Le parole della matematica

Antinomia : L **'antinomia** è una proposizione autocontraddittoria . In matematica si dice che si ha una **antinomia** quando, data una asserzione **A**, si dimostra tanto che << **A è vera** >> quanto che **è falsa**

Famosa è l' **antinomia del mentitore** attribuita ad Epimenide , uno dei sette sapienti dell'antichità , nativo di Cnosso nell'isola di Creta fra il 7° ed il 6° secolo avanti Cristo .

Essa viene formulata nella seguente maniera: << **Epimenide afferma che tutti i Cretesi sono mentitori . Epimenide dice la verità o mente ?**

Se dicesse la verità, egli [essendo cretese] mentirebbe , viceversa se mentisse direbbe la verità >>

Siamo in presenza di una antinomia in quanto Epimenide nell'esprimere la sua opinione contemporaneamente mente e dice la verità .

Un'altra **antinomia** famosa è quella del **barbiere** . In un villaggio viveva un barbiere il quale aveva l'obbligo di radere tutti coloro e soltanto coloro che non si radevano da sé .

Il povero barbiere non sapeva come regolarsi per quanto riguardava la sua persona : doveva o non doveva radersi ? In un primo momento pensò che dovesse radersi , ma poi osservò che in tal modo egli diveniva uno di coloro che si radevano da sé e questo gli era proibito .

Pensò allora che non dovesse radersi . Ma cosi facendo egli diveniva uno di coloro che non si radevano da sè e quindi era obbligato a radere questa persona, cioè era obbligato a radere se stesso .

Ecco dunque l'antinomia : egli era obbligato contemporaneamente a radersi e a non radersi .

Equazione : Siano $A(x)$ e $B(x)$ due generici polinomi in x . L ' uguaglianza $\boxed{A(x) = B(x)}$ posta allo scopo di stabilire se esistono valori numerici della **x** che rendono il primo membro numericamente uguale al secondo membro dicesi **equazione ad una incognita** . Con altre parole possiamo affermare che l ' **equazione è una uguaglianza condizionata** , cioè una uguaglianza verificata un numero finito di volte .

L ' uguaglianza $\boxed{x + 1 = 2x}$ è una **equazione** in quanto l ' uguaglianza tra i polinomi $x + 1$ e $2x$ si verifica una sola volta , precisamente quando attribuiamo alla **x** il valore **1** .

OSSERVAZIONE

Una **identità** esprime un **teorema** , una <u>equazione</u> esprime una problema .

La variabile che figura nell ' equazione dicesi **incognita** dell ' equazione . I valori dell'incognita che verificano l ' equazione sono le **soluzioni** o le <u>radici</u> dell ' equazione .

L ‘ espressione algebrica scritta alla sinistra del simbolo di uguaglianza << = >> dicesi **primo membro** dell ’ equazione l ’ altra , posta alla destra del segno = , dicesi **secondo membro** .
Risolvere una equazione significa trovare le soluzioni dell’equazione . Una equazione i cui termini hanno soltanto coefficienti numerici dicesi **equazione numerica** , mentre dicesi **equazione letterale** se almeno un termine di essa ha coefficiente letterale .
Una **equazione** si dice **intera** se l’incognita non figura in nessun denominatore , altrimenti dicesi **fratta** o **frazionaria** . Due equazioni si dicono **equivalenti** se ogni soluzione della prima è soluzione della seconda e viceversa ogni soluzione della seconda è anche soluzione della prima .
La risoluzione delle equazioni si basa su alcuni principi fondamentali :

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o togliendo ad ambo i membri di una equazione una stessa espressione algebrica si ottiene una equazione equivalente alla data . In simboli abbiamo :

$$\boxed{A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) \pm M(x) = B(x) \pm M(x)}$$

Dal principio di equivalenza si deducono i seguenti corollari

COROLLARIO N° 1

In una equazione si può trasportare un termine da un membro all’altro , purché lo si cambi di segno

COROLLARIO N° 2

Se nei due membri di un ’ equazione figurano due termini uguali e con lo stesso segno , essi si possono eliminare

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo i due membri di un ’ equazione per un numero diverso da zero o per una espressione algebrica diversa da zero e non contenente l ’ incognita si ottiene una equazione equivalente alla data .

