

## Euclide, l'architetto della matematica greca

### **Alessandro Magno e la civiltà ellenistica, ovvero dalla Macedonia all' Impero Universale**

Alla morte di **Filippo II** , avvenuta nel 336 a.C. , salì sul trono della **Macedonia** il figlio **Alessandro**. Il giovane ventenne era colto ed intelligente , aveva avuto come precettore il filosofo greco **Aristotele** ed era stato perfettamente addestrato all'uso delle armi . Nessuno era adatto più di lui di attuare il disegno del padre , di guidare la **Grecia** unificata contro la Persia . La storia di Alessandro è la storia di un sogno : porre i Greci alla guida di un **Impero universale** più grande di quello persiano , nel quale popolazioni molto diverse tra loro vivessero in perfetta armonia scambiandosi usi , costumi , esperienze , culture . Per le sue imprese fu chiamato **Alessandro il Grande** , o **Alessandro Magno** . Nel giro di tre anni Alessandro conquistò la Siria , la Fenicia , l'Egitto e molti altri territori . Nel 323 a.C. , mentre si apprestava a conquistare l' Arabia , si ammalò improvvisamente e morì in pochi giorni . **Alessandro** non voleva dividere il mondo in vincitori e vinti , ma unificare i popoli della **Terra** sotto un unico **Stato** con sudditi di pari diritti . Era questo l' **Impero universale** che Alessandro aveva sognato . Una parte del suo progetto ebbe successo anche dopo la sua morte ; un'altra parte fallì : chi l'aveva pensato era scomparso troppo presto per governare tanto a lungo da renderlo duraturo .

La parte del sogno non realizzato fu l'unità dell'impero . Infatti alla morte di Alessandro nessuno dei generali e nobili macedoni fu in grado di assumere nelle proprie mani il controllo di tutto il vastissimo Impero e pertanto scoppiarono aspri conflitti per la sua spartizione . La situazione politica si stabilizzò tra il 280 ed il 275 a.C. con la formazione di tre grandi monarchie :

1) il **regno di Siria** , sotto il generale **Seleuco** ed i suoi discendenti . Per estensione era il più vasto in quanto andava dall' **Asia Minore** alla **Battriana** .

2) il **regno di Macedonia** sotto il generale **Antigono Gònata** ed i suoi successori .

3) il **regno d ' Egitto** sotto il generale **Tolomeo Lagos** , appartenente ad una famiglia della nobiltà macedone . In questo regno furono evidenti l'incontro e la fusione tra la cultura greca e le altre civiltà . **Alessandria** divenne il simbolo vivente della **nuova civiltà universale** ,come era stata concepita da Alessandro . In questo contesto ed in Alessandria d ' Egitto operò fattivamente il grande matematico Euclide del quale parleremo più dettagliatamente in seguito .

Sono degni di nota per i loro studi e le loro scoperte anche i seguenti scienziati che risentirono positivamente del fervore culturale di Alessandria .

a) **Archimede** , autore di mirabili scoperte in molti settori del sapere .

b) **Aristarco di Samo** il quale sostenne che era la Terra a girare attorno al Sole .

c) **Eratostene di Cirene** il quale riuscì a misurare per primo la circonferenza della Terra .



#### **Filippo II** , padre di **Alessandro Magno**

Questi , sfruttando al massimo una ricchezza naturale del paese , le **miniere d'oro** , ed inventando un nuovo formidabile schieramento militare , la **falange macedone** , acquisì la potenza necessaria per sconfiggere una coalizione di città greche a **Cheronea** . Con questa vittoria del **338 a.C.** divenne di fatto il padrone dell'intera Grecia . Il suo obiettivo era quello di costruire un **impero universale** , dove potessero convivere le diverse popolazione del mondo . Alcuni congiurati lo uccisero prima che riuscisse a realizzare il suo sogno .



## **Alessandro Magno**

progettava di costruire un unico grande impero , che abbracciasse **Oriente** ed **Occidente** , senza più distinzione fra **Greci** e **Persiani** . Per questo motivo favorì i matrimoni tra i soldati macedoni e le donne persiane , e ne diede egli stesso l'esempio , sposando **Rossane** , la figlia di un capo persiano .



## **Alessandro Magno** in battaglia .

Nessuno era più adatto di lui ad attuare il disegno preparato dal padre **Filippo II** , di guidare la **Grecia** unificata contro la **Persia** . Alla genialità militare e politica egli univa un appassionato amore di gloria ed un forte desiderio di conoscenza e d'avventura , frutto dell'insegnamento dello scienziato e filosofo **Aristotele** , l'educatore greco al quale il padre lo aveva affidato .



Famoso **mosaico** che rappresenta **Dario** durante la battaglia di **Isso** , che decise la caduta dell'impero persiano .



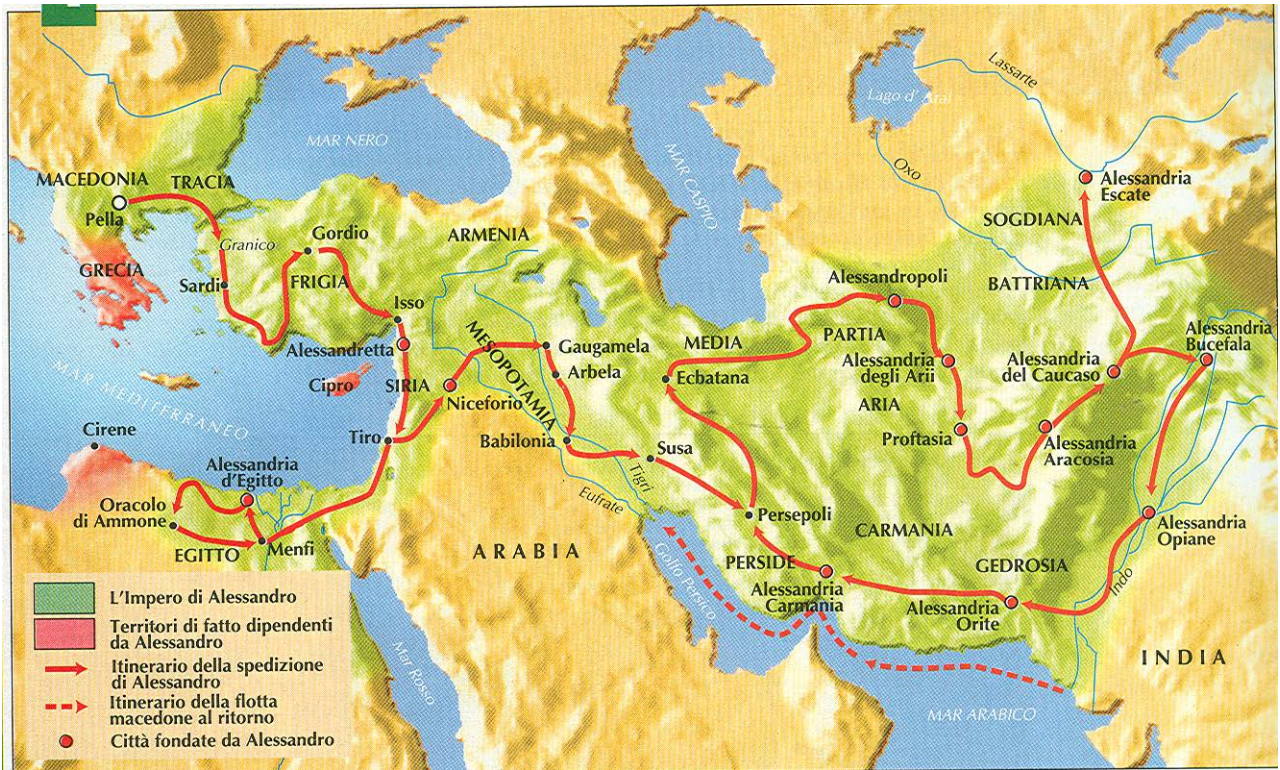
## Miniatura

del **Quattrocento** che raffigura l'**aritmetica** e la **geometria**.

Le due discipline sono simboleggiate da

**Pitagora**, matematico e filosofo greco del VI secolo a.C. e da **Euclide**, matematico del IV secolo a.C.





## La biografia di Euclide

Della vita di questo illustre e straordinario matematico greco sappiamo poco . La morte di Alessandro Magno aveva portato a lotte intestine tra i generali dell'esercito greco . Ma nel 306 a.C. il controllo della parte egiziana dell'impero era saldamente nelle mani di Tolomeo I , e questo monarca illuminato fu così in grado di dedicarsi al suo regno avendo presente il sogno ambizioso di Alessandro Magno . Fra i suoi primi decreti vi fu l'istituzione ad Alessandria di una scuola , nota come il **Museo** , che non aveva pari a quei tempi . Ad insegnare in questa scuola chiamò un gruppo di eminenti studiosi , tra i quali l'autore del più fortunato manuale di matematica di tutti i tempi : gli **Elementi di Euclide** . Con questa scuola , nella quale sorge e si sviluppa la meravigliosa opera creativa di Euclide , ha inizio il cosiddetto **periodo aureo della geometria greca** , dove spiccano giganteggiando le figure di **Euclide , Archimede , Apollonio** . Di Euclide si hanno scarse notizie biografiche . Di origine greca , si crede sia nato ad **Alessandria d ' Egitto** ed abbia compiuto i suoi studi ad Atene , verso il 300 a.C. . Certo è che passò gran parte della sua vita ad Alessandria , ove fu maestro del re Tolomeo I . La leggenda ce lo descrive come un vecchio austero , ma nello stesso tempo affabile e gentile . Euclide frequentava la corte del re Tolomeo al quale impartiva dotte lezioni di matematica . Euclide aveva messo a disposizione del suo prezioso allievo gli Elementi e Tolomeo incontrava notevoli difficoltà nell'apprendere le nozioni fondamentali della geometria. Tolomeo , nella qualità di primo cittadino del suo impero , pensò bene di pretendere dal suo illustre maestro una via più comoda e meno impegnativa che lo conducesse ugualmente alla conoscenza della matematica del suo tempo . Euclide rispose senza scomporsi dicendo al suo regale sovrano che in “ **matematica non esistono vie regie** . “ La via che conduce alla conoscenza è impervia e non fa nessuna distinzione tra sovrani e sudditi . Si narra pure che un allievo , dopo avere seguito per qualche settimana le lezioni del sommo matematico , si rivolse ad Euclide con queste parole : Maestro , quale vantaggio potrò ricavare dallo studio della geometria ?

