L’insieme dei numeri naturali viene indicato col simbolo $\mathbb{N}$. Risulta pertanto:

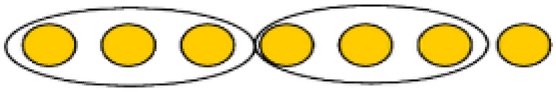
$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\cdots\}$$

L’insieme dei numeri naturali privato della zero viene indicato col simbolo:

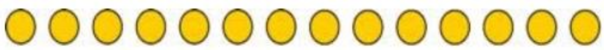
$$\mathbb{N}_o=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\cdots\}$$

I diversi modi di contare

Noi sappiamo che si può contare in tanti modi diversi; possiamo usare il **sistema decimale** se stabiliamo di contare per dieci, il **sistema binario** se stabiliamo di contare per due e così di seguito. Per vedere come è possibile contare in diverse maniere facciamo il gioco dei pirati che vogliono stabilire quanti dobloni d’oro hanno. Il pirata **Barbanera** è un pirata del paese del 3 e nell’isola del tesoro si è impossessato dei seguenti dobloni d’oro:  che vuole scrivere nel diario di bordo. Con quale cifre lo indicherà se è del paese del 3?

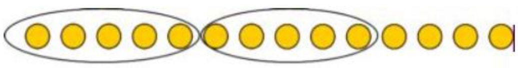
Raggruppiamo per 3 e scriviamo:  $21_{(3)}$ in quanto tutti i dobloni possono essere suddivisi in due gruppi di 3 ed in un gruppo contenente un solo doblone.

Il pirata **Flint** è un pirata del paese del 5 e possiede i seguenti dobloni d’oro:



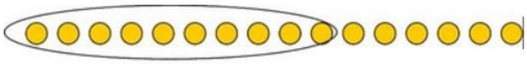
Cosa scriverà nel suo diario di bordo il pirata **Flint**? Quali cifre utilizzerà il pirata **Flint** per scrivere nel suo diario di bordo la somma che possiede?

Raggruppiamo i dobloni in gruppi di cinque come indica il seguente schema.



Scriverà sul diario di bordo $24_{(5)}$ in quanto abbiamo 2 gruppi contenenti 5 dobloni ed un gruppo contenete 4 dobloni.

Black Macigno è un pirata del 10 ed ha questi dobloni d’oro:

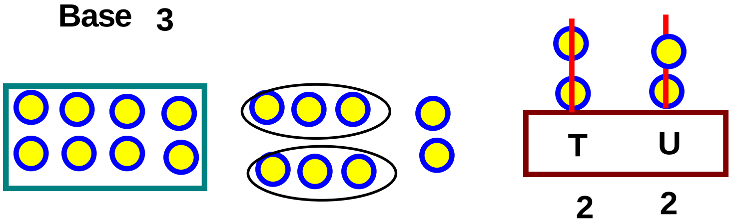
Sul suo libro di bordo scriverà 16 in quanto ha un gruppo contenente 10 dobloni ed un gruppo contenente 6 dobloni.  cioè una decina e sei unità.

Sistema posizionale **Raggruppamento in basi diverse**

Quando usiamo la base 10 non la si indica come pedice in quanto è quella convenzionalmente in uso.

Altri esempi di numeri scritti in basi diverse.