COROLLARIO

Cambiando il segno a tutti i termini del primo e del secondo membro di un’equazione (il significa **moltiplicare ambo i membri per** -1) si ottiene una equazione equivalente alla data .

Terzo principio

Una equazione che sia il prodotto uguagliato a zero di polinomi contenenti l’incognita è equivalente alle equazioni che si ottengono uguagliando a zero i singoli polinomi

$$\boxed{A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \text{ oppure } B(x) = 0 \text{ oppure } C(x) = 0}$$

OSSERVAZIONE

Ogni equazione $A(x) = B(x)$ può essere ricondotta alla seguente forma : $\boxed{P(x) = 0}$

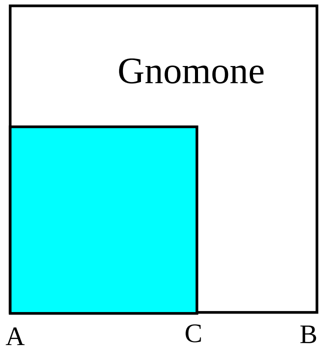
dove $P(x)$ è un polinomio di grado **n** che dicesi anche **grado dell ' equazione** .

Infatti basta eseguire tutte le operazioni indicate nei due membri dell ' equazione , portare tutti i termini ottenuti al primo termine e sommare i termini simili .

Gnomone

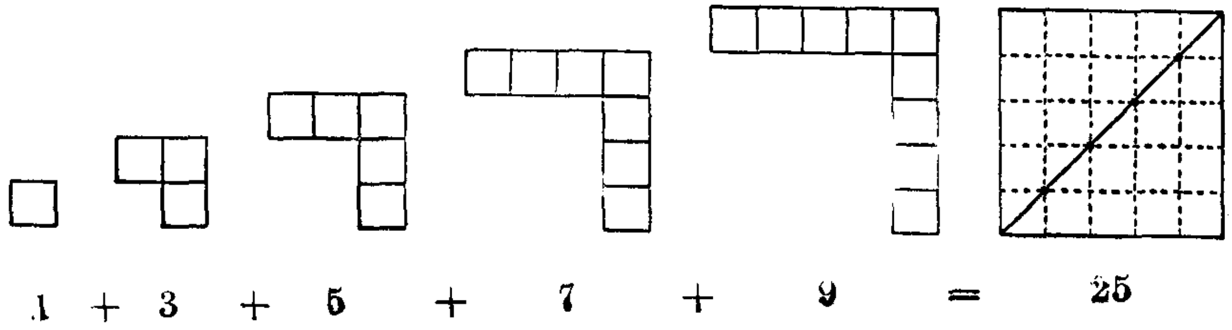
a) Stilo la cui ombra serve a segnare le ore negli orologi a sole o meridiane .

b) Figura geometrica piana costituita da ciò che rimane di un quadrato di lato AB se da esso si togli un quadrato di lato AC (essendo C un punto interno di AB) . Il termine fu usato dai pitagorici nella loro teoria dei numeri quadrati , con significato analogo .



c) **Gnomone** significa << **conoscitore** >> . Il **teorema dello gnomone** ebbe una parte considerevole nello studio dell' **aritmo-geometria** di Pitagora . E' utilizzato in numerose costruzioni riguardanti le aree dei poligoni ed in molteplici applicazioni e problemi . Per Pitagora lo **gnomone** era un numero dispari .

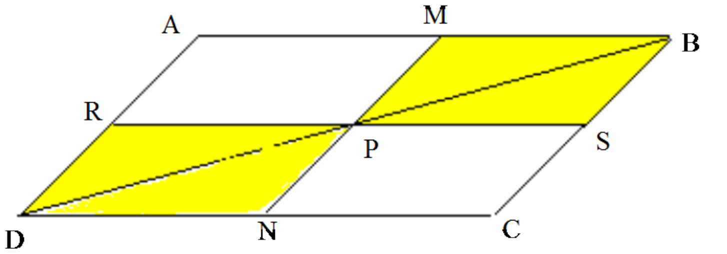
Ad esempio , i più semplici gnomoni , quelli provenienti da quadrati , danno la seguente notevole proprietà : **la somma dei numeri dispari consecutivi , comunque estesa , è sempre il quadrato di un numero intero** . Basta osservare i seguenti gnomoni che sommati formano sempre un quadrato .