Anche questa volta , Euclide rispose perentoriamente ordinando ad un suo servo di dare delle monete a quel giovane impertinente di cacciarlo immediatamente dalla scuola che non meritava di frequentare . Infatti il malcapitato allievo , con la sua domanda , si era dimostrato incapace di comprendere il vero significato e l'inestimabile valore della scienza . La straordinaria popolarità di Euclide riposa in massima parte sopra i suoi **Elementi** , opera che per lunghi secoli venne scelta come libro di testo geometrico nelle più rinomate scuole .**Proclo di Bisanzio** ( 412-485 d.C. ) riferisce che Euclide compilò i suoi Elementi raccogliendo molti teoremi di Eudosso , perfezionandone molti di Teeteto e completando con dimostrazioni esatte le affermazioni non ben dimostrate dai suoi predecessori . L'opera principale di Euclide è costituita dagli **Elementi** in 13 libri , dei quali i primi sei trattano della geometria piana , i quattro seguenti dell'aritmetica , e gli ultimi tre della geometria solida .Il trattato di Euclide , che è la più grande opera di matematica dell'antichità , ha avuto una enorme diffusione in tutto il mondo civile . Esso , per numero di edizioni e traduzioni , può certamente competere con la “ **Divina Commedia** “ ed è superato solo dalla “ **Sacra Bibbia** “ .Quantunque Euclide sia noto alla generalità dei matematici esclusivamente come l'autore degli **Elementi** , pure a lui si debbono altri lavori di carattere più elevato . Cinque sono le opere di Euclide pervenute sino a noi : gli **Elementi** , i **Dati** , la **Divisione delle figure** , i **Fenomeni** e l' **Ottica** . I **Dati** contengono novantaquattro proposizioni e sono strettamente connessi coi primi sei libri degli **Elementi** . Quest'opera è una importante raccolta di problemi le cui soluzioni , alquanto ingegnose , ci portano a considerazioni che si possono qualificare come notevoli teoremi di esistenza . Al pari dei **Dati** svolge un ufficio complementare rispetto agli **Elementi** il lavoro di **Euclide** che tratta della **Divisione delle figure** . Lo scopo di quest'opera è quello di dividere , mediante rette soggette a certe condizioni , una data area piana in parti aventi tra loro relazioni prestabilite .





**Euclide** è uno dei più famosi matematici del mondo di tutti i tempi . Della sua vita si sa poco . Dopo la morte di **Alessandro Magno** avvenuta nel 323 a.C. i suoi generali si divisero il suo immenso impero . **Tolomeo** divenne re dell'Egitto col nome di **Tolomeo I** . Questi istituì ad **Alessandria** una scuola , nota come il “ **Museo** “ , destinata a diventare famosa in tutto il mondo come centro di studi . Qui venne chiamato ad insegnare la matematica **Euclide** che scrisse una famosa opera intitolata “ **Elementi** “ , divisa in 13 libri e contenente tutto il sapere scientifico dell'epoca .

Il testo originale greco è andato perduto , ma prima della sua scomparsa era stata fatta una traduzione araba , la quale fu , a sua volta , tradotta in latino ed infine nelle principali lingue moderne . La **Divisione delle figure** comprende una raccolta di trentasei proposizioni concernenti la divisione di figure piane .

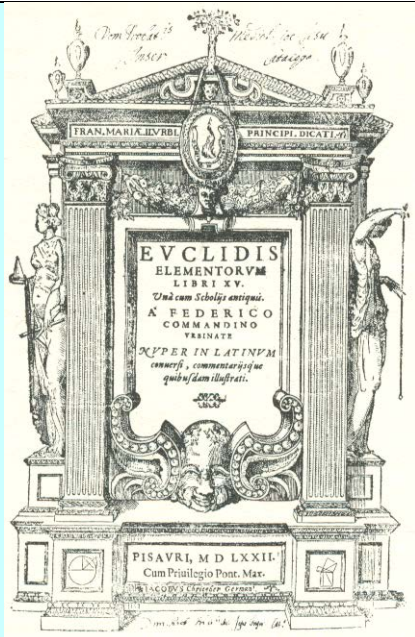
Il libro , intitolato **Fenomeni** , è un trattato elementare di astronomia e contiene un'interessante descrizione geometrica della sfera celeste . Contiene le considerazioni che condussero gli antichi **Greci** all'idea della **terra sferica** posta nel centro dell ' **Universo** , della sfericità del cielo e del suo moto uniforme rispetto alla terra .

L ' **Ottica** contiene le prime proposizioni dell'ottica geometrica che riprende l'ipotesi di Platone secondo il quale il fenomeno della visione è una conseguenza dei raggi luminosi emessi dall'occhio . L'opera descrive le proprietà geometriche che derivano dalla propagazione rettilinea della luce , dei limiti del potere visivo dell'occhio e della visione degli oggetti in movimento .L'opera, intitolata **Catottrica** tratta i fenomeni della riflessione rispetto agli specchi piani e curvi . L'attribuzione di quest'opera ad Euclide è dubbia .Un'opera di Euclide , particolarmente importante , è quella denominata **Porismi** ,sfortunatamente perduta , sulla quale **Pappo** offre informazioni assai ampie .

La perdita dei **Porismi** euclidei è particolarmente grave , perché tale opera forse dava l'idea di quanto in quel tempo Euclide si era avvicinato alla **geometria analitica** . **Pappo** più tardi riferirà che un porisma é qualcosa di mezzo tra un teorema , in cui si propone una dimostrazione di qualcosa , ed un problema , in cui si propone la costruzione di qualcosa . Se un **porisma** era , come si è pensato , una sorta di equazione verbale di una curva , il libro di **Euclide** sui **Porismi** differiva , probabilmente dalla nostra geometria analitica , in gran parte , per la mancanza di simboli e dell'uso di tecniche algebriche .

Un'altra opera perduta di Euclide è una collezione di **Paradossi** destinati alla gioventù per addestrarla al retto ragionare .Fra le opere perdute di Euclide va segnalata anche quella intitolata **Luoghi superficiali** i cui argomenti trattati potrebbero essere i **solidi di rivoluzione** .

## Gli Elementi di Euclide



Frontespizio della prima edizione di  
**Euclidis elementorum libri XV**  
di **Federeico Commandino**

( Pesaro 1572 )

Gli Elementi costituiscono il più antico e completo trattato di matematica .

Comprendono quasi tutte le conoscenze matematiche che vanno sotto il nome di “ **matematiche elementari** “ . Essi sono divisi in **treddici libri** :

i **primi sei** sono dedicati alla geometria elementare del piano , i **libri VII , VIII , IX** all'**aritmetica** , il **X** alla teoria dei **numeri irrazionali** , gli ultimi tre alla **geometria dello spazio** .

Gli Elementi raccolgono tutte le conoscenze matematiche acquisite dall'uomo sin al tempo di Euclide . Il merito del grande matematico greco è quello di avere sistemato in un contesto organico e rigoroso tutto il materiale precedente .

Negli Elementi di Euclide troviamo raccolto tutto il sapere matematico dell'epoca . I 13 libri non sono un'opera originale , cioè Euclide non è l'autore dei risultati qui raggiunti , ma ha organizzato in un sistema logico e completo tutto quanto era stato scoperto fino ad allora nel campo della matematica . Quindi gli Elementi di Euclide non contengono risultati nuovi rispetto ai geometri precedenti . Sono una rigorosa sistemazione del già conosciuto , che viene ora garantito come certo dal metodo della dimostrazione . Qualche autorevole storico ha definito **Euclide il sistematore** ed **Archimede il costruttore** . Euclide , dopo i **Termini** ( cioè le Definizioni ) , introduce cinque **postulati** ( ciò che si chiede di ammettere ) ai quali fa seguire una serie di **nozioni comuni** ( con linguaggio moderno potremmo chiamarle “ **regole di deduzione logica** “ ) . Servendosi di questi elementi Euclide deduce , passo passo , tutto il grande edificio della matematica : ben **13 libri** , ricchissimi di teoremi ( **risultati dedotti** ) , corollari , lemmi di ogni genere .

Gli Elementi di Euclide offrono un'esposizione organica , logicamente ordinata , che comprende le parti fondamentali della geometria e dell'aritmetica , cioè delle nozioni matematiche che stanno a base di ogni superiore sviluppo .

I primi due libri trattano dei triangoli e dei parallelogrammi , il terzo ed il quarto del cerchio e dei poligoni regolari , il quinto della teoria delle proporzioni , il sesto della similitudine piana , il settimo l'ottavo ed il nono dell'aritmetica dei numeri interi e delle frazioni , il decimo , in cui figura il noto algoritmo euclideo per la ricerca del M.C.D. di due numeri , degli irrazionali quadratici e biquadratici , infine gli ultimi tre della geometria dello spazio . Il sistema euclideo , rigorosamente deduttivo , dipende da alcuni principi che sono formulati : nelle spiegazioni dei **termini** o definizioni , nei **postulati** ( ciò che si chiede di ammettere ) e nelle **nozioni comuni** .

I **termini** rappresentano le definizioni degli enti geometrici , i **postulati** sono proposizioni primitive ( non dimostrate ) riferite ai termini introdotti , le **nozioni comuni** sono proposizioni primitive ( non dimostrate ) che si riferiscono a situazioni e procedimenti non esclusivamente propri della matematica , bensì comuni anche ad altre scienze .

### **Libro I :contiene 23 Definizioni , 5 Postulati , 5 Nozioni comuni e 48 proposizioni**

Il **primo libro** degli elementi di Euclide contiene **23 termini** , **5 postulati** ed **8 nozioni comuni** . Poi Euclide enuncia **48 proposizioni** delle quali fornisce la dimostrazione . Qualche osservazione critica sui 23 termini introdotti da Euclide . Qualche termine , che rappresenta una definizione non definisce niente .Infatti affermare ,come fa **Euclide** ,che “ **un punto è ciò che non ha parti** “ , o che “ **una linea è una lunghezza senza larghezza** “ , o che “ **una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza** “ , non significa definire tali enti , in quanto una definizione deve essere espressa mediante termini più semplici e già noti .