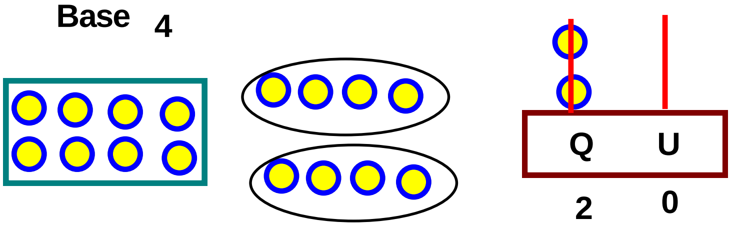
Base 3



$22_{(3)} = 8$

U = unità
T = terzina = gruppo di 3 palline

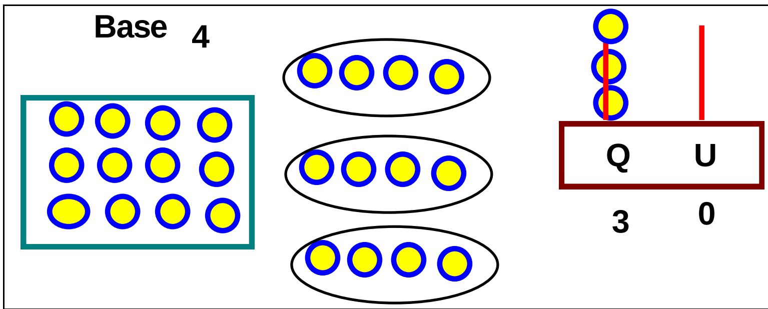
Base 4



$20_{(4)} = 8$

U = unità
Q = quaterna = gruppo di 4 palline

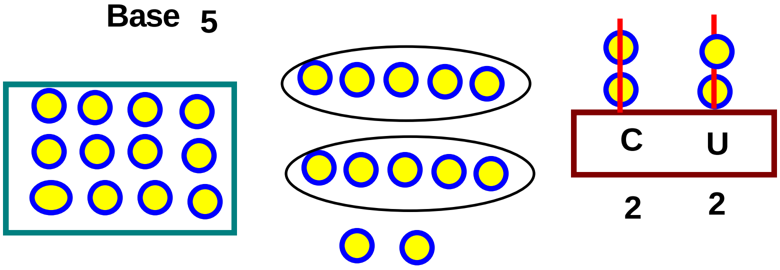
Base 4



$30_{(4)} = 12$

U = unità
Q = quaterna = gruppo di 4 palline

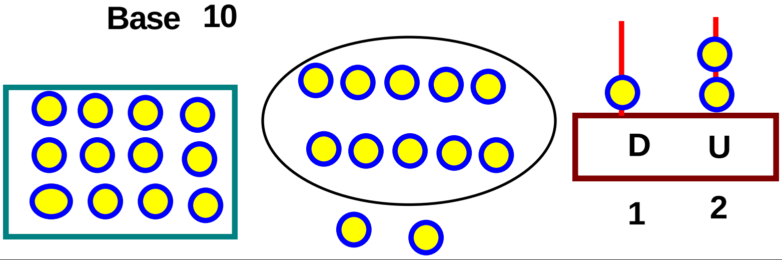
Base 5



$22_{(5)} = 12$

U = unità
C = cinquina = gruppo di 5 palline

Base 10



12

U = unità
D = decina = gruppo di 10 palline

- La base che viene scelta per la scrittura dei numeri equivale al modo di raggruppare gli elementi.

- Per ogni base scelta si possono usare tante cifre quante sono le unità del numero che rappresenta la base.

- In base 10 non è possibile indicare il numero 10 con una sola cifra, in base 9 non è possibile indicare il numero 9 con una sola cifra e così di seguito.

Ecco una tabella nella quale sono indicate le cifre che si possono usare per le varie basi:

BASE	CIFRE DA USARE
due	0 - 1
tre	0 - 1 - 2
quattro	0 - 1 - 2 - 3
cinque	0 - 1 - 2 - 3 - 4
sei	0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5
sette	0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6
otto	0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7
nove	0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8
dieci	0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9

Raggruppare in base 2

In questa base possiamo formare gruppi di $1,2,4,8,\cdots$ unità. Ognuno di questi gruppi può essere preso o **zero** volte oppure **una** volta.

