Il concetto di insieme

I concetti di **insieme** e di ***elemento di un insieme*** sono **concetti primitivi**, cioè non definibili mediante altri concetti più semplici. Il termine **insieme** è sinonimo di collezione, raccolta, aggregato. Cantor scrisse: << **Un insieme è una collezione di oggetti determinati e distinti, facenti parte del mondo della nostra intuizione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme**>>.
Questa, però, non è la definizione di insieme ma è soltanto la sua descrizione in quanto non è stato definito il significato di collezione mediante nozioni più semplici. Un insieme esiste come ente matematico quando è possibile stabilire se un dato oggetto è o non è elemento dell'insieme.
Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino: $A, B, C, D, E, F, G, \cdots$

Gli **elementi di un insieme** si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto latino: $x, y, a, b, c, d, \cdots$

$N = \{0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}$ = insieme dei **numeri naturali**

Se **G** é un insieme, con la scrittura $x \in G$ (si legge: **x appartiene** a G, oppure, **x è un elemento dell'insieme G**) si indica che x è uno degli elementi che costituiscono l'insieme **G**. Il segno $\in$ è detto simbolo di appartenenza. Il simbolo $\notin$ è la negazione della relazione di appartenenza. Con la scrittura $x \notin G$ (si legge: x non appartiene a G) si vuole significare che l'elemento x non fa parte dell'insieme G.

La rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere rappresentato in diverse maniere:

1) Rappresentazione tabulare

Si elencano gli elementi che costituiscono l'insieme; essi vengono racchiusi fra due parentesi graffe. Si ha cosi la **rappresentazione tabulare** (o per **elencazione** o **analitica** o in **estensione**) dell'insieme. Esempi: $A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{1,3,8,17,25\}$

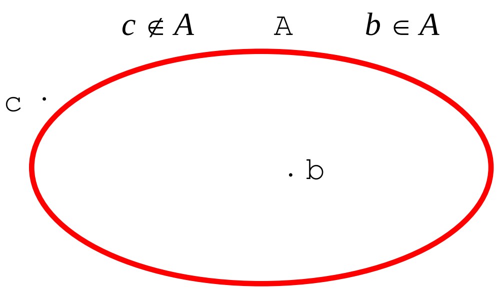
2) Rappresentazione caratteristica

Si possono definire gli elementi dell'insieme con una **proprietà** che permette di ricavarli senza ambiguità. Basta enunciare tale proprietà: si ha la **rappresentazione caratteristica**

$$A = \{x : x < 8 \wedge x \in N\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

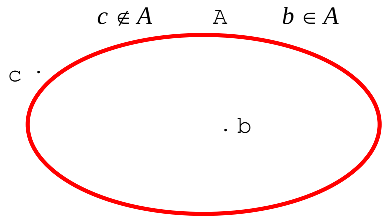
Si legge: **A** è l'insieme i cui elementi sono numeri naturali minori di 8, oppure: **A** è l'insieme degli elementi x appartenenti all'insieme dei numeri naturali tali che siano minore del numero 8.

3) Rappresentazione grafica

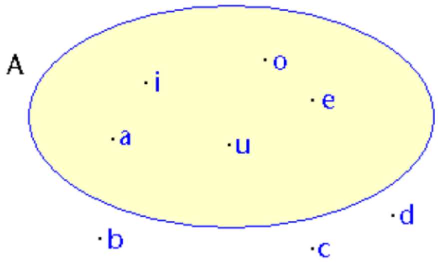


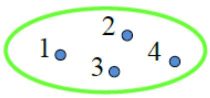
Per rendere suggestiva la considerazione di un insieme astratto A si usa dare una **rappresentazione grafica** mediante curve piane chiuse prive di nodi, limitanti delle superfici sulle quali sono rappresentate i punti che individuano gli elementi dei vari insiemi. *Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme.* Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all'insieme .

Si disegna una linea chiusa priva di nodi nella cui regione interna si immagina siano racchiusi gli elementi dell'insieme. *Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme.* Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all'insieme.