Alcuni autori di epoca posteriore ad Euclide usavano il termine **assioma** o **nozione comune** per riferirsi a ciò che era noto o che veniva accettato come evidente , il termine **postulato** per fare riferimento a qualcosa che doveva essere “ richiesto “ e non doveva essere necessariamente evidente .

Elenchiamo i **termini** del primo libro degli Elementi di Euclide .

01) *Un punto è ciò che non ha parti*

02) *Una linea è ciò che ha lunghezza ed è priva di larghezza*

03) *Le estremità di una linea sono punti*

04) *Una linea retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai propri punti*

05) *Una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza*

06) *Gli estremi di una superficie sono linee*

07) *Una superficie piana è una superficie che giace ugualmente rispetto alle proprie rette*

08) *Un angolo piano è la reciproca inclinazione di due linee poste su di un piano , che si incontrino tra loro e che non giacciano su di una linea retta*

09) *Quando le linee che definiscono l'angolo sono rette , l'angolo è detto rettilineo*

10) *Quando una retta innalzata su di un'altra retta forma angoli adiacenti uguali fra loro , ciascuno dei due angoli è retto e la retta si dice perpendicolare a quella su cui è innalzata*

11) *Un angolo ottuso è un angolo maggiore di un angolo retto*

12) *Un angolo acuto è un angolo minore di un angolo retto*

13) *termine è l'estremo di qualche cosa*

- 14) Una figura è ciò che è compreso tra uno o più termini
- 15) Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea, detta circonferenza, tale che tutte le rette che cadono su tale linea a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.
- 16) Tale punto si chiama centro del cerchio.
- 17) Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.
- 18) Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.
- 19) Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatera quelle comprese da tre rette (sono i triangoli; n. d. r.), quadrilatera quelle comprese da quattro, e multilatera quelle comprese da più di quattro rette.
- 20) Delle figure trilatera, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.
- 21) Infine, delle figure trilatera, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.
- 22) Delle figure quadrilatera, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera,

*ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi.*

*23) Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano da nessuna delle due parti.*

Il primo libro degli Elementi di Euclide elenca **5 postulati** :

**I ) [Risulti postulato] che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.**

**II) [Risulti postulato] che una retta terminata [ segmento ] si possa prolungare continuamente in linea retta.**

**III) [Risulti postulato] che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.**

**IV) [Risulti postulato] che tutti gli angoli retti siano eguali fra loro.**

**V) [Risulti postulato] che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.**

In termini equivalenti , secondo le vedute moderne , il **quinto postulato** possiamo enunciarlo così :

**<< Data una retta  $r$  ed un punto  $P$  non appartenente ad essa , nel piano che contiene  $P$  ed  $r$  esiste una sola retta  $s$  passante per  $P$  e parallela ad  $r$  . >>**

**Per rette parallele intendiamo rette complanari che non hanno alcun punto in comune .**

Il **primo libro** degli Elementi di Euclide elenca **8 nozioni comuni** , alcune delle quali potrebbero essere state introdotte successivamente da altri matematici .

**I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.**

**II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.**

**III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.**

**IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.**

**V. E doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro.**

**VI. E metà di una stessa cosa sono uguali tra loro.**

**VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.**

**VIII. Ed il tutto è maggiore della parte.**

Quest'ultima nozione comune , che appare inconfutabile ad ogni persona di buon senso , fu la causa della nascita di un congruo numero di paradossi chiamati **paradossi dell'equinumerosità** .

Noi sappiamo che due insiemi si dicono equipotenti o che contengono lo stesso numero di elementi se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi . Se un insieme è finito , esso non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme , cioè con una sua parte . Se l'insieme considerato contiene infiniti elementi le cose cambiano sensibilmente . Infatti si può dimostrare che sono **equipotenti** gli insiemi dei punti di segmenti aventi lunghezze diverse , addirittura si può dimostrare che un qualsiasi segmento , che è una parte di una retta , ha tanti punti quanti sono i punti della retta .



**Galileo Galilei** dimostrò , attraverso una corrispondenza biunivoca , che i quadrati dei numeri naturali , che sono una parte dei numeri naturali , sono tanto quanti i numeri naturali . Sulla base di queste considerazioni Dedekind definì infinito un insieme equipotente con un suo sottoinsieme , cioè con una sua parte .

Questa affermazione è la negazione dell ‘ ottava nozione comune di Euclide . In seguito , Cantor risolse magnificamente l ‘ apparente contraddizione dell’equinumerosità degli insiemi infiniti . Ma su questo argomento ci torneremo in seguito . Il primo libro degli Elementi di Euclide prosegue con l’esposizione di **48 proposizioni** , che dimostra brillantemente utilizzando i **Termini** , i **postulati** , le **Nozioni comuni** e le **proposizioni** precedentemente dimostrate .

Le 48 proposizioni contengono le relazioni di uguaglianza e di disuguaglianza dei triangoli , i teoremi sulle parallele , sulla somma degli angoli di un poligono , l’equivalenza dei poligoni e la dimostrazione del teorema di Pitagora .

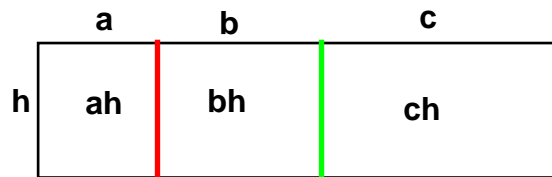
## **Libro II :contiene 2 Definizioni e 13 Proposizioni**

Il secondo libro degli Elementi di Euclide è dedicato all’algebra geometrica , un settore elegante ed originale della matematica greca , che merita un’adeguata illustrazione . L’idea originale che caratterizza l’algebra geometrica di Euclide è quella di rappresentare un numero reale mediante un segmento , sicché un prodotto di due numeri reali rappresenta l’area di un rettangolo . Questo libro contiene **2 definizioni** e **13 proposizioni** .

**Proposizione 1 del secondo libro degli Elementi** ( esprime la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione ) :

dati due segmenti e diviso uno di essi in un certo numero di parti ( ad esempio tre ) , il rettangolo individuato dai due segmenti è uguale alla somma dei rettangoli individuati dal segmento non diviso e da ognuna delle parti in cui è stato diviso l’altro segmento .

Il disegno è il seguente :



la sua espressione simbolica moderna è la seguente :  $(a + b + c) \cdot h = ah + bh + ch$

### **Libro III : contiene 11 Definizioni e 37 proposizioni**

Tratta la teoria del cerchio . In questo libro vengono presentati teoremi sulle posizioni reciproche di una retta e di un cerchio e di due cerchi , sulle proprietà delle corde e delle tangenti, sulle relazioni tra archi ed angoli e tra angoli al centro ed angoli alla circonferenza .

### **Libro IV : contiene 7 definizioni e 16 proposizioni**

In questo libro viene indicato come inscrivere e circoscrivere ad una circonferenza un triangolo , un quadrato , un pentagono regolare e come costruire un esagono ed un pentadecagono inscritti in una circonferenza .

### **Libro V : contiene 18 definizioni e 25 proposizioni**

Il libro ci propone la teoria generale delle proporzioni fra grandezze geometriche . Inizia con proposizioni relative alla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e si conclude con le proprietà delle proporzioni .

**Libro VI : contiene 11 definizioni e 37 proposizioni** : Tratta la similitudine dei poligoni . **Libro VII : contiene 22 definizioni e 39 proposizioni** . **Libro VIII : contiene 27 proposizioni** .

### **Libro IX : contiene 36 proposizioni**

I libri VII , VIII e IX sono dedicati all'aritmetica dei numeri razionali , esposta con rigore . Tutta la materia ivi esposta è quella che si insegna attualmente . La dimostrazione data da Euclide sull'esistenza di infiniti numeri primi è l'unica che si conosca . Lo stesso dicasi per la costruzione dei **numeri perfetti** , cioè di quei numeri uguali alla somma dei loro divisori , esclusi i numeri stessi .

## Dimostrazione di Euclide dell'infinità dei numeri primi

Noi sappiamo che un numero **naturale maggiore** dell'unità è **primo** se è divisibile per se stesso e l'unità . La domanda che si pose **Euclide** fu la seguente .

“ **quanti numeri primi esistono ?** “ **Sono infiniti o sono un numero finito ?**

La **proposizione 20** del libro IX recita così : “ *I numeri primi sono più di una qualsiasi moltitudine di numeri primi* “ . Questo significa che Euclide ammette l'esistenza di infiniti numeri primi . Le prime considerazioni che si possono fare sono le seguenti .

I numeri compresi tra 1 e 10 sono 5 , quelli compresi tra 10 e 100 sono 21 , quelli compresi tra 9999900 e 10000000 sono 3 . Questa legge di rarefazione dei numeri primi potrebbe indurci ad affermare che i numeri primi sono in numero finito , ma le cose non stanno così , come dimostrò brillantemente Euclide .La dimostrazione di Euclide è una dimostrazione per assurdo ed inizia con la negazione della tesi . Questo significa affermare che i numeri primi sono in numero finito ed , in quanto tali , possiamo pensare di averli trovati tutti . Supponiamo che essi siano  $k$  e stabiliamo di indicarli con i seguenti simboli :  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  . Detto  $P = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$  il prodotto di tutti i  $k$  numeri primi esistenti , consideriamo il numero  $N = P + 1$  .

