hic est, diligenter curabo, ut nihil omittam quasi nimis scrupulosè objectum, quod quidem exactissimæ demonstrationi opportunum esse cognoscam.

LEMMA I.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Definit Euclides lineam rectam, quæ ex æquo sua interjacet puncta. Esto igitur (fig. 37.) linea quædam AX , quæ ex puncto A per sua quælibet intermedia puncta continuativè excurrat usque ad punctum X . Non dicetur

Pagina dalla orima edizione (Milano 1733) dell' **Euclides ab omni naevo vindicatus**
 di **Giovanni Gerolamo Saccheri**

L'errore di Saccheri consiste nel sostituire il V postulato con un altro postulato : l'ammissione di due impossibilità , quella dell'angolo acuto e quella dell'angolo ottuso . Saccheri , nell'opera **Euclides ab omni naevo vindicatus** , ragiona bene ma conclude male ; non si accorge che è possibile costruire una geometria logicamente valida senza accettare il V postulato o sostituendolo con un altro . Il ragionamento di Saccheri è corretto , ma le conclusioni sono errate .

E' ad un passo dalla scoperta del nuovo **Mondo delle geometrie non euclidee** ma non ne sa approfittare . Si comporta come **Cristoforo Colombo** che scopre l'America senza saperlo . Dopo le ricerche del Saccheri alle quali seguirono quelle del Legendre , si fece strada l'opinione della indimostrabilità del V postulato di Euclide e si pervenne alla convinzione che era possibile costruire un'altra geometria , logicamente valida , indipendente dal V postulato . Sorsero così le geometrie non euclidee ad opera dei matematici **Lobacevski** , **Boljai** , **Riemann** , avallate dall'indiscussa autorevolezza del grande **Gauss** .

Lobacevski e la geometria iperbolica

L'idea che il postulato delle parallele non possa essere dimostrato è , nei primi decenni del secolo XIX , accettata dalla comunità scientifica . Si profila la possibilità di costruire una geometria senza il V postulato di Euclide . Cominciamo con **Lobacevski** il quale sostituisce il V postulato col seguente : **" per un punto esterno ad una retta si possono condurre due sole rette parallele alla retta data "** Dimostra che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto . Per comprendere questa apparente contraddizione occorre esporre la brillante dimostrazione del matematico tedesco Felix Klein (1849–1925) che mette in luce l'indipendenza del quinto postulato dai quattro precedenti e dalle 28 proposizioni del primo libro degli Elementi .

Per dimostrare questo occorre costruire un adeguato modello geometrico per il quale risultassero validi i primo quattro postulati di Euclide , ma non il quinto . Da tale risultato si deduceva che il V postulato non poteva essere dedotto dai primi quattro .



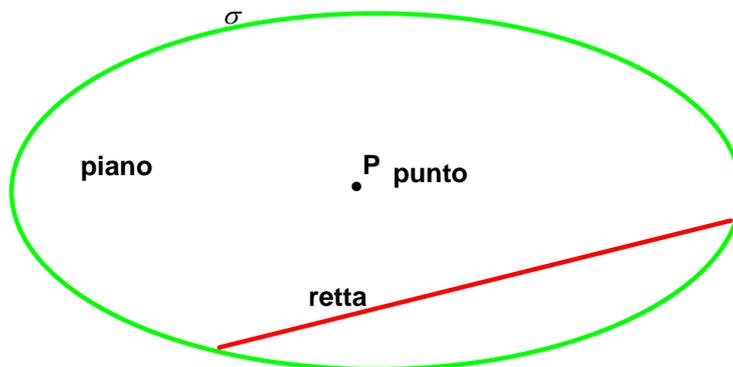
Nokolai Ivanovic Lobacevski

Fu il primo matematico a costruire la geometria non euclidea detta **iperbolica** .