Rappresentazione mediante i diagrammi di **Eulero - Venn** dell'insieme **A** delle vocali dell'alfabeto italiano. Gli elementi inseriti all'interno della linea chiusa appartengono all'insieme considerato, gli elementi lasciati fuori non appartengono all'insieme **A**.



rappresentazione		
per elencazione	per caratteristica	grafica (o di Eulero-Venn)
gli elementi dell'insieme sono indicati tra parentesi graffe $A = \{\ 1, 2, 3, 4\ \}$	si descrivono le caratteristiche degli elementi dell'insieme $A = \{\ x\ /x \in N, 1 \leq x \leq 4\}$	si usano delle linee chiuse che contengono gli elementi dell'insieme A 

Sottoinsieme di un insieme

Si dice che un insieme **A** è un **sottoinsieme proprio** dell'insieme **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B**, ma esiste almeno un elemento di **B** che non appartiene ad **A**. Questa relazione fra insiemi, detta **relazione d'inclusione stretta**, si scrive: $A \subset B$

e si legge : << **A** è sottoinsieme proprio di **B**, oppure **A** è parte propria di **B**, oppure **A** è incluso (o contenuto) propriamente (o in senso stretto) in **B**. Il simbolo $\subset$ è detto simbolo di **inclusione stretta**. Si dice anche che **B** include o contiene **A** e si scrive $B \supset A$.

Intersezione di due o più insiemi

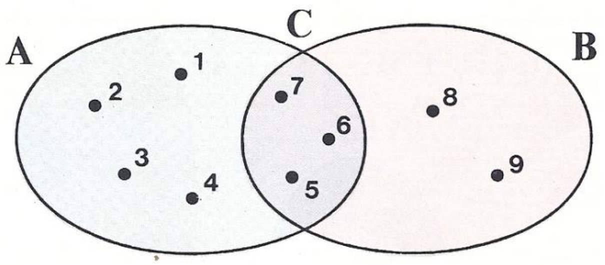
- Dati due insiemi **A** e **B**, l'insieme C formato dagli elementi comuni ad **A** e **B** si chiama **insieme intersezione** o **intersezione** di **A** e **B**. Scriviamo $C = A \cap B$ e leggiamo : << *C è uguale ad* **A** *intersecato* **B**>>. In simboli abbiamo : $C = A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

$\cap$ è il simbolo di **intersezione**

<< Dire che x appartiene all'intersezione di A con B equivale a dire che x appartiene contemporaneamente ad A e B >>.

Consideriamo ancora i seguenti insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad e \quad B = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$



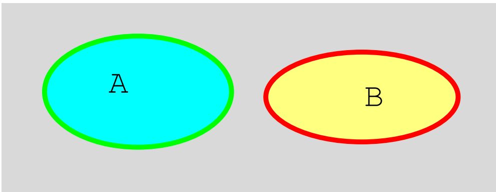
Si ha: $A \cap B = C$, essendo $C = \{5, 6, 7\}$.
I numeri 5, 6 e 7 sono infatti comuni ai due insiemi.

Due insiemi **A** e **B** si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune, cioè se $A \cap B = \varnothing$

Immagine grafica di due insiemi **disgiunti**

$A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow \ A = \varnothing$ oppure $B = \varnothing$

oppure **A** e **B** sono **insiemi disgiunti** .



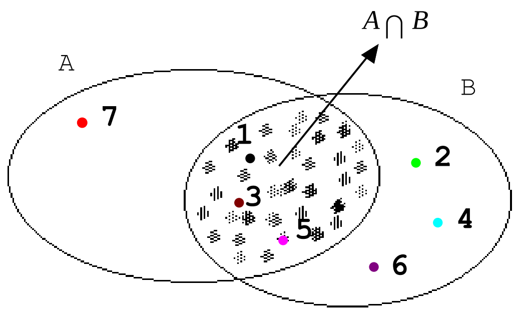
Graficamente l'insieme intersezione è rappresentato dalla parte spruzzata.

