

## Gli Elementi di Euclide

Negli Elementi di **Euclide** troviamo raccolto tutto il sapere matematico dell'epoca. I 13 libri non sono un'opera originale, cioè Euclide non è l'autore dei risultati qui raggiunti, ma ha organizzato in un sistema logico e completo tutto quanto era stato scoperto fino ad allora nel campo della matematica. Quindi gli Elementi di **Euclide** non contengono risultati nuovi rispetto ai geometri precedenti. Sono una rigorosa sistemazione del già conosciuto, che viene ora garantito come certo dal metodo della dimostrazione. Qualche autorevole storico ha definito **Euclide** il sistematore ed Archimede il costruttore.

**Euclide**, dopo i **Termini** (cioè le Definizioni), introduce cinque **postulati** (ciò che si chiede di ammettere) ai quali fa seguire una serie di **nozioni comuni** (con linguaggio moderno potremmo chiamarle “**regole di deduzione logica**”).

Servendosi di questi elementi **Euclide** deduce, passo passo, tutto il grande edificio della matematica: ben 13 libri, ricchissimi di teoremi (**risultati dedotti**), corollari, lemmi di ogni genere.

Gli Elementi di **Euclide** offrono un'esposizione organica, logicamente ordinata, che comprende le parti fondamentali della geometria e dell'aritmetica, cioè quelle nozioni matematiche che stanno a base di ogni superiore sviluppo.

I primi due libri trattano dei triangoli e dei parallelogrammi, il terzo ed il quarto del cerchio e dei poligoni regolari, il quinto della teoria delle proporzioni, il sesto della similitudine piana, il settimo l'ottavo ed il nono dell'aritmetica dei numeri interi e delle frazioni, il decimo, in cui figura il noto algoritmo euclideo per la ricerca del M.C.D. di due numeri, degli irrazionali quadratici e biquadratici, infine gli ultimi tre della geometria dello spazio.

Il sistema euclideo, rigorosamente deduttivo, dipende da alcuni principi che sono formulati: nelle spiegazioni dei **termini** o definizioni, nei **postulati** (ciò che si chiede di ammettere) e nelle **nozioni comuni**.

I **termini** rappresentano le definizioni degli enti geometrici, i **postulati** sono proposizioni primitive (non dimostrate) riferite ai termini introdotti, le **nozioni comuni** sono proposizioni primitive (non dimostrate) che si riferiscono a situazioni e procedimenti non esclusivamente propri della matematica, bensì comuni anche ad altre scienze.

## Libro I: contiene 23 Definizioni, 5 Postulati, 5 Nozioni comuni e 48 proposizioni

Il **primo libro** degli elementi di **Euclide** contiene **23 termini** , **5 postulati** ed **8 nozioni comuni** . Poi **Euclide** enuncia **48 proposizioni** delle quali fornisce la dimostrazione. Qualche osservazione critica sui 23 termini introdotti da **Euclide**. Qualche termine, che rappresenta una definizione non definisce niente. Infatti affermare, come fa Euclide, che “ **un punto è ciò che non ha parti**“, o che “**una linea è una lunghezza senza larghezza**“, o che “**una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza**“, non significa definire tali enti, in quanto una definizione deve essere espressa mediante termini più semplici e già noti.

Alcuni autori di epoca posteriore ad **Euclide** usavano il termine **assioma** o **nozione comune** per riferirsi a ciò che era noto o che veniva accettato come evidente, il termine **postulato** per fare riferimento a qualcosa che doveva essere “richiesto“ e non doveva essere necessariamente evidente.

Elenchiamo i **termini** del primo libro degli Elementi di Euclide .

