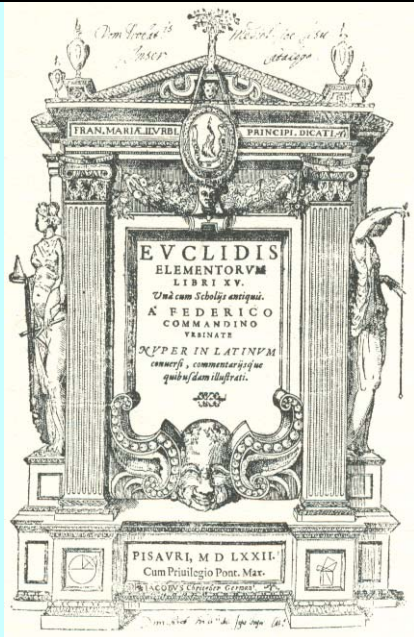


## Gli Elementi di Euclide



Frontespizio della prima edizione di  
**Euclidis elementorum libri XV**  
di **Federeico Commandino**  
( Pesaro 1572 )

Gli Elementi costituiscono il più antico e completo trattato di matematica .

Comprendono quasi tutte le conoscenze matematiche che vanno sotto il nome di “ **matematiche elementari** “ . Essi sono divisi in  **tredici libri** :

i **primi sei** sono dedicati alla geometria elementare del piano , i **libri VII , VIII , IX** all’**aritmetica** , il **X** alla teoria dei **numeri irrazionali** , gli ultimi tre alla **geometria dello spazio** .

Gli Elementi raccolgono tutte le conoscenze matematiche acquisite dall’uomo sino al tempo di Euclide . Il merito del grande matematico greco è avere sistemato in un contesto organico e rigoroso tutte le conoscenze scientifiche del suo tempo .

Negli Elementi di Euclide troviamo raccolto tutto il sapere matematico dell’epoca . I 13 libri non sono un’opera originale , cioè Euclide non è l’autore dei risultati qui raggiunti , ma ha organizzato in un sistema logico e completo tutto quanto era stato scoperto fino ad allora nel campo della matematica . Quindi gli Elementi di Euclide non contengono risultati nuovi rispetto ai geometri precedenti . Sono una rigorosa sistemazione del già conosciuto , che viene ora garantito come certo dal metodo della dimostrazione . Qualche autorevole storico ha definito **Euclide il sistematore** ed **Archimede il costruttore** . Euclide , dopo i **Termini** ( cioè le Definizioni ) , introduce cinque **postulati** ( ciò che si chiede di ammettere ) ai quali fa seguire una serie di **nozioni comuni** ( con linguaggio moderno potremmo chiamarle “ **regole di deduzione logica** “ ) . Servendosi di questi elementi Euclide deduce , passo

passo , tutto il grande edificio della matematica : ben **13 libri** , ricchissimi di teoremi ( **risultati dedotti** ), corollari , lemmi di ogni genere .

Gli Elementi di Euclide offrono un'esposizione organica , logicamente ordinata , che comprende le parti fondamentali della geometria e dell'aritmetica , cioè delle nozioni matematiche che stanno a base di ogni superiore sviluppo .

I primi due libri trattano dei triangoli e dei parallelogrammi , il terzo ed il quarto del cerchio e dei poligoni regolari , il quinto della teoria delle proporzioni , il sesto della similitudine piana , il settimo l'ottavo ed il nono dell'aritmetica dei numeri interi e delle frazioni , il decimo , in cui figura il noto algoritmo euclideo per la ricerca del M.C.D. di due numeri , degli irrazionali quadratici e biquadratici , infine gli ultimi tre della geometria dello spazio . Il sistema euclideo , rigorosamente deduttivo , dipende da alcuni principi che sono formulati : nelle spiegazioni dei **termini** o definizioni , nei **postulati** ( ciò che si chiede di ammettere ) e nelle **nozioni comuni** .

I **termini** rappresentano le definizioni degli enti geometrici , i **postulati** sono proposizioni primitive ( non dimostrate ) riferite ai termini introdotti , le **nozioni comuni** sono proposizioni primitive ( non dimostrate ) che si riferiscono a situazioni e procedimenti non esclusivamente propri della matematica , bensì comuni anche ad altre scienze .