Il numero naturale n scritto in base 2 assume questa forma: $n=\cdots a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d\cdot 1$

con $a,b,c,d\in\{0,1\}$

2 = raggruppamento del **primo ordine** = gruppo formato da due unità

$2^2=4$ = raggruppamento del **secondo ordine** = gruppo formato da 4 unità

$2^3=8$ = raggruppamento del **terzo ordine** = gruppo formato da 8 unità

Poi ci sono le **unità isolate** che, in base 2, sono rappresentate o dal numero 0 o dal numero 1

$$1001_{(2)}=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+1\cdot 1=8+0+0+1=9_{(10)}$$

$1001_{(2)}$ si legge "**uno zero zero uno base due**"

Raggruppare in base 3

In questa base possiamo formare gruppi di $1,3,9,27,\cdots$ unità. Ciascuno di questi gruppi può essere preso **$0,1,2$** volte.

Il numero naturale n scritto in base 3 assume questa forma: $n = \cdots a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d \cdot 1$

con $a,b,c,d \in \{0,1,2\}$

3 = raggruppamento del **primo ordine** = gruppo formato da tre unità

$3^2 = 9$ = raggruppamento del **secondo ordine** = gruppo formato da 9 unità

$3^3 = 27$ = raggruppamento del **terzo ordine** = gruppo formato da 27 unità

Poi ci sono le **unità isolate** che, in base 3, sono rappresentate o dal numero 0 o dal numero 1 o dal numero 2

$$1022_{(3)} = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 27 + 0 + 6 + 2 = 35_{(10)}$$

$1022_{(3)}$ si legge "**uno zero due due base tre**"

Raggruppare in base 4

In questa base possiamo formare gruppi di $1,3,9,27,\cdots$ unità. Ciascuno di questi gruppi può essere preso **$0,1,2,3$** volte.

Il numero naturale n scritto in base 4 assume questa forma: $n = \cdots a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d \cdot 1$

con $a,b,c,d \in \{0,1,2,3\}$

4 = raggruppamento del **primo ordine** = gruppo formato da 4 unità

$4^2 = 16$ = raggruppamento del **secondo ordine** = gruppo formato da 16 unità

$4^3 = 64$ = raggruppamento del **terzo ordine** = gruppo formato da 64 unità

Poi ci sono le **unità isolate** che, in base 4, sono rappresentate o dal numero 0 o dal numero 1 o dal numero 2 o dal numero 3.

Il raggruppamento in basi diverse mette in evidenza i modi diversi di raggruppare. Il valore della cifra cambia in relazione alla base in cui si raggruppa. Facilita l'apprendimento di questo argomento il materiale strutturato come l'uso dei **Blocchi Aritmetici Multibase** (B.A.M.) o l'uso dell'**Abaco** ad asticciole.

U → unità isolate → corto

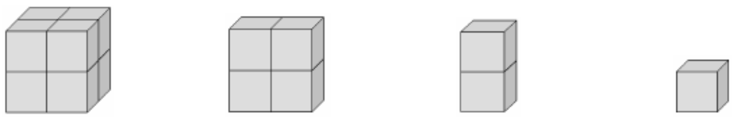
L → lungo → raggruppamento del **primo ordine**

P → piatto → raggruppamento del **secondo ordine**

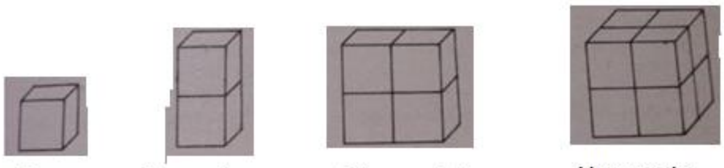
B → blocco o cubo → raggruppamento del **terzo ordine**

I blocchi Aritmetici della base due sono costituiti da $2, 4, 8$ (e così di seguito moltiplicando per 2). **I blocchi Aritmetici** della base tre sono costituiti da $3, 9, 27$ (e così di seguito moltiplicando per 3).