Teorema dello gnomone

Se per un punto di una diagonale di un parallelogramma si conducono le parallele ai lati , il parallelogramma rimane scomposto in altri 4 parallelogrammi dei quali i due non attraversati dalla diagonale sono **equivalenti**.

Dimostrazione



$$Hp\begin{cases} MN \parallel BC \parallel AD \\ RS \parallel AB \parallel CD \\ P \in BD \end{cases}$$

$$Th\left\{ AMPR \doteq PSCN \right.$$

Ricordando che ogni diagonale di un parallelogramma lo divide in due triangoli uguali possiamo scrivere : $A\hat{B}D = B\hat{D}C$, $M\hat{P}B = B\hat{S}P$, $R\hat{P}D = N\hat{P}D$

$$\begin{array}{ccc} ABD & = & BDC \\ RPD & = & NPD \\ MPB & = & BSP \\ \hline ABD - RPD - MPB & \doteq & BDC - NPD - BSP \end{array} \quad \Rightarrow \quad AMPR \doteq PSCN$$

Identità : Dicesi **identità** l ' uguaglianza tra due espressioni algebriche verificata da tutti i possibili valori numerici assegnati a tutte le lettere che vi figurano . Con parole diverse possiamo dire che l ' **identità** è una **uguaglianza incondizionata** .

L ' uguaglianza $(2x - y)^2 = y^2 + 4x^2 - 4xy$ è una **identità** in quanto qualunque siano i valori numerici attribuiti alla **x** ed alla **y** il primo membro è sempre numericamente uguale al secondo membro .

Numeri algebrici e trascendenti

Dicesi **numero algebrico** ogni numero reale o complesso che possa essere soluzione di una **equazione algebrica** , cioè di una equazione riconducibile alla forma $P(x) = 0$ dove $P(X)$ è un polinomio di grado n con coefficienti interi primi fra di loro .

$\sqrt{3}$ è un **numero algebrico** in quanto è soluzione dell’equazione algebrica $x^2 - 3 = 0$, $-\frac{2}{7}$ è un **numero algebrico** in quanto è soluzione dell’equazione algebrica $7x + 2 = 0$. Anche solo da questi esempi si rileva che un **numero algebrico** può essere razionale , irrazionale o complesso .

I numeri non algebrici si dicono **trascendenti** . I **numeri trascendenti** sono soluzioni di equazioni non algebriche , cioè di equazioni che non possono assumere la forma $P(x) = 0$. Tutti i numeri trascendenti sono **irrazionali** . Numeri trascendenti particolarmente importanti sono il numero **e** ed il numero π (pi greco) . I numeri trascendenti debbono il loro nome al grande matematico **Eulero** che , riferendosi ad essi , ebbe a dire : << **questi numeri trascendono il potere dei metodi algebrici** >> .

Numeri amicabili

In aritmetica , due numeri interi si dicono **amicabili quando la somma dei divisori di ciascuno di essi , escluso il numero stesso , è uguale all’altro .**

Sono **amicabili** i numeri 220 e 284 . Infatti i divisori di 220 sono $1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110$ la cui somma è 284 . I divisori di 284 sono $1,2,4,71,142$ la cui somma è 220 . Altre coppie di **numeri amicabili** sono : $(2620,2924)$, $(5020,5564)$. I numeri amicabili di se stessi (come il numero $6 = 1 + 2 + 3$) sono detti **numeri perfetti** .

Numeri primi

Un numero intero è detto **numero primo** quando è divisibile soltanto per se stesso e per l’unità . **Numeri primi fra di loro** sono numeri interi che non hanno alcun divisore comune diverso da 1 .

Numeri composti

Sono chiamati **composti** i numeri interi maggiori di 1 e non primi . I **numeri composti** sono sempre il prodotto di due o più fattori primi .