- 01) *Un punto è ciò che non ha parti*
- 02) *Una linea è ciò che ha lunghezza ed è priva di larghezza*
- 03) *Le estremità di una linea sono punti*
- 04) *Una linea retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai propri punti*
- 05) *Una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza*
- 06) *Gli estremi di una superficie sono linee*
- 07) *Una superficie piana è una superficie che giace ugualmente rispetto alle proprie rette*
- 08) *Un angolo piano è la reciproca inclinazione di due linee poste su di un piano , che si incontrino tra loro e che non giacciano su di una linea retta*
- 09) *Quando le linee che definiscono l'angolo sono rette , l'angolo è detto rettilineo*

- 10) *Quando una retta innalzata su di un'altra retta forma angoli adiacenti uguali fra loro , ciascuno dei due angoli è retto e la retta si dice perpendicolare a quella su cui è innalzata*
- 11) *Un angolo ottuso è un angolo maggiore di un angolo retto*
- 12) *Un angolo acuto è un angolo minore di un angolo retto*
- 13) *termine è l'estremo di qualche cosa*
- 14) *Una figura è ciò che è compreso tra uno o più termini*
- 15) *Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea , detta circonferenza , tale che tutte le rette che cadono su tale linea a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.*
- 16) *Tale punto si chiama centro del cerchio.*
- 17) *Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.*
- 18) *Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.*
- 19) *Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatera quelle comprese da tre rette (sono i triangoli; n. d. r.), quadrilatera quelle comprese da quattro, e multilatera quelle comprese da più di quattro rette.*
- 20) *Delle figure trilatera, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.*
- 21) *Infine, delle figure trilatera, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.*

22) *Delle figure quadrilateri, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilateri oltre a queste si chiamino trapezi.*

23) *Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano da nessuna delle due parti.*

Il primo libro degli Elementi di Euclide elenca **5 postulati**:

- I) [Risulti postulato] che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
- II) [Risulti postulato] che una retta terminata [ SEGMENTO ] si possa prolungare continuamente in linea retta.
- III) [Risulti postulato] che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.
- IV) [Risulti postulato] che tutti gli angoli retti siano eguali fra loro.
- V) [Risulti postulato] che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

In termini equivalenti, secondo le vedute moderne, il **quinto postulato** possiamo enunciarlo così:

<< **Data una retta  $r$  ed un punto  $P$  non appartenente ad essa, nel piano che contiene  $P$  ed  $r$  esiste una sola retta  $s$  passante per  $P$  e parallela ad  $r$ .** >>

Per rette parallele intendiamo rette complanari che non hanno alcun punto in comune.

Il primo libro degli Elementi di Euclide elenca **8 nozioni comuni**, alcune delle quali potrebbero essere state introdotte successivamente da altri matematici.

**I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.**

**II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.**

**III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.**

**IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.**

**V. E doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro.**

**VI. E metà di una stessa cosa sono uguali tra loro.**

**VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.**

**VIII. Ed il tutto è maggiore della parte.**

Quest'ultima nozione comune, che appare inconfutabile ad ogni persona di buon senso, fu la causa della nascita di un congruo numero di paradossi chiamati **paradossi dell'equinumerosità**.

Noi sappiamo che due insiemi si dicono equipotenti o che contengono lo stesso numero di elementi se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi.

Se un insieme è finito, esso non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme, cioè con una sua parte.

Se l'insieme considerato contiene infiniti elementi le cose cambiano sensibilmente. Infatti si può dimostrare che sono **equipotenti** gli insiemi dei punti di segmenti aventi lunghezze diverse, addirittura si può dimostrare che un qualsiasi segmento, che è una parte di una retta, ha tanti punti quanti sono i punti della retta.

**Galileo Galilei** dimostrò, attraverso una corrispondenza biunivoca, che i quadrati dei numeri naturali, che sono una parte dei numeri naturali, sono tanto quanti i numeri naturali.

Sulla base di queste considerazioni Dedekind definì infinito un insieme equipotente con un suo sottoinsieme, cioè con una sua parte. Questa affermazione è la negazione dell'ottava nozione comune di Euclide. In seguito, Cantor risolse magnificamente l'apparente contraddizione dell'equinumerosità degli insiemi infiniti. Ma su questo argomento ci torneremo in seguito.

Il primo libro degli Elementi di Euclide prosegue con l'esposizione di **48 proposizioni**, che dimostra brillantemente utilizzando i **Termini**, i **postulati**, le **Nozioni comuni** e le **proposizioni** precedentemente dimostrate.