Blocchi Aritmetici della base due

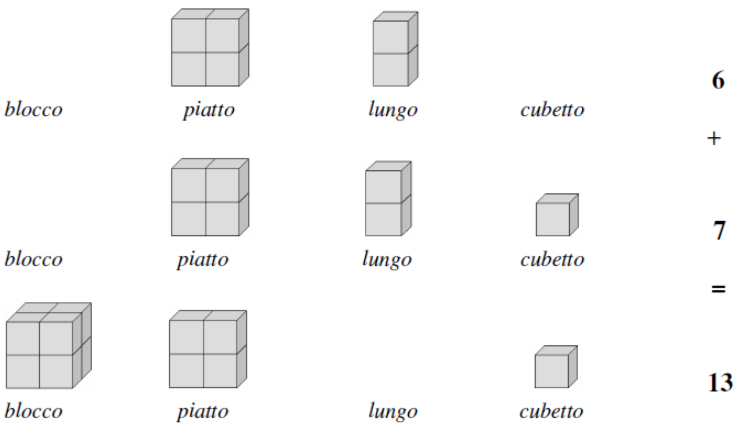


blocco *piatto* *lungo* *cubetto*



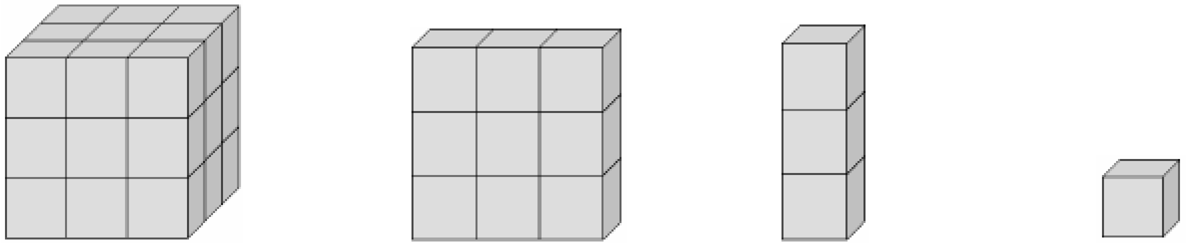
cubetto o singolo lungo o base della base 2 piatto o quadrato della base 2 blocco o cubo della base 2

La somma dei numeri 6 e 7 utilizzando **Blocchi Aritmetici** della base due



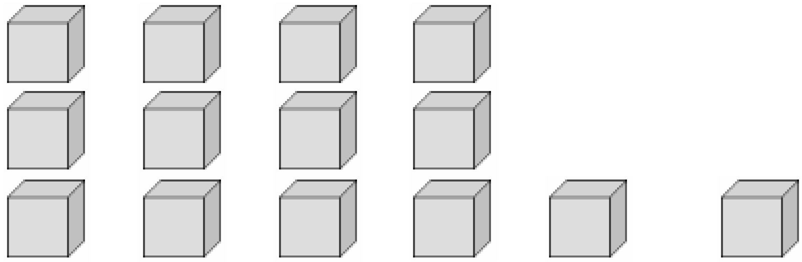
Sistema posizionale **Raggruppamento in basi diverse**

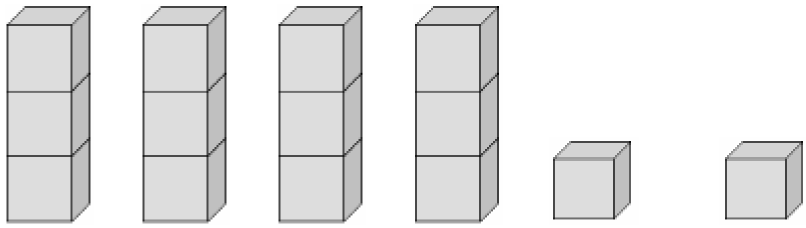
Blocchi Aritmetici della base tre



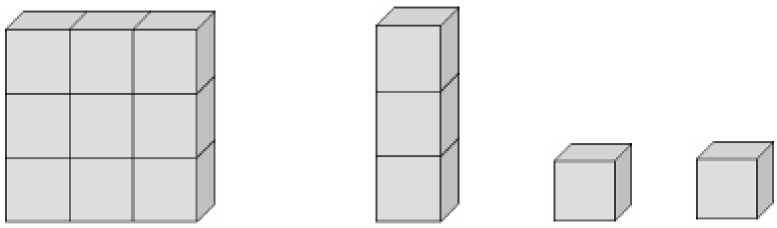
blocco *piatto* *lungo* *cubetto*

Utilizzando la base tre si abbiamo 14 cubetti **BAM** da aggregare in lunghi (da tre). Si avranno 4 lunghi e 2 cubetti (unità isolate) residui.





