La dimostrazione per induzione in matematica

I procedimenti scientifici fondamentali,per dimostrare una relazione matematica o una legge fisica , sono quello induttivo e quello deduttivo . Si utilizza il **procedimento deduttivo** quando , partendo da ipotesi , da opportuni postulati e da teoremi dimostrati in precedenza , si deducono delle proposizioni utilizzando le regole che governano il ragionamento matematico . Il procedimento deduttivo è caratteristico del ragionamento matematico . Per questo motivo la struttura logica della geometria euclidea costituisce un modello per tutte le scienze esatte . Di natura del tutto diversa è l’altro metodo usato nell’indagine scientifica , l’induzione . E’ evidente che esiste una notevole differenza fra la dimostrazione per induzione usata nelle scienze sperimentali e quella usata in matematica . Il **principio di induzione completa** o **principio di induzione matematica** o **ragionamento per ricorrenza** è una potente procedura usata in aritmetica che ci consente di dimostrare in maniera rigorosa quello che abbiamo scoperto o formulato per altra via . L ‘espressione induzione matematica è un termine piuttosto infelice in quanto ci richiama alla mente il metodo induttivo proprio delle scienze sperimentali . Questo va dal particolare al generale e consiste nel ricavare , da un numero finito di osservazioni di un certo fenomeno una legge in grado di governare il fenomeno studiato . Questo procedimento induttivo (**induzione empirica**) ha ben poco a che fare con l’induzione matematica . Nell’interessante libro << **Il numero linguaggio della scienza** >> T. Dantzig così si esprime : << Questo procedimento induttivo , che è alla base di tutte le scienze sperimentali , è bandito dalla matematica . Non solo una simile dimostrazione di una proposizione matematica sarebbe considerata ridicola , ma essa non sarebbe nemmeno accettabile come verifica di una verità già stabilita . Infatti la prova ottenuta in un certo numero di casi non sarebbe considerata sufficiente per dimostrare una proposizione matematica , mentre basterebbe un solo esempio contrario per negare la validità di un enunciato >> .Nonostante il pericolo di confusione con il procedimento induttivo delle scienze sperimentali la locuzione **induzione matematica** è abbastanza diffusa e tradizionale anche se , **ragionamento per ricorrenza** , sarebbe la locuzione esatta .

Il **ragionamento per ricorrenza** implica due stadi :

1) Per prima cosa si deduce che la proposizione matematica che si vuole dimostrare è , secondo le vedute di **Bertrand Russell** , di tipo **ereditario** : cioè se la proposizione è vera per un qualsiasi elemento si può dimostrare che essa è vera anche per l’elemento successivo .

2) Successivamente si dimostra che la proposizione è vera per il primo elemento

La proposizione essendo vera per il primo termine sarà vera per il secondo , per il terzo e così di seguito , fino ad esaurire tutti gli elementi della successione .

Possiamo attribuire a Blaise Pascal , contemporaneo ed amico di Fermat , la prima esplicita formulazione del ragionamento per ricorrenza anche se non usa mai la parola **induzione** , come risulta leggendo la sua opera intitolata **Trattato sul triangolo aritmetico** , uscito postumo nel 1665 . Si servirono dell'**induzione empirica** insigni matematici come John Wallis (1616-1703) ed Eulero (1707-1783) . Questi illustri matematici erano convinti che l'induzione empirica , utilizzata << **cum grano salis** >> , poteva offrire risultati confrontabili con quelli raggiunti mediante una rigorosa dimostrazione di tipo deduttivo . **Pierre de Fermat** (**1601-1665**) e **Jakob Bernoulli** (1654-1705) polemizzarono vigorosamente contro l'uso dell'induzione empirica come procedimento avente valore di rigorosa ed ineccepibile dimostrazione matematica . In particolare Fermat distingueva nettamente tra il **modo di Conone** (induzione empirica) ed il **modo di Archimede** (dimostrazione rigorosa) affermando , senza mezzi termini , che il **modo di Conone** e quindi l'induzione empirica non poteva avere diritto di cittadinanza nel mondo della matematica .

Il primo matematico che usò il nome di induzione per indicare il procedimento di dimostrazione attualmente utilizzato fu il matematico **Gorge Peacock** (1791-1858) .Il nome di **induzione matematica** entrò ufficialmente nella letteratura scientifica nel 1838 con **Augustus De Morgan** (1806-1871) e si affermò definitivamente con **R. Dedekind** (1831—1916) nel 1888 .

