

Presentazione

*
* * *

La scomparsa di Ettore Majorana non è più un mistero

La sete di conoscenza ha spinto l'uomo a varcare "le colonne d'Ercole" in perenne sfida con la Divinità. L'Albero della Conoscenza, il morso furtivo alla mela dato da Adamo consigliato da Eva; Prometeo che ruba i segreti degli Dei e consegna il fuoco agli uomini; l'esplorazione del Cielo e delle profondità marine; l'origine, la nascita, l'evoluzione della Vita; l'Ignoto, tutto, ha rappresentato e rappresenta per l'uomo desiderio costante di scoperta e di invenzione in un processo inarrestabile di ricerca, che, comunque, alla fine porta a Dio. Nota è la riflessione di Werner Heisenberg: "il primo sorso al bicchiere della Scienza rende atei, ma in fondo al bicchiere si trova Dio: Egli è là che aspetta".

La conoscenza, del resto, deve essere processo continuo, non staticità, che ne determinerebbe la consunzione e la fine. Torna utile citare il teorema dell'incompletezza formulato dal Matematico Kurt Gödel: quale che sia l'apparato di cui ci dotiamo per dominare la Matematica, comunque ci sarà qualche verità matematica che, in linea di principio, ci sfuggirà; ossia, non potremo mai indicare un insieme di principi e dire "da questi assiomi si possono dedurre tutte le verità matematiche"; ovvero, nessuna verità è definitivamente acquisita. Le intenzioni di Gödel, in ogni caso, non furono certamente quelle di una diminuzione del valore della Matematica: egli indicava la prova dell'apertura e della creatività della disciplina.

Tornando alle "colonne d'Ercole", la nostra Scuola, i miei alunni, i miei docenti ed io, (si parva licet componere magnis), di gran lunga più umilmente, abbiamo tentato, sempre per desiderio di conoscenza, di varcare e di passare oltre la soglia dei nostri modesti laboratori; nessuna presunzione di sfida o di superba indagine, quindi, ma volontà di approfondimento ed orgoglioso impegno hanno caratterizzato il lavoro della presente pubblicazione; soltanto amore di ricerca, nient'altro.

Tra gli argomenti trattati: - una descrizione che ricostruisce in maniera puntuale i vari aspetti della vita di Pitagora, Principe del numero, architetto della linea, amministratore sagace, musico eccellente, protofilosofo che amava circondarsi della dolcezza femminile.- Il fascino dell'Infinito. -L'armonia della Sezione Aurea, divina proporzione, generatrice di Bellezza.- Alcune proposte didattiche con suggerimenti, spunti, invito alla riflessione.

In questa pagina, infine, la comunicazione della realizzazione di un desiderio: una ricerca fortunata, l'emozione di una scoperta. La scomparsa di Ettore Majorana non è più un mistero.

Nella primavera del 1998, in occasione dell'organizzazione di una cerimonia commemorativa del 60° anniversario della scomparsa di Ettore Majorana, su suggerimento del professor Elio Tartaglione, come afferma e riferisce il professor Bruno Preziosi del Dipartimento di Scienze Fisiche di Napoli, fu invitata alla cerimonia stessa (alla quale intervennero anche alcuni cugini di Majorana venuti da Catania) la signora Gilda Senatore Cennamo, allieva del corso tenuto dal Majorana.

La signora Senatore disse che il giorno prima della partenza per Palermo, Majorana andò in Istituto nella saletta dove usualmente teneva lezione, la avvicinò e le consegnò un blocco di appunti dicendole: “li conservi. Poi ne parleremo”. Gli appunti, poi, per una serie di circostanze giunsero ad Edoardo Amaldi.

La signora li tenne con sé per alcuni mesi, durante i quali ebbe modo di verificare che gli appunti si riferivano a tutte le lezioni, compresi quelli riguardanti una lezione non tenuta relativa al neutrino, forse appunti per un lavoro. Dopo un lungo periodo di tempo, la Senatore, considerata la mancanza di notizie, consegnò il materiale al fidanzato, poi marito, Francesco Cennamo, assistente del professor Carrelli, a cui in seguito gli appunti furono dati e che successivamente li passò ad Edoardo Amaldi.

Di Ettore Majorana, dopo quel giorno dell'incontro con l'allieva, non si ebbero più notizie.

Varie furono le ipotesi sulla sua scomparsa: poetica ed affascinante quella di Leonardo Sciascia secondo il quale il professore si era ritirato in un Convento.

Orbene, qualche anno fa, senza nessuna pretesa di fissare e stabilire la verità, ma solo per amore di ricerca storica, per interesse nei confronti della vita di chi aveva contribuito ad ampliare le nostre conoscenze, animato da quella “curiositas” che caratterizzò i primi Umanisti alla ricerca di notizie e manoscritti, mi sono sentito attratto dal desiderio di scoprire qualche indizio. Una serie di fortunate circostanze, una serie di favorevoli improvvise inattese coincidenze mi hanno convinto a proseguire nella ricerca: è stato come se la mia mente e le mie azioni fossero guidate da una “mano” esterna superiore che mi spingeva a continuare verso una scoperta sempre nuova, non scientifica certamente, ma comunque storica.

E come un mosaico, di tassello in tassello, si è presentata ai miei occhi l'emozionante conclusione, senza merito personale alcuno se non quello dell'ostinazione nell'indagine e nell'acquisizione di nuove prove e testimonianze; partendo dall'ipotesi accattivante di Sciascia, di notizia in notizia, una vacanza strana, l'incontro con un medico, ora primario di un'Azienda ospedaliera, la visita alla Certosa di Serra San Bruno, l'accesso ricercato e non concesso, l'ingresso furtivo casuale all'interno del “riservato” della Certosa, l'incontro provvidenziale con un monaco, la notizia e le informazioni acquisite, il viaggio al Convento Santa Croce nei pressi di Vienna, un altro monaco, una conferma, la gioia di una conquista: in una prossima pubblicazione saranno riferiti i dettagli, la cronistoria, la storia. Al lettore tenterò di comunicare e partecipare l'emozione della scoperta: **la scomparsa di Ettore Majorana non è più un mistero.**

Il Fisico-Matematico preferì continuare a trascorrere gli anni della sua vita nel silenzio operoso della Certosa lontano dai “rumori” della Civiltà e del progresso, a contatto con la Natura, dove la mente si esercita al Bene, dove lo Spirito si vivifica, dove l'anima si avvicina a Dio e torna al Padre.

Giuseppe Gesa

Preside del Liceo Scientifico “P.S. Mancini”

La dimostrazione per induzione in matematica

I procedimenti scientifici fondamentali, per dimostrare una relazione matematica o una legge fisica, sono di tipo induttivo o deduttivo. Si utilizza il **procedimento deduttivo** quando, partendo da ipotesi, da opportuni postulati e da teoremi dimostrati in precedenza, si deducono delle proposizioni utilizzando le regole che governano il ragionamento matematico. Il procedimento deduttivo è caratteristico del ragionamento matematico. Per questo motivo la struttura logica della geometria euclidea costituisce un modello per tutte le scienze esatte. Di natura del tutto diversa è l'altro metodo usato nell'indagine scientifica, l'induzione. Infatti esiste una notevole differenza fra la dimostrazione per induzione usata nelle scienze sperimentali e quella usata in matematica. Il **principio di induzione completa** o **principio di induzione matematica** o **ragionamento per ricorrenza** è una procedura usata in aritmetica per dimostrare in maniera rigorosa quello che abbiamo scoperto o formulato per altra via. L'espressione induzione matematica è piuttosto infelice in quanto ci richiama alla mente il metodo induttivo proprio delle scienze sperimentali. Questo va dal particolare al generale e consiste nel ricavare, da un numero finito di osservazioni di un certo fenomeno una legge in grado di governare il fenomeno studiato. Questo procedimento induttivo (**induzione empirica**) ha ben poco a che fare con l'induzione matematica. Nell'interessante libro <<Il numero linguaggio della scienza>> T. Dantzig così si esprime: <<**Questo procedimento induttivo, che è alla base di tutte le scienze sperimentali, è bandito dalla matematica. Non solo una simile dimostrazione di una proposizione matematica sarebbe considerata ridicola, ma essa non sarebbe nemmeno accettabile come verifica di una verità già stabilita. Infatti la prova ottenuta in un certo numero di casi non sarebbe considerata sufficiente per dimostrare una proposizione matematica, mentre basterebbe un solo esempio contrario per negare la validità di un enunciato**>>. Nonostante il pericolo di confusione con il procedimento induttivo delle scienze sperimentali, la locuzione **induzione matematica** è abbastanza diffusa e tradizionale anche se, **ragionamento per ricorrenza**, sarebbe la locuzione esatta.

Il **ragionamento per ricorrenza** presuppone due fasi:

- 1) Si dimostra innanzitutto che la proprietà $P(n)$ è vera per il primo elemento, cioè si dimostra che $P(1)$ è vera.
- 2) Poi si verifica che la proprietà matematica $P(n)$ che si vuole dimostrare è, secondo le vedute di **Bertrand Russell**, di tipo **ereditario**: cioè se la proprietà $P(n)$ è vera per un qualsiasi elemento, si può dimostrare che essa è vera anche per l'elemento successivo. La proprietà essendo vera per il primo elemento sarà vera per il secondo, per il terzo e così di seguito, fino ad esaurire tutti gli elementi della successione, cioè la proprietà $P(n)$ sarà vera per tutti i numeri naturali. Possiamo attribuire a **Blaise Pascal**, contemporaneo ed amico di Fermat, la prima esplicita formulazione di un ragionamento per ricorrenza anche se egli non usa mai la parola **induzione**, come risulta leggendo la sua opera intitolata **Trattato sul triangolo aritmetico**, uscito postumo nel 1665. Si servirono dell'**induzione empirica** insigni matematici come John Wallis (1616-1703) ed Eulero (1707-1783). Questi illustri matematici

erano convinti che l'induzione empirica, utilizzata <<cum grano salis>>, poteva offrire risultati confrontabili con quelli raggiunti mediante una rigorosa dimostrazione di tipo deduttivo.

Pierre de Fermat (1601-1665) e **Jakob Bernoulli** (1654-1705) polemizzarono energicamente contro l'uso dell'induzione empirica come procedimento avente valore di rigorosa ed ineccepibile dimostrazione matematica.

In particolare Fermat distingueva nettamente tra il **modo di Conone** (induzione empirica) ed il **modo di Archimede** (dimostrazione rigorosa) affermando, senza mezzi termini, che il **modo di Conone** e quindi l'induzione empirica non poteva avere diritto di cittadinanza nel mondo della matematica.

Il primo matematico che usò il nome di induzione per indicare il procedimento di dimostrazione attualmente utilizzato fu il matematico **George Peacock** (1791-1858). Il nome di **induzione matematica** entrò ufficialmente nella letteratura scientifica nel 1838 con **Augustus De Morgan** (1806-1871) e si affermò definitivamente con **R. Dedekind** (1831—1916) nel 1888.

Come si giustifica il nome di induzione matematica attribuito a questa procedura dimostrativa che non ha niente a che vedere con l'induzione empirica? Con tutta probabilità la giustificazione di tale nome risiede nell'apparente ma non reale somiglianza con l'induzione empirica, nel senso che il teorema $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, qualunque sia il valore di n che gode della proprietà $P(n)$, ci potrebbe suggerire l'idea che, se una proprietà vale per molti termini senza eccezione, essa vale per tutti i termini considerati.

Enunciamo il principio di induzione completa secondo le vedute di Peano:

Se una proprietà $P(n)$ relativa ad un generico numero naturale n , è vera per $n = 1$ e se, ammessane la validità per un generico valore n , la si dimostra valida anche per il numero successivo $n + 1$, allora essa vale per tutti i numeri naturali.

Da quanto abbiamo detto, si intuisce che la dimostrazione per induzione serve a dimostrare la verità di una proprietà che abbiamo già intuito, anche attraverso un certo numero di prove riuscite.

1. Formulazione matematica del principio di induzione completa

Per ogni numero naturale n sia assegnata una proprietà $P(n)$.

1) Se è vera $P(1)$, cioè se la proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$ (**base dell'induzione**)

2) Se la proprietà $P(n)$ è vera per il numero naturale k [$P(k)$ **ipotesi induttiva**]

e se dalla verità di $P(k)$ posso dedurre la verità di $P(k + 1)$ [**passo dell'induzione**]

allora la proprietà $P(n)$ è vera per tutti i numeri naturali n .

In simboli possiamo scrivere: $\boxed{\{P(1) \wedge \forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]\} \rightarrow \forall n P(n) \quad \text{con } n, k \in N}$

E' opportuno fare rilevare che una parte dell'ipotesi è a sua volta un teorema che bisogna dimostrare. Ed è proprio la dimostrazione di questo teorema la parte più impegnativa del ragionamento per induzione. Per dimostrare con il **principio di induzione matematica** che una proprietà $P(n)$ è vera

$\forall n \in N$ si procede come segue:

1) si verifica che $P(n)$ è vera per $n = 1$ (**base dell'induzione**)

2) si assume come vera la proprietà $P(k)$ (ipotesi induttiva)

3) si dimostra che $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ (passo dell'induzione)

<< Utilizzando metodi elementari prima ed il principio di induzione matematica poi,

dimostrare che la somma dei primi n numeri interi vale $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \gg [1]$

$$\begin{array}{rcl}
 S_n & = & 1 + 2 + \dots + n - 1 + n \\
 S_n & = & n + n - 1 + \dots + 2 + 1 \\
 \hline
 2S_n & = & \begin{array}{cccccc} (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{array} \\
 \\
 2S_n & = & n(n+1) \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{array}$$

Adesso dimostriamo la [1] utilizzando il principio di induzione matematica.

$P(1)$ è la **Base dell'induzione**. $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, $1 = 1$

$P(k)$ è l'**Ipotesi induttiva**. $1+2+\dots+(k-1)+k = \frac{k(k+1)}{2}$ [2]

$P(k) \rightarrow P(k+1)$ è il **passo dell'induzione**. Questo significa che se ipotizziamo la validità di $P(k)$, cioè se riteniamo vera la relazione $1+2+\dots+(k-1)+k = \frac{k(k+1)}{2}$ possiamo dimostrare la validità della relazione $P(k+1)$, cioè possiamo dimostrare che:

$$1+2+\dots+(k-1)+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Per fare questo basta aggiungere $k+1$ ad ambo i membri della [2] e sviluppare i calcoli nel secondo

membro. Otteniamo: $1+2+\dots+(k-1)+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$$1+2+\dots+(k-1)+k+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$1+2+\dots+(k-1)+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

cioè $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ Abbiamo così dimostrato che $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Una generalizzazione del principio di induzione matematica

Nella formulazione del principio di induzione matematica siamo partiti dal numero naturale 1. Ci sono, però, proprietà che non valgono per tutti i numeri naturali, ma solo per quelli maggiori di un assegnato numero naturale.

3. Principio di induzione matematica in forma generale

Sia $P(n)$ una proprietà relativa ai numeri naturali e sia a un assegnato numero naturale.

1) Se è vera $P(a)$, cioè se la proprietà $P(n)$ è vera per $n = a$ (base dell'induzione)

2) Se la proprietà $P(n)$ è vera per il numero naturale $k \geq a$ [$P(k)$ ipotesi induttiva]

e se dalla verità di $P(k)$ posso dedurre la verità di $P(k+1)$ [passo dell'induzione]

allora la proprietà $P(n)$ è vera per tutti i numeri naturali $n \geq a$.

In simboli possiamo scrivere:

$$\boxed{\{P(a) \wedge \forall k > a [P(k) \rightarrow P(k+1)]\} \rightarrow P(n) \quad \forall n \geq a \quad \text{con } a, n, k \in \mathbb{N}}$$

Formulare una congettura per determinare la somma dei primi n numeri dispari e, poi, dimostrare la formula per induzione.

Possiamo formulare la congettura $\boxed{S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2}$ [p] analizzando i

seguenti casi particolari:

$$n = 2 \Rightarrow S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$n = 3 \Rightarrow S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$n = 4 \Rightarrow S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$n = 5 \Rightarrow S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Dimostriamo per induzione che la congettura [p] è vera.

$$P(a) = P(2) \text{ è la Base dell'induzione.} \quad 1 + 3 = 2^2, \quad 4 = 4$$

$$P(k), \text{ con } k \geq 2, \text{ è l'Ipotesi induttiva.} \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2 \quad [3]$$

$k \geq 2 \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ è il **passo dell'induzione**. Questo significa che se ipotizziamo la validità di $P(k)$, cioè se riteniamo vera la relazione $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$ possiamo dimostrare la validità della relazione $P(k+1)$, cioè possiamo dimostrare che:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$$

Aggiungendo $2k+1$ ad ambo i membri della [3] e sviluppando i calcoli nel secondo membro otteniamo:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$$

cioè: $S_{k+1} = (k+1)^2$ La congettura [p] è così dimostrata.

Pitagora fra leggenda e realtà

Ricerca effettuata dagli alunni della **III B** coordinati dai docenti

Salvatore Amico ed **Antonio Mastantuoni**

Premessa

Il nome di Pitagora, nell'immaginario collettivo, è legato alla matematica. Con questa ricerca su un personaggio così imponente abbiamo voluto mettere in risalto, accanto alla originalità del suo pensiero matematico, altri aspetti: l'esoterismo nel campo religioso, la sua autonomia in campo filosofico, la sua acutezza nella formulazione della prima legge fisica, il suo conservatorismo nella guida politica di alcune città della Magna Grecia. In questo articolo noi scriveremo di Pitagora politico, esoterico, filosofo, fisico e matematico. Sono aspetti della vita del grande pensatore greco che lo hanno reso immortale nel campo della cultura mondiale.

1. Biografia di Pitagora

Pitagora è il secondo matematico greco che si incontra dopo Talete e come Talete è una figura avvolta nella leggenda: le notizie che si hanno su di lui e sulle sue scoperte sono basate sulla tradizione in quanto non ci è pervenuto nessun documento storico. Si sa che nacque a Samo intorno alla prima metà del VI secolo a.C. . Il padre **Mnesarco** era incisore di sigilli e la madre **Partenide** era considerata la più bella donna di Samo. Il nome Pitagora significa "predetto dalla Pizia", poiché alla madre incinta fu predetto dalla Pizia, la profetessa dell'oracolo di Delfi, che avrebbe partorito un "figlio più bello e sapiente di chiunque fosse mai esistito, destinato a recare in ogni aspetto della vita grandissimo giovamento all'intero genere umano". Ebbe come maestri i più rinomati sapienti della Grecia, tra i quali Talete e Anassimandro. Talete, uno dei sette saggi dell'Antichità, dopo avere messo a disposizione di Pitagora tutto il suo immenso sapere, lo invitò a recarsi in Egitto dove avrebbe potuto incontrare altri illustri uomini di cultura e gli oracoli di Menfi e Diospoli. Ebbe così inizio la lunga serie dei suoi viaggi che lo portarono a contatto con le maggiori civiltà e culture del suo tempo. Durante il suo lungo peregrinare Pitagora ampliò le sue conoscenze attingendo al sapere degli Ebrei, Fenici, Egiziani, Caldei, Persiani, Indiani. Dagli Ebrei apprese l'arte di interpretare i sogni, dai Fenici la scienza dei numeri, dagli Egiziani il vantaggio dell'uso dei simboli e l'eleganza della geometria. I dodici anni trascorsi in Babilonia gli consentirono di diventare esperto di astrologia e di astronomia. Ebbe anche l'accortezza di utilizzare tutte le osservazioni astronomiche accumulate nel corso di molti secoli dai sacerdoti caldei. Molto utile può essere considerato l'incontro e la collaborazione con **Zoroastro**. Ne scaturì un suo perfezionamento in medicina, musica ed un radicamento nelle pratiche religiose.