Aggregando i lunghi in piatti abbiamo: un piatto, un lungo e due cubetti (cioè 2 unità isolate)

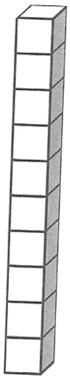


piatto *lungo* *cubetto* *cubetto*

Base TRE Cifre utilizzabili $0,1,2$			
B	P	L	U
$27U$	$9U$	$3U$	

$1020_{(3)} = 1\cdot 27 + 0\cdot + 2\cdot 3 + 0\cdot 1 = 33_{(10)}$			
B	P	L	U
1	0	2	0

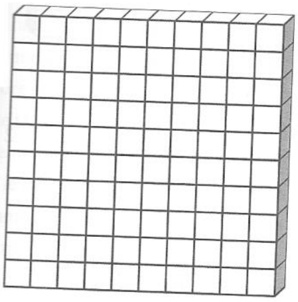
Blocchi Aritmetici Multibase in **base** 10.



1 LUNGO = 1 decina

(Raggruppamento del primo ordine)

1 corto = 1 unità

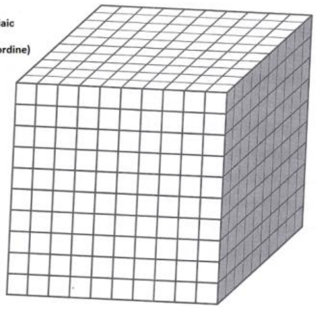


1 PIATTO = 1 centinaio

(raggruppamento del secondo ordine)

1 Cubo o Blocco=1 migliaio

(Raggruppamento del terzo ordine)



Rappresentazione mediante i **Blocchi Aritmetici Multibase** di due numeri in basi diverse.

$$22_{(109)} = 112_{(4)} \qquad 33_{(10)} = 1020_{(3)}$$

Rappresentare	CUBI	PIATTI	LUNGHI	UNITÀ
Ventidue in base quattro		1	1	2
Trentatré in base tre	1	0	2	0

Sistema posizionale **Raggruppamento in basi diverse**

Osservazione: Risulta evidente che nel sistema decimale il cubetto rappresenta le unità, il lungo le decine, il piatto le centinaia, il blocco o cubo le migliaia.

cubetti (singoli)	unità	potenza zero
lunghi (basi)	a cui corrispondono nelle varie basi la decina, la coppia, la terzina	potenza prima
piatti (quadrati)	nelle varie basi, il centinaio (base 10), la quartina (base due), la novina (base tre), il sedicetto (base quattro)	potenza seconda (quadrato)
cubi	migliaio (base 10), ottetto (base due), ventisettetto (base tre)…	potenza terza (cubo)

Gli abachi

Anche l'uso dell'abaco è molto valido realizzare raggruppamenti nelle varie basi.

Gli **abachi multibase** sono costituiti da:

(01) Una tavoletta nella quale sono fissate tre o quattro aste mobili

(02) nelle diverse basi di aste di varia altezza per permettere di operare

(03) Palline di colori diversi che si infilano nelle aste

Le aste dell' **abaco multibase** sono di diverse altezze e permettono di infilare un numero di palline paria quello della base considerata:

(01) La prima asta a destra rappresenta le **unità** e vi sono infilate palline nere o blu

(02) La seconda asta rappresenta i raggruppamenti del **primo ordine**, cioè con potenza pari ad 1 e vi sono infilate le palline rosse