Come si giustifica il nome di induzione matematica attribuito a questa procedura dimostrativa che non ha niente a che vedere con l'induzione empirica ? Con tutta probabilità la giustificazione di tale nome risiede nell'apparente ma non reale somiglianza con l'induzione empirica , nel senso che il teorema $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, qualunque sia il valore di n che gode della proprietà $P(n)$, ci potrebbe suggerire l'idea che se una proprietà vale per molti termini senza eccezione essa vale per tutti i termini considerati .

Enunciamo il principio di induzione completa secondo le vedute di **Peano :**

Se una proprietà $P(n)$ relativa ad un generico numero naturale n , è vera per $n = 1$ e se , ammessane la validità per un generico valore n , la si dimostra valida anche per il numero naturale $n + 1$, allora la proprietà è sempre valida .

Da quanto abbiamo detto , si intuisce che la dimostrazione per induzione serve a dimostrare la verità di una proprietà che abbiamo già intuito, anche attraverso un certo numero di prove riuscite .

Formulazione matematica del principio di induzione completa

Per ogni numero naturale n sia assegnata una proprietà $P(n)$.

1) Se è vera $P(1)$, cioè se la proprietà $P(n)$ è vera per $n=1$ (**base dell'induzione**)

2) Se la proprietà $P(n)$ è vera per il numero naturale k [$P(k)$ **passo dell'induzione**] e se dalla verità di $P(k)$ posso dedurre la verità di $P(k+1)$ [**ipotesi induttiva**]

allora la proprietà $P(n)$ è vera per tutti i numeri naturali n .

In simboli possiamo scrivere : $\boxed{\{P(1)\wedge\forall n,k\,[P(k)\rightarrow P(k+1)]\}\rightarrow P(n)\ \ \forall n\ \ con\ \ n\,k\in N}$

E' opportuno fare rilevare che una parte dell'ipotesi è a sua volta un teorema che bisogna dimostrare . Ed è proprio la dimostrazione di questo teorema la parte più impegnativa del ragionamento per induzione .

Per dimostrare con il **principio di induzione matematica** che una proprietà $P(n)$ è vera $\forall\ n \in N$ si procede come segue :

1) si verifica che $P(n)$ è vera per $n = 1$ (**base dell'induzione**)

2) si dimostra che $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ (**ipotesi induttiva**)

<< Utilizzando metodi elementari prima ed il principio di induzione matematica poi , dimostrare che la somma dei primi n numeri interi vale $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ **[1]** >>

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \\ & & 1 & 2 & 3 & & \cdots & & n-1 & & n \end{array} \qquad 2S_n = n(n+1) \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Utilizziamo il principio di induzione matematica per dimostrare l'identità [1] .

Base dell'induzione : la proposizione [1] è vera per $n = 1$. Infatti : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ cioè $1 = 1$ in quanto $S_1 = 1$

Ipotesi induttiva : Supponiamo che la proposizione [1] sia vera per il generico numero naturale n , cioè supponiamo che valga l'uguaglianza : $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ **[2]**

Se dimostriamo che la [1] è vera per il numero naturale $n+1$, cioè se dimostriamo che

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{cioè} \quad S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

allora la proposizione [1] è vera per ogni $n \in N - \{0\}$.

Aggiungendo ad ambo i membri della [2] il numero naturale $n + 1$ otteniamo :

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)$$

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \quad \text{cioè} \quad S_{n+1} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

La proprietà [1] è così dimostrata .

Una generalizzazione del principio di induzione matematica

Nella formulazione del principio di induzione matematica siamo partiti dal numero naturale 1. Ci sono, però, proprietà che non valgono per tutti i numeri naturali, ma solo per quelli maggiori di un assegnato numero naturale.

Principio di induzione matematica in forma generale

Sia $P(n)$ una proprietà relativa ai numeri naturali e sia a un assegnato numero naturale.

1) Se è vera $P(a)$, cioè se la proprietà $P(n)$ è vera per $n = a$ (**base dell'induzione**)

2) Se la proprietà $P(n)$ è vera per il numero naturale $k \geq a$ [$P(a)$ **passo dell'induzione**]

e se dalla verità di $P(k)$ posso dedurre la verità di $P(k+1)$ [**ipotesi induttiva**]

allora la proprietà $P(n)$ è vera per tutti i numeri naturali $n \geq a$.