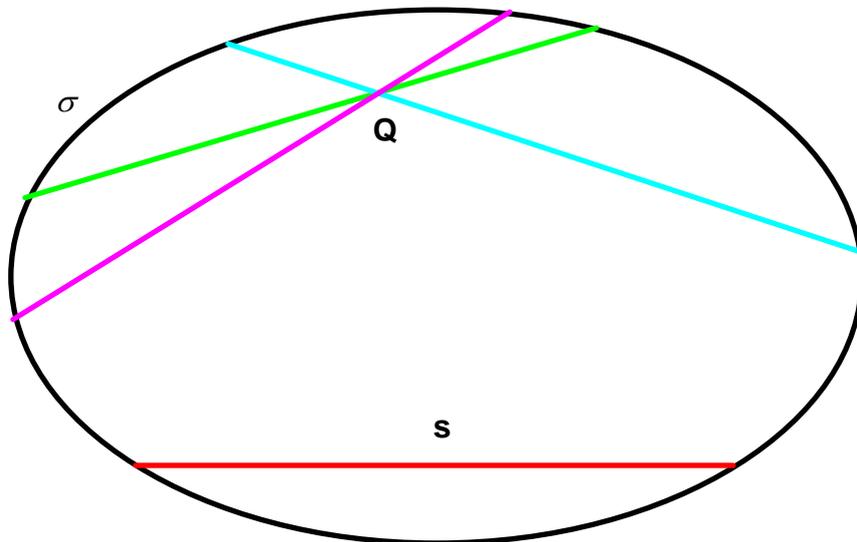
Nella predetta geometria iperbolica , la quale non presenta **nessuna contraddizione logica** , afferma che per un punto di un piano non appartenente ad una retta , è possibile tracciare due distinte “ **parallele** “ alla retta data .

Gli enti fondamentali del modello di Klein sono gli stessi enti della geometria euclidea , che vengono ribattezzati secondo il seguente schema . Klein considera una qualsiasi conica , ad esempio l'ellisse σ e :

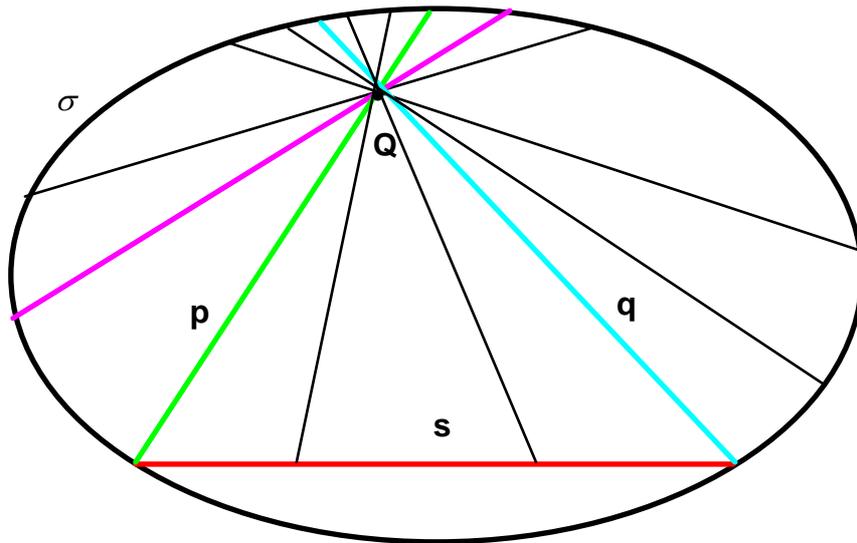
- al piano euclideo fa corrispondere la regione interna alla conica σ
- ad ogni punto euclideo fa corrispondere un punto interno di σ
- ad ogni retta euclidea fa corrispondere una corda della conica , esclusi gli estremi .



Con questo modello è possibile verificare che sono soddisfatti i primi quattro postulati e le prime 28 proposizioni del primo libro di Euclide, ma non è soddisfatto il V postulato. Infatti data una retta s del piano di Klein, per un punto Q di tale piano non appartenente ad s passano infinite rette che non hanno punti in comune con s . Si tratta di rette parallele. Quindi per il punto Q non appartenente ad s passano infinite rette parallele alla retta s . Ecco dimostrata, con un procedimento semplice ma geniale, l'indipendenza del V postulato dagli altri postulati e, quindi anche dalle prime 28 proposizioni di .



Dal disegno della figura notiamo che tutte le rette passanti per il punto Q si dividono in due classi ciascuna delle quali contiene infinite rette. Una classe contiene le rette con non incontrano la retta s , l'altra contiene le rette che incontrano s in un solo punto. Lobacevski chiama parallele alla retta s condotte dal punto Q le due rette p e q che separano le rette parallele e per **Lobacevski** il V postulato viene sostituito dal seguente : **" per un punto Q esterno ad una retta s si possono condurre due sole rette parallele ad s "**



La geometria di Lobacevski é detta **geometria iperbolica** .

Riemann e la geometria ellittica

Dopo la costruzione della geometria iperbolica ci si chiese se era possibile costruire altre geometrie non euclidee , nelle quali non valesse il V postualto di Euclide e le rette fossero finite e chiuse .