In India particolarmente proficua fu la frequentazione dei bramani che si distinguevano per saggezza e santità. In seguito Pitagora ne avrebbe fatto un modello di vita per se stesso e per i suoi allievi. Dopo tutti questi viaggi, ricco di tutto il sapere dei popoli, iniziato a tutte le forme di misteri, conoscitore profondo di uomini, istituzioni, usi e costumi, fece finalmente ritorno nell'isola di Samo. Tornato a Samo, e trovata la sua patria sotto il governo del tiranno Policrate, si trasferì nella colonia di Crotone, nella Magna Grecia, e vi fondò la sua comunità, diretta ad assicurare ai suoi membri il raggiungimento di scopi essenzialmente etici e religiosi.

	La figura e la vita di Pitagora sono avvolte da un alone di leggenda nella quale è difficile distinguere l'elemento storico da quello immaginario. Sembra che la prima donna matematica sia stata Teano, allieva e moglie di Pitagora. Teano fu soltanto una delle 28 donne della scuola di Pitagora.
---	---

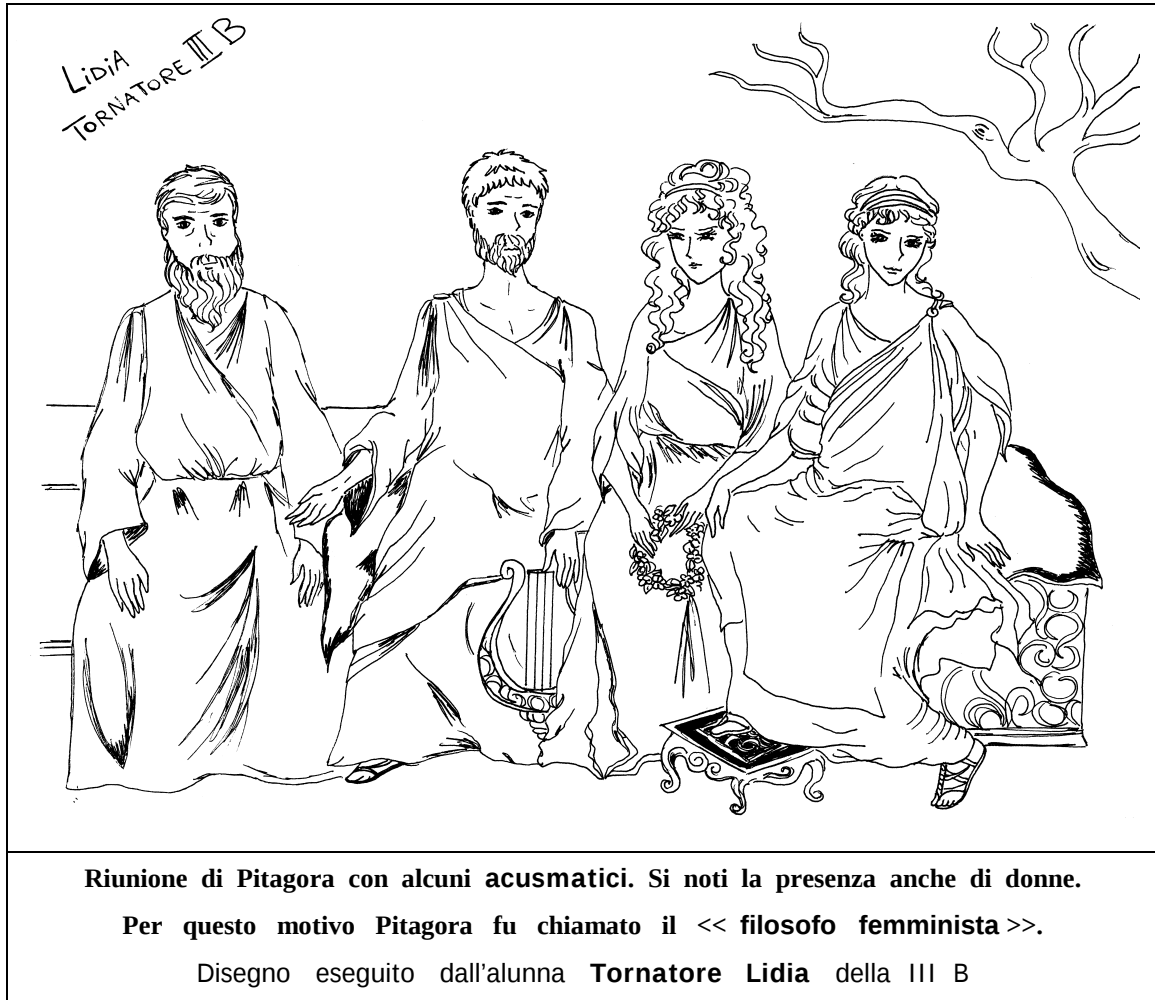
Perché Pitagora scelse proprio Crotone? Sappiamo che l'antica Kroton era rinomata per le sue bellissime donne e per le vittorie conseguite alle Olimpiadi, ma anche per il clima mite e, soprattutto, per la famosa scuola medica di Alcmeone. A condurre Pitagora verso Crotone fu, tuttavia, la sua vocazione filosofico-politica: la città gli appariva come un luogo fertile per i suoi insegnamenti e soprattutto aperto ad una formazione socio-politica non esente da una cura del corpo e dello spirito.

A Crotone rimase per venti anni, incidendo molto sulla vita e sui costumi di questa città, affascinando con i suoi discorsi i giovani, gli anziani e le donne. In questa bella città della Magna Grecia Pitagora fondò una scuola, frequentata dagli aristocratici, con base matematica e filosofica, nella quale venivano studiate le discipline del <<**quadrivio**>>, cioè la musica, l'aritmetica, l'astronomia e la geometria. Gli allievi erano selezionati dopo un lungo tirocinio e divisi in due categorie: gli <<**acusmatici**>> o **ascoltatori** ed i **matematici**, i quali venivano a conoscenza degli insegnamenti più elevati e dei segreti più profondi di questa società il cui simbolo era una stella a 5 punte, il **pentagramma**.

Nella scuola pitagorica, scienza e filosofia, musica e religione si fondevano in una mistica contemplazione dell'universo. Secondo **Proclo**, Pitagora trasformò lo studio della matematica in una vera scienza.

Grazie al suo genio i numeri non furono più usati per contare e calcolare, ma furono apprezzati ed utilizzati per la costruzione di una nuova scienza in grado di spiegare la realtà che ci circonda. Infatti Pitagora intuì che i numeri esistono indipendentemente dal mondo sensibile nel quale viviamo.

Alla scuola pitagorica si deve la distinzione fra numeri pari e numeri dispari, la definizione dei **numeri perfetti** e dei **numeri amichevoli**. Nel campo della geometria a Pitagora ed alla sua scuola viene attribuito il teorema che porta il suo nome, la risoluzione geometrica delle equazioni di secondo grado, la scoperta delle **grandezze incommensurabili**, i fondamenti della teoria delle proporzioni e delle similitudini.



Pitagora ed i suoi discepoli si impadronirono del potere instaurando un regime conservatore ed aristocratico, con una politica estera intollerante ed espansiva, quale si manifestò con la distruzione della ricca e potente Sibari. Ma gli ultimi tempi della sua permanenza a Crotone furono amareggiati dalla crescente ostilità nei confronti della sua scuola; Pitagora si allontanò allora da Crotone e si trasferì a Metaponto dove sarebbe morto intorno al 497 a.C..

2. Pitagora Politico

Pitagora, fuggito da Samo posta sotto la tirannide di **Policrate**, giunse a Crotone quando aveva raggiunto la piena maturità (seconda metà del VI sec. a.C.). Il suo primo pensiero fu di ammogliarsi. La tradizione vuole che abbia sposato Teano, dalla quale ebbe un figlio, **Telaugo**. Da allora l'effetto prodigioso esercitato dalla parola di Pitagora si diffuse, in pochi anni, in tutta la **Magna Grecia**.

Quando Pitagora vi giunse, la città stava pagando le conseguenze di una sconfitta militare inflitta dall'esercito di Locri. Sfruttando la sua fama, il Maestro intraprese una profonda opera di riforme politiche e religiose. Il filosofo risvegliò nei Crotoniati il sentimento di venerazione degli dei, quello della virtù e del patriottismo. Si impegnò ad allontanare la gioventù dalle abitudini di dissipazione e di piacere e le insegnò il rispetto dei propri genitori. "Esortava i giovani a educarsi, invitandoli a

considerare quanto fosse assurdo reputare il pensiero la cosa più importante e valersene per esprimere un giudizio su tutto il resto, ma al tempo stesso non aver speso né tempo né fatica per esercitarlo” (Giamblico). Attirò le simpatie dell’assemblea degli anziani. Parlò alle donne e restituì loro la dignità da tempo negata. Cambiò l’aspetto della città. Fece erigere un tempio alle Muse, allo scopo di mantenere la pace e la stabilità. Fermò le guerre intestine e le controversie tra le città.

In poco tempo il quarantenne Pitagora ottenne una vera e propria “dittatura morale” su Crotone, che conservò per ben quindici anni. Diogene Laerzio definisce il governo fondato da Pitagora “quasi aristocratico”, volendo dire che “il governo della comunità è esercitato da quelli che per studi, per saggezza, per esercizio, per disciplina, per ideali di vita, sono i più degni di giudicare” (Pugliese Carratelli). Portò ordine e giustizia, diffondendo il motto pitagorico “l’anarchia è il peggior di tutti i mali”. L’equilibrio delle forze rappresentava, infatti, un principio valido per la vita di una comunità come per la vita del cosmo, per gli accordi musicali come per il temperamento dell’anima. Non a caso, il medico Alcmeone usava il termine “monarchia” per indicare la patologia dell’anima, la prevalenza di una parte dell’organismo sull’altra che rompe l’equilibrio psicofisico. L’armonia tra le parti costituirà, com’è noto, un principio cardine della filosofia politica di Platone. L’educazione politica di Pitagora influì anche sulla formazione dei legislatori Zaleuco di Locri Epizefiri e Caronda di Catania. Nel 510 a.C. vi fu però un grave scontro tra le città di Crotone e di Sibari. Secondo le testimonianze, pare si verificò una disputa circa la possibilità di dare asilo ad alcuni facoltosi cittadini banditi da Sibari. Pitagora fu favorevole ad accoglierli, convincendo i Crotoniati ad ospitarli.

Da tale affronto scaturì una vera e propria guerra, che terminò con la vittoria dei Crotoniati, che sotto la guida di Milone uccisero gran parte dei Sibariti e saccheggiarono la città. I motivi che spinsero Pitagora ad acconsentire all’asilo di quegli uomini non sono ancora del tutto chiari. Senza dubbio Pitagora accettò per obbedire alla sua dottrina che l’obbligava a tutelare i supplici, ma, secondo Giamblico, egli avrebbe notato tra gli ambasciatori sibariti, inviati dal tiranno Telys, uno degli assassini di alcuni suoi discepoli e per questo motivo avrebbe deciso di affrontare la guerra. Si ipotizza anche che furono gli stessi Sibariti, appartenenti ad una fazione oligarchica che non sopportava la tirannia di Telys, a favorire, nonostante la superiorità numerica dell’esercito di Sibari rispetto a quello di Crotone, la vittoria di quest’ultima.

Una leggenda, giunta a noi grazie ad Ateneo, narra che la cavalleria sibarita fosse guidata a suon di flauto. Avendo scoperto ciò, i Crotoniati, durante la battaglia del Traente, schierarono dei flautisti. Quando questi cominciarono a suonare, i cavalli presero a ballare e, con i loro cavalieri, si schierarono dalla parte dei Crotoniati. Conquistata Sibari, nacquero nuove discussioni per la divisione dei terreni ottenuti. Da una parte c’erano i Pitagorici che, influenzati forse dal loro stile di vita “comunitario”, erano intenzionati a lasciare indivise le terre; dall’altra, alcuni esponenti politici della città intendevano dividerle in lotti da distribuire fra i cittadini. Gli esponenti del gruppo pitagorico ebbero inizialmente la meglio, ma le polemiche e i contrasti politici interni alla città non si placarono. Tra la fine del VI e il principio del V secolo a.C., probabilmente anche in seguito ad una grave crisi economica di Crotone, l’esarca Cilone, escluso dalla congregazione pitagorica, fece

in modo da favorire l'approvazione della spartizione delle terre sibarite e farsi promotore di una sommossa contro i Pitagorici. "Presero la testa della sedizione -racconta Giamblico- proprio coloro che avevano i più stretti rapporti di parentela e di familiarità con i Pitagorici. E la ragione era che costoro, esattamente come la gente comune, erano irritati dal comportamento dei Pitagorici in pressoché ogni suo aspetto, nella misura in cui questo differiva da quello degli altri (...). Essi arrivavano ad ammettere la superiorità di uno straniero quale Pitagora era, ma si sdegnavano del fatto che dei concittadini, nativi del luogo, come loro, fossero manifestamente fatti oggetto di preferenza". Fu così che durante una riunione di Pitagorici nella casa di Milone, l'abitazione fu data alle fiamme e i più importanti membri della scuola trovarono la morte. I Pitagorici, offesi dall'indifferenza mostrata dai cittadini nei confronti degli assassini avvenuti e perduti, ormai, i loro più eminenti personaggi politici, non si occuparono più degli affari pubblici, contribuendo, così, con la loro scomparsa alla decadenza politica di Crotone e, probabilmente, dell'intera Magna Grecia. Pitagora, che si era intanto rifugiato a Metaponto, morì agli inizi del V sec. a.C..

3. Pitagora: l'Esoterico e il Filosofo

Figura leggendaria della filosofia greca, matematico e sacerdote, politico e taumaturgo, era in grado di ascoltare la "musica delle sfere", ricordava ogni avvenimento della sua vita e di tutte quelle trasformazioni che la sua anima aveva subito trasferendosi da corpo a corpo. Credeva, infatti, nella dottrina della metempsicosi e si dice di lui che avesse un femore d'oro e il dono dell'ubiquità. Pare che fosse stato chiamato Pitagora "perché eguagliava l'oracolo pitico nell'annunziare la verità". Nella testimonianza di Diogene Laerzio su Pitagora troviamo una delle prime apparizioni del termine "filosofo": "Diceva che la vita è simile ad una folla riunita per una festa: gli uni vanno per lottare e vincere, altri per affari, ma i migliori vi vanno come spettatori, così come nella vita, diceva, alcuni nascono con anime da schiavi, bramosi di gloria e di guadagni, ma altri, i filosofi, desiderosi solo della verità". Secondo Nietzsche, il figlio di Mnesarco e nativo di Samo "non era un filosofo, ma qualcos'altro": Pitagora ha prodotto l'immagine di un tipo di vita filosofica, esercitando un notevole influsso non sulla filosofia, ma sui filosofi, come Empedocle e Parmenide. Eraclito ne parla come di un semplice erudito, il cui pensiero non avrebbe nulla di originale, ma sarebbe frutto di una "tecnica fraudolenta e superstiziosa": "il saper molto non insegna a pensare rettamente (...). Ha atteso agli studi più di ogni altro uomo e raccogliendo questi scritti ne ha fatto la propria sapienza, il saper molto, cattiva arte". Al di là dei rancori di Eraclito, ben oltre l'atteggiamento satirico offerto dalla commedia attica nei suoi confronti, è certo che la figura di Pitagora fu, nella vita come dopo la sua morte, oggetto di dispute e di contrasti. Fondò a Crotone una scuola, aperta anche alle donne: si dice che tutti i giovani volevano essere suoi discepoli, che non erano meno di seicento quelli che andavano da lui per ascoltare il suo insegnamento e tutti ne uscivano entusiasti, estasiati dalla grande esperienza che avevano fatto. Eppure in questa scuola i discepoli venivano divisi in "acusmatici", a cui era imposto il silenzio, non potendo fare domande ma solo ascoltare, e "matematici", in grado di porre domande e sviluppare opinioni personali. "Per cinque anni -ci racconta Diogene Laerzio- dovevano tacere e solo ascoltare gli insegnamenti, senza venir ammessi

al cospetto di Pitagora prima di esser stati vagliati. Ma da quel momento appartenevano alla casa e venivano ammessi alla sua presenza". Secondo Giamblico, gli acusmatici ritenevano che i matematici fossero discepoli di Pitagora, ma questi non consideravano tali gli acusmatici e sostenevano che la loro dottrina filosofica non era quella di Pitagora, ma quella di Ippaso. Porfirio ci riferisce che tutto ciò che Pitagora diceva ai suoi discepoli "lo esponeva o sviluppandolo completamente o in forma simbolica. Il suo insegnamento infatti aveva una duplice forma e dei suoi discepoli gli uni -i matematici- avevano avuto un insegnamento scientifico superiore e svolto con maggior rigore, mentre gli altri -gli acusmatici- avevano appreso solo i principi sommari delle scienze, senza un'esposizione più accurata". Alcuni interpreti del suo pensiero sostengono che sia sorta nella scuola, non prima della metà del V secolo, una scissione tra uomini di scienza ed altri che si accontentavano di brevi formule teoriche: alcuni trascurarono, nella ricerca scientifica, i fondamenti religiosi, mentre altri si attennero al modello di vita pitagorico. Sta di fatto che "tra le cose che disse ai suoi discepoli non c'è nessuno che possa riferirle con certezza, perché tra essi il silenzio non era cosa di poca importanza" (Porfirio). Il silenzio rappresentava, anzi, tra gli esercizi di autocontrollo che Pitagora impartiva ai suoi allievi, quello più duro e faticoso. Non è escluso, inoltre, che vari esponenti della scuola pitagorica fossero esperti nell'uso dei simboli e che sotto questi simboli custodissero il senso delle loro discussioni o dei loro scritti. "E se questi simboli -scrive Giamblico- non si sceverano ed esaminano attentamente, e non si comprendono tramite una seria interpretazione, le cose che in essi si dicono potranno sembrare a quanti le ascoltassero risibili e sciocche (...). Ma se invece vengono esplicate nella maniera conforme a questi simboli e, da oscure che erano, si rendono chiare e limpide a molti (...) allora riveleranno una mirabile profondità di pensiero, infondendo una ispirazione divina nei dotti interpreti che ne hanno compreso il significato".