$N$  non può essere un numero primo , in quanto sappiamo che  $P$  è il prodotto di tutti i numeri primi .  $N$  è , pertanto , un numero composto che possiamo decomporre in fattori primi .Sia  $p$  uno di questi fattori primi , che sono anche divisori del numero  $N$  . Ma  $p$  non può essere nessuno dei fattori primi ( divisori ) di  $P$  , perché dovrebbe essere anche un fattore ( divisore ) del numero 1 . Pertanto  $p$  deve essere un numero primo diverso da tutti quelli che costituiscono il prodotto di  $P$  . Dunque l'ipotesi che  $P$  era il prodotto di tutti i numeri primi deve essere falsa e quindi tutti i numeri primi costituiscono un insieme infinito . Di mirabile fattura è la **proposizione N° 36** che **Euclide** enuncia nella seguente maniera :

“ Se tanti numeri quanti ne vogliamo , a cominciare dall’unità , vengono posti continuamente in proporzione doppia fino a che la somma di tutti i numeri non diventi un numero primo , e se la somma viene moltiplicata per l’ultimo numero , il prodotto sarà un numero perfetto “. Col simbolismo della matematica moderna abbiamo quanto segue . Se

$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$  è un numero primo , allora il numero  $2^{n-1}(2^n - 1)$  è un **numero perfetto** . Definizione : “ **Un numero si dice perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori , escluso il numero stesso .** “ Gli antichi greci conoscevano i primi 4 numeri perfetti : 6 , 28 , 496 , 8128 . Euclide non dice se la formula da lui trovata è in grado di generare tutti i numeri perfetti . Noi oggi sappiamo che tutti i numeri **perfetti pari** sono del tipo euclideo , ma la questione dei numeri **perfetti dispari** è un problema non risolto . Attualmente conosciamo una ventina di numeri perfetti e questi sono tutti pari . Tuttavia non possiamo generalizzare affermando che tutti i numeri perfetti sono pari . Un altro numero perfetto è 33550336 . Un numero perfetto pari deve terminare per 6 o per 8 .

### **Libro X : contiene 16 definizioni e 115 proposizioni**

Il libro contiene , sotto forma geometrica , un’accurata classificazione degli incommensurabili che provengono da radicali quadratici sovrapposti, cioè da radicali provenienti dalla risoluzione delle equazioni biquadratiche del tipo  $x^4 + ax^2 + b = 0$  . Questo significa che il libro espone una classificazione sistematica dei segmenti incommensurabili della forma

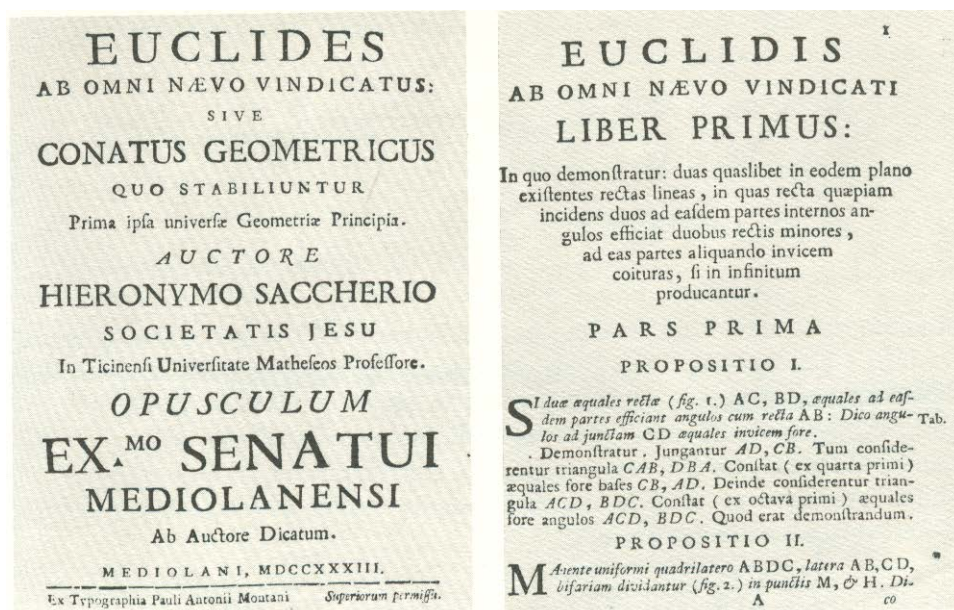
$$a \pm \sqrt{b} , \sqrt{a} \pm \sqrt{b} , \sqrt{a \pm \sqrt{b}} , \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

Gli ultimi tre libri degli Elementi sono consacrati , nella massima parte , alla geometria dello spazio . I libri XI ( 28 definizioni e 39 proposizioni ) e XII ( 18 proposizioni ) sviluppano le proprietà dei prismi , delle piramidi , dei cilindri , dei coni , delle sfere . Mirabile è la dimostrazione della proporzionalità della sfera col cubo del suo diametro .

Particolarmente brillante è la dimostrazione del teorema secondo il quale le aree dei cerchi stanno tra di loro come i quadrati costruiti sui loro diametri . Ai poliedri regolari convessi è dedicato l'ultimo libro degli elementi , il XIII ( contiene 18 proposizioni ) . Esso si conclude con la dimostrazione che non esistono altri poliedri regolari diversi da quelli scoperti da Pitagora e resi popolari da Platone . Questo fatto indusse alcuni matematici a ritenere che l'obiettivo degli Elementi di Euclide fosse la costruzione delle celebri figure di Pitagora . Ma questo non corrisponde a verità .

## Il quinto postulato di Euclide e le geometrie non euclidee

### Il tentativo di dimostrare il V postulato di Euclide



Frontespizio e pagina della prima edizione dell' **'Euclides ab omni naevo vindicatus** di **Giovanni Gerolamo Saccheri**

Una delle questioni più celebri dell'intera storia della matematica è certamente il problema della dimostrabilità del quinto postulato di Euclide . Dimostrare il V postulato vuole dire dedurlo utilizzando soltanto i primi 4 postulati e le prime 28 proposizioni del primo libro degli elementi . Se ciò fosse vero il V postulato di Euclide sarebbe un teorema . Encomiabili ma infruttuosi si dimostrano i tentativi effettuati da **Proclo** , **Posidonio** , **Cataldi** , **Wallis** e **Saccheri** .

Di particolare rilevanza storica è il contributo dato dal gesuita **Girolamo Saccheri** nato a San Remo nel 1667 e morto a Milano nel 1733 .

Saccheri , con l'opera **Euclides ab omni naevo vindicatus** ( Euclide liberato da ogni neo ) si illuse di avere liberato l'immortale opera di Euclide da ogni difetto ma , inconsapevolmente , diventa un precursore delle geometrie non euclidee , che sostituiscono il V postulato con un altro postulato .

Saccheri pensa di dimostrare il V postulato servendosi dei primi 4 postulati e delle prime 28 proposizioni che negli Elementi precedono il postulato delle parallele. Egli decide di sviluppare il seguente ragionamento . Ammettiamo i primi quattro postulati di Euclide e , quindi , anche le prime 28 proposizioni , neghiamo il V postulato e seguiamo nello sviluppo logico della teoria fino a quando non perveniamo ad un assurdo rispetto alle premesse .

Se nel corso delle nostre deduzioni troviamo un assurdo allora il V postulato è dimostrato ed esso è una conseguenza dei primi quattro postulati e delle prime 28 proposizioni . Se questo non si verifica allora il V postulato è indimostrabile e quindi non dipende né dai primi 4 postulati né dalle 28 proposizioni di Euclide .

Nell'opera **Euclides ab omni naevo vindicatus** , il Nostro riconosce che il V postulato equivale all'ipotesi che esiste un quadrilatero con 4 angoli retti . Infatti dimostra che se si costruisce un quadrilatero con 3 angoli retti , il quarto potrà essere :  
a) **retto** , ed è il caso della geometria euclidea b) **acuto** ed è il caso della

geometria iperbolica di Lobacevski c) **ottuso** ed è il caso della geometria parabolica di Riemann .

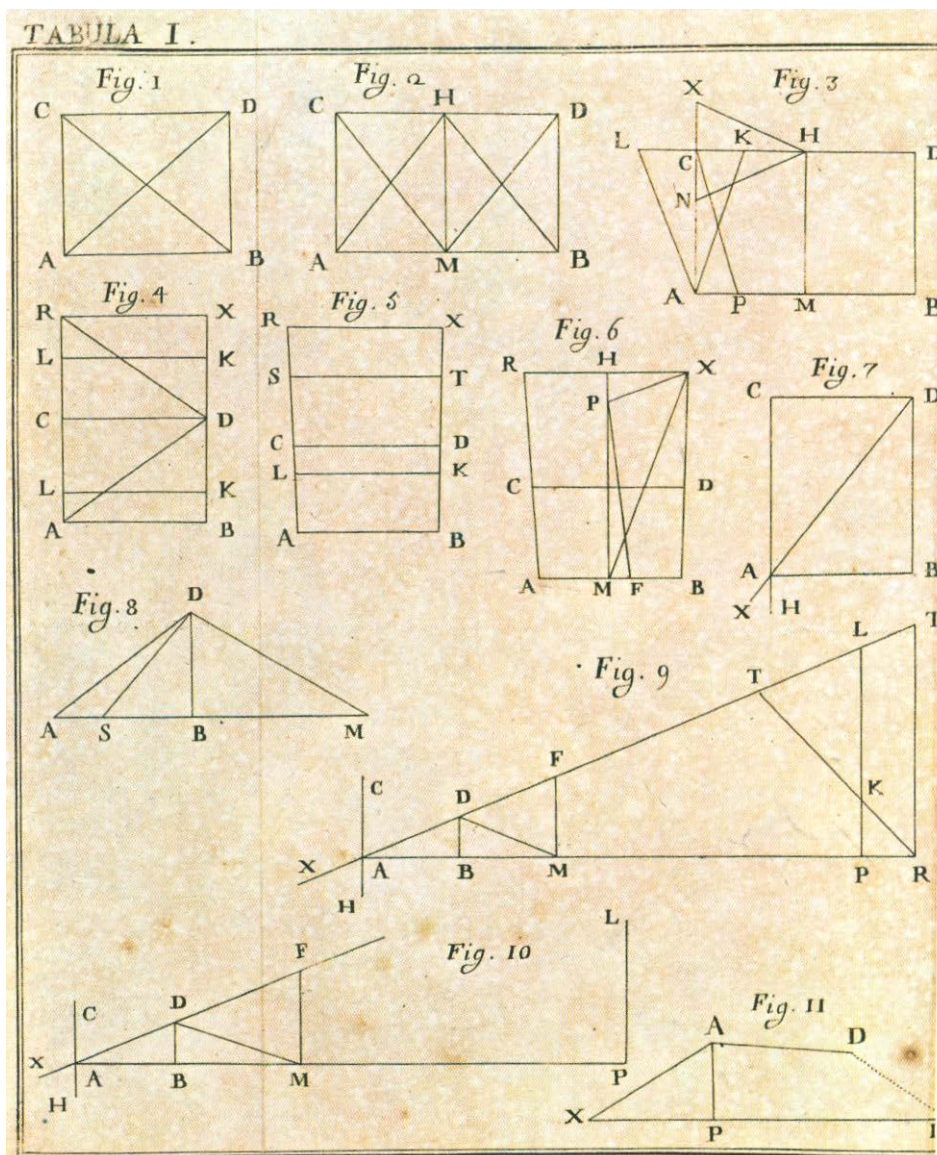


Tavola della prima edizione dell ' **Euclides ab omni naevo vindicatus**  
di **Giovanni Gerolamo Saccheri**