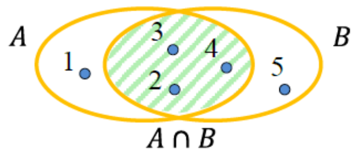
$A = \{1,3,5,7\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$C = A \cap B = \{1,3,5\}$

Per convenzione si pone:

$A \cap \varnothing = \varnothing, \ \varnothing \cap A = \varnothing$



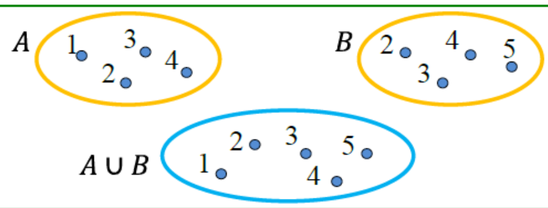
$A = \{\,1,2,3,4\,\}$ $\quad B = \{\,2,3,4,5\,\}$ $A \cap B = \{2,3,4\}$	

Unione di due insiemi

Definiamo **unione** di due insiemi **A** e **B** l'insieme **C** costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, cioè dagli elementi che appartengono ad **A** o **B** o ad entrambi. (Gli elementi comuni agli insiemi **A** e **B** vanno presi una sola volta). In simboli abbiamo:

$$C = A \bigcup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

e si legge <<**U** uguale **A** unito **B** >>.

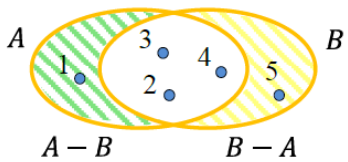
$A = \{\,1,2,3,4\,\}$ $\quad B = \{\,2,3,4,5\,\}$ $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$	

Differenza di due insiemi

Si dice **differenza** di due insiemi **A** e **B** (in questo ordine) l'insieme **D** costituito dagli elementi dell'insieme **A** che non appartengono all'insieme **B**. In simboli abbiamo:

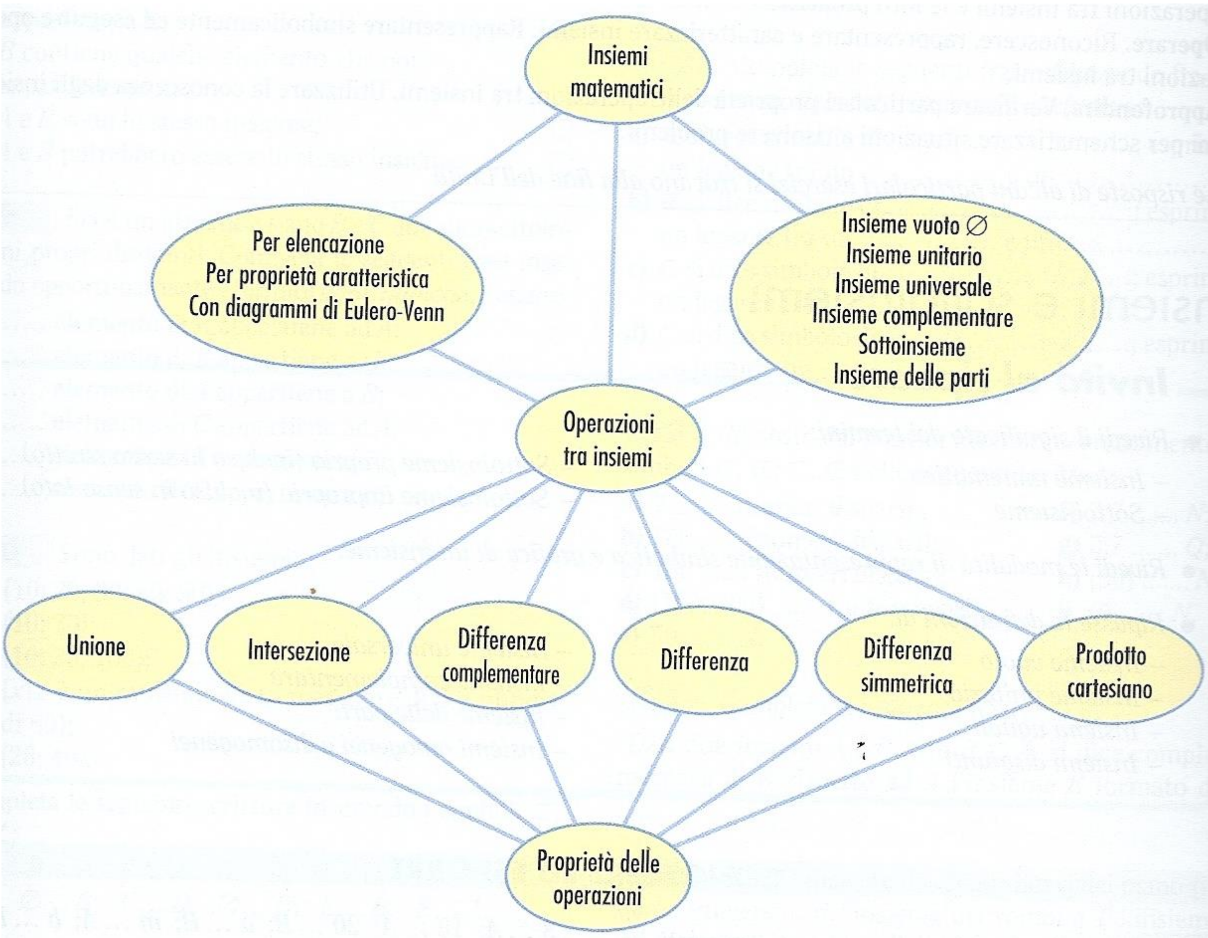
$$D = A \setminus B = A - B = \{\,x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