Perché l'insegnamento di Pitagora aveva questa duplice forma? Chi erano, dunque, i suoi veri discepoli? Coloro che potevano solo ascoltare in silenzio, senza fare domande? Oppure chi era in grado di "apprendere" e di coltivare opinioni personali? Dal suo insegnamento ne scaturiva, forse, anche una scienza falsa, fatta di principi sommari e di brevi formule teoriche? E chi furono i dotti interpreti di quella dottrina? A Pitagora, tra l'altro, si riferisce l'espressione "il maestro ha detto" (ipse dixit), che è poi passata come "detto" nella vita comune. Secondo Timeo, risale a Pitagora il detto "le cose degli amici sono in comune" e "l'amicizia è uguaglianza". Effettivamente i suoi discepoli mettevano in comune i loro patrimoni. Ma Alcmeone, pitagorico e celebre medico di Crotone, notava che "è più facile guardarsi da un nemico che da un amico".

Fu Ippaso a rivelare a "gente indegna di venirne a conoscenza" la natura delle grandezze incommensurabili e per questo venne scacciato dalla scuola, suscitando un'indignazione tale da preparargli "un sepolcro, proprio come se fosse morto colui che una volta era stato amico" (Giamblico). Fra coloro i quali si davano l'aria di essere suoi discepoli, furono ammirati, infatti, secondo Isocrate, più quelli che si mantennero nel silenzio di coloro che parlando si procacciarono grande fama.

Aristotele riferisce che per i Pitagorici “tutte le cose sono numeri” o “imitano i numeri”. Secondo il filosofo di Stagira, i Pitagorici cominciarono con l’osservare i rapporti numerici delle consonanze musicali e, avendo trovato molti altri spunti di corrispondenza fra i numeri e il mondo, conclusero che “tutto quanto il cielo è armonia e numero”. Servendosi delle melodie adatte, come se fossero “misure di medicinali giovevoli alla salute”, Pitagora era in grado di modificare gli stati d’animo degli allievi quando questi erano in preda agli eccessi ed all’intemperanza, riconducendoli alla virtù. Il maestro, per conto suo, ascoltava direttamente la musica delle sfere celesti: i suoni celesti “traggono sì origine dalle ineguali e in vario modo tra loro differenti velocità, grandezza e posizione dei corpi, ma sono nondimeno collocati in reciproca relazione nel modo più armonico”. Pitagora fu il primo a chiamare l’universo “cosmo”, per l’ordine (l’armonia) che regna in esso. Armonia, ordine ed equilibrio rappresentavano anche i principi base della medicina greca e, in particolare, della scuola crotoniate: “Alcmeone dice che la salute è mantenuta dall’equilibrio delle forze, dell’umido del secco del freddo del caldo dell’amaro del dolce e così via, mentre il dominio di uno solo provoca la malattia (...). La salute invece consiste in una mescolanza delle qualità” (Aezio). Ma di quale equilibrio si parla se non di quello che è misura della propria anima? E si tratta, forse, di una medesima misura, che resta sempre la stessa, nella gioventù come nella vecchiaia, in me come in te? Una misura puramente quantitativa, che nell’aggiungere o nel togliere, nell’ampliare o nel tagliare, fa risiedere il fine della cura? Una misura, quindi, senza forma? Molto simile, forse, alle nostre moderne cliniche? Scrive Epicarmo, poeta siracusano e seguace di Pitagora: “-Se uno a un numero dispari (o pari se vuoi) vuol aggiungere una pietra oppure vuol toglierla da quelle che ci sono, ti pare che resti uguale? -No certo. -E ora, se uno a una misura di un braccio vuol aggiungere un’altra lunghezza, o tagliarla via da quella che c’è, quella misura, resta sempre la stessa? -Ma no. -E ora guarda gli uomini: uno cresce l’altro cala, e tutti cambiano per tutto il tempo. Ma ciò che cambia per natura e non rimane mai nello stesso stato è già diverso da quello che è cambiato, e tu e io ieri eravamo altri, ora siamo altri, e poi altri in futuro, e mai gli stessi secondo la stessa misura”.

L’Uno e i molti: immagini di numeri, simboli di uguaglianza e di differenza, domini del limite e dell’illimitato, fonti di salute e di malattia, fattori di giustizia e di prevaricazione, esperienze di dialogo e di intolleranza, espressioni del silenzio e della chiacchiera, del pensare e del parlare. Il Maestro Pitagora, l’“amico del sapere”, era in grado di “vedere” tutto questo e ne era consapevole, in prima persona, nell’esperienza del suo insegnamento.

4. Pitagora Fisico

Si può attribuire a Pitagora il merito di avere formulato in termini matematici la prima legge fisica, connessa alla scoperta delle leggi dell’armonia. Convinto che i numeri fossero l’essenza di tutte le cose, Pitagora compì esperimenti sui suoni emessi da corde di diversa lunghezza per vedere se fosse possibile una qualche relazione matematica tra le lunghezze delle corde ed i corrispondenti suoni emessi. Egli si servì di una corda di lunghezza variabile soggetta a differenti tensioni dovute all’effetto di opportuni pesi applicati agli estremi delle corde.

Dopo svariati esperimenti Pitagora si accorse che la produzione di opportune armoniche si aveva solo quando le lunghezze della corda stavano tra loro come numeri interi piccoli. Il rapporto 2:1 tra le lunghezze corrispondeva alla produzione di quella che oggi chiamiamo un'**ottava**, il rapporto 3:2 ad una **quinta**, il rapporto 4:3 ad una **quarta**.

Questa scoperta può essere considerata come la prima formulazione matematica di una legge fisica e rappresenta il primo tentativo di matematizzare la natura, cioè rappresenta il primo passo compiuto verso lo sviluppo dell'attuale fisica teorica. Ricordando che in tutto il periodo dell'antica Grecia non ci fu sperimentazione sistematica, possiamo affermare che i risultati raggiunti da Pitagora e dalla sua scuola possono considerarsi eccezionali per quei tempi.

Galvanizzato dal successo ottenuto nello studio dei suoni emessi dalle corde vibranti, Pitagora formulò una ipotesi suggestiva: poiché il moto dei pianeti deve essere armonioso, le loro distanze dalla Terra debbono stare tra loro come numeri interi semplici, allo stesso modo delle lunghezze delle corde vibranti (soggette alla stessa tensione) che producono le sette note fondamentali della lira, lo strumento nazionale greco. A causa di questa armonia il moto dei corpi celesti dovrebbe produrre musica (musica delle sfere) e questa dovrebbe essere udita dagli uomini che popolano la terra. Alla obiezione che tale musica non era mai stata udita da nessuno Pitagora rispondeva

Con le seguenti argomentazioni:

- 1) il suono può essere percepito solo se prodotto per un intervallo di tempo limitato
- 2) il suono dei Corpi Celesti non può essere udito perché nato con l'universo.

La presenza dei numeri interi nei fenomeni fisici analizzati e studiati da Pitagora ci fa scorgere un collegamento con i pesi atomici, i numeri atomici, la teoria dei quanti, la carica elettrica, cioè ci fa pensare a tutti quei fenomeni che, dopo più di due millenni, hanno consacrato definitivamente il carattere discontinuo della materia.

Interessante è la prima concezione non geocentrica del Cosmo formulata da un seguace di Pitagora, Filolao da Crotone (480 – 400) che nel 454 si rifugiò a **Tebe**. **Filolao**, richiamandosi alla scuola di Pitagora, riteneva che il numero triangolare 10, chiamato **tetractys**, fosse un numero perfetto ed avesse un enorme potere mistico. Infatti occorre 4 punti per individuare un corpo solido e la somma dei primi quattro numeri interi dava $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Per questo motivo l'intero Cosmo doveva essere costituito da 10 corpi celesti mobili. Di questi 10 corpi celesti solo 9 erano visibili (la Terra, il Sole, la Luna, i cinque pianeti (Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno) e la sfera delle Stelle) ed uno, l'Antiterra, invisibile.



Pitagora mentre studia l'emissione di suoni da corde diverse.
Possiamo attribuire a Pitagora la scoperta della prima legge fisica.
In campo musicale Pitagora calcolò in termini matematici i rapporti
tra gli intervalli partendo dalla individuazione del rapporto di ottava

$$\left(\frac{2}{1}\right) \text{ e di quinta } \left(\frac{3}{2}\right)$$

Disegno eseguito dall'alunna Tornatore Lidia della III B

Artificiosa appare l'introduzione del decimo corpo celeste, l'Antiterra, situato in posizione diametralmente opposta alla terra e da questa invisibile, poiché entrambi ruotano con uguale periodo attorno ad un fuoco centrale (sede di Zeus ed origine dell'attività cosmica) come appare in figura. Anche il Fuoco centrale non era osservabile dalla Terra, poiché la parte di essa abitata è nell'emisfero opposto al centro dell'orbita.

	I pitagorici calcolarono anche il tempo impiegato da un corpo per compiere un giro completo intorno al fuoco centrale. La Terra e l'Antiterra lo effettuano in 24 ore, la Luna in 29 giorni e mezzo, il Sole in un anno. Fu così spiegata la successione del giorno e della notte: quando la Terra rivolge la sua faccia abitata al Sole si hanno le ore diurne, quando questa si trova nella parte opposta del Fuoco centrale, non più in vista del Sole, si ha la notte. Questa prima teoria non geocentrica dell'universo fu una grande innovazione per la scienza dell'epoca, che collocava la terra al centro dell'Universo.
<i>Nella figura è rappresentata l'orbita di un generico pianeta, al posto delle 5 orbite dei 5 pianeti</i>	

Pitagora riteneva che i pianeti avessero forma sferica, in quanto la sfera era considerata la più perfetta tra le figure geometriche. Inoltre era convinto che i pianeti si muovessero nel cielo con moti circolari, a velocità differenti ed a distanze diverse da un punto centrale, che non era né la Terra né un astro, ma un <<**fuoco centrale**>>. Filolao, per quanto distante dalla teoria eliocentrica di Copernico, pose le basi per una nuova concezione dell'Universo. L'aspetto esoterico del modello pitagorico rimase per secoli il punto di riferimento per la cosmologia, tanto che ancora nel 1619 Keplero lo utilizzò nel suo strabiliante libro **l'armonia del mondo**. In esso egli descrisse le leggi musicali che regolano il moto dei pianeti, specificando che nella sinfonia celeste Mercurio canta da soprano, Marte da tenore, Saturno e Giove da bassi, e la Terra e Venere da alti.

E nella terza delle tre famose leggi di Keplero ricompare, miracolosamente, il rapporto di quinta; il quadrato del periodo di rotazione di un pianeta attorno al Sole è infatti proporzionale al cubo della sua distanza da esso.

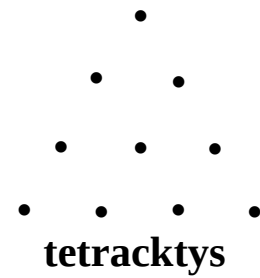
5. Pitagora Matematico

Pitagora, uomo di multiforme ingegno, si è distinto soprattutto per il suo straordinario contributo in matematica. Il suo merito principale è quello di avere elevato l'aritmetica al rango di scienza pura. Oltre all'aritmetica, nella quale raggiunse risultati eccezionali, studiò la teoria delle proporzioni, le rette parallele, la proprietà della somma degli angoli interni di un triangolo, le aree dei poligoni, i poliedri regolari, noti come **figure cosmiche**. Per Pitagora il numero intero è il **principio di tutte le cose**.

L'espressione <<**le cose sono numeri**>> significava che ogni porzione di materia era costituita da punti materiali, di piccola ma non nulla grandezza, e che dalla configurazione (numero ed ordine) di questi punti, tra loro identici ed indistinguibili, discendevano tutte le proprietà e le differenze apparenti dei corpi. Per i Pitagorici, i **punti** (da loro chiamati monadi = unità) con i quali costruivano le varie figure erano insieme **atomi fisici ed indivisibili geometrici**. Erano gli elementi primi, non ulteriormente decomponibili, tanto dei corpi fisici quanto delle figure geometriche. Per Pitagora non c'era alcuna differenza tra figura geometrica e corpo fisico; fisica e geometria erano la stessa cosa. Per Pitagora un segmento (qualsiasi altra linea) non poteva essere suddiviso indefinitamente in parti sempre più piccole. Ogni segmento era costituito da un numero finito di monadi dotate di dimensioni piccolissime. Questa concezione conduceva all'affermazione che il rapporto di due segmenti qualsiasi doveva essere un numero razionale, cioè due qualsiasi segmenti dovevano essere sempre commensurabili e la comune sottomultipla doveva essere il punto monade o un suo multiplo. La scoperta della incommensurabilità tra la diagonale ed il lato di uno stesso quadrato mise in crisi tutta la filosofia pitagorica, in quanto crollava l'ipotesi che le cose fossero numeri e che l'elemento primo della realtà che ci circonda fosse il punto-monade, indivisibile ma non evanescente e quindi dotato di dimensione. I Pitagorici sostenevano che: 01) il **numero uno** era il generatore dei numeri ed era il **numero della ragione**; 02) il **numero due** era il primo numero pari o femminile ed era il **numero dell'opinione**; 03) il **numero tre** era il primo vero numero maschile ed era il **numero dell'armonia**, essendo composto di unità e diversità; 04) il **numero quattro** era il numero della giustizia o del castigo ed indicava il fare quadrare i conti; 05) il **numero cinque** era il **numero del matrimonio** in quanto unione del primo vero numero maschile col primo numero femminile; 06) il **numero sei** era il **numero della creazione**.

Ciascun numero possedeva a sua volta attributi suoi particolari. Il più sacro di tutti era il **numero dieci** o **tetractys** o sacra decade, poiché esso rappresentava il numero dell'universo. Infatti conteneva la somma di tutte le dimensioni geometriche possibili. Un **punto** è il generatore delle dimensioni, **due punti** determinano una linea ad una dimensione (retta), **tre punti** (non allineati) determinano un triangolo con un'area a due dimensioni e **quattro punti** (non giacenti su uno stesso piano) determinano un **tetraedro** con un volume a tre dimensioni. La somma dei numeri ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$) rappresentanti tutte le dimensioni è il venerato **numero dieci**.

Il numero perfetto fu identificato con il 10, che visivamente era raffigurato come un triangolo perfetto, formato dai primi 4 numeri, ed avente il numero 4 per ogni lato (da qui il nome di **tetraktys**)

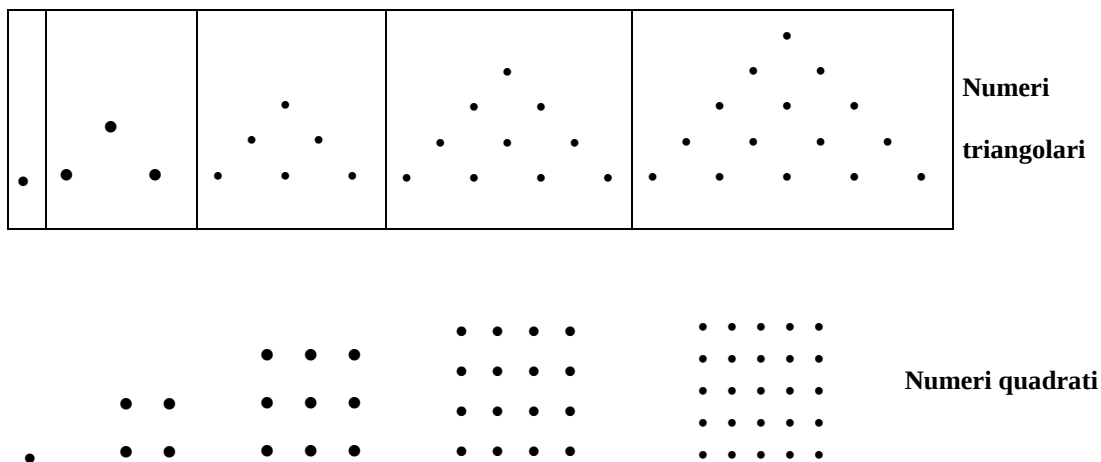


La raffigurazione mostra che il numero 10 è uguale a $1+2+3+4$. Ma c'è di più. Nella **decade** sono contenuti ugualmente il **pari** (quattro numeri pari: 2,4,6,8) ed il **dispari** (quattro numeri dispari: 3,5,7,9). La decade contiene 4 **numeri primi** (2,3,5,7) e 4 **numeri composti** (4, 6, 8, 9).

L'**uno** equivale al **punto**, il **2** alla **linea**, il **3** al **triangolo** (e quindi alla **superficie**), il **4** alla **piramide** (e quindi ad un **generico solido**): i punti, le linee, le superfici, i solidi sono in grado di generare tutte le cose che esistono in natura. Secondo le vedute di Pitagora i 4 numeri della **sacra tetraktys** sono in grado di generare tutta la realtà che ci circonda.

La distinzione dei **numeri pari** e **dispari**, dei **numeri amici** (ognuno dei quali è la somma dei divisori dell'altro), dei **numeri perfetti** (uguali alla somma dei loro divisori), dei **numeri lineari** o **rettilinei** (cioè primi), dei **numeri piani o rettangolari** (cioè composti) risalgono alla scuola pitagorica. Il numero uno non era considerato un numero dispari ma l'origine di tutti i numeri e per questo motivo era detto **numero parimpari**. Gli intimi legami che connettono il pensiero pitagorico con il concetto di numero sono bene illustrati dall'interesse dei pitagorici per i **numeri figurati**. Con la loro visione geometrica dei numeri, i Pitagorici ottennero risultati assai belli ed interessanti sui numeri interi (**aritmo geometria**).

La figura seguente mostra sia i **numeri triangolari** 1,3,6,10,15 che i **numeri quadrati** 1,4,9,16,25.



Sebbene non sia possibile formare alcun triangolo con meno di tre punti, è possibile avere triangoli formati da un numero maggiore di punti, come 6, 10 o 15. Numeri siffatti, chiamati **numeri triangolari**, si originano utilizzando la seguente formula:

$$N = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

I pitagorici sapevano che un numero quadrato di qualsiasi ordine è uguale al numero triangolare dello stesso ordine aumentato del numero triangolare precedente, cosa che dimostravano separando i punti e contandoli.

$$\begin{array}{lcl} \text{numero triangolare di ordine 2} & \rightarrow & \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1) = 3 + \\ \text{numero triangolare di ordine 3} & \rightarrow & \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3+1) = 6 \\ & & \hline & & 9 \end{array}$$

$9 = 3^2 =$ **numero quadrato di ordine 3.**

E' interessante confrontare questo metodo con quello che un allievo intelligente delle scuole superiori userebbe oggi. Il numero triangolare di ordine n è ovviamente $1 + 2 + \dots + n$, cioè è

la somma di una progressione aritmetica di ragione 1 ed è uguale a $\frac{1}{2}n(n+1)$.

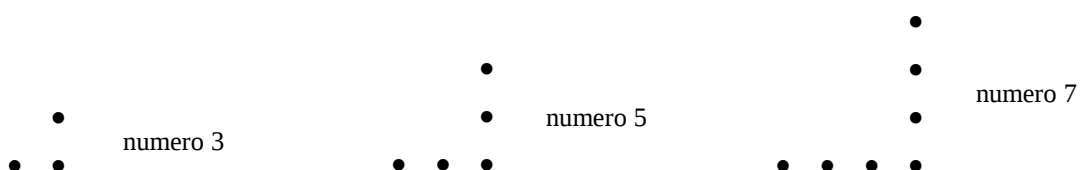
Per la stessa ragione il numero triangolare precedente è $\frac{1}{2}(n-1)n$. Semplici nozioni di algebra elementare mostrano che la somma dei due numeri triangolari consecutivi (il primo di ordine $n-1$ ed il secondo di ordine n) è n^2 , cioè il numero quadrato di ordine n . Infatti:

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1) = n^2.$$

Un'altra serie di numeri privilegiati era quella che dava luogo ai **numeri quadrati** e si ricavava utilizzando la seguente relazione: $N = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2$$

I **numeri dispari** venivano chiamati <<**gnomoni**>> per la possibilità di rappresentarli in forma di gnomone (cioè squadra; orologio solare babilonese).