Le 48 proposizioni contengono le relazioni di uguaglianza e di disuguaglianza dei triangoli, i teoremi sulle parallele, sulla somma degli angoli di un poligono, l'equivalenza dei poligoni e la dimostrazione del teorema di Pitagora.

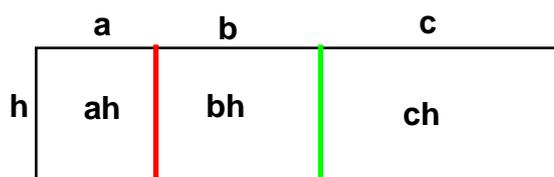
## Libro II :contiene 2 Definizioni e 13 Proposizioni

Il secondo libro degli Elementi di Euclide è dedicato all'algebra geometrica, un settore elegante ed originale della matematica greca, che merita un'adeguata illustrazione.

L'idea originale che caratterizza l'algebra geometrica di Euclide è quella di rappresentare un numero reale mediante un segmento , sicché un prodotto di due numeri reali rappresenta l'area di un rettangolo . Questo libro contiene 2 definizioni e 13 proposizioni .

**Proposizione 1 del secondo libro degli Elementi** ( esprime la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione ) :

dati due segmenti e diviso uno di essi in un certo numero di parti ( ad esempio tre ) , il rettangolo individuato dai due segmenti è uguale alla somma dei rettangoli individuati dal segmento non diviso e da ognuna delle parti in cui è stato diviso l'altro segmento . Il disegno è il seguente :



la sua espressione simbolica moderna è la seguente :  $(a + b + c) \cdot h = ah + bh + ch$

### Libro III : contiene 11 Definizioni e 37 proposizioni

Tratta la teoria del cerchio . In questo libro vengono presentati teoremi sulle posizioni reciproche di una retta e di un cerchio e di due cerchi , sulle proprietà delle corde e delle tangenti, sulle relazioni tra archi ed angoli e tra angoli al centro ed angoli alla circonferenza .

### Libro IV : contiene 7 definizioni e 16 proposizioni

In questo libro viene indicato come inscrivere e circoscrivere ad una circonferenza un triangolo , un quadrato , un pentagono regolare e come costruire un esagono ed un pentadecagono inscritti in una circonferenza .

### Libro V: contiene 18 definizioni e 25 proposizioni

Il libro ci propone la teoria generale delle proporzioni fra grandezze geometriche . Inizia con proposizioni relative alla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e si conclude con le proprietà delle proporzioni .

## Libro VI : contiene 11 definizioni e 37 proposizioni

Tratta la similitudine dei poligoni

## Libro VII : contiene 22 definizioni e 39 proposizioni

## Libro VIII: contiene 27 proposizioni

## Libro IX : contiene 36 proposizioni

I libri VII , VIII e IX sono dedicati all'aritmetica dei numeri razionali , esposta con rigore . Tutta la materia ivi esposta è quella che si insegna attualmente . La dimostrazione data da Euclide sull'esistenza di infiniti numeri primi è l'unica che si conosca . Lo stesso dicasi per la costruzione dei **numeri perfetti** , cioè di quei numeri uguali alla somma dei loro divisori , esclusi i numeri stessi .

### Dimostrazione di Euclide dell'infinità dei numeri primi

Noi sappiamo che un numero **naturale maggiore** dell'unità è **primo** se è divisibile per se stesso e l'unità . La domanda che si pose Euclide fu la seguente . “ **quanti numeri primi esistono ?** “ **Sono infiniti o sono un numero finito ?**

La **proposizione 20** del libro IX recita così : “ ***I numeri primi sono più di una qualsiasi moltitudine di numeri primi*** “ . Questo significa che Euclide ammette

l'esistenza di infiniti numeri primi . Le prime considerazioni che si possono fare sono le seguenti .