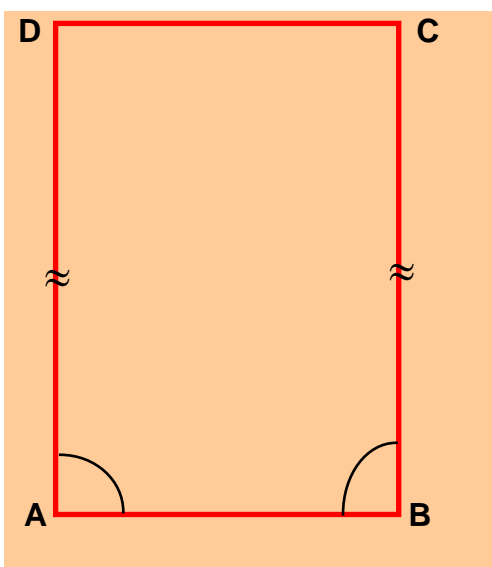
Nel 1693 pubblicò a Milano un opuscolo dal titolo **Quaesita geometrica** contenenti interessanti soluzioni di problemi di geometria. A Torino , dove era stato



inviato ad insegnare filosofia e teologia , pubblicò un volume dal titolo **Logica dimostrativa** che include alcune questioni di storia della matematica .  
Analizziamo il modo di procedere di Saccheri . Questi vuole dimostrare il postulato delle parallele per assurdo .

Il modo di procedere per assurdo è quello di negare la tesi che si vuole dimostrare e dalle conseguenze di questa negazione pervenire a qualche contraddizione , cioè a qualche cosa che contrasti con l'ipotesi , o con i postulati precedenti , o con i teoremi già dimostrati . Poiché questo non è possibile la tesi non può essere negata e quindi è vera .

Nella propria opera , l'Autore accetta i primi 4 postulati e le prime 28 proposizioni del primo libro degli elementi e tenta di dimostrare per assurdo il V postulato : ne propone la negazione e spera di trovare tra le conseguenze di tale negazione , qualche risultato in contrasto con quanto affermato o dedotto in precedenza . Ciò proverebbe la verità del V postulato che assurgerebbe al rango di teorema .



Saccheri non parte dalla negazione del V postulato, ma inizia la sua dissertazione considerando una figura geometrica che chiama quadrilatero birettangolo ( oggi chiamato quadrilatero di Saccheri ) : considera un generico segmento  $AB$  , traccia i segmenti  $AD$  e  $BC$  ad esso perpendicolari e tra loro uguali e congiunge  $C$  con  $D$  . Cosa si può dire degli angoli  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  ?

Saccheri dimostra che essi sono uguali e per quanto riguarda la loro ampiezza ipotizza tre possibilità :

- **Ipotesi dell'angolo acuto** : gli angoli interni  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sono **acuti** . Questo equivale a negare il V postulato di Euclide .
- **Ipotesi dell'angolo ottuso** : gli angoli interni  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sono **ottusi** . Questo equivale a negare il V postulato di Euclide .
- **Ipotesi dell'angolo retto** : gli angoli interni  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sono **retti** . Questo equivale all'accettazione del V postulato di Euclide .

L'ipotesi dell'angolo acuto porta a concludere che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due angoli retti e che per un punto  $P$  esterno ad una retta  $r$  passano infinite rette che non incontrano la  $r$  , le quali , in base alla definizione di Euclide , sono parallele .

L'ipotesi dell'angolo ottuso permette di dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due angoli retti e che tutte le rette passanti per un punto  $P$  non appartenente ad  $r$  incontrano la  $r$  ; non esistono rette parallele .

L'ipotesi dell'angolo retto permette di dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto e che per un punto  $P$  esterno ad una retta  $r$  si può condurre una ed una sola parallela alla  $r$ . Questa ipotesi è equivalente al V postulato. Saccheri, con argomentazioni di carattere intuitivo, crede di dimostrare che le ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso sono assurde. Non rimane che l'ipotesi dell'angolo retto e quindi il V postulato è dimostrato.

eam  $BX$ , ac propterea fit ipsa limes partim intrinsecus; partim extrinsecus; tum earum omnium, quæ sub minoribus acutis angulis ad finitam distantiam incidunt in prædictam  $BX$ ; tum etiam aliarum, quæ sub majoribus angulis acutis, usque ad angulum rectum inclusivè, commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendicularum cum eadem  $BX$ . Quod erat &c.

### PROPOSITIO XXXIII.

**H**ypotesis anguli acuti est absolutè falsa; quia repugnans naturæ lineæ rectæ.

Demonstratur. Ex præmissis Theorematis constare potest eò tandem perducere Geometriæ Euclidæ inimicam hypothesein anguli acuti, ut agnoscere debeamus duas in eodem plano existentes rectas  $AX$ ,  $BX$ , quæ in infinitum protractæ versùs eas partes punctorum  $X$  in unam tandem eandemque rectam lineam coire debeant, nimirum recipiendo, in uno eodemque infinite disito puncto  $X$ , commune in eodem cum ipsis plano perpendicularum. Quoniam verò de primis ipsis principiis agendum mihi hic est, diligenter curabo, ut nihil omittam quasi nimis scrupulosè objectum, quod quidem exactissimæ demonstrationi opportunum esse cognoscam.

### LEMMA I.

*Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.*

**D**efinit Euclides lineam rectam, quæ ex æquo sua interjacet puncta. Esto igitur (fig. 37.) linea quædam  $AX$ , quæ ex puncto  $A$  per sua quælibet intermedia puncta continuativè excurrat usque ad punctum  $X$ . Non dicetur

Pagina dalla orima edizione ( Milano 1733 ) dell ' **Euclides ab omni naevo vindicatus**  
di **Giovanni Gerolamo Saccheri**

L'errore di Saccheri consiste nel sostituire il V postulato con un altro postulato : l'ammissione di due impossibilità , quella dell'angolo acuto e quella dell'angolo ottuso . Saccheri , nell'opera **Euclides ab omni naevo vindicatus** , ragione bene ma conclude male ; non si accorge che è possibile costruire una geometria logicamente valida senza accettare il V postulato o sostituendolo con un altro . Il ragionamento di Saccheri è corretto , ma le conclusioni sono errate .

E' ad un passo dalla scoperta del nuovo **Mondo delle geometrie non euclidee** ma non ne sa approfittare . Si comporta come **Cristoforo Colombo** che scopre l'America senza saperlo . Dopo le ricerche del Saccheri alle quali seguirono quelle del Legendre , si fece strada l'opinione della indimostrabilità del V postulato di Euclide e si pervenne alla convizione che era possibile costruire un'altra geometria , logicamente valida , indipendente dal V postulato . Sorsero così le geometrie non euclidee ad opera dei matematici **Lobacevski** , **Boljai** , **Riemann** , avallate dall'indiscussa autorevolezza del grande **Gauss** .

## **Lobacevski e la geometria iperbolica**

L'idea che il postulato delle parallele non possa essere dimostrato è , nei primi decenni del secolo XIX , accettata dalla comunità scientifica . Si profila la possibilità di costruire una geometria senza il V postulato di Euclide . Cominciamo con **Lobacevski** il quale sostituisce il V postulato col seguente : “ **per un punto esterno ad una retta si possono condurre due sole rette parallele alla retta data** ” Dimostra che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto . Per comprendere questa apparente contraddizione occorre esporre la brillante dimostrazione del matematico tedesco Felix Klein ( 1849–1925 ) che metteva in luce l'indipendenza del quinto postulato dai quattro precedenti e dalle 28 proposizioni del primo libro degli Elementi .

Per dimostrare questo occorre costruire un adeguato modello geometrico per il quale risultassero validi i primi quattro postulati di Euclide , ma non il quinto .  
Da tale risultato si deduceva che il V postulato non poteva essere dedotto dai primi quattro .



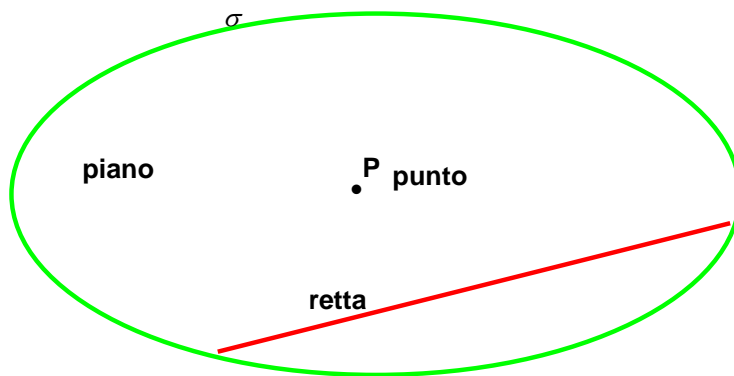
### **Nokolai Ivanovic Lobacevski**

Fu il primo matematico a costruire la geometria non euclidea detta **iperbolica** .