Questa rappresentazione permise ai pitagorici di scoprire che ogni numero dispari è la differenza di due quadrati, come mostra la seguente figura:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & \bullet & & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & \bullet & & = & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & - & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & \bullet & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & &
 \end{array}$$

$$7 = 4^2 = 16 - 3^2 = 9$$

La seguente serie, somma di numeri n pari consecutivi, $N = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ dava luogo a quelli che i pitagorici chiamavano <<**numeri oblungi**>>, ciascuno dei quali era il doppio di un numero triangolare.

Strutture di **punti pentagonali** illustravano i **numeri pentagonali** dati dalla sequenza:

$$N = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

$$S_n = N = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 3n - 2}{2} \cdot n = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

I **numeri esagonali** venivano generati dalla sequenza:

$$N = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

$$S_n = N = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 4n - 3}{2} \cdot n = (2n - 1)n = 2n^2 - n$$

In maniera analoga venivano indicati **numeri poligonali** di ogni ordine.

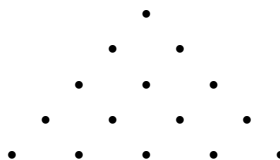
Numeri r-agonali:

$$N_r = n + \frac{n(n-1)(r-2)}{2}$$

Tale procedimento può essere facilmente esteso allo spazio tridimensionale, ove si ha a che fare con **numeri poliedrici**.

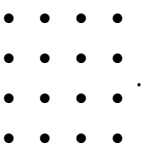
- Se partiamo da **1** la somma di un numero qualsiasi di numeri interi consecutivi è un numero

triangolare come indica la seguente figura:



- La somma di una successione di numeri dispari consecutivi dà sempre un numero quadrato come

indica la seguente figura:

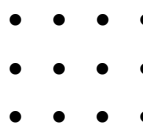


Se sommo n numeri dispari consecutivi trovo sempre il numero n^2 :

$$1+3+5+7+\dots+2n+1 = n^2$$

- La somma di una successione di numeri pari consecutivi dà sempre un numero rettangolare come

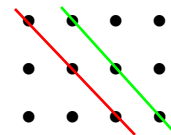
indica la seguente figura



$2+4+6=3 \cdot 4=12$. Il numero 12 è il **numero**

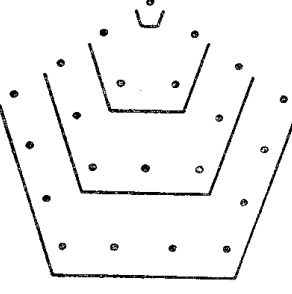
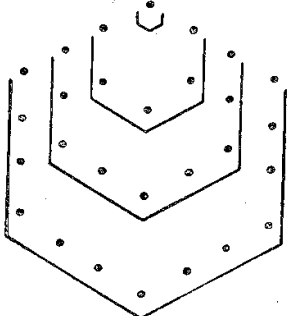
rettangolare che si ottiene sommando i primi 3 numeri pari. Se sommo n numeri pari consecutivi trovo sempre il numero rettangolare $n(n+1)$.

Le linee diagonali della figura di un qualsiasi numero rettangolare ci dicono che **qualsiasi numero rettangolare** è uguale alla **somma di due numeri triangolari uguali**.



Numeri naturali	1, 2, 3, 4, 5...	somma triangolare; numeri triangolari
Numeri dispari	1, 3, 5, 7, 9...	somma quadrata; numeri quadrati
Numeri pari	2, 4, 6, 8, 10...	somma rettangolare; numeri rettangolari
Contando per 3	1, 4, 7, 10, 13...	somma pentagonale; numeri pentagonali
Contando per 4	1, 5, 9, 13, 17...	somma esagonale; numeri esagonali

numeri pentagonali: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70... **numeri esagonali:** 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91...

	Numeri pentagonali Per $n=4$ otteniamo il numero pentagonale $22=1+4+7+10$ Per $n=5$ otteniamo il numero pentagonale $35=1+4+7+10+13$ $\frac{3(3n - 1)}{2}$
	Numeri esagonali per $n=4$ otteniamo il numero esagonale $28=1+5+9+13$ per $n=5$ otteniamo il numero esagonale $45=1+5+9+13+17$ $2n^2 - n$

5.1 I numeri amici o numeri amicabili

Pitagora alla domanda cosa fosse un amico rispondeva: <<Uno che sia l'altro, come sono 220 e 284>>. In termini moderni questo significa: i divisori di 284 (escluso il numero stesso) sono 1, 2, 4, 71, 142 e la loro somma è 220. I divisori 220 sono 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 119 e la loro somma è 284. I pitagorici chiamavano numeri come questi, **numeri amici** (numeri tali che la somma dei divisori di uno di essi, escluso il numero stesso, sia uguale all'altro e viceversa).

La scoperta di simili coppie era per i Greci un problema di grande interesse e di notevole difficoltà. Il problema generale, se ne esistano infinite, non è stato finora risolto, benché se ne conoscano ormai quasi un centinaio. C'è una storia medievale, forse non autentica, del califfo (Harun al) Rashid, il cui nome, alla luce della **gematria**, equivaleva a 284. Ebbene, egli cercò una sposa il cui nome corrispondesse a 220 credendo che questa sarebbe stata la garanzia celeste per un matrimonio celeste. Gli araldi trovarono la principessa **Yasmine** che corrispondeva, sempre secondo la **gematria**, al numero 220.

Elenco di alcune coppie di numeri amicabili: (220,284), (1184,1210), (2620,2924), (5020,5564), (6232,6368), (10744,10856), (17296,18416), (63020,76084).

5.2 I numeri perfetti

Un numero si dice perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori, escluso il numero stesso.

Sono numeri perfetti: 6, 28, 496, 8128, $33 \cdot 550 \cdot 336$.

Un **numero perfetto pari** deve terminare per 6 o per 8.

5.3 Terne pitagoriche e triangoli aritmetici

$x^2 + y^2 = z^2$ [A] è detta **equazione pitagorica** in quanto esprime la nota relazione fra i lati di un triangolo rettangolo. Se x, y, z sono **numeri interi positivi** che verificano la [A], si dice che costituiscono una **terna di numeri pitagorici** ed il corrispondente triangolo rettangolo è detto **triangolo aritmetico**. Per risolvere l'equazione [A] per **numeri interi**, basterà trovare tutte le sue soluzioni intere positive o meglio basterà determinare le sue **soluzioni primitive**, cioè le soluzioni costituite da **numeri interi primi fra loro**. **Ogni terna pitagorica primitiva genera infinite terne pitagoriche**.

Pitagora riesce a dare la formula per x dispari. In questo caso si ottiene una **terna pitagorica** ponendo: $x = 2n+1$, $y = 2n^2 + 2n$, $z = 2n^2 + 2n + 1$

Oppure ponendo: $x = \frac{m^2 - 1}{2}$, $y = m$, $z = \frac{m^2 + 1}{2}$ dove m è un **numero dispari**.

La formula per x **pari** è stata data da **Platone**. Se x è pari abbiamo: $x = 2n$, $y = n^2 + 1$, $z = n^2 - 1$.

Tutte le terne pitagoriche, primitive e non, cioè tutte le possibili soluzioni intere dell'equazione [A]

si ottengono applicando le seguenti formule:

$$\begin{cases} x = t(h^2 - k^2) \\ y = 2thk \\ z = t(h^2 + k^2) \end{cases} \quad [B]$$

Chiamiamo **terne pitagoriche primitive** quelle i cui elementi sono **primi** tra loro. Si ottengono dalle [B] per $t = 1$ e con h e k che, oltre ad essere primi fra loro ed $h > k$, sono anche di parità diversa. Dunque le **terne pitagoriche primitive** si possono esprimere con:

$$\begin{cases} x = h^2 - k^2 \\ y = 2hk \\ z = h^2 + k^2 \end{cases} \quad [C]$$

x ed y sono **dispari**, y risulta **pari e multiplo di 4**.

Le [C] le troviamo presenti per la prima volta nell'opera di **DIOFANTO** (III secolo d.C.).

5.4 Proprietà delle terne pitagoriche

La somma delle terne che costituiscono una terna pitagorica è un numero pari. Infatti risulta:

$$x + y + z = th^2 - tk^2 + 2thk + th^2 + tk^2 = 2thk$$

Il prodotto delle misure dei tre lati di un triangolo pitagorico è multiplo di 60. Esempio (10, 24, 26) $10 \cdot 24 \cdot 26 = 6240 = 104 \cdot 60$

		$8=2^3$	$27=3^3$	$64=4^3$	$125=5^3$
n	1	2	3	4	5
2n	2	4	6	8	10
3n	3	6	9	12	15
4n	4	8	12	16	20
5n	5	10	15	20	25

Le sorprese della tavola pitagorica

Si può verificare che:

- 1) La somma dei numeri contenuti in ciascuno dei quadrati è un quadrato perfetto.
- 2) La somma dei numeri contenuti in ciascuna delle due strisce ad angolo retto, come i numeri ad esempio $3 - 6 - 9 - 6 - 3$ è un cubo perfetto.

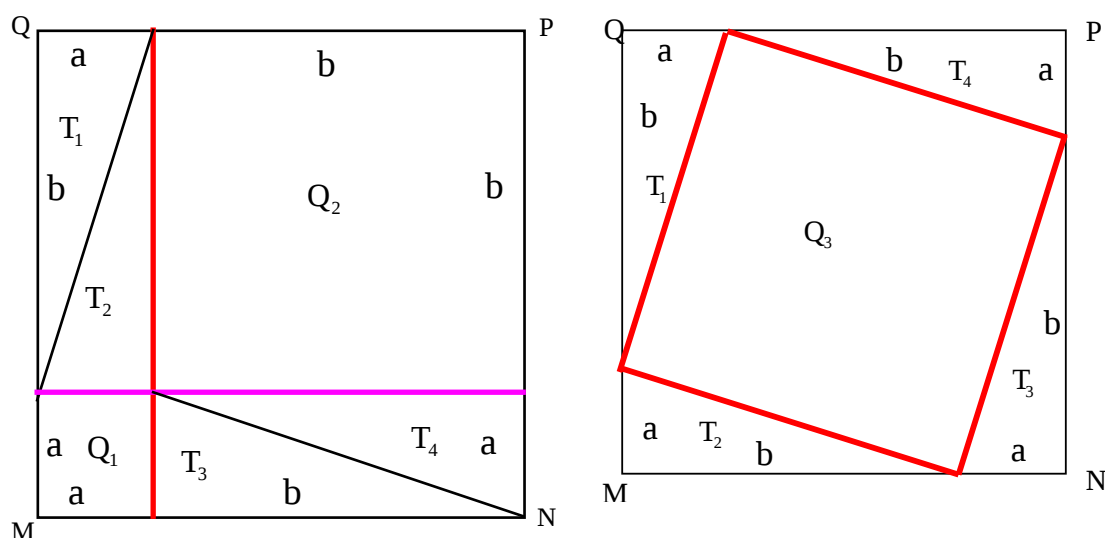
$n^2 \rightarrow$ nel quadrato $n^3 \rightarrow$ nello gnomone

5.5 Storia e leggenda del teorema di Pitagora

Come sappiamo il teorema di Pitagora recita: <<in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti>>. Il teorema di Pitagora può essere esposto anche nella seguente forma: <<in ogni triangolo rettangolo l'area della superficie del quadrato che ha per lato l'ipotenusa è uguale alla somma delle aree delle superfici dei quadrati che hanno come lati i loro cateti>>.

Avendo indicato con **a** e **b** le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo e con **c** quella dell'ipotenusa, quanto ora affermato si traduce nella relazione: $c^2 = a^2 + b^2$ [1]

ossia si può scrivere una relazione tra numeri, collegata alla figura costituita da un triangolo rettangolo. Convinti che Pitagora abbia dimostrato il teorema che porta il suo nome ci chiediamo: **come l'avrà dimostrato?** La dimostrazione del teorema di Pitagora, che di solito si studia a scuola, non è di Pitagora, ma di Euclide. Noi riteniamo che la dimostrazione originale di Pitagora sia quella che ora esponiamo con l'aiuto di due figure. Nella prima figura è disegnato un quadrato **MNPQ** di lato $a + b$, scomposto in un quadrato di lato a , un quadrato di lato b e 4 triangoli rettangoli di lati a, b, c .



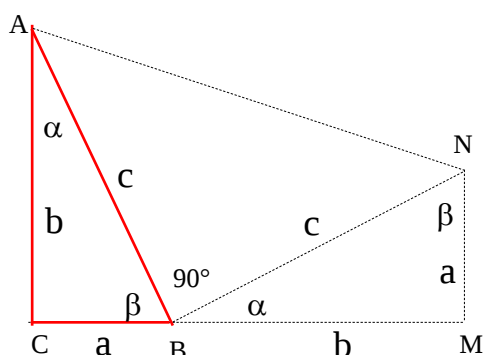
$$Q_1 + Q_2 = MNPQ - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$$

$$Q_3 = MNPQ - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$$

Nella seconda figura consideriamo lo stesso quadrato **MNPQ** che, questa volta, decomponiamo in modo diverso, precisamente lo decomponiamo in 4 triangoli rettangoli di lati a, b, c ed in un quadrato di lato c . Abbiamo due quadrati (quelli grandi, di lato $a + b$, uguali). Se da essi, tanto dall'uno quanto dall'altro, togliamo una stessa area (quella dei 4 triangoli rettangoli con cateti a, b), le parti che restano avranno ancora area uguale. Ma le parti che restano sono, nella prima figura, la somma dei quadrati dei cateti a e b , nella seconda il quadrato dell'ipotenusa c . Il teorema di Pitagora così dimostrato è, con tutta probabilità, simile a quello utilizzato da Pitagora.

5.6 Il presidente degli Stati Uniti d'America dimostra il teorema di Pitagora

Nel 1822 sul giornale statunitense **The Mathematical Magazine** uscì, postuma, una dimostrazione del teorema di Pitagora il cui autore non era certamente uno dei soliti cultori di matematica; si trattava di **John Garfield**, il presidente degli Stati Uniti d'America, che era morto tragicamente, in seguito ad un attentato, l'anno precedente. Si costruisce in maniera opportuna un trapezio rettangolo $ACMN$ e si utilizzano le formule necessarie a calcolare l'area del trapezio e quelle di opportuni triangoli rettangoli. Il procedimento è il seguente: si dispone il triangolo ABC , rettangolo in C , come indicato in figura, e se ne traccia un altro uguale avendo prolungato il cateto minore CB dalla parte di B di un segmento $BM = AC = b$

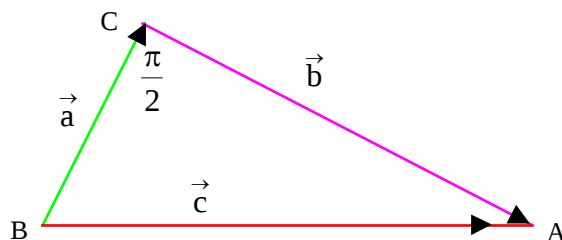


$$\begin{aligned}
 S(ACMN) &= S(ACB) + S(BMN) + S(ABN) \\
 \Rightarrow \\
 \frac{(a+b)^2}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow \\
 a^2 + b^2 + 2ab &= 2ab + c^2 \quad a^2 + b^2 = c^2
 \end{aligned}$$

5.7 Il teorema di Pitagora ed il calcolo vettoriale

Sia ABC un triangolo rettangolo avente come cateti i vettori $\vec{a} = C - B$, $\vec{b} = A - C$ e come ipotenusa il vettore $\vec{c} = A - B$. Tenendo presente la legge che ci consente di calcolare la somma di due vettori possiamo scrivere:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$



Elevando ambo i membri al quadrato e ricordando che $\vec{a}^2 = \vec{a} \times \vec{a}$ abbiamo:

$$\vec{c} \times \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) \quad c^2 = a^2 + 2\vec{a} \times \vec{b} + b^2 \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ e}$$

quindi: $c^2 = a^2 + b^2$ il **teorema di Pitagora** è così dimostrato.

Per il teorema di Pitagora abbiamo: $n^2 = 2m^2$. Senza ridurre la generalità del discorso i due numeri interi n ed m possono essere considerati primi tra loro. Dimostriamo che la relazione $n^2 = 2m^2$ è falsa. Due numeri interi sono uguali se decomposti in fattori primi presentano gli stessi fattori con gli stessi esponenti. Il numero intero n^2 contiene il fattore 2 un numero dispari di volte, il numero intero $2m^2$ o non contiene il fattore 2 o lo contiene un numero pari di volte. Pertanto i numeri interi n^2 ed $2m^2$ non possono essere uguali.

Tale apparve lo scandalo della scoperta, che il colpevole della sua divulgazione (**Ippaso di Metaponto**) venne considerato meritevole di maledizione e scacciato dalla setta. L'ignominia che dovette circondare la figura di **Ippaso di Metaponto** per i suoi ex compagni è espressa nella leggenda della punizione inflittagli dagli dei. <<E' fama, racconta Proclo, che colui il quale per primo rese di pubblico dominio la teoria degli irrazionali sia perito in un naufragio, e ciò perché l'inesprimibile e l'inimmaginabile avrebbero dovuto rimanere sempre celati. Perciò il colpevole, che fortuitamente toccò e rivelò questo aspetto delle cose viventi, fu trasportato al suo luogo di origine e là viene flagellato in perpetuo dalle onde>>.

L'avvento degli irrazionali, all'epoca chiamati gli **inesprimibili**, segnò il declino del pitagorismo come sistema di filosofia naturale. La perfetta concordanza tra gli enti dell'aritmetica e quelli della geometria, proclamata dai Pitagorici, risultò un inganno: come può il numero dominare l'universo se non riesce a spiegare nemmeno il più immediato aspetto dell'universo, la geometria? La geometria, nata per studiare il mondo esterno, il reale, si rivelava diversa dal mondo esterno. L'atomo ha dimensioni, il punto no; essi non sono la stessa cosa come avevano ritenuto i Pitagorici. La scoperta dell'esistenza dei numeri irrazionali portò Platone prima ed Euclide dopo a considerare gli enti geometrici, in primo luogo il punto, come enti ideali, che possiedono una realtà diversa dagli enti corporei. Con Platone la geometria si separa tanto dalla filosofia quanto dalla fisica. La **monade** pitagorica, che era insieme punto geometrico ed atomo fisico, si sdoppia diventando per la geometria <<ciò che non ha parti>> e per la fisica il costituente più piccolo della materia.

Bibliografia:

Pitagora. Le opere e le testimonianze, Introd. di W. Burkert, a c. di M. Giangiulio, Oscar Mondatori, Milano 2000.
C. H. KAHN, Pitagora e i Pitagorici, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1993.