**Libro I :contiene 23 Definizioni , 5 Postulati , 5 Nozioni comuni  
e 48 proposizioni**

Il **primo libro** degli elementi di Euclide contiene **23 termini** , **5 postulati** ed **8 nozioni comuni** . Poi Euclide enuncia **48 proposizioni** delle quali fornisce la dimostrazione . Qualche osservazione critica sui 23 termini introdotti da Euclide . Qualche termine , che rappresenta una definizione non definisce niente .Infatti affermare ,come fa **Euclide** ,che “ **un punto è ciò che non ha parti** “ , o che “ **una linea è una lunghezza senza larghezza** “ , o che “ **una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza** “ , non significa definire tali

enti , in quanto una definizione deve essere espressa mediante termini più semplici e già noti .

Alcuni autori di epoca posteriore ad Euclide usavano il termine **assioma** o **nozione comune** per riferirsi a ciò che era noto o che veniva accettato come evidente , il termine **postulato** per fare riferimento a qualcosa che doveva essere “ richiesto “ e non doveva essere necessariamente evidente .

Elenchiamo i **termini** del primo libro degli Elementi di Euclide .

- 01) *Un punto è ciò che non ha parti*
- 02) *Una linea è ciò che ha lunghezza ed è priva di larghezza*
- 03) *Le estremità di una linea sono punti*
- 04) *Una linea retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai propri punti*
- 05) *Una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza*
- 06) *Gli estremi di una superficie sono linee*
- 07) *Una superficie piana è una superficie che giace ugualmente rispetto alle proprie rette*
- 08) *Un angolo piano è la reciproca inclinazione di due linee poste su di un piano , che si incontrino tra loro e che non giacciano su di una linea retta*
- 09) *Quando le linee che definiscono l'angolo sono rette , l'angolo è detto rettilineo*
- 10) *Quando una retta innalzata su di un'altra retta forma angoli adiacenti uguali fra loro , ciascuno dei due angoli è retto e la retta si dice perpendicolare a quella su cui è innalzata*
- 11) *Un angolo ottuso è un angolo maggiore di un angolo retto*
- 12) *Un angolo acuto è un angolo minore di un angolo retto*

13) *termine è l'estremo di qualche cosa*

14) *Una figura è ciò che è compreso tra uno o più termini*

15) *Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea, detta circonferenza, tale che tutte le rette che cadono su tale linea a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.*

16) *Tale punto si chiama centro del cerchio.*

17) *Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.*

18) *Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.*

19) *Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatera quelle comprese da tre rette (sono i triangoli; n. d. r.), quadrilatera quelle comprese da quattro, e multilatera quelle comprese da più di quattro rette.*

20) *Delle figure trilatera, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.*

21) *Infine, delle figure trilatera, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.*

22) *Delle figure quadrilatera, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli*

*angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatera oltre a queste si chiamino trapezi.*

*23) Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano da nessuna delle due parti.*

Il primo libro degli Elementi di Euclide elenca **5 postulati** :

- I ) [Risulti postulato]** che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
- II) [Risulti postulato]** che una retta terminata [ segmento ] si possa prolungare continuamente in linea retta.
- III) [Risulti postulato]** che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.
- IV) [Risulti postulato]** che tutti gli angoli retti siano eguali fra loro.
- V) [Risulti postulato]** che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

In termini equivalenti , secondo le vedute moderne , il **quinto postulato** possiamo enunciarlo così :

<< **Data una retta r ed un punto P non appartenente ad essa , nel piano che contiene P ed r esiste una sola retta s passante per P e parallela ad r . >>**

**Per rette parallele intendiamo rette complanari che non hanno alcun punto in comune .**

Il **primo libro** degli Elementi di Euclide elenca **8 nozioni comuni** , alcune delle quali potrebbero essere state introdotte successivamente da altri matematici .

**I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.**

**II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.**

**III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.**

**IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.**

**V. E doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro.**

**VI. E metà di una stessa cosa sono uguali tra loro.**

**VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.**

**VIII. Ed il tutto è maggiore della parte.**

Quest'ultima nozione comune , che appare inconfutabile ad ogni persona di buon senso , fu la causa della nascita di un congruo numero di paradossi chiamati **paradossi dell'equinumerosità** .

Noi sappiamo che due insiemi si dicono equipotenti o che contengono lo stesso numero di elementi se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi . Se un insieme è finito , esso non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme , cioè con una sua parte . Se l'insieme considerato contiene infiniti elementi le cose cambiano sensibilmente . Infatti si può dimostrare che sono **equipotenti** gli insiemi dei punti di segmenti aventi lunghezze diverse , addirittura si può dimostrare che un qualsiasi segmento , che è una parte di una retta , ha tanti punti quanti sono i punti della retta .