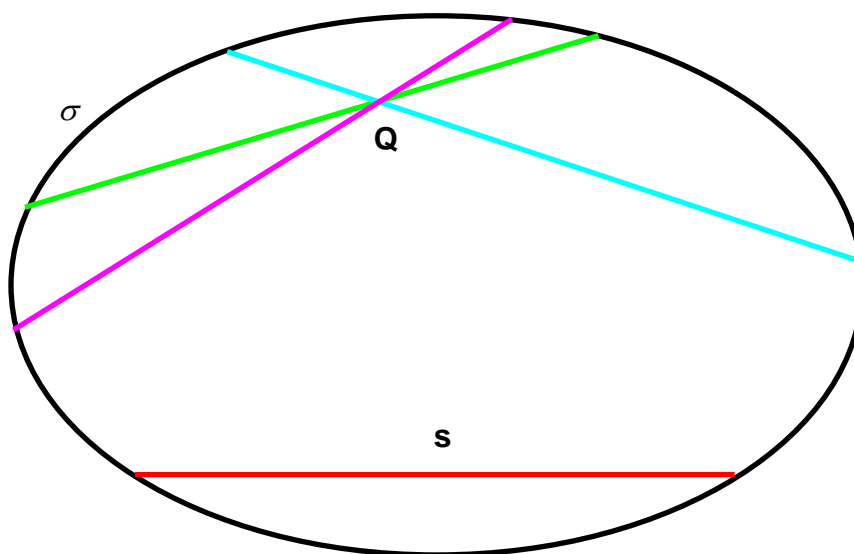
Nella predetta geometria iperbolica , la quale non presenta **nessuna contraddizione logica** , per un punto di un piano fuori di una retta è possibile tracciare due distinte “ **parallele** “ alla retta data .

Gli enti fondamentali del modello di Klein sono gli stessi enti della geometria euclidea , che vengono ribattezzati secondo il seguente schema . Klein considera una qualsiasi conica , ad esempio l'ellisse  $\sigma$  e :

- al piano euclideo fa corrispondere la regione interna alla conica  $\sigma$
- ad ogni punto euclideo fa corrispondere un punto interno di  $\sigma$
- ad ogni retta euclidea fa corrispondere una corda della conica , esclusi gli estremi .

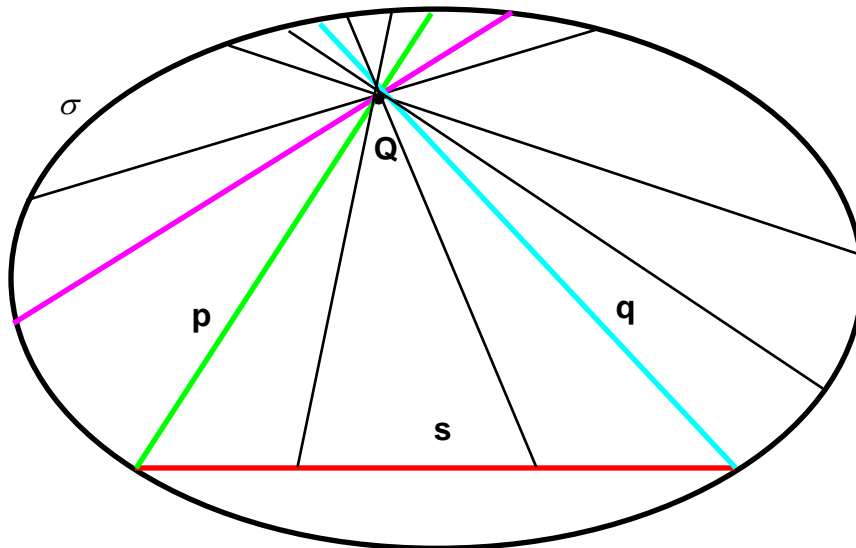


Con questo modello è possibile verificare che sono soddisfatti i primi quattro postulati e le prime 28 proposizioni del primo libro di Euclide, ma non è soddisfatto il V postulato. Infatti data una retta  $s$  del piano di Klein, per un punto  $Q$  di tale piano non appartenente ad  $s$  passano infinite rette che non hanno punti in comune con  $s$ . Si tratta di rette parallele. Quindi per il punto  $Q$  non appartenente ad  $s$  passano infinite rette parallele alla retta  $s$ . Ecco dimostrata, con un procedimento semplice ma geniale, l'indipendenza del V postulato dagli altri postulati e, quindi anche dalle prime 28 proposizioni di .



Dal disegno della figura notiamo che tutte le rette passanti per il punto  $Q$  si dividono in due classi ciascuna delle quali contiene infinite rette. Una classe contiene le rette

con non incontrano la retta  $s$ , l'altra contiene le rette che incontrano  $s$  in un solo punto. Lobacevski chiama parallele alla retta  $s$  condotte dal punto  $Q$  le due rette  $p$  e  $q$  che separano le rette parallele e per **Lobacevski** il V postulato viene sostituito dal seguente: " **per un punto  $Q$  esterno ad una retta  $s$  si possono condurre due sole rette parallele ad  $s$**  "



La geometria di Lobacevski é detta **geometria iperbolica**.

### **Riemann e la geometria ellittica**

Dopo la costruzione della geometria iperbolica ci si chiese se era possibile costruire altre geometrie non euclidee, nelle quali non valesse il V postulato di Euclide e le rette fossero finite e chiuse.

Una tale geometria venne proposta per la prima volta dal tedesco Riemann, il quale sostituì il postulato delle parallele col seguente **Postulato di Riemann**:



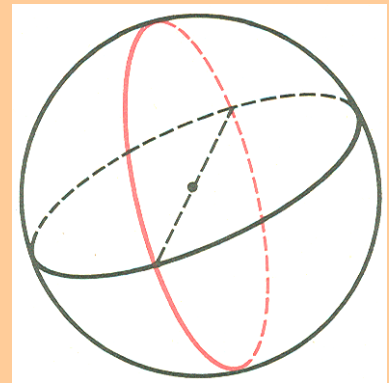
**Le rette sono linee chiuse e non esistono coppie di rette complanari senza punti in comune** . Riemann non ammette l'esistenza di rette parallele.

Nella geometria di **Riemann** non sono validi né il secondo ( la retta è una linea chiusa ) né il quinto postulato ( non esistono rette parallele ) .

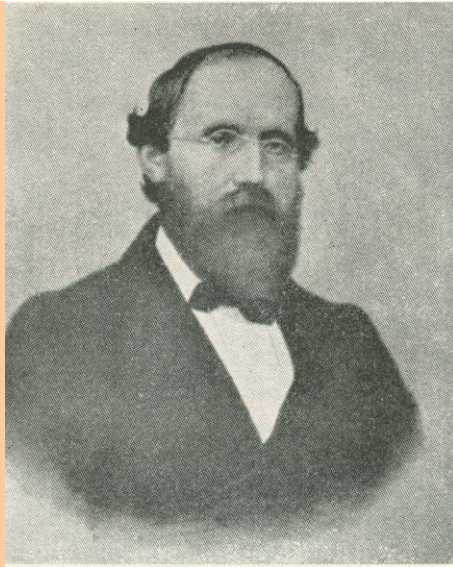
**Riemann** considera come **piano** una **superficie sferica** e chiama :

- **punto** ogni coppia di punti della sfera diametralmente opposti ,cioè gli estremi di un diametro
- **retta** ogni circonferenza massima .

In questa geometria la retta è una linea chiusa e la somma degli angoli interni di un triangolo ( sferico ) è maggiore di due angoli retti .



Si può mostrare che nel piano di **Riemann** due punti individuano una retta e che per un punto passano infinite rette : sono valide quelle proprietà della geometria euclidea che non derivano dal secondo e dal quinto postulato .

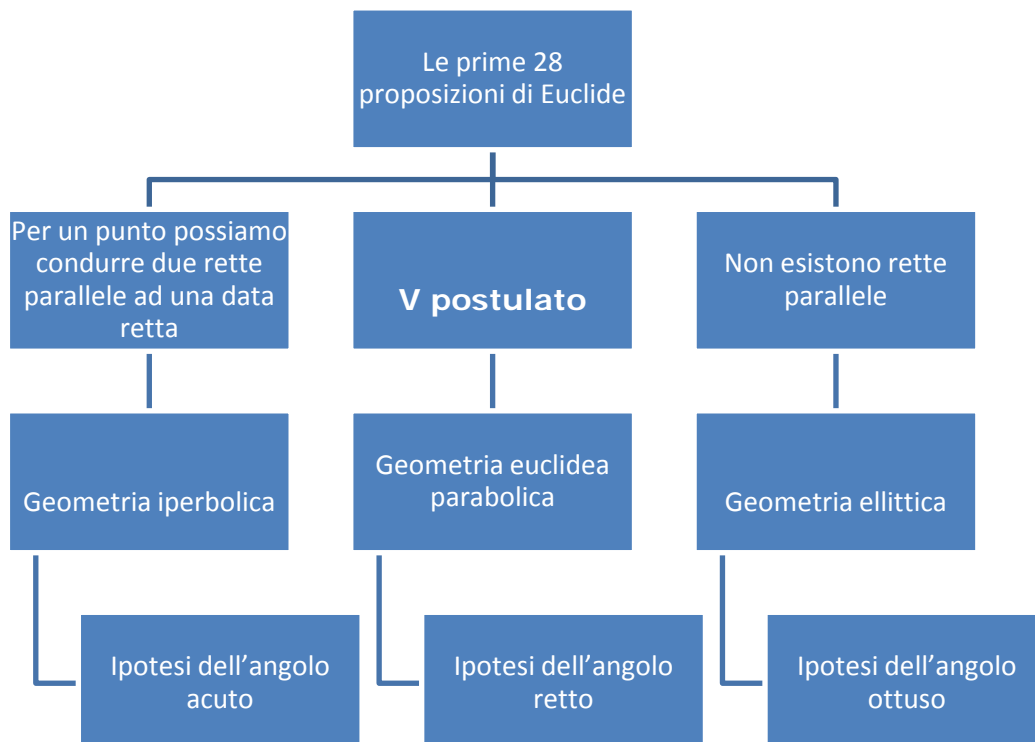


## Bernhard Riemann

Pure esente da ogni contraddizione è la **geometria ellittica** di **Riemann** nella quale manca la nozione di parallelismo . In tale geometria la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di due angoli retti . Questa geometria fornì ad **Albert Einstein** il modello per lo **spazio-tempo** di **Minkowski** .