Gli alunni della III B

L'infinito nell'antica Grecia

I Greci avevano orrore dell'infinito e indietreggiavano “di fronte al silenzio degli spazi infiniti”; infatti i matematici greci non parlavano mai di infinito e i filosofi preferivano parlare di illimitato.

1. Filolao

Il primo a introdurre questo termine è stato il pitagorico Filolao, che nelle parole “limite” e “illimitato” individuò la coppia di opposti che sono causa e principio di tutte le cose. In particolare, per i Pitagorici, il limite era associato al bene e l'illimitato al male.

2. Aristotele

Aristotele affrontò più a fondo i problemi dell'infinito, che chiamava *apeiron*. Si tratta di un'entità imperfetta, incompleta, confusa e priva di forma che la mente dell'uomo non può afferrare, non per sua incapacità ma perché non esiste come entità *attuale*. La natura, infatti, dice Aristotele, evita ciò che è infinito, poiché esso è privo di quelle completezze e finalità verso cui la natura è costantemente tesa. Se il nostro mondo ha avuto una nascita improvvisa, l'età della Terra è potenzialmente infinita; tuttavia essa non è mai, in nessun istante, effettivamente infinita. Se i numeri interi sono potenzialmente infiniti, perché si può sempre aggiungere uno ad un qualsiasi altro numero grande a piacere, tuttavia l'insieme infinito dei numeri, in quanto tale, non esiste. Le grandezze fisiche, per la maggior parte, non possono essere infinite neppure in *potenza*, perché, se lo fossero, sarebbero più grandi dell'universo stesso. E ciò è impossibile.

Lo spazio è potenzialmente infinito, perché può essere diviso in parti sempre più piccole. E potenzialmente infinito è soprattutto il tempo, sia perché si può sempre aggiungere un istante a qualsiasi quantità di tempo, sia perché si può suddividere, come lo spazio, in parti sempre più piccole. Ma per quanto questo processo di suddivisione o di aggiunta possa protrarsi e tendere verso l'infinito non lo realizza mai.

Fino al Rinascimento, il concetto aristotelico di infinito dominò in tutte le discussioni sull'argomento.

La sua portata era insieme fisica, cosmologica, matematica, filosofica e teologica; è in questa unità dei diversi domini del sapere che si coglie la dinamica dell'interrogarsi sull'infinito. Il pensiero di Aristotele ha le sue radici negli interrogativi sulla struttura del mondo. La scienza della natura e l'analisi del movimento lo conducono ad affrontare la questione dell'infinito. Secondo Aristotele l'infinito coinvolge tre concetti: primo la grandezza, che è divisibile all'infinito; secondo il numero, che è componibile all'infinito; terzo il tempo che è componibile e divisibile. La conclusione di Aristotele è negativa, cioè l'infinito non esiste come totalità, come essere *attuale*, come forma *compiuta*. Questa impossibilità vale sia per una totalità materiale e sia per una immateriale. In particolare, il mondo in quanto grandezza fisica è finito, chiuso dall'ultima delle sfere celesti. Tuttavia Aristotele ammette l'infinito secondo un'altra modalità: *infinito potenziale*. Si tratta di una modalità di esistenza inferiore, subordinata all'essere attuale. L'infinito in potenza, che è possibilità, si esprime con una proprietà della grandezza continua che per quanto si divida si può continuare la sua divisione all'infinito. Aristotele così scrive nella “Fisica”: “Ma l'infinito si trova ad essere il

contrario di ciò che si dice; in effetti, non è ciò che non ha nulla all'esterno di sé; ma ciò di cui qualcosa è sempre all'esterno di sé". Insomma, sostiene Aristotele, l'infinito si trascina dietro di sé una sua intrinseca incompletezza e non esiste se non come processo, come perenne divenire, come potenzialità.

Questa posizione contrappone Aristotele alle scuole di pensiero atomiste.

Un esempio di infinito potenziale riposa nell'idea stessa del contare e cioè nell'idea di poter procedere nell'affannosa e inutile ricerca del numero maggiore di tutti gli altri; basta aggiungere uno a qualunque numero per ottenerne uno maggiore e accorgersi che non è possibile trovare l'ultimo elemento. Questa possibilità, invece, ci viene offerta dall'altro tipo di infinito, l'**infinito in atto**; esso è costituito, per esempio, da qualsiasi segmento continuo che contiene, per sua natura, un'infinità compiuta di elementi costituita da tutti i suoi punti. Il concetto di infinito, dopo che aveva già tormentato i filosofi e i matematici Greci ed era stato poi comodamente assunto come attributo della divinità, venne escluso dal mondo umano. A riportarlo potenzialmente verso di noi ha cominciato Galilei quando, puntando il cannocchiale verso Giove, ha sfondato i limiti imposti ai nostri occhi e ha portato avanti la formidabile intuizione di Giordano Bruno degli infiniti mondi che popolano un universo privo di confini.

3. Zenone

Le differenze tra le due modalità dell'infinito vengono meglio alla luce, anche se non saranno risolte, con i famosi paradossi di Zenone di Elea. Soprattutto quelli che riguardano l'infinità della retta. Non tanto la sua lunghezza infinita, quanto la sua infinita divisibilità. Infatti se il veloce Achille pensa di correre in linea retta aggiungendo sempre 1 m al suo percorso finito, non giungerà mai al traguardo. E quando lo stesso Achille sfida nella corsa dei 100 m piani una tartaruga, concedendole un piccolo vantaggio iniziale, prima o poi, nella realtà la raggiunge e la supera. Tuttavia se affrontiamo il problema logico della gara giungeremmo ad una situazione paradossale: Achille non raggiungerà mai la tartaruga. Poniamo che la lenta tartaruga parta con un vantaggio di 10 m rispetto ad Achille; questi in un secondo avrà coperto la distanza; ma in quel secondo anche la tartaruga si sarà spostata di 1 cm. Allora Achille in 1/1000 di secondo coprirà quella distanza. Ma la tartaruga intanto avrà percorso una frazione infinitesima di cm. E così via, all'infinito. In definitiva, per quanto veloce corra Achille e per quanto lenta sia la tartaruga, in quella gara logica c'è sempre e solo un vincitore: la tartaruga. Il paradosso di Zenone è un vero rompicapo perché fa un uso improprio e intuitivo dell'infinito e questo turberà fisici e matematici fino alla fine del XVII secolo, quando il problema troverà la sua soluzione con la matematica moderna, con la definizione del rapporto tra discreto e continuo, per opera di Pierre Varignon, che, utilizzando il lavoro pubblicato da Leibniz nel 1684 sul nuovo calcolo differenziale e integrale, formula nel 1707 una sua teoria sui movimenti vari. La divisibilità senza termine di Zenone fu riformulata nel modo seguente: dividiamo in due un segmento di retta, poi facciamo la stessa cosa con uno dei sottosegmenti così ottenuti e così di seguito; questa divisione, o dicotomia, non ha termine. Se inoltre riuniamo i sotto

segmenti prodotti in successione da questa dicotomia ci avviciniamo al segmento iniziale. Tutto questo è ciò che oggi chiamiamo convergenza di una serie geometrica.

4. Conclusione

Prendendo le mosse da Zenone il concetto di infinito è passato dalla filosofia alla letteratura dilagando in infinite varianti senza nulla perdere della propria capacità di fascino intellettuale. Platone lo usò nel “Parmenide”, un dialogo in cui Zenone compare come protagonista. Eudosso e Archimede lo adottarono per approssimare il cerchio mediante poligoni regolari; Tommaso d’Aquino ne estrasse dimostrazioni dell’esistenza di Dio. Kant ne dedusse la seconda antinomia della ragion pura; Schopenhauer l’impossibilità di conoscere se stessi. Tutta l’opera di **F. Kafka** è un rifacimento letterario dei paradossi di **Zenone**. Il pathos dei suoi romanzi nasce precisamente dal numero infinito di ostacoli che fermano i loro eroi.

L’uomo ha conquistato solo di recente il concetto di infinito; infatti, verso la fine del XIX secolo la matematica lo ha reso un’entità trattabile, quindi, un concetto comprensibile.

La svolta avviene nella seconda parte dell’Ottocento. Il primo ad affrontare il problema fu B. Bolzano nel suo libro “I paradossi dell’infinito” pubblicato nel 1851. Bolzano in questa opera sostiene l’esistenza degli insiemi infiniti attuali. Altri si occuparono del problema come Dedekind, Weierstrass, Veronese, ma sarà il matematico tedesco di origine russa G. Cantor a dimostrare che l’infinito esiste non solo in potenza ma anche nella sua forma attuale. Per Cantor, che elabora una completa teoria degli insiemi, è infinito quell’insieme che può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte.

Ciò che è stato accennato nella conclusione sarà oggetto di approfondimento nei prossimi numeri.

Antonio Tropeano

L'uso Greco della matematica nell'interpretazione della natura

Nel mondo greco l'uso della matematica nell'interpretazione della natura viene riferito alle strutture delle cose ed alle loro forme, viste secondo un determinato ordine, senza tener conto del movimento del tempo. Per i Pitagorici l'interpretazione matematica della realtà definisce tutte le cose attraverso rapporti numerici e questo rapporto è il *logos* di una cosa, ovvero ciò che la rende ciò che è. Se lasciamo da parte l'aspetto metafisico e prestiamo attenzione unicamente a come la matematica viene applicata ai fenomeni, allora troviamo che questa applicazione è *morfologica* e non descrive tanto la compresenza di cause che producono un effetto, quanto la forma di una totalità composta e selezionata. I suoi oggetti sono quelle strutture che si possono astrarre dal flusso delle cose e che possono venire descritte mediante rapporti numerici fissi. La loro espressione costituisce una constatazione del *che* e non una spiegazione del *come* e del *perché*. La teoria del cielo, che è una *teoria* nel senso originario di contemplazione, non fornisce nessuna meccanica del cielo bensì una sintesi della sua fisionomia risultante dalle strutture dei caratteri geometrici e aritmetici. Come morfologia descrittiva questa caratteristica matematica della realtà è essenzialmente *statica*; essa raccoglie i suoi dati nel *presente* della *forma immobile*. I Pitagorici immaginarono le sfere celesti disposte in rapporti numerici di distanze uguali agli intervalli consonanti nella scala musicale e produssero così l'idea dell'armonia delle sfere, che ora può apparire più come una concezione estetica che non scientifica o razionale, ma non bisogna dimenticare che la correlazione dell'armonia cosmica con quella musicale si basava su fondamenti strettamente matematici. Le idee di bellezza e di perfezione sono naturali per la cosmologia greca, ad eccezione degli atomisti; quella aristotelica ne costituisce un esempio. La perfezione del movimento celeste, rappresentata circolarmente, si fonda sulle potenzialità geometriche del cerchio, la figura più perfetta; e questa proprietà potenziale della forma rese il mondo stellato l'incarnazione più pura della natura divina (cioè razionale) dell'universo, cioè la massima approssimazione del motore immobile che come causa prima e ultima mantiene in moto l'universo. Aristotele ammette la quiete assoluta. Questa impostazione morfologica dell'universo si conserva persino in Tolomeo, il quale non vuole violare l'integrità dei moti celesti e fa ricorso alla comune meccanica sublunare. Così la perfezione del cerchio, come assioma dell'astronomia, esercita il suo fascino anche su Copernico.

Senso antico e moderno di una matematica della natura

In armonia con la testimonianza immanente della sua creazione, il grande architetto dell'universo oggi comincia ad apparire come un puro matematico. Così l'astronomo e filosofo della natura Sir James Jeans ha riassunto le cognizioni della cosmologia contemporanea.

L'affermazione di Jeans è il frutto di una lunga tradizione, che coincide con la storia della speculazione occidentale; una linea diretta che conduce dal demiurgo del Timeo: "Dio eternamente geometrizza", al Dio di Leibniz: "cum deus calculat, fit mundus". Già Keplero spiega che Dio troppo benevolo per restare in ozio, iniziò a fare il gioco delle figure ed iscrisse la sua somiglianza nel mondo con il risultato che tutta la natura e il cielo sono simbolizzati nella scienza della geometria. Un'espressione di questa geometria divina Keplero la trova nelle leggi del moto planetario. Le convinzioni di Galileo vanno nella stessa direzione secondo la quale il grande libro della natura sarebbe scritto in linguaggio matematico, il cui alfabeto sarebbe fatto di triangoli, cerchi ed altre forme geometriche. Keplero è stato probabilmente il primo dei moderni a dichiarare che la quantità (grandezza) è l'aspetto conoscibile della realtà; in base a ciò conoscere significa, per lui, misurare e confrontare misurazioni. L'apparente ricorso alla geometrizzazione pitagorico-platonica del mondo, agli albori della scienza moderna, maschera in certa misura un nuovo approccio che solo con la algebrizzazione della descrizione in fisica diviene sempre più evidente. Non tanto la geometria classica, quanto l'algebra applicata alla geometria diviene la matematica della natura. Questo fatto ci induce a pensare che questa nuova scienza non si rivolga più alle grandezze della speculazione ontologica greca. Questa osservazione è la chiave per scoprire le differenze più profonde che distinguono il concetto moderno di una natura matematica da quello classico e definisce così, con maggiore precisione, il senso che l'idea di Jeans, di una divinità matematica, acquista in connessione con la fisica moderna.

L'interesse per il movimento, in contrapposizione allo studio delle figure, provoca l'ascesa del metodo algebrico in fisica; il moto diviene l'oggetto principale della misurazione in luogo delle proporzioni spaziali fisse del mondo greco. Ciò indica un'impostazione radicalmente nuova. Con la scienza moderna l'analisi del divenire sostituisce l'osservazione dell'essere; questo cambiamento favorisce l'introduzione della geometria analitica e del calcolo infinitesimale. Ora, mentre la geometria greca aveva osservato i rapporti di figure e corpi immutabili ed evidenti, la nuova algebra, nella geometria analitica e nel calcolo integrale, rende possibile rappresentare la forma geometrica stessa come funzione di variabili, ovvero come una fase nella sua crescita, e di formulare così le leggi della sua produzione. Sorge allora l'impressione, che talvolta diventa una convinzione, che la matematica abbia in sé qualcosa di sovrumano, qualcosa che eleva l'uomo e lo rende partecipe della costruzione di quell'universo che la matematica riesce a descrivere prima dell'osservazione sperimentale: quella matematica che si rinnova radicalmente a partire da Newton e Leibniz e che diventa una scienza autonoma, che si libera dalla geometria e dai numeri e diventa una scienza pura e si occupa di funzioni. Dunque la matematica, per la fisica ed in particolare per lo studio delle particelle elementari e per l'astronomia, non è più solo uno strumento di calcolo (come misurare la distanza terra-sole, o la massa dell'elettrone) ma essa diventa il motore trainante per la ricerca e l'evoluzione nel campo della fisica e dell'astronomia, diventa cioè, la principale sorgente di principi e teorie del microcosmo e del macrocosmo.

Questo è il significato della moderna analisi che ha trasformato la matematica celeste degli antichi greci nella meccanica celeste dei moderni.

Effettivamente Cartesio, Newton e Leibniz forniscono la matematica per la nuova scienza della natura; l'equazione differenziale ne rappresenta il mezzo espressivo e non i teoremi di Euclide. Per questa ragione noi diciamo che Galileo ancora si esprime in modo tradizionale quando dice che i simboli del linguaggio matematico della natura sono triangoli e cerchi.

È questo il cammino dell'uomo, visto alla luce dell'evoluzione della sua conoscenza. Ogni suo passo avanti avvicina l'ora del crepuscolo degli dei e in fondo al suo cammino, all'orizzonte, intravede ogni volta la loro caduta. Spesso ha creduto che quell'orizzonte fosse vicino.

Tuttavia, ogni volta è nato un nuovo Dio ancorché più lontano. La matematica ha allontanato le divinità primordiali, ha superato il deus sapiens dei filosofi e il deus patiens della Bibbia, ma fa comparire il deus calculans.

Antonio Tropeano

Bellezza e sezione aurea

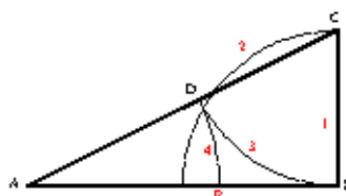
Cos'è la bellezza? È nell'occhio di chi guarda, quindi soggettiva, o è ancorata a canoni classici, di cui finiamo per essere schiavi? E che rapporto c'è tra la bellezza umana e quella di un dipinto o di un paesaggio? La risposta potrebbe essere affidata alla matematica. Il segreto della bellezza universale sarebbe tutto riconducibile ad un rapporto: il rapporto aureo. La spiegazione sarebbe dovuta a meccanismi neurologici: il nostro cervello mostrerebbe una naturale preferenza verso linee e forme disegnate che richiamano quel rapporto matematico. Matematicamente per sezione aurea si intende il segmento medio proporzionale tra la lunghezza di tutto il segmento e la parte rimanente.

Dato un segmento AB, se lo dividiamo in due parti, AP e PB, tali che la parte maggiore AP sia media proporzionale tra l'intero segmento AB e la parte restante PB, si dice che AP è la sezione aurea del segmento AB. In tal caso il rapporto fra AP ed AB risulta essere uguale a 0,618.

Per trovare la sezione aurea di un segmento basta moltiplicare la lunghezza del segmento dato per 0,618.



Il metodo grafico adoperato per la visualizzazione della sezione aurea è il seguente:

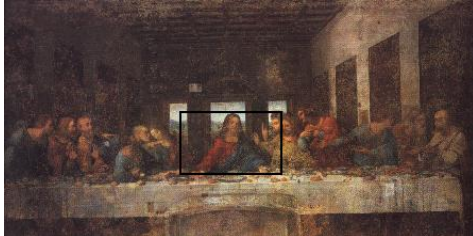


dato un segmento AB tracciare, perpendicolarmente ad esso, per l'estremo B, un segmento BC di lunghezza pari ad $\frac{AB}{2}$; unire l'estremo A con C; puntare in C e con apertura CB determinare il punto D sul segmento AC; puntare in A e con apertura AD ribaltare il punto D sul segmento AB. Il segmento AP è la sezione aurea del segmento AB.

Gli esempi di bellezza riconducibili a rapporti aurei sono sotto i nostri occhi. Non solo i canoni estetici dominanti obbediscono religiosamente a quelle proporzioni, ma anche i paesaggi naturali, i petali dei fiori, i colori delle piume degli uccelli, la forma delle conchiglie. Un crescendo talmente affascinante da spingere un ricercatore inglese, Eddy Levin, a brevettare uno strumento di misura – a forma di tenaglia – per dare la caccia agli oggetti che rispondono alle “proporzioni auree”. Gli esempi in natura sono innumerevoli. Dal guscio di conchiglia (ogni spirale è 0,618 volte la grandezza della precedente) alla struttura del cavallo (le varie parti del corpo risultano essere in armonia e seguono le regole del rapporto aureo). Ovviamente, gli antichi furono veloci ad applicare quelle “proporzioni divine” all'arte. A cominciare dalle linee del **Partenone**, la cui sezione laterale mostra un rettangolo perfetto secondo i canoni della sezione aurea. Per continuare con i volti quasi identici di migliaia di statue: una somiglianza spiegata con l'obbedienza allo stesso modello estetico, perfettamente proporzionato, e adottato per tutta la storia dell'arte occidentale. Allora essa era conosciuta come *divina proporzione*. **De divina proportion** è

anche il titolo del trattato redatto dal matematico rinascimentale Luca Pacioli e illustrato da sessanta disegni di Leonardo da Vinci (1452-1519). In particolare Leonardo incorporò il rapporto aureo in tre dei suoi capolavori: La Gioconda, L'ultima cena e L'Uomo di Vitruvio.