e si legge << **D uguale A meno B** >> .

$A = \{\,1,2,3,4\,\}$ $\quad B = \{\,2,3,4,5\,\}$ $A - B = \{1\}$ $B - A = \{5\}$	

Prospetto riassuntivo dei simboli finora introdotti.

Simbolo di	*Lettura*	*Significato*
appartenenza $\in$	$a \in \mathbf{A}$ *a* appartiene all'insieme **A**	significa che l'elemento *a* appartiene all'insieme **A**
non appartenenza $\notin$	$b \notin \mathbf{A}$ *b* non appartiene all'insieme **A**	significa che l'elemento *b* non appartiene all'insieme **A**
insieme vuoto $\emptyset$	$\mathbf{A} = \emptyset$ **A** insieme vuoto	significa che l'insieme **A** è privo di elementi
inclusione $\subset$	$\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ l'insieme **B** è incluso in **A**	significa che l'insieme **B** è un sottoinsieme di **A**
intersezione $\cap$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{C}$ **A** intersecato **B** uguale a **C**	significa che l'insieme **C** è costituito dagli elementi che appartengono sia ad **A**, sia a **B**
insiemi disgiunti $A \cap B = \emptyset$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ **A** intersecato **B** uguale a un insieme vuoto	significa che l'intersezione degli insiemi **A** e **B** è un insieme vuoto, cioè i due insiemi non hanno alcun elemento in comune
unione $\cup$	$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{C}$ **A** unito **B** uguale a **C**	significa che l'insieme **C** ha come elementi tutti gli elementi dei due insiemi **A** e **B** e solo quelli; se **A** e **B** hanno elementi comuni, ciascuno di questi figura una sola volta in **C**


Insiemi matematici
Per elencazione
Per proprietà caratteristica
Con diagrammi di Eulero-Venn
Insieme vuoto ∅
Insieme unitario
Insieme universale
Insieme complementare
Sottoinsieme
Insieme delle parti
Operazioni tra insiemi
Unione
Intersezione
Differenza complementare
Differenza
Differenza simmetrica
Prodotto cartesiano
Proprietà delle operazioni