Numeri eteromechi

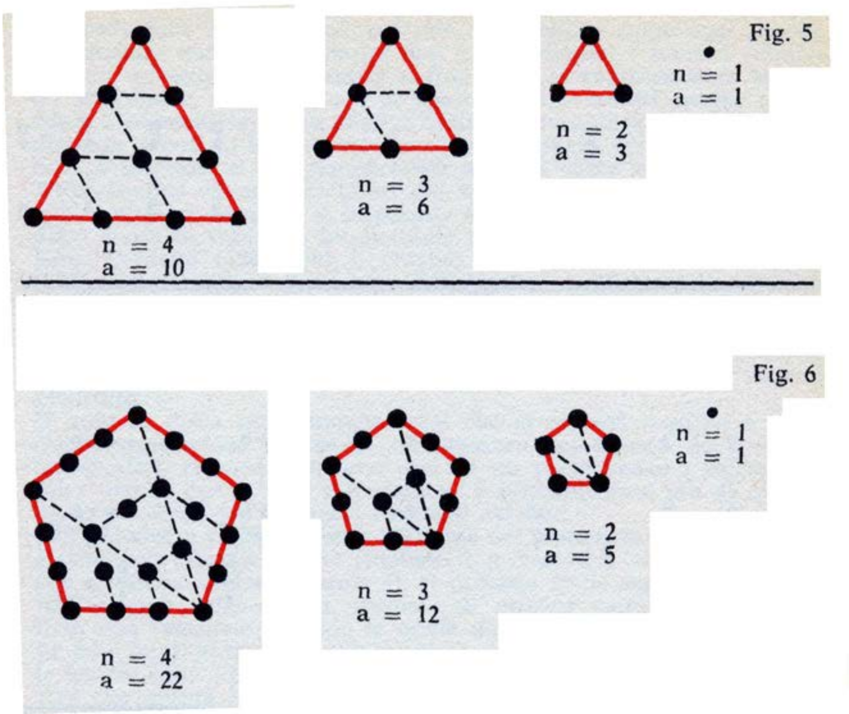
I greci chiamavano **numeri eteromechi** i numeri interi prodotti di due numeri interi consecutivi . I numeri del tipo $(n - 1)n$ o del tipo $n(n + 1)$ sono numeri eteromechi .

Numeri figurati

In aritmetica si dicono **numeri figurati** i numeri rappresentati con un gruppo di punti disposti in modo da formare una figura geometrica regolare piana quale il **triangolo** , il **quadrato** , il **pentagono** , oppure una figura regolare solida quale il **tetraedro** o il **cubo** .

I **numeri figurati** esprimono il numero di punti che servono per costruire una figura geometrica regolare . Nel **piano** abbiamo i **numeri triangolari** che si ricavano utilizzando la formula $a = \frac{n(n+1)}{2}$ (vedere Fig. 5) , i **numeri quadrati** , i **numeri pentagonali** che si ricavano utilizzando la formula $a = \frac{n(3n-1)}{2}$ (vedere Fig. 6) .

Nello **spazio** , si hanno numeri figurati come nel piano . Sono **numeri figurati** nello **spazio** i **numeri piramidali** detti così perché costituiti dai vari strati triangolari o quadrati con i quali , sovrapposti , è possibile costruire una piramide a base quadrata o triangolare .



Numeri imperfetti

In aritmetica si dicono **numeri imperfetti** , per difetto o per eccesso , i numeri troppo piccoli o troppo grandi per essere **numeri perfetti** .

Consideriamo il numero 14 . Addizionando i suoi divisori che sono (escluso il numero stesso) 1 , 2 , 7 otteniamo 10 . Il numero 14 è maggiore della somma dei suoi divisori e per questo motivo lo chiameremo **imperfetto per eccesso** .

La somma dei divisori del numero 12 è 16 (maggiore di 12) e per questo motivo diremo che il numero 12 è un **numero imperfetto per difetto** . Ma in un **numero perfetto** non c'è eccesso né difetto : il **numero è uguale alla somma dei suoi divisori** .

Numeri perfetti

In aritmetica si dicono **perfetti** i numeri uguali alla somma di tutti i loro divisori , escluso il numero stesso . Sono **numeri perfetti** : $6 = 1 + 2 + 3$ $28 = 1 + 2\ 4 + 7 + 14$. I **numeri perfetti** sono **numeri amicabili** di se stessi .