Nella **Gioconda** il **rapporto aureo** è stato individuato: nella disposizione del quadro, nelle dimensioni del viso, nell'area che va dal collo a sopra le mani, in quella che va dalla scollatura dell'abito fino a sotto le mani.



Ne l'**Ultima Cena**, Gesù, il solo personaggio veramente divino, è dipinto con le proporzioni divine ed è racchiuso in un rettangolo aureo.

Ne L'Uomo, Leonardo studia le proporzioni della sezione aurea secondo i dettami del *De architectura* di Vitruvio che obbediscono ai rapporti del numero aureo. Leonardo stabilì che le proporzioni umane sono perfette quando l'ombelico divide l'uomo in modo aureo. E non solo: sarebbero le proporzioni della Gioconda a guidare la mano del chirurgo durante i ritocchi estetici. «La maggior parte delle persone, inclusi i bambini», spiega lo studioso inglese, Stephen Marquardt, «sono naturalmente e istintivamente attratte dai visi che rispettano le proporzioni del rapporto aureo». Tanto da arrivare a creare al computer una maschera di bellezza universale, ricostruita prendendo a modello le proporzioni matematiche del rapporto aureo, su cui calzano perfettamente, secondo Marquardt, gli ideali di bellezza di tutte le razze umane. Ma gli esempi non sono finiti. E non solo l'occhio, ma anche l'orecchio sarebbe sensibile alle proporzioni del rapporto aureo. Altrettanto diffusa la versione geometrica del rapporto aureo, ovvero il rettangolo in cui il rapporto fra l'altezza e la base è uguale a 0,618 (ossia l'altezza è la sezione aurea della base) ritenuto da molti la forma geometrica in assoluto più gradevole all'occhio e, perciò, "saccheggiata" in architettura: dalle finestre e dai dettagli degli edifici firmati da Le Corbusier, incluso il Palazzo delle Nazioni Unite, ai numerosi quadri astratti di Pierre Mondrian in cui dominano rettangoli "aurei" di vario formato.

La variante più moderna e stupefacente riguarda però oggetti comuni e "insospettabili": le carte Bancomat, carte di credito, carte Sim per cellulari. Cos'hanno in comune? Semplice, il rapporto tra i due lati del rettangolo è costante: risulta sempre uguale a 0,618.



Marta Di Grezia III E
Pierluigi Fusco III E

Le parole della matematica

Antinomia

L'**antinomia** è una proposizione autocontraddittoria. In matematica si dice che si ha una **antinomia** quando, data una asserzione **A**, si dimostra tanto che **<<A è vera>>** quanto che **è falsa**.

Famosa è l'**antinomia del mentitore** attribuita ad **Epimenide**, uno dei sette sapienti dell'antichità, nativo di **Cnosso** nell'isola di Creta fra il 7° ed il 6° secolo a. C.

Essa viene formulata nella seguente maniera: **<<Epimenide afferma che tutti i Cretesi sono mentitori.**

Epimenide dice la verità o mente? Se dicesse la verità, egli [essendo cretese] mentirebbe, viceversa se mentisse direbbe la verità>>. Siamo in presenza di una antinomia in quanto **Epimenide** nell'esprimere la sua opinione contemporaneamente mente e dice la verità. Un'altra **antinomia** famosa è quella del **barbiere**. In un villaggio viveva un barbiere il quale aveva l'obbligo di radere tutti coloro e soltanto coloro che non si radevano da sé. Il povero barbiere non sapeva come regolarsi per quanto riguardava la sua persona: doveva o non doveva radersi? In un primo momento pensò che dovesse radersi, ma poi osservò che in tal modo egli diveniva uno di coloro che si radevano da sé e questo gli era proibito. Pensò allora che non dovesse radersi. Ma così facendo egli diveniva uno di coloro che non si radevano da sé e quindi era obbligato a radere questa persona, cioè era obbligato a radere se stesso.

Ecco dunque l'antinomia: egli era obbligato contemporaneamente a radersi e a non radersi.

Equazione

Siano $A(x)$ e $B(x)$ due generici polinomi in x . L'uguaglianza $A(x) = B(x)$ posta allo scopo di stabilire se esistono valori numerici della x che rendono il primo membro numericamente uguale al secondo membro dicesi **equazione ad una incognita**. Con altre parole possiamo affermare che l'**equazione è una uguaglianza condizionata**, cioè una uguaglianza verificata un numero finito di volte.

L'uguaglianza $x + 1 = 2x$ è una **equazione** in quanto l'uguaglianza tra i polinomi $x + 1$ e $2x$ si verifica una sola volta, precisamente quando attribuiamo alla x il valore **1**.

OSSERVAZIONE

Una **identità** esprime un **teorema**, una equazione traduce un problema.

La variabile che figura nell'equazione dicesi **incognita** dell'equazione. I valori dell'incognita che verificano l'equazione sono le **soluzioni** o le radici dell'equazione.

L'espressione algebrica scritta alla sinistra del simbolo di uguaglianza **<= >** dicesi **primo membro** dell'equazione, l'altra, posta alla destra del segno **=**, dicesi **secondo membro**.

Risolvere una equazione significa trovare le soluzioni dell'equazione. Una equazione i cui termini hanno soltanto coefficienti numerici dicesi **equazione numerica**, mentre dicesi **equazione letterale** se almeno un termine di essa ha coefficiente letterale.

Una **equazione** si dice **intera** se l'incognita non figura in nessun denominatore, altrimenti dicesi **fratta** o **frazionaria**. Due equazioni si dicono **equivalenti** se ogni soluzione della prima è soluzione della seconda e viceversa ogni soluzione della seconda è anche soluzione della prima.

La risoluzione delle equazioni si basa su alcuni principi fondamentali:

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o togliendo ad ambo i membri di una equazione una stessa espressione algebrica si ottiene una equazione equivalente a quella data. In simboli abbiamo:

$$A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) \pm M(x) = B(x) \pm M(x)$$

Dal principio di equivalenza si deducono i seguenti corollari:

COROLLARIO N° 1

In una equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno.

COROLLARIO N° 2

Se nei due membri di un'equazione figurano due termini uguali e con lo stesso segno, essi si possono eliminare.

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per un numero diverso da zero o per una espressione algebrica diversa da zero e non contenente l'incognita si ottiene una equazione equivalente a quella data.

COROLLARIO

Cambiando il segno a tutti i termini del primo e del secondo membro di un'equazione (il che significa **moltiplicare ambo i membri per -1**) si ottiene una equazione equivalente alla data.

Terzo principio

Una equazione che sia il prodotto uguagliato a zero di polinomi contenenti l'incognita è equivalente alle equazioni che si ottengono uguagliando a zero i singoli polinomi.

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \text{ oppure } B(x) = 0 \text{ oppure } C(x) = 0$$

OSSERVAZIONE

Ogni equazione $A(x) = B(x)$ può essere ricondotta alla seguente forma: $P(x) = 0$

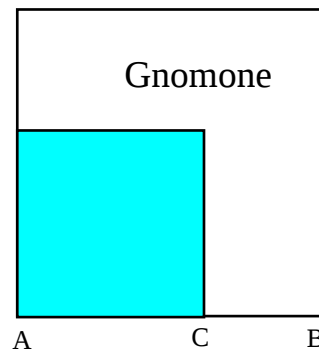
dove $P(x)$ è un polinomio di grado **n** che dicesi anche **grado dell'equazione**.

Infatti basta eseguire tutte le operazioni indicate nei due membri dell'equazione, portare tutti i termini ottenuti al primo membro e sommare i termini simili.

Gnomone :

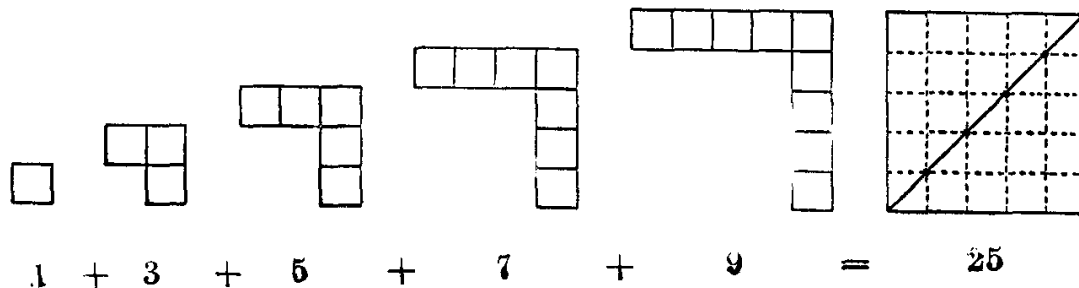
a) Stilo la cui ombra serve a segnare le ore negli orologi a sole o meridiane.

b) Figura geometrica piana costituita da ciò che rimane di un quadrato di lato AB se da esso si toglie un quadrato di lato AC (essendo C un punto interno di AB). Il termine fu usato dai pitagorici nella loro teoria dei numeri quadrati, con significato analogo.

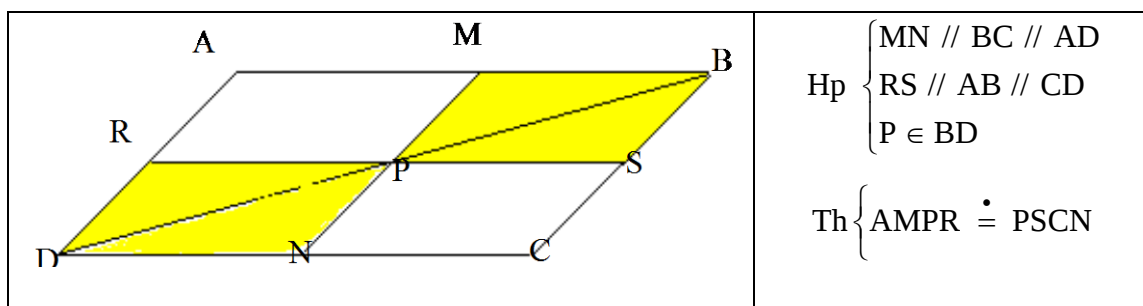


c) **Gnomone** significa <<conoscitore>>. Il **teorema dello gnomone** ebbe una parte considerevole nello studio dell'**aritmo-geometria** di Pitagora. E' utilizzato in numerose costruzioni riguardanti le aree dei poligoni ed in molteplici applicazioni e problemi. Per Pitagora lo **gnomone** era un numero dispari.

Ad esempio, i più semplici gnomoni, quelli provenienti da quadrati, danno la seguente notevole proprietà: **la somma dei numeri dispari consecutivi, comunque estesa, è sempre il quadrato di un numero intero**. Basta osservare i seguenti **gnomoni** che sommati formano sempre un **quadrato**.

**Teorema dello gnomone**

Se per un punto di una diagonale di un parallelogramma si conducono le parallele ai lati, il parallelogramma rimane scomposto in altri 4 parallelogrammi dei quali i due non attraversati dalla diagonale sono **equivalenti**.

Dimostrazione

Ricordando che ogni diagonale di un parallelogramma lo divide in due triangoli uguali possiamo scrivere:

$$\triangle ABD = \triangle BDC, \quad \triangle MPB = \triangle BSP, \quad \triangle RPD = \triangle NPD$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ABD} & = & \text{BDC} \\
 \text{RPD} & = & \text{NPD} \\
 \text{MPB} & = & \text{BSP}
 \end{array}
 \Rightarrow \text{AMPR} \stackrel{\cdot}{=} \text{PSCN}$$

$$\text{ABD} - \text{RPD} - \text{MPB} \stackrel{\cdot}{=} \text{BDC} - \text{NPD} - \text{BSP}$$

Identità

Dicesi **identità** l'uguaglianza tra due espressioni algebriche verificata da tutti i possibili valori numerici assegnati a tutte le lettere che vi figurano. Con parole diverse possiamo dire che l'**identità** è una **uguaglianza incondizionata**.

L'uguaglianza $(2x - y)^2 = y^2 + 4x^2 - 4xy$ è una **identità** in quanto, quali che siano i valori numerici attribuiti alla x ed alla y , il primo membro è sempre numericamente uguale al secondo membro.

Numeri algebrici e trascendenti

Dicesi **numero algebrico** ogni numero reale o complesso che possa essere soluzione di una **equazione algebrica**, cioè di una equazione riconducibile alla forma $P(x) = 0$ dove $P(x)$ è un polinomio di grado n con coefficienti interi primi fra di loro.

Es.: $\sqrt{3}$ è un **numero algebrico** in quanto è soluzione dell'equazione algebrica $x^2 - 3 = 0$; $-\frac{2}{7}$ è

un **numero algebrico** in quanto è soluzione dell'equazione algebrica $7x + 2 = 0$. Anche solo da questi esempi si rileva che un **numero algebrico** può essere razionale, irrazionale o complesso.

I numeri non algebrici si dicono **trascendenti**. I **numeri trascendenti** sono soluzioni di equazioni non algebriche, cioè di equazioni che non possono assumere la forma $P(x) = 0$. Tutti i numeri trascendenti sono **irrazionali**. Numeri trascendenti particolarmente importanti sono il numero **e** ed il numero π (pi greco). I numeri trascendenti debbono il loro nome al grande matematico **Eulero** che, riferendosi ad essi, ebbe a dire: <<**questi numeri trascendono il potere dei metodi algebrici**>>.

Numeri amichevoli

In aritmetica, due numeri interi si dicono **amicabili** quando la somma dei divisori di ciascuno di essi, escluso il numero stesso, è uguale all'altro.

Sono **amicabili** i numeri 220 e 284. Infatti i divisori di 220 sono 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 la cui somma è 284. I divisori di 284 sono 1, 2, 4, 71, 142 la cui somma è 220. Altre coppie di **numeri amichevoli** sono: (2620, 2924), (5020, 5564). I numeri amichevoli di se stessi (come il numero $6 = 1 + 2 + 3$) sono detti **numeri perfetti**.

Numeri primi

Un numero intero è detto **numero primo** quando è divisibile soltanto per se stesso e per l'unità. **Numeri primi fra di loro** sono numeri interi che non hanno alcun divisore comune diverso da 1.

Numeri composti

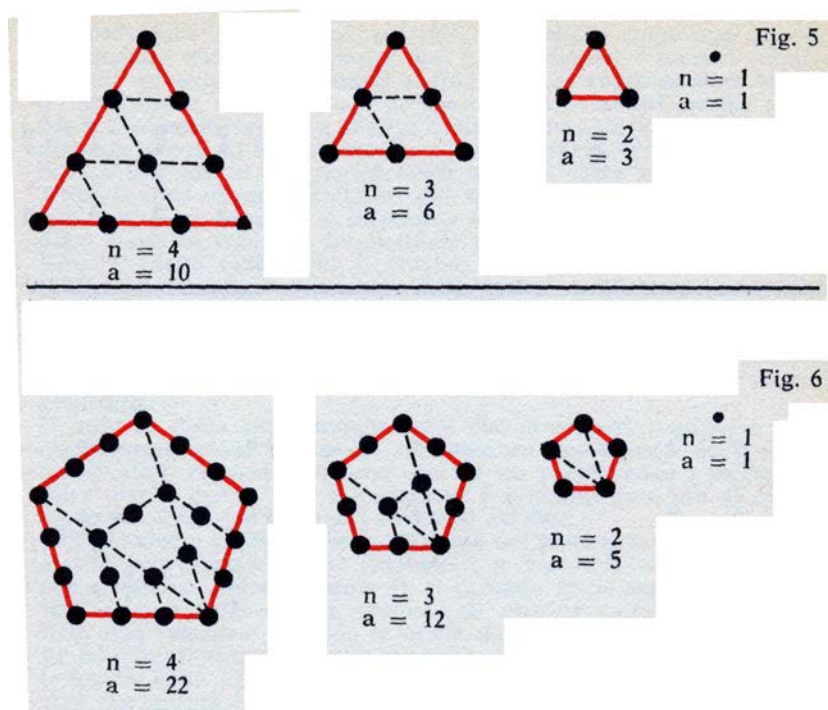
Sono chiamati **composti** i numeri interi maggiori di 1 e non primi. I **numeri composti** sono sempre il prodotto di due o più fattori primi.

Numeri eteromechi

I greci chiamavano **numeri eteromechi** i numeri interi prodotti di due numeri interi consecutivi. I numeri del tipo $(n - 1)n$ o del tipo $n(n + 1)$ sono numeri eteromechi.

Numeri figurati

In aritmetica si dicono **numeri figurati** i numeri rappresentati con un gruppo di punti disposti in modo da formare una figura geometrica regolare piana quale il **triangolo**, il **quadrato**, il **pentagono**, oppure una figura regolare solida quale il **tetraedro** o il **cubo**.



I **numeri figurati** esprimono il numero di punti che servono per costruire una figura geometrica regolare.

Nel **piano** abbiamo i **numeri triangolari** che si ricavano utilizzando la formula $a = \frac{n(n + 1)}{2}$

(vedere Fig. 5), i **numeri quadrati**, i **numeri pentagonali** che si ricavano utilizzando la formula

$$a = \frac{n(3n - 1)}{2} \quad (\text{vedere Fig. 6}).$$

Nello **spazio**, si hanno numeri figurati come nel piano. Sono **numeri figurati nello spazio** i **numeri piramidali** detti così perché costituiti dai vari strati triangolari o quadrati con i quali, sovrapposti, è possibile costruire una piramide a base quadrata o triangolare.

Numeri imperfetti

In aritmetica si dicono **numeri imperfetti**, per difetto o per eccesso, i numeri troppo piccoli o troppo grandi per essere **numeri perfetti**. Consideriamo il numero 14. Addizionando i suoi divisori che sono (escluso il numero stesso) 1, 2, 7 otteniamo 10. Il numero 14 è maggiore della somma dei suoi divisori e per questo motivo lo chiameremo **imperfetto per eccesso**. La somma dei divisori del numero 12 è 16 (maggiore di 12) e per questo motivo diremo che il numero 12 è un **numero imperfetto per difetto**. Ma in un **numero perfetto** non c'è eccesso né difetto: il **numero è uguale alla somma dei suoi divisori**.

Numeri perfetti

In aritmetica si dicono **perfetti** i numeri uguali alla somma di tutti i loro divisori, escluso il numero stesso. Sono **numeri perfetti**: $6 = 1 + 2 + 3$ $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. I **numeri perfetti** sono **numeri amichevoli** di se stessi.

Numeri planici

In aritmetica sono detti **planici** i numeri formati dalla somma di un quadrato e della sua radice. Sono **planici** i seguenti numeri:

$$6 = 2^2 + 2 \qquad 12 = 3^2 + 3 \qquad 20 = 4^2 + 4.$$

Numeri pitagorici

Termine con il quale si indicano le terne di numeri naturali che soddisfano l'equazione pitagorica $x^2 + y^2 = z^2$. Esempi di terne pitagoriche: (3,4,5) (6,8,10).