Una tale geometria venne proposta per la prima volta dal tedesco Riemann , il quale sostituì il postulato delle parallele col seguente **Postulato di Riemann** :

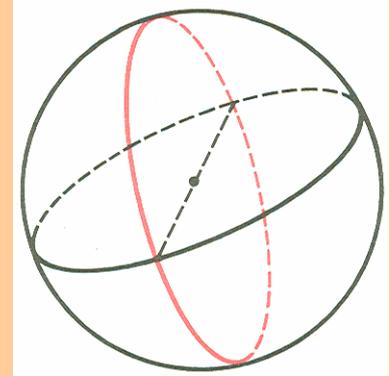
Le rette sono linee chiuse e non esistono coppie di rette complanari senza punti in comune . Riemann non ammette l'esistenza di rette parallele.

Nella geometria di Riemann non sono validi né il secondo (la retta è una linea chiusa) né il quinto postulato (non esistono rette parallele) .

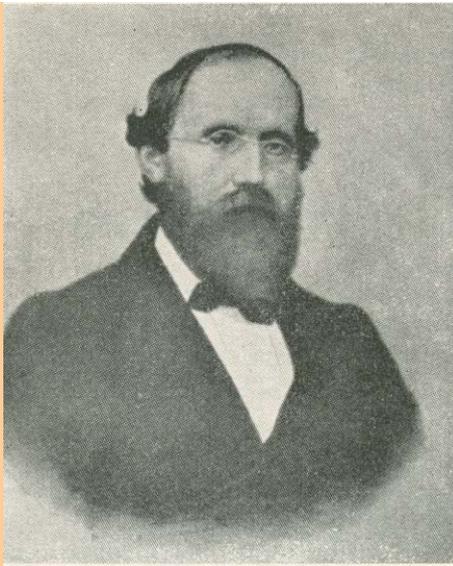
Riemann considera come **piano** una **superficie sferica** e chiama :

- **punto** ogni coppia di punti della sfera diametralmente opposti ,cioè gli estremi di un diametro
- **retta** ogni circonferenza massima .

In questa geometria la retta è una linea chiusa e la somma degli angoli interni di un triangolo (sferico) è maggiore di due angoli retti .



Si può mostrare che nel piano di **Riemann** due punti individuano una retta e che per un punto passano infinite rette : sono valide quelle proprietà della geometria euclidea che non derivano dal secondo e dal quinto postulato .