Numeri planici

In aritmetica sono detti **planici** i numeri formati dalla somma di un quadrato e della sua radice . Sono **planici** i seguenti numeri :

$$6 = 2^2 + 2 \qquad 12 = 3^2 + 3 \qquad 20 = 4^2 + 4 .$$

Numeri pitagorici

Termine con il quale si indicano le terne di numeri naturali che soddisfano l'equazione pitagorica $x^2 + y^2 = z^2$. Esempi di terne pitagoriche : $(3,4,5)$ $(6,8,10)$.

Il primo matematico che riuscì a determinare tutte le possibili terne pitagoriche fu **Diofanto** (matematico greco di Alessandria , vissuto nel III secolo d.C.) .

Il sistema $\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ ci fornisce i valori di tutte le possibili terne pitagoriche , essendo m ed n numeri naturali arbitrari con $m > n$. Per $m = 3$ ed $n = 2$ otteniamo la terna pitagorica $(5,12,13)$.

Numeri razionali e numeri irrazionali

I numeri razionali sono quelli che si possono porre sotto forma di frazioni , i numeri irrazionali sono quelli che non si possono mettere sotto forma di frazioni .

Un numero che sia razionale o irrazionale dicesi **reale** .

Paradosso : Il termine **paradosso** è usato per indicare una dimostrazione che , partendo da presupposti ritenuti validi , giunge a conclusioni che contrastano con il senso comune o che sembrano smentite dall'evidenza empirica . Quindi il **paradosso** è una affermazione solo apparentemente contraddittoria .

Paradossi della fisica

Paradosso idrostatico (botte di Pascal) : << con un litro di è acqua è possibile rompere una robusta botte di vino contenente 100 litri di vino . >>

Paradosso degli orologi : paradosso derivante dalla dilatazione temporale nella teoria della relatività per cui , ad esempio , un astronauta che si muovesse a velocità prossima a quella della luce , dopo il ritorno sulla terra avrebbe meno anni di un altro , coetaneo , rimasto sulla terra .

Paradossi matematici

<< I numeri pari sono tanti quanti sono i numeri naturali >>

I punti di un segmento AB sono tanti quanti i punti di una retta >>

<< I punti di un segmento sono tanti quanti sono i punti del quadrato costruito sul segmento stesso >>

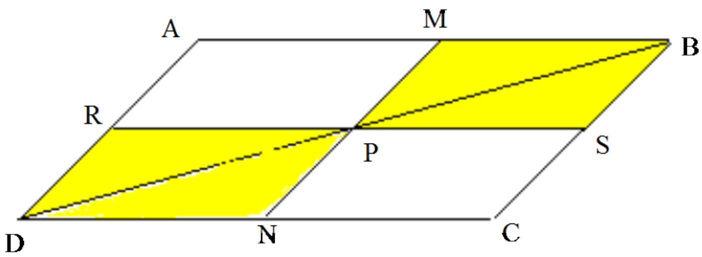
Si tratta di affermazioni vere che sembrano contrastare il senso comune secondo il quale il tutto non può essere uguale ad una sua parte . Però questo è vero per gli insiemi finiti , ma non è vero per gli insiemi infiniti . Infatti noi sappiamo che un insieme è infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte .

Sofisma

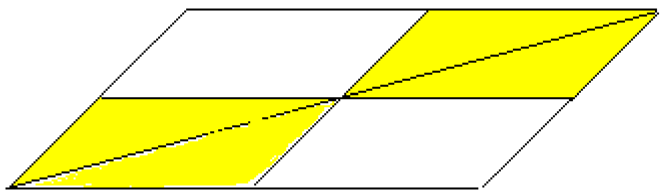
- **Sofisma matematico : dimostrazione apparentemente rigorosa , che conduce ad un risultato palesemente assurdo .**
- **Sofisma filosofico : ragionamento che , partendo da premesse vere o verosimili e rispettando le regole del ragionamento , perviene ad una conclusione assurda .**

Famosi sono i quattro sofismi di Zenone mediante i quali l'illustre filosofo voleva dimostrare che **non plausibile né la concezione pitagorica della suddivisione dello spazio e del tempo in un numero finito di elementi indivisibili , né la concezione post pitagorica di uno spazio e di un tempo concepiti come un insieme di infiniti elementi primordiali (indivisibili) . In sintesi Zenone riteneva che non era possibile concepire le grandezze spazio e tempo discrete e nemmeno continue . Alcuni storici ritengono che Zenone con i suoi quattro sofismi voleva soltanto evidenziare che l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo non possono essere trattati con le stesse regole valide per le grandezze finite .**