I numeri compresi tra 1 e 10 sono 5 , quelli compresi tra 10 e 100 sono 21 , quelli compresi tra 9999900 e 10000000 sono 3 . Questa legge di rarefazione dei numeri primi potrebbe indurci ad affermare che i numeri primi sono in numero finito . ma le cose non stanno cos' , come dimostrò brillantemente Euclide .La dimostrazione di Euclide è una dimostrazione per assurdo ed inizia con la negazione della tesi . Questo significa affermare che i numeri primi sono in numero finito ed , in quanto tali , possiamo pensare di averli trovati tutti . Supponiamo che essi siano  $k$  e stabiliamo di indicarli con i seguenti simboli :  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  . Detto  $P = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$  di tutti i  $k$  numeri primi esistenti , consideriamo il numero  $N = P + 1$  .

N non può essere un numero primo, in quanto sappiamo che P è il prodotto di tutti i numeri primi. N è, pertanto, un numero composto che possiamo decomporre in fattori primi. Sia p uno di questi fattori primi, che sono anche divisori del numero N. Ma p non può essere nessuno dei fattori primi (divisori) di P, perché dovrebbe essere anche un fattore (divisore) del numero 1. Pertanto p deve essere un numero primo diverso da tutti quelli che costituiscono il prodotto di P.

Dunque l'ipotesi che P era il prodotto di tutti i numeri primi deve essere falsa e quindi tutti i numeri primi costituiscono un insieme infinito.

Di mirabile fattura è la **proposizione N° 36** che Euclide enuncia nella seguente maniera:

**“ Se tanti numeri quanti ne vogliamo, a cominciare dall'unità, vengono posti continuamente in proporzione doppia fino a che la somma di tutti i numeri non diventi un numero primo, e se la somma viene moltiplicata per l'ultimo numero, il prodotto sarà un numero perfetto “.**

Col simbolismo della matematica moderna abbiamo quanto segue. Se

$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$  è un numero primo, allora il numero  $2^{n-1}(2^n - 1)$  è un

**numero perfetto**. Definizione: **“ Un numero si dice perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori, escluso il numero stesso . “** Gli antichi greci conoscevano i primi 4 numeri perfetti: 6, 28, 496, 8128. Euclide non dice se la formula da lui trovata è in grado di generare tutti i numeri perfetti. Noi oggi sappiamo che tutti i numeri **perfetti pari** sono del tipo euclideo, ma la questione dei numeri **perfetti dispari** è un problema non risolto.

Attualmente conosciamo una ventina di numeri perfetti e questi sono tutti pari. Tuttavia non possiamo generalizzare affermando che tutti i numeri perfetti sono pari. Un altro numero perfetto è 33550336. Un numero perfetto pari deve terminare per 6 o per 8.

### **Libro X : contiene 16 definizioni 115 proposizioni**

Il libro contiene, sotto forma geometrica, un'accurata classificazione degli incommensurabili che provengono da radicali quadratici sovrapposti, cioè da radicali provenienti dalla risoluzione delle equazioni biquadratiche del tipo  $x^4 + ax^2 + b = 0$ . Questo significa che il libro espone una classificazione sistematica dei segmenti incommensurabili della forma

$$a \pm \sqrt{b}, \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \sqrt{a \pm \sqrt{b}}, \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

Gli ultimi tre libri degli Elementi sono consacrati, nella massima parte, alla geometria dello spazio. I libri XI (28 definizioni e 39 proposizioni) e XII (18 proposizioni) sviluppano le proprietà dei prismi, delle piramidi, dei cilindri, dei coni, delle sfere. Mirabile è la dimostrazione della proporzionalità della sfera col cubo del suo diametro. Particolarmente brillante è la dimostrazione del teorema secondo il quale le aree dei cerchi stanno tra di loro come i quadrati costruiti sui loro

diametri . Ai poliedri regolari convessi è dedicato l'ultimo libro degli elementi , il XIII ( contiene 18 proposizioni ) . Esso si conclude con la dimostrazione che non esistono altri poliedri regolari diversi da quelli scoperti da Pitagora e resi popolari da Platone . Questo fatto indusse alcuni matematici a ritenere che l'obiettivo degli Elementi di Euclide fosse la costruzione delle celebri figure di Pitagora . Ma questo non corrisponde a verità .