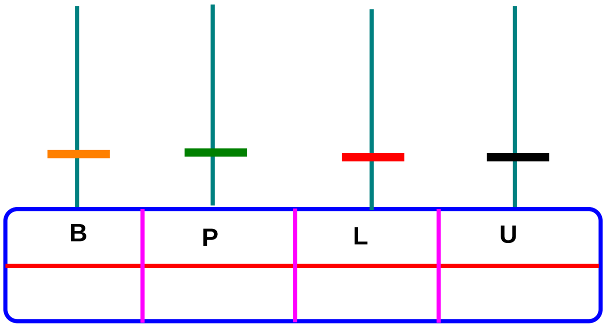
(03) La terza asta rappresenta i raggruppamenti del **secondo ordine**, cioè con potenza 2 e vi sono infilate le palline versi

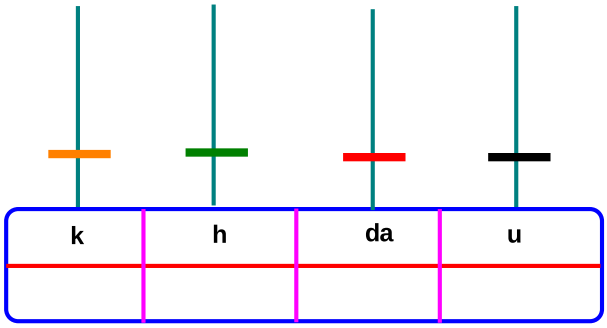
(04) La quarta asta rappresenta i raggruppamenti del **terzo ordine**, cioè con potenza 3 e vi sono infilate le palline arancioni.

Sull'abaco in base 10, su ogni asta possiamo infilare fino a 9 palline; se ho 10

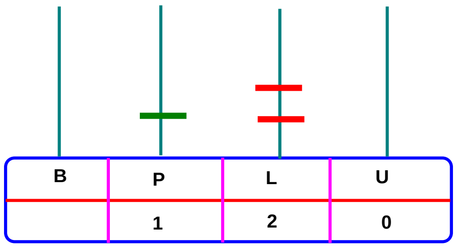
Unità di un certo ordine, le "**cambio**" con una sola pallina sull'asta successiva a sinistra e si procede in questo modo: dopo avere infilato nell'asta delle unità 10 palline, per continuare a contare si deve effettuare prima il "**cambio**", cioè sfilare dall'asta di destra le 10 palline e sostituirle con una pallina nell'asta immediatamente a sinistra che vale come **dieci unità**.

Lo zero è rappresentato da un'asta priva di palline.





Rappresentare sull'abaco il numero 24 (in base 10) in base 4.

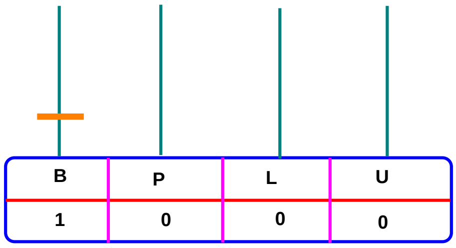


La pallina vale 4 unità; due palline valgono 8 unità La pallina vale 16 unità

$120_{(4)}$ si legge "uno due zero base quattro" Risulta

$120_{(4)} = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 16 + 8 = 24_{(10)}$

Rappresentare sull'abaco il numero 27 (in base 10) in base 3.

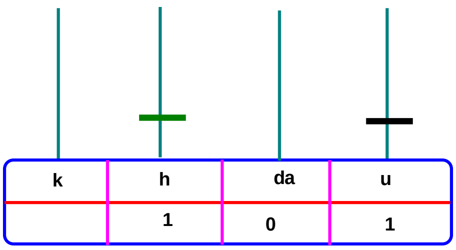


La pallina , essendo un blocco, rappresenta $3^3 = 27$ unità.

$1000_{(3)}$ si legge "uno zero zero zero base tre" Risulta

$$1000_{(3)} = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 27_{(10)}$$

Rappresentare sull'abaco il numero 101 (in base 10)



La pallina rappresenta 100 unità

La pallina rappresenta una unità

$1h$ vale un centinaio

$1u$ vale una unità