Il primo matematico che riuscì a determinare tutte le possibili terne pitagoriche fu **Diofanto** (matematico greco di Alessandria, vissuto nel III secolo d.C.).

$$\text{Il sistema } \begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases} \text{ ci fornisce i valori di tutte le possibili terne pitagoriche, essendo } m \text{ ed } n$$

numeri naturali arbitrari con $m > n$. Per $m = 3$ ed $n = 2$ otteniamo la terna pitagorica (5,12,13).

Numeri razionali e numeri irrazionali

I numeri razionali sono quelli che si possono porre sotto forma di frazioni, i numeri irrazionali sono quelli che non si possono mettere sotto forma di frazioni. Un numero che sia razionale o irrazionale dicesi **reale**.

Numeri socievoli

Tre numeri a, b, c sono detti << **socievoli** >> se 1) la somma dei divisori di a diversi da a è uguale al numero b; 2) la somma dei divisori del numero b diversi da b è uguale al numero c; 3) la somma dei divisori del numero c diversi da c è uguale al numero a.

Se questa proprietà circolare è vera per n numeri, questi sono detti << **numeri socievoli** >>.

I seguenti cinque numeri 12,496 ; 14,288 ; 15,472 ; 14,536 ; 14,264 sono **numeri socievoli**.

Paradosso

Il termine **paradosso** è usato per indicare una dimostrazione che, partendo da presupposti ritenuti validi, giunge a conclusioni che contrastano con il senso comune o che sembrano smentite dall'evidenza empirica. Quindi il **paradosso** è una affermazione solo apparentemente contraddittoria.

Paradossi della fisica

Paradosso idrostatico (botte di Pascal): <<con un litro di acqua è possibile rompere una robusta botte di vino contenente 100 litri di vino>>.

Paradosso degli orologi: paradosso derivante dalla dilatazione temporale nella teoria della relatività per cui, ad esempio, un astronauta che si muovesse a velocità prossima a quella della luce, dopo il ritorno sulla terra avrebbe meno anni di un altro, coetaneo, rimasto sulla terra.

Paradossi matematici

<<I numeri pari sono tanti quanti sono i numeri naturali>>. <<I punti di un segmento AB sono tanti quanti i punti di una retta>>. <<I punti di un segmento sono tanti quanti sono i punti del quadrato costruito sul segmento stesso>>. Si tratta di affermazioni vere che sembrano contrastare il senso comune secondo il quale il tutto non può essere uguale ad una sua parte. Però questo è vero per gli insiemi finiti, ma non è vero per gli insiemi infiniti. Infatti noi sappiamo che un insieme è infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte.

Sofisma

- **Sofisma matematico:** dimostrazione apparentemente rigorosa, che conduce ad un risultato palesemente assurdo.
- **Sofisma filosofico:** ragionamento che, partendo da premesse vere o verosimili e rispettando le regole del ragionamento, perviene ad una conclusione assurda.

Famosi sono i quattro sofismi di Zenone mediante i quali l'illustre filosofo voleva dimostrare che non sono plausibili né la concezione pitagorica della suddivisione dello spazio e del tempo in un numero finito di elementi indivisibili, né la concezione post pitagorica di uno spazio e di un tempo concepiti come un insieme di infiniti elementi primordiali (indivisibili). In sintesi Zenone riteneva che non era possibile concepire le grandezze spazio e tempo discrete e nemmeno continue. Alcuni storici ritengono che Zenone con i suoi quattro sofismi voleva soltanto evidenziare che l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo non possono essere trattati con le stesse regole valide per le grandezze finite.

Con i sofismi della <<**dicotomia**>> e di <<**Achille più veloce**>> Zenone voleva dimostrare che il movimento è impossibile se ammettiamo l'infinita suddivisibilità del tempo e dello spazio, mentre con i sofismi della <<**freccia**>> e dello <<**stadio**>> voleva dimostrare che il movimento è ugualmente impossibile se ammettiamo il contrario, cioè se ammettiamo la suddivisibilità dello spazio e del tempo mediante un numero finito di elementi indivisibili.

Le parole della fisica

Difetto di massa

Differenza tra la somma delle masse dei **protoni** e dei **neutroni** che costituiscono il nucleo e la massa del nucleo stesso.

Difetto di massa = massa nucleoni – massa nucleo = massa che si trasforma nell'energia $E = mc^2$ necessaria per costituire il nucleo = energia che il nucleo libera quando si disgrega nei suoi componenti.

Elementi transuranici

Gruppo di elementi chimici con **numero atomico** maggiore di 92 corrispondente a quello dell'**Uranio**, il più pesante degli elementi naturali. Non si trovano in natura ma sono stati preparati artificialmente a mezzo di appropriate reazioni nucleari. Attualmente se ne conoscono 22 dei quali i primi 13 sono: **nettunio, plutonio, americio, curio, berkelio, californio, einstenio, fermio, mendelevio, nobelio, laurenzio**. Sono elementi instabili e decadono in elementi con numero atomico più basso. Solo il plutonio viene preparato in grande quantità perché viene utilizzato come materiale fissile. Tutti gli altri elementi transuranici hanno interesse puramente teorico.

I **transuranici**, cioè gli elementi sintetici costruiti dall'uomo, hanno visto la loro nascita nel 1940 con la sintesi dell'elemento chiamato **nettunio**. Il nome deriva dal fatto che nel sistema planetario solare Nettuno segue Urano.

Elettrone (e)

Particella elementare avente carica elettrica negativa pari a $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$, una massa a riposo pari a $m = 9,1083 \cdot 10^{-31} kg$ ed una carica specifica $\frac{e}{m} = 1,7 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$. La sua massa è circa $\frac{1}{1836}$ la

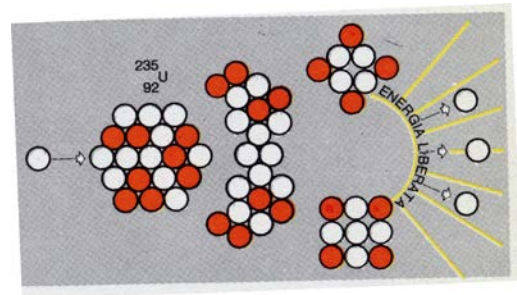
massa del protone. L'elettrone fu scoperto nel 1895 dal fisico **Thomson** come costituente i raggi catodici. E' stata la prima particella elementare identificata e studiata; oggi è quella meglio conosciuta. Il termine fu coniato nel 1891 dal fisico irlandese **Stoney** prima ancora che la particella fosse identificata. Tutte le cariche elettriche osservate risultano essere multipli interi dell'elettrone che, per questo motivo, è detto quanto di elettricità. Gli elettroni fanno parte della famiglia dei leptoni e ruotano attorno ad un nucleo carico di elettricità positiva formando con esso l'atomo. Ogni elettrone possiede un momento angolare intrinseco, detto **spin**, interpretabile come una rotazione continua intorno al proprio asse ed un momento magnetico intrinseco che lo fa comportare come un aghetto magnetico. Elettroni vengono emessi dai nuclei di alcuni atomi durante il fenomeno del decadimento beta. In questa circostanza un neutrone si trasforma in un protone più un elettrone ed un antineutrino. Elettroni di conduzione sono gli elettroni dell'ultima orbita dei metalli. Questi elettroni sono liberi di muoversi all'interno del reticolo cristallino formato dagli ioni del metallo considerato. Con questo semplice modello sono spiegate diverse proprietà fisiche dei metalli, quali la conducibilità elettrica e l'emissione termoionica. Gli elettroni di valenza sono gli elettroni dello strato più esterno dell'atomo e sono responsabili di alcune proprietà chimiche come, ad esempio, la valenza dell'atomo.

Fissione

E' una reazione nucleare nel corso della quale un nucleo pesante, in seguito all'urto di una particella leggera, si scinde in 2 frammenti approssimativamente uguali e in 2 o 3 neutroni, con notevole liberazione di energia. Il fenomeno, scoperto da **Hahn** e quasi contemporaneamente da **Joliot e Frisch**, fu studiato da **Fermi** mediante il bombardamento di nuclei di uranio con neutroni rallentati attraverso la paraffina. L'ipotesi avanzata da Fermi è la seguente: il nucleo di uranio che cattura il neutrone lento si spacca in due nuclei più leggeri quasi uguali liberando due o tre neutroni ed una notevole quantità di energia. L'energia liberata per ogni nucleo di uranio scisso è di circa 200 MeV.

Fissione nucleare

Scissione di un atomo di uranio in due elementi di massa atomica minore, con emissione di energia e di neutroni. La fissione controllata dell'uranio ²³⁵U o del plutonio ²³⁹Pu viene sfruttata nei reattori nucleari.



Neutrino

Particella elementare indicata col simbolo ν la cui esistenza è stata dapprima ipotizzata per spiegare il decadimento β e poi verificata sperimentalmente. Ha massa a riposo nulla, carica elettrica nulla e viaggia alla velocità della luce ed attraversa senza interagire anche le sostanze più dense. Gli elettroni emessi nella radioattività β non esistono all'interno dei nuclei: essi vengono <<creati>> all'atto della loro emissione quando un neutrone nucleare si trasforma in un protone ed assieme a ciascuno di essi viene sempre emessa un'altra particella priva di carica elettrica e di massa a riposo nulla, un **neutrino** che porta con sé una parte dell'energia disponibile.

Neutrone (n)

Particella elementare pesante, elettricamente neutra, elemento costitutivo del nucleo assieme al protone. Il

neutrone ha **spin** $\frac{1}{2}$, **massa a riposo** $m_n = 1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Risulta : $\frac{m_p}{m_e} = 1836$. Fu scoperto da **Chadwick** nel 1932. Allo stato libero decade in breve tempo in

un protone, in un neutrone e in un antineutrino. I neutroni possono essere prodotti mediante il bombardamento dei nuclei con i protoni oppure nei processi di fissione nucleare. I neutroni possono essere classificati in base all'energia posseduta. Si parla di neutroni lenti se la loro energia è inferiore a 1000 eV , neutroni intermedi se la loro energia è compresa tra 1000 e $500 \cdot 000 \text{ eV}$, neutroni veloci se la loro energia è superiore a $0,5 \text{ MeV}$.

Nucleone

Indica una qualsiasi particella elementare (protone, neutrone) presente nel nucleo dell'atomo considerato.

Nuclide

Indica una <<specie>> di atomo allo stato neutro caratterizzato dal suo nucleo che possiede **A** nucleoni dei quali **N** sono protoni ed **N** sono neutroni.

Numero di massa A

Indica il numero di protoni e neutroni che costituiscono il nucleo dell'atomo considerato.

Numero atomico Z

Indica il numero di protoni presenti nel nucleo dell'atomo considerato.

Isotopi

Sono atomi appartenenti ad un unico elemento ma con diverso **numero di massa A**. Gli **isotopi** hanno lo stesso numero di protoni ma diverso numero di neutroni, presentano le stesse proprietà chimiche ma differiscono per le proprietà fisiche. Ogni elemento chimico può essere formato da atomi tutti identici o da più isotopi. Il **numero di massa A** che si attribuisce all'elemento è quello dell'isotopo più abbondante. Gli **isotopi** possono essere **stabili** o **instabili (radioattivi)** e gli instabili possono essere naturali o artificiali.

Protone (p)

Particella elementare stabile avente massa a riposo $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, carica elettrica positiva

uguale, in valore assoluto, a quello dell'elettrone, **spin** $\frac{1}{2}$ e momento magnetico pari a 2,79276

magnetoni nucleari. Il nucleo dell'idrogeno è costituito da un protone e questi, pertanto, si identifica con lo ione idrogeno, cioè con l'atomo di idrogeno privato dell'elettrone periferico. Fu scoperto nel 1920 dal fisico inglese **Rutherford**.

Il numero di protoni e neutroni presenti all'interno del nucleo di un atomo prende il nome di numero di massa e viene indicato col simbolo A; il numero dei protoni presenti all'interno del nucleo prende il nome di numero atomico e viene indicato col simbolo Z. $N = A - Z$, differenza tra il numero di massa ed il numero atomico, rappresenta il numero di neutroni presenti nel nucleo. Gli isotopi di uno stesso elemento hanno lo stesso numero atomico Z, ma differiscono per il numero N di neutroni presenti nel nucleo.

Radioattività

Fenomeno per cui un nucleo atomico si trasforma spontaneamente (**radioattività naturale**) o mediante il suo bombardamento con neutroni (**radioattività artificiale**) in un nucleo di un elemento più leggero. Il decadimento si svolge generalmente attraverso una catena di altri nuclei instabili, la **famiglia radioattiva**, fino all'isotopo finale stabile.

La **radioattività naturale** avviene con emissione di radiazioni di tre tipi α , β , γ . I raggi α sono composti da due protoni e da due neutroni: sono quindi nuclei di elio; i raggi β sono costituiti da elettroni dotati di grande velocità; i raggi γ sono costituiti da **fotoni** ad alta energia e sono quindi

radiazioni aventi la stessa natura della luce visibile, ma con lunghezza d'onda molto più piccola e perciò di frequenza molto più elevata. **I raggi γ sono onde elettromagnetiche di elevata frequenza.** Per emissione di una particella α il nucleo di un elemento radioattivo si trasforma in quello di un elemento con numero atomico inferiore di 2 unità e massa atomica inferiore di 4 unità.

Per emissione di una particella β si ha una trasformazione del nucleo originario in quello dell'elemento di numero atomico immediatamente inferiore, mentre la sua massa atomica rimane praticamente invariata. Nel **decadimento β** il nucleo perde una carica negativa con emissione di elettroni oppure una carica positiva con emissione di **positroni ed un neutrino**.

Le sostanze radioattive naturali si dividono in tre famiglie dette dell'**uranio 238** (U^{238}), dell'**attinio 235** (At^{235}) e del **torio 232** (Th^{232}). Tutte e tre le famiglie terminano con un isotopo del piombo.

Reazione a catena

Si ha quando i neutroni prodotti dalla prima fissione diventano proiettili capaci di generare una nuova fissione e così di seguito. Infatti la **fissione** del nucleo di uranio è seguita dalla contemporanea emissione di 2 neutroni i quali, a loro volta, possono colpire altri 2 nuclei di uranio vicini e spezzarli, producendo altri 4 neutroni che possono spezzare altri 4 nuclei di uranio e così di seguito. Si innesca una **reazione a catena** che si propaga rapidamente in tutto il blocco di uranio, provocando la liberazione di una enorme quantità di energia. Perché una **reazione a catena** possa essere **controllata** occorre che il numero di scissioni al secondo non cresca oltre un certo limite. Si realizza questo disponendo nella massa dell'uranio degli opportuni **assorbitori**.

Serie radioattive

I nuclei radioattivi pesanti, dopo la disintegrazione, danno luogo ad altri nuclei radioattivi. Si forma così una catena che termina in un nucleo stabile. Le **serie radioattive** sono **quattro**, dette del torio, dell'uranio, dell'attinio e del nettunio, i cui capostipiti sono rispettivamente Th^{232} , U^{238} , U^{235} , Np^{237} .

Salvatore Amico

Storia del concetto di moto - parte prima

“Ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo ed uniforme fino a quando non interviene una causa esterna”. Questa formulazione del principio di inerzia è, possiamo dire, universalmente nota a studenti e anche a non studenti; si tratta di uno dei principi fondamentali della fisica, ma a chi si deve la sua formulazione, come ci si è arrivati, cosa si intende per “causa esterna”, e soprattutto possiamo affermare che è stato compreso appieno? Quante volte, ad esempio, sentiamo dire, anche da persone di una certa cultura, che la Luna, attratta per gravità, non cade sulla Terra in quanto nel moto circolare la forza centripeta, attrattiva, viene equilibrata da una forza uguale e contraria, la “forza centrifuga”. Ci si dimentica per un momento che se su di un corpo agiscono due forze uguali e contrarie allora il corpo o è fermo, oppure si muove di moto rettilineo ed uniforme, ma mai di moto circolare; questo, infatti, è un moto accelerato e di conseguenza avviene sotto l’azione di una forza non equilibrata. Lo stesso Galileo Galilei, che pure aveva saputo correttamente analizzare il moto di caduta dei gravi, riteneva **“moto equabile”**, cioè moto che si conservava uguale a se stesso in assenza di cause esterne, il moto circolare uniforme piuttosto che il moto rettilineo; per la verità, ammettere l’esistenza del moto rettilineo ed uniforme implica l’esistenza di uno spazio infinitamente esteso, e questa concezione era forse troppo audace anche per il grande Galileo. Ma è opportuno a questo punto procedere con ordine. Si parla di *“moto di un corpo, allorché questo occupa successivamente diverse posizioni nello spazio”* (Zingarelli), ma anche *“il moto è la variazione continua della posizione di un corpo, o di una parte di esso, rispetto ad un altro”* (Devoto-Oli). Per quanto possano sembrare simili, queste due definizioni presuppongono una diversa concezione del moto: esiste il moto assoluto, quello che avviene nello spazio assoluto, o non esiste un sistema di riferimento assoluto e quindi tutti i moti sono relativi? A tutt’oggi la risposta a questa domanda non può essere ancora considerata definitiva.

Vi sono due fondamentali vedute sul concetto di spazio; secondo l’una, tale concetto trae origine dalla necessità di considerare un luogo attraverso cui si possa dire che il movimento avviene, e nel quale possano essere posti i corpi (concezione posizionale dello spazio). A questa concezione si contrappone l’interpretazione relazionale dello spazio: lo spazio deriva da una rete di oggetti, senza dei quali esso non esisterebbe. Le due concezioni sono presenti nel pensiero filosofico e scientifico fin dalle origini: la prima concezione è degli atomisti greci, ma è sostenuta anche da Platone, per il quale lo spazio è *“il grembo in cui nacque il mondo”*. Questa bellissima metafora ci fa intendere che l’esistenza dello spazio è indipendente da quella degli oggetti in esso contenuti. Per Aristotele invece la natura dello spazio è di tipo relazionale, così come di tipo relazionale sarà la concezione dello spazio di Cartesio e Leibniz, mentre per Newton lo spazio è di tipo posizionale. Sono altresì evidenti le implicazioni insite nelle due concezioni: la concezione posizionale implica l’esistenza di uno spazio assoluto e quindi anche di un moto assoluto ovvero è assoluto il moto di un oggetto in

moto nello spazio assoluto, mentre nella concezione relazionale, non esistendo uno spazio assoluto non esiste neanche un moto assoluto, quindi tutti i moti dovrebbero essere considerati relativi¹.

Questo duplice orientamento del pensiero si riflette anche nella concezione del tempo; esiste infatti una concezione che identifica il tempo con la percezione che di esso si ha: non esisterebbe il tempo se non esistesse un soggetto che lo percepisca, né esisterebbe se non ci fosse cambiamento; a questa concezione se ne contrappone un'altra, secondo la quale il tempo esiste in assoluto: “...sia che le cose si muovano, sia che giacciono in riposo, sia che dormiamo, sia che siamo svegli, il tempo scorre uniformemente²”.