**Galileo Galilei** dimostrò , attraverso una corrispondenza biunivoca , che i quadrati dei numeri naturali , che sono una parte dei numeri naturali , sono tanto quanti i numeri naturali . Sulla base di queste considerazioni Dedekind definì infinito un insieme equipotente con un suo sottoinsieme , cioè con una sua parte .

Questa affermazione è la negazione dell ‘ ottava nozione comune di Euclide . In seguito , Cantor risolse magnificamente l ‘ apparente contraddizione dell’equinumerosità degli insiemi infiniti . Ma su questo argomento ci torneremo in seguito . Il primo libro degli Elementi di Euclide prosegue con l’esposizione di **48 proposizioni** , che dimostra brillantemente utilizzando i **Termini** , i **postulati** , le **Nozioni comuni** e le **proposizioni** precedentemente dimostrate .

Le 48 proposizioni contengono le relazioni di uguaglianza e di disuguaglianza dei triangoli , i teoremi sulle parallele , sulla somma degli angoli di un poligono , l’equivalenza dei poligoni e la dimostrazione del teorema di Pitagora .

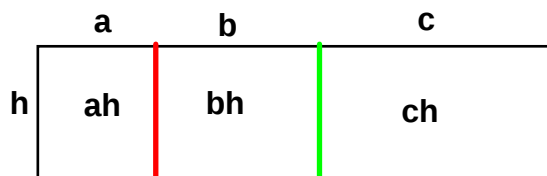
### **Libro II :contiene 2 Definizioni e 13 Proposizioni**

Il secondo libro degli Elementi di Euclide è dedicato all’algebra geometrica , un settore elegante ed originale della matematica greca , che merita un’adeguata illustrazione . L’idea originale che caratterizza l’algebra geometrica di Euclide è quella di rappresentare un numero reale mediante un segmento , sicché un prodotto di due numeri reali rappresenta l’area di un rettangolo . Questo libro contiene **2 definizioni** e **13 proposizioni** .

**Proposizione 1 del secondo libro degli Elementi** ( esprime la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione ) :

dati due segmenti e diviso uno di essi in un certo numero di parti ( ad esempio tre ) , il rettangolo individuato dai due segmenti è uguale alla somma dei rettangoli individuati dal segmento non diviso e da ognuna delle parti in cui è stato diviso l’altro segmento .

Il disegno è il seguente :



la sua espressione simbolica moderna è la seguente :  $(a + b + c) \cdot h = ah + bh + ch$

### **Libro III : contiene 11 Definizioni e 37 proposizioni**

Tratta la teoria del cerchio . In questo libro vengono presentati teoremi sulle posizioni reciproche di una retta e di un cerchio e di due cerchi , sulle proprietà delle corde e delle tangenti, sulle relazioni tra archi ed angoli e tra angoli al centro ed angoli alla circonferenza .

### **Libro IV : contiene 7 definizioni e 16 proposizioni**

In questo libro viene indicato come inscrivere e circoscrivere ad una circonferenza un triangolo , un quadrato , un pentagono regolare e come costruire un esagono ed un pentadecagono inscritti in una circonferenza .

### **Libro V : contiene 18 definizioni e 25 proposizioni**

Il libro ci propone la teoria generale delle proporzioni fra grandezze geometriche . Inizia con proposizioni relative alla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e si conclude con le proprietà delle proporzioni .

**Libro VI : contiene 11 definizioni e 37 proposizioni** : Tratta la similitudine dei poligoni . **Libro VII : contiene 22 definizioni e 39 proposizioni** . **Libro VIII : contiene 27 proposizioni** .

### **Libro IX : contiene 36 proposizioni**

I libri VII , VIII e IX sono dedicati all'aritmetica dei numeri razionali , esposta con rigore . Tutta la materia ivi esposta è quella che si insegna attualmente . La dimostrazione data da Euclide sull'esistenza di infiniti numeri primi è l'unica che si conosca . Lo stesso dicasi per la costruzione dei **numeri perfetti** , cioè di quei numeri uguali alla somma dei loro divisori , esclusi i numeri stessi .

### Dimostrazione di Euclide dell'infinità dei numeri primi

Noi sappiamo che un numero **naturale maggiore** dell'unità è **primo** se è divisibile per se stesso e l'unità . La domanda che si pose **Euclide** fu la seguente .

“ **quanti numeri primi esistono ?** “ **Sono infiniti o sono un numero finito ?**

La **proposizione 20** del libro IX recita così : “ *I numeri primi sono più di una qualsiasi moltitudine di numeri primi* “ . Questo significa che Euclide ammette l'esistenza di infiniti numeri primi . Le prime considerazioni che si possono fare sono le seguenti .

