Da << il tutto è maggiore di una sua qualsiasi parte >> di Euclide alla dimostrazione che , in talune situazioni , il tutto può essere uguale ad una sua parte .

I paradossi del tutto e della parte

Una parte non può essere uguale al tutto , aveva sentenziato **Euclide** nei suoi **Elementi** . Questa affermazione , che agli uomini dotati di buon senso sembra assolutamente vera , è contraddetta da quelli che possiamo chiamare i << **paradossi del tutto e della parte** >> .

Paradosso degli interi e dei quadrati

Nel 1622 Bonaventura Cavalieri aveva chiesto al sua maestro Galileo Galilei qualche delucidazione sul confronto tra due infiniti . Galileo rispose che aveva qualche difficoltà a rispondere ad una questione così delicata . Nel 1638 , nell'opera Nuove scienze , Galileo dà una risposta indiretta, affermando che, nel confrontare due infiniti, si incontrano << **difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti , dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate ; il che penso che sia inconveniente , perché stimo che questi attributi di maggioranza , minorità ed ugualità non convenghino agli infiniti , dei quali non si può dire , uno essere maggiore o minore o uguale all'altro** **>> . Col paradosso dell'infinito in campo aritmetico , che tratteremo dettagliatamente in seguito , Galileo fa vedere che una infinità dovrebbe essere contemporaneamente maggiore ed uguale ad un'altra infinità . Tutto questo lo conduce ad affermare che il confronto tra gli infiniti non è possibile .**

Illustriamo adesso il **paradosso del tutto e della parte** in campo aritmetico, trascrivendo quanto lo stesso **Galileo** espone nell'opera le Nuove scienze . Si tratta di un'opera scritta in forma di dialogo dove **Simplicio** rappresenta l'uomo aristotelico , Sagredo il gentiluomo dilettante di scienze e **Salviati** lo scienziato nuovo , cioè lo stesso Galileo .

Paradosso degli interi e dei quadrati

L'aristotelico Simplicio sa che i << **numeri quadrati** >> sono quelli che nascono dai singoli numeri << **in se medesimi moltiplicati** >> .

Salviati : Benissimo , e sapete ancora , che sì come i prodotti si dimandano quadrati , i producenti , cioè quelli che si moltiplicano ,si chiamano lati o radici ; gli altri [numeri] poi , che non nascono da numeri moltiplicati in se stessi , non sono altrimenti quadrati . Onde se io dirò ,i numeri tutti , comprendendo i quadrati e i non quadrati , essere più che i quadrati soli , dirò cosa vera : non è così ?

Simplicio : Non si può dire altrimenti .

Salviati : Interrogando io di poi , quanti siano i numeri quadrati , si può con verità rispondere , loro essere tanti quante sono le proprie radici , avvenga che ogni quadrato ha la sua radice , ogni radice il suo quadrato , né quadrato alcuno ha più di una sola radice , né radice alcuna più di un quadrato .

Simplicio: Così sta .

Salviati :Ma se io domanderò , quante siano le radici , non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri , poiché non vi è numero alcuno che non radice di qualche quadrato ; e stante questo , converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri , perché tanti sono quante le loro radici , e radici sono tutti i numeri ; e pur da principio dicemmo , tutti i numeri essere più che i propri quadrati , essendo la maggior parte non quadrati .

Con linguaggio moderno possiamo affermare quanto segue :

- **I quadrati sono soltanto una parte dei numeri naturali .**
- **I numeri naturali sono tanti quanti sono i loro quadrati in quanto tra questi insiemi di numeri è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca , come si evidenzia dalla seguente tabella :**

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \cdots & n^2 \end{array}$$

Questa tabella ci dice che ad ogni numero (naturale) della prima riga corrisponde un solo numero (il suo quadrato) della terza ed inversamente a ciascun numero (che è il quadrato di un numero naturale) corrisponde un solo numero (naturale) della prima riga .