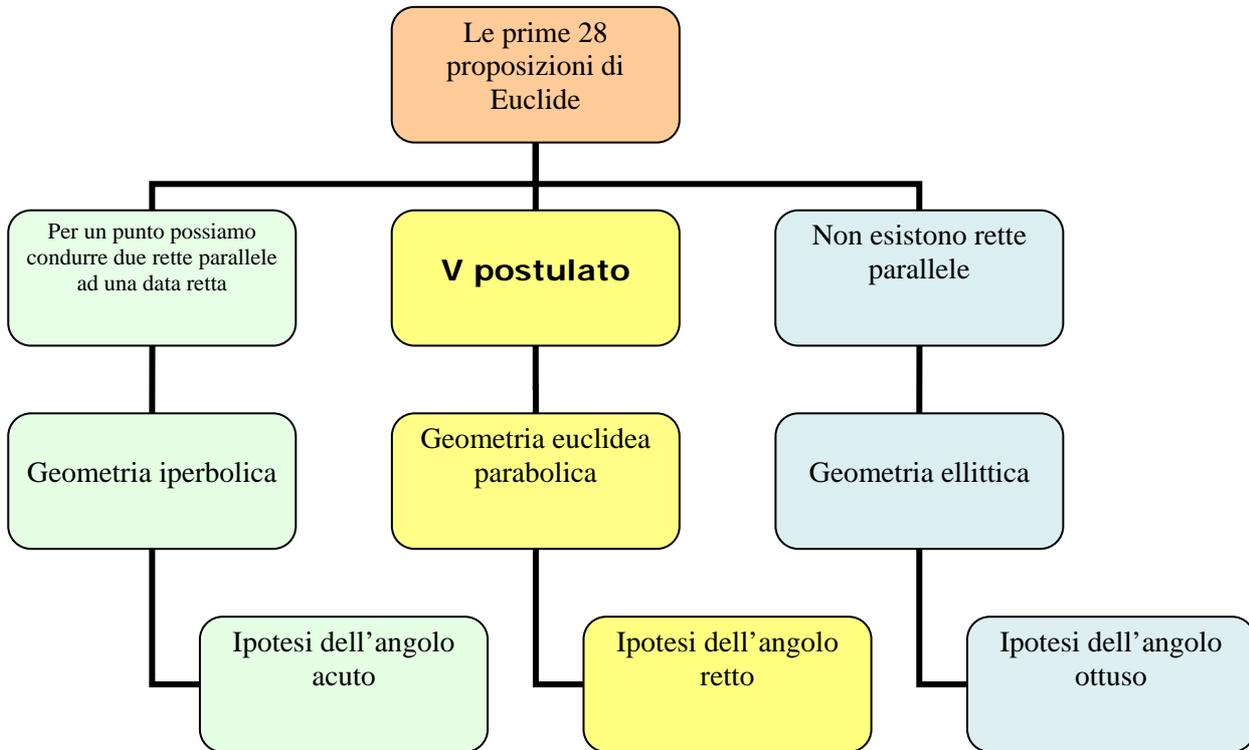
Bernhard Riemann

Esente da ogni contraddizione è la **geometria ellittica** di **Riemann** nella quale manca la nozione di parallelismo . In tale geometria la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di due angoli retti .

Questa geometria fornì ad **Albert Einstein** il modello per lo **spazio-tempo** di **Minkowski** .

La geometria euclidea appare come un caso limite delle geometrie non euclidee .

Il seguente schema sintetizza la geometria di Euclide , quella di Lobacevski e quella di Riemann .



Quale geometria segue la natura

Come sappiamo , esistono tre geometrie diverse ciascuna delle quali è perfettamente coerente dal punto di vista della logica . A questo punto è sensato chiedersi quale di queste tre geometrie è quella “ vera ” .Se con l’espressione vera intendiamo “ **coerente** “, allora tutte e tre queste geometrie sono vere , in quanto costruzioni logiche dedotte razionalmente da un insieme di postulati

Altra cosa è se ci poniamo la seguente domanda : “ **quale di queste tre geometrie è la più adatta ad interpretare la realtà del mondo che ci circonda ?** “

Gauss e **Lobacevski** vedono nei postulati una verità sperimentale .

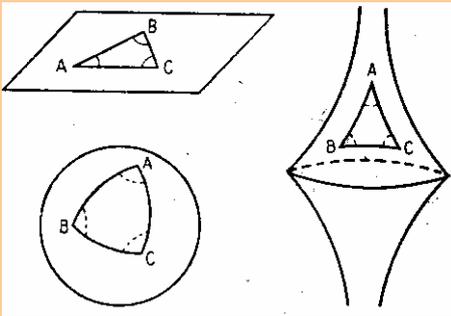
Per essi la questione se lo spazio fisico sia euclideo o non euclideo non può essere decisa a priori . La risposta sulla validità o meno del postulato di Euclide deve scaturire da un'accurata misura di ogni angolo interno di un triangolo e dalla conoscenza della loro somma .Ove tale somma si riscontri , anche per un solo triangolo , minore di due angoli retti ,varrà la geometria di Lobacevski ; invece la verifica che essa sia uguale a due retti , non potendo mai farsi in maniera rigorosa , non varrà mai a giustificare il postulato di Euclide se non in maniera approssimativa .

Gauss tentò un simile esperimento considerando un **triangolo geodetico** i cui vertici erano le città di **Broken , Hohehagen e Inselberg** .

Il risultato , che si discostava di poco da un angolo piatto , non venne ritenuto significativo in quanto gli errori sperimentali nella misura dei tre angoli interni non potevano essere eliminati .

Il tentativo di Gauss ed altre raffinate esperienze hanno mostrato che la geometria euclidea e quella non euclidea si avvicinano talmente da risultare sperimentalmente equivalenti . Perciò , finché si prendono in esame proprietà puramente “ locali “ dello spazio , la scelta della geometria deve essere fatta soltanto in base alla semplicità ed alla convenienza . Poiché la geometria euclidea si presenta come un trattato completo ed esposto in forma semplice ed estremamente elegante , il suo uso è giustificato quando tenta di interpretare una realtà “ locale “ dove le dimensioni dell'ambiente esplorato sono dell'ordine di qualche milione di chilometri .

Ma quando l'indagine si estende ad un ambiente più vasto , ad esempio l'intero Universo , allora le geometrie non euclidee sono più adatte a studiare la complessa fenomenologia che in esso si sviluppa . Infatti è la geometria di Riemann che sta alla base della teoria della relatività di Einstein .



Si definisce **geodetica** la linea che rappresenta la minima distanza tra due punti di una stessa superficie .

Nella geometria euclidea la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° . Da un punto del piano si può condurre una sola geodetica parallela ad una geodetica data . Nella geometria sopra una **sfera** (geometria di **Riemann**), la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180° . Da un punto di una superficie sferica non si può condurre alcuna geodetica parallela ad una geodetica data . Nella geometria sopra una **pseudosfera** (geometria di **Lobacevski**), la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180° . Da un punto di una pseudosfera si possono condurre infinite geodetiche parallele ad una geodetica data .