In simboli possiamo scrivere : $\boxed{\{P(a) \wedge \forall n, k\,[P(k) \rightarrow P(k+1)]\} \rightarrow P(n) \quad \forall n \geq a \;\; con \;\; a\,,\, n\,k \in N}$

Formulare una congettura per determinare la somma dei primi n numeri dispari e, poi, dimostrare la formula per induzione.

La congettura si ottiene analizzando alcuni casi particolari :

$n = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = 1$

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

$n = 3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$n = 4 \quad \Rightarrow \quad S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Dimostriamo per induzione che la somma dei primi n numeri dispari è n^2 , cioè dimostriamo la seguente formula : $\boxed{S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2}$

Base induttiva : per $n = 1$ la formula è vera in quanto risulta : $1 = 1^2$

Ipotesi induttiva : dimostriamo che $S_n = n^2 \Rightarrow S_{n+1} = (n + 1)^2$

Per ipotesi sappiamo che : $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Se ad ambo i membri aggiungiamo il termine $(2n + 1)$ otteniamo :

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$ cioè : $S_{n+1} = (n + 1)^2$

Vogliamo formulare una **congettura** che ci consenta di calcolare la somma delle prime n potenze del 2 , cioè vogliamo individuare una formula che ci consenta di calcolare :

$$S_n = 2^0 + 2^1 + e^2 + \cdots\cdots + 2^{n-1} \quad \text{con} \quad n \in N = \{0,1,2,3,\cdots\}$$

Attraverso l'esame dei seguenti casi particolari :

$S_1 = 1$, $S_2 = 3 = 2^2 - 2$, $S_3 = 7 = 2^3 - 1$, $S_4 = 15 = 2^4 - 1$

possiamo ipotizzare che $S_n = 2^n - 1$. La dimostrazione per induzione darà certezza alla congettura formulata . Dimostriamo per induzione che risulta : $S_n = 2^n - 1$

$S(1) = 1$ è vera Se dimostro che $S(k) \Rightarrow S(k+1)$ posso affermare di avere dimostrato che $S_n = 2^n - 1$

$S(k) = 2^k - 1 \Rightarrow 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ Ai due membri di questa uguaglianza aggiungiamo 2^k . Otteniamo : $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k$

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1$, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$

$S(k + 1) = 2^{k+1} - 1$ c.d.d.

Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri quadrati perfetti è :

$\boxed{S_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}$ cioè : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}$

Verifichiamo la formula per il caso particolare $n = 1$ $S_1 = \frac{1(1 + 1)(2 + 1)}{6} = 1$

e poi dimostriamo che $S_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \Rightarrow$

$$S_{n+1} = \frac{(n + 1)(n + 2)\left[2(n + 1) + 1\right]}{6} = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Dimostrare per induzione che : $\boxed{S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

Verifico l'uguaglianza per $n = 1$ $\quad 1 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 \quad 1 = 1$

Poi verifico l'implicazione $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \Rightarrow S_{n+1} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Mediante il principio d'induzione matematica dimostrare che:

$$\boxed{S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$$

ove S_n rappresenta la somma di n termini in progressione geometrica di ragione **q** .

1) Dimostriamo che la formula è vera per $n = 1$: $\quad S_1 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = 1$

2) Supposta vera per n dimostriamo che l'uguaglianza è vera per $n+1$, cioè dimostriamo l'implicazione : $\quad S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_n + q^n = \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \text{ implica } S_{n+1} = \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Applicando il principio di induzione dimostrare che : $\boxed{3^n > 3n}$ [1] per $n \geq 2$

1) La [1] è vera per $n = 2$. Infatti risulta : $9 > 6$

2) Adesso dimostro che : $3^n > 3n \Rightarrow 3^{n+1} > 3(n+1)$

$$\begin{array}{cccc} 3^n & > & 3n & per \quad n \geq 2 \\ 2\cdot 3^n & > & 3 & per \quad n \geq 2 \\ \hline 3\cdot 3^n & > & 3n+3 & per \quad n \geq 2 \end{array}$$

sommo membro a membro $3^{n+1} > 3(n+1)$ per $n \geq 2$

Salvatore Amico