La geometria euclidea appare come un caso limite delle geometrie non euclidee .

Il seguente schema sintetizza la geometria di Euclide , quella di Lobacevski e quella di Riemann .



## Quale geometria segue la natura

Come sappiamo , esistono tre geometrie diverse ciascuna delle quali è perfettamente coerente dal punto di vista della logica . A questo punto è sensato chiedersi quale di queste tre geometrie è quella “ **vera** ” .Se con l’espressione vera intendiamo “ **coerente** “, allora tutte e tre queste geometrie sono vere , in quanto costruzioni logiche dedotte razionalmente da un insieme di postulati

Altra cosa è se ci poniamo la seguente domanda : “ **quale di queste tre geometrie è la più adatta ad interpretare la realtà del mondo che ci circonda ?** ”

**Gauss** e **Lobacevski** vedono nei postulati una verità sperimentale .

Per essi la questione se lo spazio fisico sia euclideo o non euclideo non può essere decisa a priori . La risposta sulla validità o meno del postulato di Euclide deve scaturire da un’accurata misura di ogni angolo interno di un triangolo e dalla conoscenza della loro somma .Ove tale somma si riscontri , anche per un solo triangolo , minore di due angoli retti ,varrà la geometria di Lobacevski ; invece la verifica che essa sia uguale a due retti , non potendo mai farsi in maniera rigorosa , non varrà mai a giustificare il postulato di Euclide se non in maniera approssimativa .

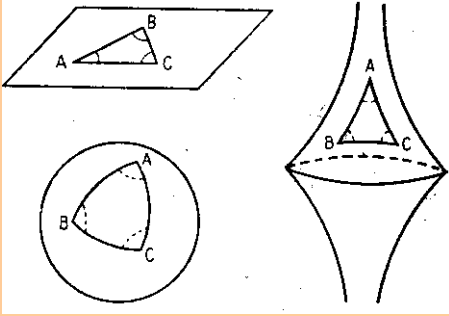
Gauss tentò un simile esperimento considerando un **triangolo geodetico** i cui vertici erano le città di **Broken** , **Hohehagen** e **Inselberg** .

Il risultato , che si discostava di poco da un angolo piatto , non venne ritenuto significativo in quanto gli errori sperimentali nella misura dei tre angoli interni non potevano essere eliminati .

Il tentativo di Gauss ed altre raffinate esperienze hanno mostrato che la geometria euclidea e quella non euclidea si avvicinano talmente da risultare sperimentalmente equivalenti . Perciò , finché si prendono in esame proprietà puramente “ locali “ dello spazio , la scelta della geometria deve essere fatta soltanto in base alla semplicità ed alla convenienza . Poiché la geometria euclidea si presenta come un trattato completo ed esposto in forma semplice ed estremamente elegante , il suo uso è giustificato quando tenta di interpretare una realtà “ locale “ dove le dimensioni dell’ambiente esplorato sono dell’ordine di qualche milione di chilometri .

Ma quando l’indagine si estende ad un ambiente più vasto , ad esempio l’intero Universo , allora le geometrie non euclidee sono più adatte a studiare la complessa fenomenologia che in esso si sviluppa . Infatti è la geometria di Riemann che sta alla base della teoria della relatività di Einstein .

	Nella geometria euclidea la somma degli angoli interni di un triangolo è $180^\circ$ . Da un punto del piano si può condurre una sola geodetica parallela ad una geodetica data . Nella geometria sopra una <b>sfera</b> ( geometria di
--	---



Si definisce **geodetica** la linea che rappresenta la minima distanza tra due punti di una stessa superficie .

**Riemann** ) la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di  $180^\circ$  . Da un punto di una superficie sferica non si può condurre alcuna geodetica parallela ad una geodetica data . Nella geometria sopra una **pseudosfera** ( geometria di **Lobacevski** ) la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di  $180^\circ$  . Da un punto di una pseudosfera si possono condurre infinite geodetiche parallele ad una geodetica data .

Da << **il tutto è maggiore di una sua qualsiasi parte** >> di Euclide alla dimostrazione che, in talune situazioni, il tutto può essere uguale ad una sua parte .

**I paradossi del tutto e della parte**

**Una parte non può essere uguale al tutto** , aveva sentenziato **Euclide** nei suoi **Elementi** . Questa affermazione , che agli uomini dotati di buon senso sembra assolutamente vera , è contraddetta da quelli che possiamo chiamare i << **paradossi del tutto e della parte** >> .

## **Paradosso degli interi e dei quadrati**

Nel 1622 Bonaventura Cavalieri aveva chiesto al suo maestro Galileo Galilei qualche delucidazione sul confronto tra due infiniti . Galileo rispose che aveva qualche difficoltà a rispondere ad una questione così delicata . Nel 1638 , nell'opera **Nuove scienze** , Galileo dà una risposta indiretta, affermando che, nel confrontare due infiniti, si incontrano << **difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti , dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate ; il che penso che sia inconveniente , perché stimo che questi attributi di maggioranza , minorità ed uguaglianza non convenghino agli infiniti , dei quali non si può dire , uno essere maggiore o minore o uguale all'altro** >> . Col paradosso dell'infinito in campo aritmetico , che tratteremo dettagliatamente in seguito , Galileo fa vedere che una infinità dovrebbe essere contemporaneamente maggiore ed uguale ad un'altra infinità . Tutto questo lo conduce ad affermare che il confronto tra gli infiniti non è possibile .

Illustriamo adesso il **paradosso del tutto e della parte** in campo aritmetico, trascrivendo quanto lo stesso Galileo espone nell'opera le **Nuove scienze** . Si tratta di un'opera scritta in forma di dialogo dove **Simplicio** rappresenta l'uomo aristotelico , **Sagredo** il gentiluomo dilettante di scienze e **Salviati** lo scienziato nuovo , cioè lo stesso Galileo .

## Paradosso degli interi e dei quadrati

L'aristotelico Simplicio sa che i << numeri quadrati >> sono quelli che nascono dai singoli numeri << in se medesimi moltiplicati >> .

**Salviati** : Benissimo , e sapete ancora , che sì come i prodotti si dimandano quadrati , i producenti , cioè quelli che si moltiplicano , si chiamano lati o radici ; gli altri [ numeri ] poi , che non nascono da numeri moltiplicati in se stessi , non sono altrimenti quadrati . Onde se io dirò , i numeri tutti , comprendendo i quadrati e i non quadrati , essere più che i quadrati soli , dirò cosa vera : non è così ?

**Simplicio** : Non si può dire altrimenti .

**Salviati** : Interrogando io di poi , quanti siano i numeri quadrati , si può con verità rispondere , loro essere tanti quante sono le proprie radici , avvenga che ogni quadrato ha la sua radice , ogni radice il suo quadrato , né quadrato alcuno ha più di una sola radice , né radice alcuna più di un quadrato .

**Simplicio** : Così sta .

**Salviati** : Ma se io domanderò , quante siano le radici , non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri , poiché non vi è numero alcuno che non radice di qualche quadrato ; e stante questo , converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri , perché tanti sono quante le loro radici , e radici sono tutti i numeri ; e pur da principio dicemmo , tutti i numeri essere più che i propri quadrati , essendo la maggior parte non quadrati .

Con linguaggio moderno possiamo affermare quanto segue :

- I quadrati sono soltanto una parte dei numeri naturali .
- I numeri naturali sono tanti quanti sono i loro quadrati in quanto tra questi insiemi di numeri è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca , come si evidenzia dalla seguente tabella :

1	2	3	4	5	6	7	...	$n$
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	...	↕
1	4	9	16	25	36	49	...	$n^2$

Questa tabella ci dice che ad ogni numero ( naturale ) della prima riga corrisponde un solo numero ( il suo quadrato ) della terza ed inversamente a ciascun numero ( che è il quadrato di un numero naturale ) corrisponde un solo numero ( naturale ) della prima riga .

Appare evidente che i quadrati , che sono solo una parte dei numeri naturali sono tanti quanti i numeri naturali . L'affermazione di Euclide che il tutto non può essere uguale ad una sua parte è contraddetta da questo paradosso .

**Salviati** , cioè Galileo , a questa apparente contraddizione dà la seguente interpretazione .

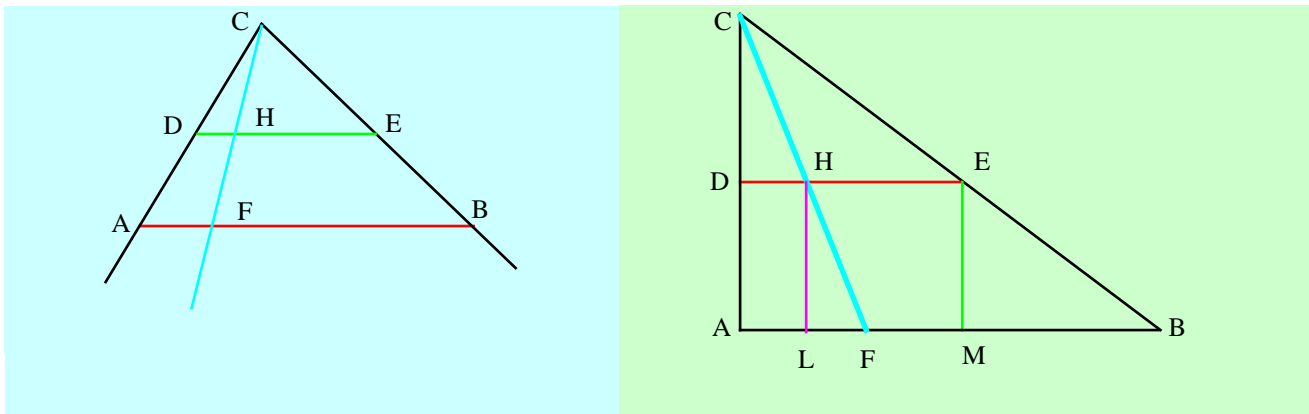
<< Io non veggo che ad altra decisione si possa venire , che a dire , infiniti essere tutti i numeri , infiniti i quadrati , infinite le loro radici , né la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri , né questa maggiore di quella , ed in ultima conclusione , gli attributi di uguale , maggiore e minore non aver luogo negli infiniti , ma solo nelle quantità terminate . >> .