Appare evidente che i quadrati , che sono solo una parte dei numeri naturali sono tanti quanti i numeri naturali . L'affermazione di Euclide che il tutto non può essere uguale ad una sua parte è contraddetta da questo paradosso .

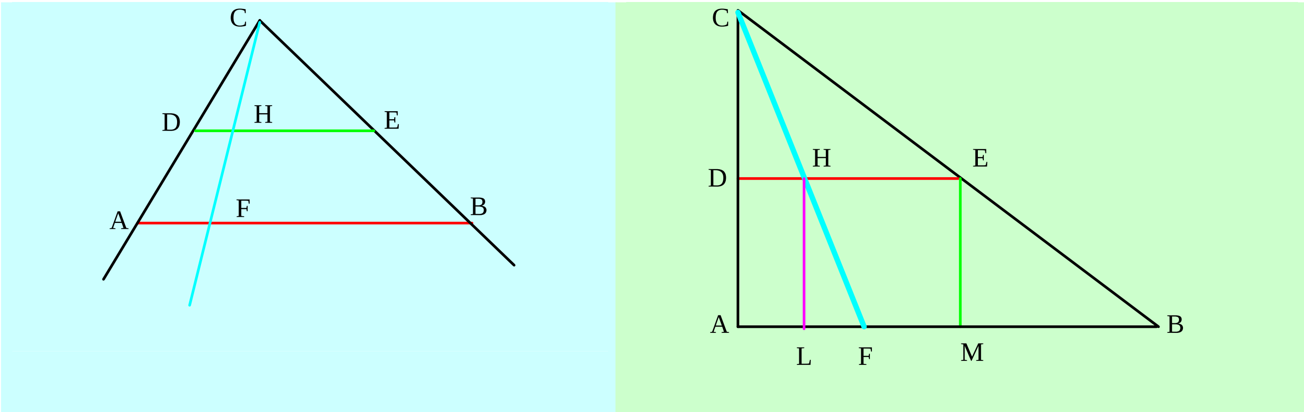
Salviati **, cioè Galileo , a questa apparente contraddizione dà la seguente interpretazione .**

<< Io non veggo che ad altra decisione si possa venire , che a dire , infiniti essere tutti i numeri , infiniti i quadrati , infinite le loro radici , né la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri , né questa maggiore di quella , ed in ultima conclusione , gli attributi di uguale , maggiore e minore non aver luogo negli infiniti , ma solo nelle quantità terminate . >> .

Quindi per Galileo gli infiniti non possono essere confrontati tra di loro .

Un altro paradosso dell'infinito , il paradosso geometrico

I punti di un segmento sono tanti quanti sono i punti della sua metà .



Sia dato il segmento AB . Dal punto C non appartenente alla retta AB tracciamo le semirette CA e CB che congiungono il punto C con gli estremi del segmento AB .Sia E l'intersezione con la semiretta CB della retta parallela ad AB e passante per il punto medio D del segmento CA . Si dimostra facilmente che il segmento DE è parallelo al segmento AB ed uguale alla sua metà . Ci domandiamo ora : quanti punti contiene il segmento AB ? Secondo la concezione degli enti geometrici idealizzati dobbiamo rispondere : AB contiene infiniti punti in quanto sappiamo che tra due punti qualsiasi possiamo inserire almeno un altro punto . E se ci domandiamo quanti punti contiene il segmento DE dobbiamo rispondere che ne contiene infiniti . Siccome AB è doppio di DE verrebbe di pensare che gli infiniti punti di AB debbano essere il doppio degli infiniti punti di DE . Il senso comune ci indurrebbe a stabilire un confronto tra i due infiniti con netto vantaggio dell'infinita numerosità dei punti di AB . Ma ora possiamo mettere in evidenza un fatto piuttosto sconcertante : i punti del segmento AB sono tanti quanti sono i punti del segmento DE .