I numeri compresi tra 1 e 10 sono 5 , quelli compresi tra 10 e 100 sono 21 , quelli compresi tra 9999900 e 10000000 sono 3 . Questa legge di rarefazione dei numeri primi potrebbe indurci ad affermare che i numeri primi sono in numero finito , ma le cose non stanno cos' , come dimostrò brillantemente Euclide .La dimostrazione di Euclide è una dimostrazione per assurdo ed inizia con la negazione della tesi . Questo significa affermare che i numeri primi sono in numero finito ed , in quanto tali , possiamo pensare di averli trovati tutti . Supponiamo che essi siano  $k$  e stabiliamo di indicarli con i seguenti simboli :  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  . Detto  $P = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$  il prodotto di tutti i  $k$  numeri primi esistenti , consideriamo il numero  $N = P + 1$  .

$N$  non può essere un numero primo , in quanto sappiamo che  $P$  è il prodotto di tutti i numeri primi .  $N$  è , pertanto , un numero composto che possiamo decomporre in fattori primi .Sia  $p$  uno di questi fattori primi , che sono anche divisori del numero  $N$  . Ma  $p$  non può essere nessuno dei fattori primi ( divisori ) di  $P$  , perché dovrebbe essere anche un fattore ( divisore ) del numero 1 . Pertanto  $p$  deve essere un numero primo diverso da tutti quelli che costituiscono il prodotto di  $P$  . Dunque l'ipotesi che  $P$  era il prodotto di tutti i numeri primi deve essere falsa e quindi tutti i numeri primi costituiscono un insieme infinito . Di mirabile fattura è la **proposizione N° 36** che **Euclide** enuncia nella seguente maniera :

“ Se tanti numeri quanti ne vogliamo , a cominciare dall'unità , vengono posti continuamente in proporzione doppia fino a che la somma di tutti i numeri non diventi un numero primo , e se la somma viene moltiplicata per l'ultimo numero , il prodotto sarà un numero perfetto “. Col simbolismo della matematica moderna abbiamo quanto segue . Se

$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$  è un numero primo , allora il numero  $2^{n-1}(2^n - 1)$  è un **numero perfetto** . Definizione : “ **Un numero si dice perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori , escluso il numero stesso .** “ Gli antichi greci conoscevano i primi 4 numeri perfetti : 6 , 28 , 496 , 8128 . Euclide non dice se la formula da lui trovata è in grado di generare tutti i numeri perfetti . Noi oggi sappiamo che tutti i numeri **perfetti pari** sono del tipo euclideo , ma la questione dei numeri **perfetti dispari** è un problema non risolto . Attualmente conosciamo una ventina di numeri perfetti e questi sono tutti pari . Tuttavia non possiamo generalizzare affermando che tutti i numeri perfetti sono pari . Un altro numero perfetto è 33550336 . Un numero perfetto pari deve terminare per 6 o per 8 .

### **Libro X : contiene 16 definizioni e 115 proposizioni**

Il libro contiene , sotto forma geometrica , un'accurata classificazione degli incommensurabili che provengono da radicali quadratici sovrapposti, cioè da radicali provenienti dalla risoluzione delle equazioni biquadratiche del tipo  $x^4 + ax^2 + b = 0$  . Questo significa che il libro espone una classificazione sistematica dei segmenti incommensurabili della forma

$$a \pm \sqrt{b} , \sqrt{a} \pm \sqrt{b} , \sqrt{a \pm \sqrt{b}} , \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

Gli ultimi tre libri degli Elementi sono consacrati , nella massima parte , alla geometria dello spazio . I libri XI ( 28 definizioni e 39 proposizioni ) e XII ( 18 proposizioni ) sviluppano le proprietà dei prismi , delle piramidi , dei cilindri , dei coni , delle sfere . Mirabile è la dimostrazione della proporzionalità della sfera col cubo del suo diametro .

Particolarmente brillante è la dimostrazione del teorema secondo il quale le aree dei cerchi stanno tra di loro come i quadrati costruiti sui loro diametri . Ai poliedri regolari convessi è dedicato l'ultimo libro degli elementi , il XIII ( contiene 18 proposizioni ) . Esso si conclude con la dimostrazione che non esistono altri poliedri regolari diversi da quelli scoperti da Pitagora e resi popolari da Platone . Questo fatto indusse alcuni matematici a ritenere che l'obiettivo degli Elementi di Euclide fosse la costruzione delle celebri figure di Pitagora . Ma questo non corrisponde a verità .