Quindi per Galileo gli infiniti non possono essere confrontati tra di loro .



## Un altro paradosso dell'infinito , il paradosso geometrico

**I punti di un segmento sono tanti quanti sono i punti della sua metà .**



Sia dato il segmento  $AB$  . Dal punto  $C$  non appartenente alla retta  $AB$  tracciamo le semirette  $CA$  e  $CB$  che congiungono il punto  $C$  con gli estremi del segmento  $AB$  .Sia  $E$  l'intersezione con la semiretta  $CB$  della retta parallela ad  $AB$  e passante per il punto medio  $D$  del segmento  $CA$  . Si dimostra facilmente che il segmento  $DE$  è parallelo al segmento  $AB$  ed uguale alla sua metà . Ci domandiamo ora : quanti punti contiene il segmento  $AB$  ? Secondo la concezione degli enti geometrici idealizzati dobbiamo rispondere :  $AB$  contiene infiniti punti in quanto sappiamo che tra due punti qualsiasi possiamo inserire almeno un altro punto . E se ci domandiamo quanti punti contiene il segmento  $DE$  dobbiamo rispondere che ne contiene infiniti . Siccome  $AB$  è doppio di  $DE$  verrebbe di pensare che gli infiniti punti di  $AB$  debbano

essere il doppio degli infiniti punti di DE . Il senso comune ci indurrebbe a stabilire un confronto tra i due infiniti con netto vantaggio dell'infinita numerosità dei punti di AB . Ma ora possiamo mettere in evidenza un fatto piuttosto sconcertante : i punti del segmento AB sono tanti quanti sono i punti del segmento DE .

Per dimostrarlo , consideriamo un generico punto F di AB e congiungiamolo con C : la retta FC taglia il segmento DE in un punto H . Possiamo dire che al punto F di AB corrisponde il punto H di DE . E , poiché possiamo ripetere la costruzione per tutti i punti del segmento AB diremo che possiamo stabilire una corrispondenza tra tutti i punti di AB ed i punti di DE : più precisamente, ad ogni punto di AB corrisponderà un solo punto di DE . Si osserva pure che ad ogni punto di DE corrisponde un solo punto di AB . Abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra i punti del segmento AB ed i punti del segmento DE . Quindi i punti del segmento AB sono tanti quanti sono i punti del segmento DE . **Ecco uno dei paradossi dell'infinito .**

Lo rendiamo ancora più evidente se , anziché il segmento DE , consideriamo il segmento ad esso uguale AM ( ottenuto abbassando da E la perpendicolare EM su AB ) . I punti di AB, essendo in numero uguale a quelli di DE , dovrebbero essere in numero uguale a quelli di AM . Infatti , i punti di AB possono porsi in corrispondenza biunivoca con quelli di AM , mentre essi costituiscono solo una parte ( la metà ) dei punti di AB . Cioè per gli insiemi infiniti non sembra valido il principio ben noto : **il tutto è maggiore di una sua parte** , dal momento che è possibile che un insieme infinito venga posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte . Chi risolve in maniera completa e definitiva il concetto di infinito è

Cantor . Questi introduce il concetto primitivo di insieme descrivendolo con le seguenti parole :

**<< Per insieme intendiamo una collezione di determinati oggetti della nostra intuizione o del nostro pensiero ben distinti e riuniti in un tutto : tali oggetti sono detti gli elementi dell'insieme >>**

*Definizione:***<< quando due insiemi possono porsi in corrispondenza biunivoca si dice che essi hanno la stessa potenza >> .**

Poiché insiemi finiti aventi lo stesso numero di elementi hanno la stessa potenza e , inversamente insiemi finiti aventi la stessa potenza hanno lo stesso numero di elementi , conviene rappresentare la potenza di un insieme finito dal numero dei suoi elementi , cioè assumiamo :

**potenza di un insieme finito = numero dei suoi elementi**

**Cantor** identifica anche per gli insiemi infiniti il numero degli elementi con la potenza : cioè hanno lo stesso numero di elementi due insiemi infiniti aventi la stessa potenza , cioè due insiemi i cui elementi possono porsi in corrispondenza biunivoca fra loro .

Consideriamo l'insieme  $N$  , cioè l'insieme di tutti gli infiniti numeri naturali :

$$N = \{1,2,3,4,5,6,\dots\}$$

Chiameremo potenza del numerabile la potenza dell'insieme  $N$  . Ciò in relazione al fatto che chiameremo insieme numerabile l 'insieme  $N$  stesso e qualsiasi altro insieme che possa porsi con  $N$  in corrispondenza biunivoca . L'importanza della

considerazione della potenza del numerabile sta nel fatto che essa è la più piccola potenza che un insieme infinito possa avere .

Ogni insieme costituito da infiniti elementi ed avente la stessa potenza possiede lo stesso numero di elementi dell'insieme  $N$  .

Esistono insiemi infiniti che hanno potenza maggiore del numerabile , ma non esistono insiemi infiniti aventi potenza minore .

***Definizione* : Un insieme finito A ha potenza maggiore di un insieme finito B quando è possibile porre B in corrispondenza biunivoca con una parte propria di A , ma non è possibile porre A in corrispondenza biunivoca con una parte propria di B .**

Vediamo adesso in che cosa consiste l'originalità del pensiero di Cantor :

egli estende la definizione elementare di uguaglianza del numero cardinale di due insiemi anche al caso di insiemi infiniti .

Cantor ha il coraggio , che era mancato a Galileo Galilei , di ammettere che << **una parte può essere uguale al tutto** >> ; ma cerchiamo di chiarire il significato da dare alla parola << **uguale** >> . **Uguale in senso aristotelico** : la parte non può essere uguale ( identica ) al tutto che la contiene , in quanto il tutto ha sempre qualche elemento che la parte non ha ;

**Uguale nel senso di Cantor** : la parte può essere uguale al tutto per numero .

Tanti sono i numeri quanti sono i loro quadrati , che sono << meno >> dei numeri , perché ci sono dei numeri che non sono quadrati .

Se per concetti diversi non usiamo più la stessa parola uguale , ma usiamo rispettivamente i termini **identico** ed **equipotente** , allora la contraddizione si elimina . Un fatto incredibile diventa un fatto normale .

Nel caso di un insieme infinito , può accadere che l'intero insieme ed una sua parte , certamente non identici , siano equipotenti , cioè esprimano la stessa numerosità .

**Definizione** : Un insieme  $X$  si chiama infinito se è equipotente con un suo sottoinsieme , cioè con una sua parte ; in caso contrario l'insieme sarà detto finito .

Cantor scopre anche che :

a) i punti di un cubo sono tanti quanti i punti di un suo lato

b) i punti di un quadrato sono tanti quanti i punti di un suo lato .

### Confronto fra insiemi infiniti

L'insieme di tutti i numeri naturali è solo l'infinito attuale più piccolo .

Sono insiemi numerabili : a ) l'insieme  $Z$  degli interi relativi b) l'insieme  $Q$  dei numeri razionali c) l'insieme  $U$  , unione di insiemi numerabili .

**Teorema** : Qualunque sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile .

### Teorema

Non esiste alcun insieme infinito avente potenza inferiore al numerabile : quella del numerabile è la minima potenza degli insiemi infiniti .

Cantor prosegue il suo percorso sull'infinito scoprendo che non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili . Siamo nel dicembre del 1873 ; nasce il concetto di **infinito attuale trasfinito** , sempre accrescibile e non assoluto .Non sono

insiemi numerabili l'insieme formato da tutti i punti di un segmento , l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali .

**Definizione** : Chiamiamo **potenza del continuo** , quella dell'insieme di tutti i punti della retta e quindi anche dell'insieme  $\mathbb{R}$  di tutti i numeri reali .

Incontriamo le prime due potenze per insiemi infiniti :

1) la **potenza del numerabile** , che è la minima possibile ( ad esempio la potenza dell'insieme  $\mathbb{N}$  )

2) la **potenza del continuo** , che è maggiore di quella del numerabile ( ad esempio la potenza dell'insieme  $\mathbb{R}$  ) .

**Postulato del continuo** : Non esistono insiemi infiniti aventi potenza intermedia tra quella del numerabile e quella del continuo .

**Teorema** : L'insieme delle parti di un insieme numerabile ha la potenza del continuo ( che è maggiore di quella del numerabile )

**Teorema** : L'insieme  $P$  delle parti di un insieme qualunque  $A$  ha potenza maggiore di  $A$

**Teorema** : Esistono insiemi infiniti aventi potenza superiore alla potenza del continuo .

Quando consideriamo insiemi infiniti , si ha sempre un aumento della potenza nel passare da un insieme infinito all'insieme delle sue parti .Quindi , partendo da un insieme numerabile  $\mathbb{N}$  ( avente potenza del numerabile ) si passa all'insieme delle sue parti  $P$  che ha la potenza del continuo , e l'insieme  $P'$  delle parti di  $P$  ha potenza maggiore del continuo , l'insieme  $P''$  delle parti di  $P'$  ha potenza maggiore di  $P'$  , e

così di seguito .Le successive potenze degli insiemi  $N$  ,  $P$  ,  $P'$  ,  $P''$  .... si presentano come le successive gigantesche , infinitamente grandi unità di una nuova serie numerica infinita . Sono nati i numeri trasfiniti di Cantor che ha elaborato in maniera originale ed impeccabile una nuova aritmetica,l'aritmetica dei numeri trasfiniti .

## **Bibliografia**

**1) Frajese . introduzione elementare alla matematica moderna**

**Le Monnier**

**2) Lucio Lombardo radice l'Infinito Editori Riuniti**

**3) Enciclopedia Italiana Treccani**

**4) Ludovico Geymonat : Storia del pensiero filosofico e scientifico Garzanti**

**5) Arturo Loria : Storia delle matematiche Hoepli Milano**

**6) Carl Boyer : Storia della matematica ISEDI**

**7) Frajese . Attraverso la storia della matematica**

**Le Monnier**

**8) Ulisse I numeri e gli uomini Editori Riuniti**