Per dimostrarlo , consideriamo un generico punto F di AB e congiungiamolo con C : la retta FC taglia il segmento DE in un punto H . Possiamo dire che al punto F di AB corrisponde il punto H di DE . E ,poiché possiamo ripetere la costruzione per tutti i punti del segmento AB diremo che possiamo stabilire una corrispondenza tra tutti i punti di AB ed i punti di DE : più precisamente, ad ogni punto di AB corrisponderà un solo punto di DE . Si osserva pure che ad ogni punto di DE corrisponde un solo punto di AB . Abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra i punti del segmento AB ed i punti del segmento DE . Quindi i punti del segmento AB sono tanti quanti sono i punti del segmento DE . **Ecco uno dei paradossi dell'infinito** .

Lo rendiamo ancora più evidente se , anziché il segmento DE ,consideriamo il segmento ad esso uguale AM (ottenuto abbassando da E la perpendicolare EM su AB) . I punti di AB, essendo in numero uguale a quelli di DE , dovrebbero essere in numero uguale a quelli di AM . Infatti ,i punti di AB possono porsi in corrispondenza biunivoca con quelli di AM , mentre essi costituiscono solo una parte (la metà) dei punti di AB . Cioè per gli insiemi infiniti non sembra valido il principio ben noto : **il tutto è maggiore di una sua parte** , dal momento che è possibile che un insieme infinito venga posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte . Chi risolve in maniera completa e definitiva il concetto di infinito è Cantor . Questi introduce il concetto primitivo di insieme descrivendolo con le seguenti parole :

<< Per insieme intendiamo una collezione di determinati oggetti della nostra intuizione o del nostro pensiero ben distinti e riuniti in un tutto : tali oggetti sono detti gli elementi dell’insieme >>

Definizione:<< **quando due insiemi possono porsi in corrispondenza biunivoca si dice che essi hanno la stessa potenza** >> .

Poiché insiemi finiti aventi lo stesso numero di elementi hanno la stessa potenza e , inversamente insiemi finiti aventi la stessa potenza hanno lo stesso numero di elementi , conviene rappresentare la potenza di un insieme finito dal numero dei suoi elementi , cioè assumiamo :

potenza di un insieme finito = numero dei suoi elementi

Cantor identifica anche per gli insiemi infiniti il numero degli elementi con la potenza : cioè hanno lo stesso numero di elementi due insiemi infiniti aventi la stessa potenza , cioè due insiemi i cui elementi possono porsi in corrispondenza biunivoca fra loro .

Consideriamo l’insieme N , cioè l’insieme di tutti gli infiniti numeri naturali :

$$\mathrm{N} = \{1,2,3,4,5,6.\cdots\}$$

Chiameremo potenza del numerabile la potenza dell’insieme N . Ciò in relazione al fatto che chiameremo insieme numerabile l ‘insieme N stesso e qualsiasi altro insieme che possa porsi con N in corrispondenza biunivoca . L’importanza della considerazione della potenza del numerabile sta nel fatto che essa è la più piccola potenza che un insieme infinito possa avere .

Ogni insieme costituito da infiniti elementi ed avente la stessa potenza possiede lo stesso numero di elementi dell'insieme N .

Esistono insiemi infiniti che hanno potenza maggiore del numerabile , ma non esistono insiemi infiniti aventi potenza minore .

Definizione : **Un insieme finito A ha potenza maggiore di un insieme finito B quando è possibile porre B in corrispondenza biunivoca con una parte propria di A , ma non è possibile porre A in corrispondenza biunivoca con una parte propria di B .**