Con i sofismi della << dicotomia >> e di << Achille piè veloce >> Zenone voleva dimostrare che il movimento è impossibile se ammettiamo l'infinita suddivisibilità del tempo e dello spazio , mentre con i sofismi della << freccia >> e dello << stadio >> voleva dimostrare che il movimento è ugualmente impossibile se ammettiamo il contrario , cioè se ammettiamo la suddivisibilità dello spazio e del tempo mediante un numero finito di elementi indivisibili .



$$Hp\begin{cases} MN \parallel BC \parallel AD \\ RS \parallel AB \parallel CD \\ P \in BD \end{cases} \qquad Th\left\{ AMPR \doteq PSCN \right.$$



Dimostra questo teorema che ha avuto tanta importanza nella storia della matematica

.

Asterisco di matematica N° 6 : teorema dello gnomone

Fig. 5

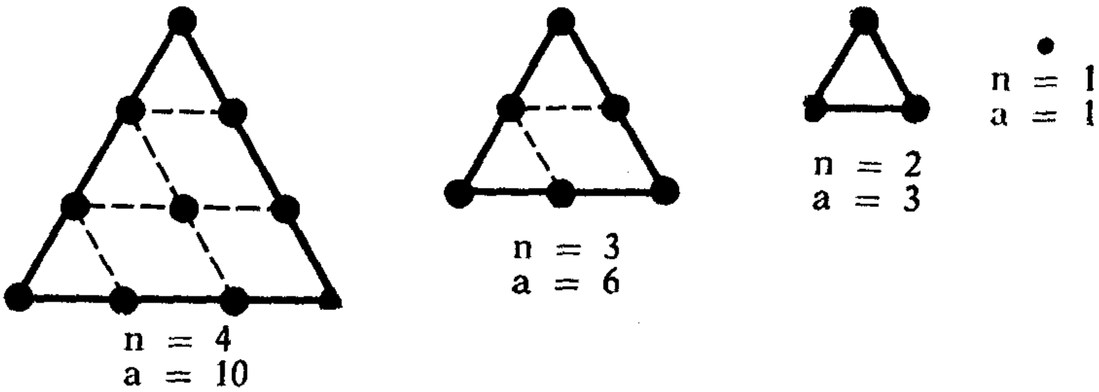
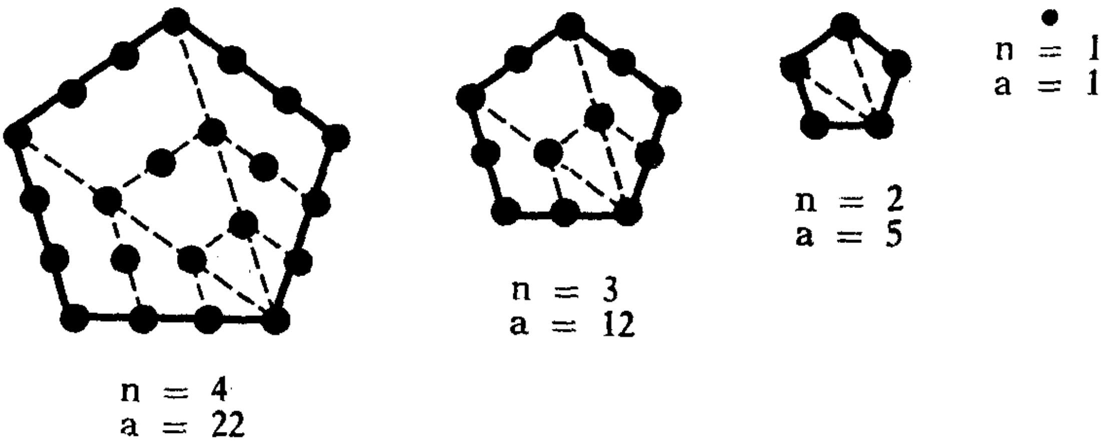


Fig. 6



Antinomie e paradossi

PARADOSSO