1. Il moto nella concezione Aristotelica.

L'intento generale della fisica di Aristotele è quello di spiegarci non solo il mondo come è costituito, ma perché è così costituito e non possa essere altrimenti; perciò la sua fisica è essenzialmente qualitativa, respinge ogni considerazione quantitativa che, secondo Aristotele, perderebbe di vista la realtà.

Aristotele accetta la teoria di Empedocle dei quattro elementi ma li considera non come corpi, ma come modi di essere; i moti propriamente detti si distinguono in moti naturali e moti violenti o artificiali, cioè provocati. I moti naturali a loro volta si distinguono in moto verso il basso o verso l'alto e moto circolare; i moti verso il basso sono caratteristici di acqua e terra, quelli verso l'alto di aria e fuoco; il moto circolare è proprio degli astri, è geometricamente perfetto ed è perciò realizzato da un essere incorruttibile: l'etere.

Il mondo sublunare è formato da quattro sfere, terra, aria, acqua, fuoco; queste sfere non sono tra loro separate, ma proprio la loro mescolanza dà origine agli esseri corruttibili. Esse rappresentano dei “luoghi naturali”, cioè quattro sfere verso le quali ognuno dei quattro elementi tende spontaneamente a portarsi, non appena libero di muoversi. Da questa teoria dei “luoghi naturali” Aristotele deriva che il moto naturale della terra e dell'acqua è verso il basso, quello invece dell'aria e del fuoco è verso l'alto; aggiunge anche che più un corpo è pesante, più grande dovrà essere la sua velocità di caduta³.

Oltre i moti naturali, si hanno poi i moti violenti o artificiali; Aristotele individua nella forza, intesa come sforzo muscolare, l'origine del moto, ma afferma, anche qui sbagliando, che per far muovere un corpo con velocità costante, occorre sollecitarlo con una forza costante. Ma come può un proiettile, lanciato verso l'alto, mantenere per un certo tempo la velocità comunicatagli con la spinta iniziale, anche quando questa spinta viene meno? Egli ideò una spiegazione che è in diretta antitesi con quello che oggi conosciamo come principio di inerzia: un proiettile può mantenere la sua velocità solo perché esiste intorno ad esso l'aria, che, mossa dal lancio e diretta verso l'alto, continua a sospingere il proiettile sia pure con velocità via via decrescente. Se non fosse circondato

¹ In realtà Aristotele ritiene che esista un sistema di riferimento assoluto, il cui centro è la Terra, attorno alla quale tutti gli astri ruotano. Lo stesso Cartesio non esclude uno spazio assoluto, ma è chiara la possibilità di descrivere i movimenti indipendentemente da ogni sistema di riferimento.

² I. Barrow: *Lectiones geometricae*, Barrow fu maestro di Newton.

³ È questo uno degli errori più noti della fisica di Aristotele; verrà confutato, non senza sofferenza, da Galileo, ma è un errore che persiste anche oggi.

d'aria, cioè se fosse nel vuoto, il proiettile non potrebbe in alcun modo continuare il movimento. La polemica di Aristotele contro il vuoto⁴ è in aperta antitesi con la concezione atomistica di Democrito: Democrito ha sostenuto che il vuoto è indispensabile per concepire il moto degli atomi, Aristotele dimostra che nel vuoto nessun movimento è possibile, né quello violento, né quello naturale, in quanto, egli aggiunge, non vi sarebbero nel vuoto né un su né un giù, né nessun'altra direzione privilegiata, non solo, ma non essendovi, come affermano gli atomisti, alcuna resistenza, i corpi dovrebbero muoversi con velocità infinita, la qual cosa è assurda. Perciò, se esistesse il vuoto, i corpi dovrebbero necessariamente restare fermi.

L'opposizione a Democrito tuttavia ha non solo implicazioni fisiche, ma anche filosofiche: Democrito pretende di spiegare il mondo con sole cause meccaniche, cioè con moti e urti di atomi, Aristotele attribuiva invece funzione prevalente alla causalità finale⁵.

Per quanto ritenute assurde al giorno d'oggi, le idee di Aristotele sul moto sono rimaste invariate fino a Galileo Galilei.

2. Galileo Galilei.

Galileo può essere considerato l'iniziatore della creazione della scienza del moto, cioè della dinamica, il cui oggetto non è la pura descrizione geometrica ma l'indagine causale dei fenomeni stessi. Anche Galileo postula un tempo assoluto, cioè indipendente dal moto dell'osservatore; egli però per primo si avvale del concetto di accelerazione, da lui definito "variazione di velocità nell'unità di tempo", anche se si limita al caso in cui essa è costante nel tempo. Mediante i suoi studi sul piano inclinato, riuscì a stabilire l'effetto di una forza costante sul moto; nella sua fondamentale opera dal titolo *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla Meccanica e i movimenti locali*, egli scrisse: "*Qualunque grado di velocità si trovi in un mobile, gli sia per sua natura indelebilmente impresso, purché siano tolte tutte le cause esterne di accelerazione o di ritardamento; il che accade solo nel piano orizzontale; infatti nei piani declivi è di già presente una causa di accelerazione, mentre in quelli acclivi [è già presente una causa] di ritardamento: da ciò segue parimenti che il moto sul piano orizzontale è anche eterno; infatti, se è equabile, non scema o diminuisce, né tanto meno cessa*".

L'effetto di una forza costante non è pertanto la velocità, come ritenevano gli Aristotelici, ma l'accelerazione. Dalle parole sopra citate risulta chiaramente la dipendenza dell'accelerazione dalla forza, ma non ancora la proporzionalità tra le due grandezze. Sperimentando sul movimento di caduta libera dei gravi, dedusse anche la legge di caduta libera: "*Un grave abbandonato a se stesso senza velocità iniziale cade lungo la verticale, muovendosi con accelerazione costante e diretta verticalmente verso il basso, che è la stessa per tutti i corpi*".

⁴ "Coloro che affermano che il vuoto esiste dovrebbero almeno ammettere l'esistenza del luogo, in quanto il vuoto è il luogo privato del corpo". Probabilmente qui Aristotele intende "luogo naturale".

⁵ "Per Democrito il fine resta necessariamente un problema, per Aristotele è invece principio di spiegazione" [F. Enriques- Problemi della scienza]

Malgrado le sue geniali intuizioni Galileo tuttavia non perviene ancora alla formulazione corretta del principio di inerzia⁶, che sarà invece formulato da un altro grande pensatore, **Renè Descartes**, italianizzato in **Cartesio**.

3. Cartesio

Nei *Principia*, II parte, Cartesio afferma:

1) Ciascun corpo tende a conservare lo stato in cui si trova e mai lo muta se non per cause esterne: nessun corpo si arresta per se stesso. Il riposo è lo stato contrario al movimento, e nessuna cosa si dirige per natura verso il suo contrario. Solo la resistenza degli altri corpi può arrestare il movimento di un oggetto, e non vi è fluido che non possa diminuire la velocità più dell'aria.

2) Ciascun corpo tende a conservare il movimento seguendo il moto rettilineo, sebbene sia costretto per altri motivi a muoversi in diverse direzioni. In ciascun istante il corpo tende a muoversi rettilinearmente: infatti una pietra che, legata ad uno spago, ruotasse violentemente attorno alla mano, partirebbe secondo la direzione della tangente al cerchio descritto.

3) Negli urti tra corpi la quantità di moto si conserva.

Nonostante sia ancora presente l'influenza metafisica⁷, a Cartesio vanno riconosciuti alcuni meriti. In primo luogo egli afferma, in modo chiaro e formalmente corretto, che il moto più naturale, quello che avviene in assenza di cause esterne, è il moto rettilineo uniforme, in secondo luogo egli chiarisce anche cosa intende per causa esterna: è l'urto con gli altri corpi. In pratica Cartesio fa dipendere il cambiamento dello stato di moto di un corpo dal principio di conservazione della quantità di moto. Sebbene la motivazione sia anche in questo caso di derivazione metafisica, egli infatti ritiene che Dio, al momento della creazione, abbia fornito la materia di una certa quantità di movimento⁸, e poiché ciò che Dio crea è immutabile, la quantità di moto può trasferirsi da un corpo ad un altro, ma nel suo complesso rimane invariata; cionondimeno l'importanza del principio enunciato da Cartesio è innegabile in quanto si introduce qui per la prima volta il principio della matematizzazione del processo di causalità. Poiché infatti la quantità di moto è misurabile, allora anche il moto dei corpi diventa un fenomeno descrivibile mediante equazioni matematiche.

Le implicazioni: se il moto si trasmette attraverso gli urti, tutto lo spazio è riempito di corpi ed il vuoto non esiste⁹; giacché infatti noi vediamo che tutti i corpi, compresi gli astri più lontani sono in movimento, dobbiamo ammettere che tutto l'universo è riempito di particelle tramite le quali il moto si trasmette.

⁶ “A principiar il moto ben è necessario il movente, ma a conservarlo basta che non vi sia contrasto”; tuttavia Galileo ritiene ancora che il “moto equabile” cioè il moto in cui “spazi percorsi in tempi uguali, comunque presi, sono uguali”, sia il moto circolare uniforme, piuttosto che il moto rettilineo.

⁷ Mentre nella seconda parte della definizione n. 1 Cartesio fa ricorso al principio, in fondo ancora aristotelico, di causa finale, la prima parte della stessa definizione è un felice riconoscimento dell'esistenza di una causa efficiente.

⁸ Non si deve qui intendere il prodotto della massa per la velocità ma il prodotto della “quantità di materia” per la velocità; non era ancora chiaro, all'epoca di Cartesio, il concetto di massa.

⁹ Ritorna l'“horror vacui” di aristotelica memoria, sebbene il “pieno” di Cartesio possa essere assimilato ad un “vuoto separato” e quindi viene negato più propriamente quello che i filosofi chiamavano “vuoto diffuso”.

Per Cartesio la condizione per l'esistenza è il pensiero (*res cogitans*); l'estensione (*res extensa*) è l'opposto del pensiero, perciò è attributo e non sostanza; in altre parole non esiste estensione senza corpo. Ma dove vi è spazio lì vi è estensione, perciò lo spazio non è distinto dalla materia. Lo spazio non ha esistenza autonoma, esso coincide con l'oggetto¹⁰.

A questo punto però Cartesio deve risolvere il problema del moto dei pianeti. Escogita a tal fine la teoria dei vortici. Cartesio sa bene, per averlo lui stesso affermato, che il moto curvilineo è reso possibile da una azione che dovrà opporsi alla fuga dal centro tipica dei corpi in rotazione; egli si immagina la presenza di un fluido in perenne rotazione, ed i corpi sono da questo fluido trasportati come pagliuzze nell'acqua. Le parti più vicine al centro di rotazione sono spinte da una azione più forte di quelle lontane; queste vengono urtate e cedono a loro volta parte della propria quantità di moto alle prime che sono così ostacolate nel loro tentativo di allontanamento dal centro.

Altra deduzione: le maree sono provocate dal passaggio della Luna sulla verticale del luogo e poiché la Luna genera una compressione della materia interposta, al suo passaggio si ha bassa marea e la Terra è a forma di fuso, cioè è allungata ai poli.

La fisica di Cartesio, malgrado gli indubbi meriti, contiene tuttavia molti errori, i quali verranno confutati da Newton; il grande fisico inglese doveva infatti prima sgombrare il campo da tutti gli errori, per poi poter proporre la sua visione del mondo.

4. Il modello in fisica e nelle scienze sperimentali (Appendice)

La teoria dei vortici è un primo esempio di modellizzazione nella descrizione dei fenomeni fisici.

Supponiamo che una situazione (reale) **X** susciti in noi una domanda **d**.

Per dare una risposta si modella **X**: si costruisce, cioè, un dispositivo (reale o astratto) **M** che viene considerato l'immagine o l'analogo di **X**. Il modello **M** di **X** è costruito in modo tale che, nell'analogia di **X** con **M**, la domanda **d** posta per **X** si traduce nella domanda **D** attinente a **M**. Studiando l'evoluzione di **M** si ottiene la risposta **R** alla domanda **D**; sfruttando ora l'analogia in senso inverso si ottiene la risposta **r** alla domanda **d** di **X**; si sottopone a verifica la risposta.

Esempio:

X : si lancia un oggetto verticalmente verso l'alto; si osserva che l'oggetto raggiunge una altezza massima e ricade al suolo.

Domanda **d**: qual è la massima altezza raggiunta dall'oggetto?

Modello **M**: il moto è uniformemente ritardato con decelerazione **g**, allora (modello matematico):

¹⁰ Per quanto riguarda il vuoto, nel senso in cui i filosofi prendono questa parola, cioè per uno spazio in cui non c'è sostanza, è evidente che non c'è spazio nell'universo che sia tale poichè l'estensione dello spazio o del luogo interiore non è differente dall'estensione del corpo. E come, dal fatto solo che un corpo è esteso in lunghezza, larghezza e profondità, abbiamo ragione di concludere che esso è una sostanza, poiché concepiamo che non è possibile che quello che non è nulla abbia dell'estensione, dobbiamo concludere lo stesso dello spazio che si suppone vuoto: cioè che, poiché c'è in esso estensione, c'è necessariamente anche della sostanza [Descartes: Principia philosophiae, parte II]

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = v_0 - g t$$

Nel punto più alto $v=0$, si ottiene come è noto: $h_{\max} = v_0^2/2g$.

Risposta r: sia, per fissare le idee, $v_0 = 10$ m/sec, allora $h_{\max} = 5,1$ metri.

Verifica: se il modello è corretto, allora l'oggetto deve ricadere al suolo con la stessa velocità con cui è stato lanciato verso l'alto.

Un modello può essere astratto o reale (oggetto materiale); ad esempio l'atomo può essere "modellizzato" con fermagli e rondelle.

La validità di un modello dipende da tre elementi:

- deve essere in grado di fornire la risposta r;
- deve condurre a nuove conoscenze;
- deve suggerire nuovi esperimenti.

Germano Germani

Aristarco di Samo

Aristarco di Samo (III secolo a.C.) ha utilizzato un semplice metodo geometrico per calcolare le dimensioni della Luna e del Sole e le loro distanze dalla Terra.

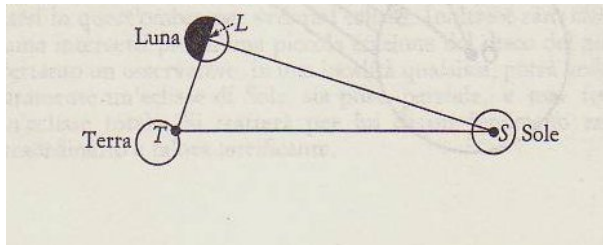


Fig. 1

Aristarco sosteneva che, quando la Luna si trova in uno dei due quadranti (primo quarto o ultimo quarto), occupa il vertice di un triangolo rettangolo secondo la figura 1, mentre l'angolo LTS misura 87° .

Ne consegue che è possibile stabilire una relazione tra LT e LS ricorrendo alla trigonometria:

$$TS = \frac{TL}{\cos 87^\circ} \quad \text{cioè} \quad TS = TL \cdot 19$$

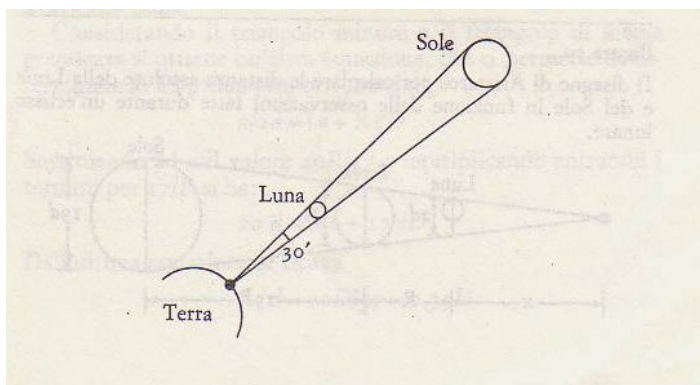


Fig. 2

In una eclissi totale di Sole, secondo Aristarco, Luna e Sole sottendono lo stesso angolo sulla Terra (fig. 2); ne consegue che, se il Sole dista dalla Terra 19 volte più della Luna, dovrebbe anche essere 19 volte più grande.

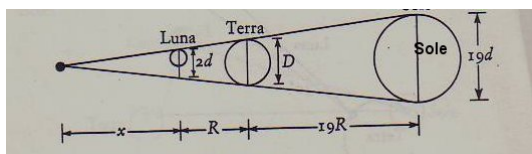


Fig. 3

Infine Aristarco sosteneva che in una eclissi totale di Luna il tempo che questa ultima impiega per essere completamente oscurata è uguale al tempo che la stessa impiega per incominciare ad uscire dall'ombra; se quindi il diametro della Luna è d , sarà $2d$ il tratto in cui la Luna attraversa il cono d'ombra determinato dalla Terra. (fig. 3)

Consideriamo il triangolo grande (la sua base è $19d$, l'altezza $20R + x$) ed il triangolo piccolo (la sua base è $2d$, l'altezza x). Esiste la seguente relazione tra le due basi e le altezze dei relativi triangoli:

$$19d : 2d = (20R + x) : x$$

applicando lo scomponendo otteniamo: $(19d - 2d) : 2d = (20R + x - x) : x$ cioè :

$$(19 - 2) : 2 = 20R : x \quad \text{quindi} \quad 17 : 2 = 20R : x \quad x = \frac{40}{17} R$$

Consideriamo ora il triangolo medio (la sua base è D , l'altezza è $R + x$) ed il triangolo piccolo:

$$D : 2d = (R + x) : x$$

Sostituiamo ad x il valore precedentemente trovato.

$$D : 2d = \left(R + \frac{40R}{17} \right) : \frac{40R}{17} \quad \text{cioè} \quad D : 2d = \frac{57R}{17} : \frac{40R}{17}$$

Semplificando il terzo ed il quarto termine della proporzione avremo : $D : 2d = 57 : 40$

Quindi $d = \frac{20D}{57} = 0,35 \cdot D$ il diametro della Luna è poco più di un terzo del diametro

terrestre.

Aristarco conosceva il valore del diametro terrestre perché era stato calcolato nel III secolo a. C. da **Eratostene** di Cirene per cui riuscì a trasformare quelli che erano valori relativi in valori assoluti. Questi calcoli non sono risultati corretti solo perché l'angolo LTS della figura 1 non misura 87° , bensì $89^\circ 51'$; quindi la distanza Terra-Sole non è 19 volte più grande della distanza Terra-Luna, bensì circa 389 volte.

Arturo Criscitiello

Bibliografia: **Thomas S. Kuhn**, La rivoluzione copernicana (Appendice tecnica del testo),
Piccola Biblioteca Einaudi .

INDICE

• Presentazione.....	01
• La dimostrazione per induzione in matematica.....	03
• Pitagora fra leggenda e realtà.....	07
• L'infinito nell'antica Grecia.....	29
• L'uso greco della matematica nell'interpretazione della natura.....	33
• Bellezza e sezione aurea.....	37
• Le parole della matematica.....	39
• Le parole della fisica.....	47
• Storia del concetto di moto.....	51
• Aristarco di Samo e la misura dei corpi celesti.....	57