Vediamo adesso in che cosa consiste l'originalità del pensiero di Cantor :
egli estende la definizione elementare di uguaglianza del numero cardinale di due insiemi anche al caso di insiemi infiniti .
Cantor ha il coraggio , che era mancato a Galileo Galilei , di ammettere che << **una parte può essere uguale al tutto** >> ; **ma cerchiamo di chiarire il significato da dare alla parola << uguale >> . Uguale in senso aristotelico : la parte non può essere uguale (identica) al tutto che la contiene , in quanto il tutto ha sempre qualche elemento che la parte non ha ;**
Uguale nel senso di Cantor : la parte può essere uguale al tutto per numero .
Tanti sono i numeri quanti sono i loro quadrati , che sono << meno >> dei numeri , perché ci sono dei numeri che non sono quadrati .
Se per concetti diversi non usiamo più la stessa parola uguale , ma usiamo rispettivamente i termini **identico** ed **equipotente** , allora la condraddizione si elimina . Un fatto incredibile diventa un fatto normale .
Nel caso di un insieme infinito , può accadere che l'intero insieme ed una sua parte , certamente non identici , siano equipotenti , cioè esprimano la stessa numerosità .

Definizione **: Un insieme X si chiama infinito se è equipotente con un suo sottoinsieme , cioè con una sua parte ; in caso contrario l'insieme sarà detto finito .**

Cantor scopre anche che :.

a) i punti di un cubo sono tanti quanti i punti di un suo lato

b) i punti di un quadrato sono tanti quanti i punti di un suo lato .

Confronto fra insiemi infiniti

L'insieme di tutti i numeri naturali è solo l'infinito attuale più piccolo . Sono insiemi numerabili : a) l'insieme Z degli interi relativi b) l'insieme Q dei numeri razionali c) l'insieme U , unione di insiemi numerabili .

Teorema **: Qualunque sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile .**

Teorema

Non esiste alcun insieme infinito avente potenza inferiore al numerabile : quella del numerabile è la minima potenza degli insiemi infiniti .

Cantor prosegue il suo percorso sull'infinito scoprendo che non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili . Siamo nel dicembre del 1873 ; nasce il concetto di **infinito attuale trasfinito** , sempre accrescibile e non assoluto .Non sono insiemi numerabili l'insieme formato da tutti i punti di un segemento , l'insieme R dei numeri reali .

Definizione **: Chiamiamo potenza del continuo , quella dell'insieme di tutti i punti della retta e quindi anche dell'insieme R di tutti i numeri reali .**

Incontriamo le prime due potenze per insiemi infiniti :

1) la potenza del numerabile , che è la minima possibile (ad esempio la potenza dell'insieme N)

2) la potenza del continuo , che è maggiore di quella del numerabile (ad esempio la potenza dell’insieme R) .

Postulato del continuo : Non esistono insiemi infiniti aventi potenza intermedia tra quella del numerabile e quella del continuo .

Teorema : L’insieme delle parti di un insieme numerabile ha la potenza del continuo (che è maggiore di quella del numerabile)

Teorema : L’insieme P delle parti di un insieme qualunque A ha potenza maggiore di A

Teorema : Esistono insiemi infiniti aventi potenza superiore alla potenza del continuo .

Quando consideriamo insiemi infiniti , si ha sempre un aumento della potenza nel passare da un insieme infinito all’insieme delle sue parti .Quindi , partendo da un insieme numerabile N (avente potenza del numerabile) si passa all’insieme delle sue parti P che ha la potenza del continuo , e l’insieme P' delle parti di P ha potenza maggiore del continuo , l’insieme P'' delle parti di P' ha potenza maggiore di P' , e così di seguito .Le successive potenze degli insiemi N , P , P' , P'' …. si presentano come le successive gigantesche , infinitamente grandi unità di una nuova serie numerica infinita . Sono nati i numeri trasfiniti di Cantor che ha elaborato in maniera originale ed impeccabile una nuova aritmetica,l’aritmetica dei numeri trasfiniti .

Bibliografia

1) Frajese . introduzione elementare alla matematica moderna
Le Monnier

2) Lucio Lombardo radice l'Infinito Editori Riuniti

3) Enciclopedia Italiana Treccani

4) Ludovico Geymonat : Storia del pensiero filosofico e scientifico Garzanti

5) Arturo Loria : Storia delle matematiche Hoepli Milano

6) Carl Boyer : Storia della matematica ISEDI

7) Frajese . Attraverso la storia della matematica
Le Monnier

8) Ulisse I numeri e gli uomini Editori Riuniti