Probabilità classica, frequentista, assiomatica, soggettivistica

Il concetto di probabilità nell'antichità

Precisare il significato di probabilità non è cosa semplice . Diceva **Bertrand Russell** : << **Il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna , soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato** >> . Con quest'articolo vogliamo mettere in evidenza l'evoluzione del concetto di probabilità attraverso i secoli .Un evento è un **concetto primitivo** ed esprime una circostanza che può verificarsi o non verificarsi .

La probabilità che un evento si realizzi deve essere caratterizzata matematicamente da un numero in grado di esprimere la fiducia che noi riponiamo nel verificarsi dell'evento stesso .

Analizziamo l'evoluzione del concetto di probabilità attraverso i secoli .

I primi studi sistematici sul concetto di probabilità risalgono al periodo del Rinascimento ma la sua origine è anteriore ed è collegata al giuoco d'azzardo .

Cicerone nella sua opera << **De Divinatione** >> fa considerazioni che si avvicinano all'attuale calcolo delle probabilità ed utilizza una teoria di carattere frequentista .

Nel 1526 Gerolamo Cardano nella sua opera **"Liber de ludo alae"** (Libro sul gioco del dado) ripropone , attraverso il gioco d'azzardo , l'interesse per il concetto di probabilità e fissa il problema nei suoi termini generali .

Galileo pubblica nel 1596 un breve saggio intitolato **"Sopra le scoperte dei dadi"** nel quale spiega perché nel **gioco della zara** i numeri 10 ed 11 (somma delle facce dei tre dadi lanciati) escono con maggiore frequenza dei numeri 9 e 12 . Il **gioco della zara** , che consiste nel lancio di tre dadi , era in voga anche al tempo di Dante che lo immortalò nella seguente terzina del VI canto del Purgatorio :

Quando si parte il giuoco della zara

Colui che perde si riman dolente

Ripetendo le volte , e tristo impara .

Chi perde al gioco della zara ci rimane male ma se prende nota dei risultati ottenuti può , nelle future giocate, avere migliore sorte . Possiamo considerare il 1654 l'anno ufficiale della nascita del calcolo delle probabilità ed il merito è da attribuire a **Fermat** e **Pascal** . Questi perviene a risultati di notevole importanza nelle risposta ad un quesito postogli dal Cavaliere De Mèré .

Tuttavia i loro lavori non conducono ad una sistemazione organica della teoria del calcolo delle probabilità ma , sicuramente , gettano le basi per una futura teoria generale .

Il concetto di probabilità matematica di un evento viene definito esplicitamente nel 1636 da Huygens nell'opera **"De ratiociniis in ludo alae"** (La ragione nel gioco del dado) e, successivamente, nel 1715 viene perfezionato da **Bernoulli** nell'opera **Ars conjectandi** (Arte del prevedere) . Bernoulli afferma che la frequenza relativa di un evento si avvicina alla probabilità teorica dell'evento al crescere delle prove effettuate .Lo scopo di Bernoulli è quello di utilizzare le frequenze come grandezze capaci di valutare la probabilità di un evento . In tale opera il grande matematico Bernoulli approfondisce alcune questioni del calcolo combinatorio che applica alla teoria della probabilità .

La teoria classica della probabilità

Fino al 700 il calcolo delle probabilità è considerato poco più di un gioco intelligente . Con Laplace diviene un ramo della matematica : la probabilità di un evento casuale E , calcolata secondo le vedute di Laplace , è detta **probabilità matematica** o **probabilità a priori** in quanto essa si determina sulla base di una sua previsione teorica e non su prove effettuate .

Definizione classica di probabilità di un evento secondo le vedute di Laplace

La probabilità $p(E)$ di un evento aleatorio E coincide col rapporto tra il numero m dei casi favorevoli all'evento E ed il numero n dei casi possibili nell ' ipotesi che essi siano tutti equiprobabili . In formule abbiamo :

$$p(E)=\frac{m}{n} \qquad \text{con} \qquad m \leq n \qquad 0 \leq p(A) \leq 1$$

La definizione classica di probabilità è applicabile soltanto se siamo in grado di stabilire oggettivamente se due eventi sono equiprobabili . Ma per stabilire se due eventi hanno la stessa probabilità di verificarsi dovremmo applicare la stessa formula di prima : $p(E)=\frac{m}{n}$, cioè dovremmo conoscere la definizione di probabilità di un evento .

Questa lacuna nella definizione classica di probabilità non sfuggi a Laplace il quale , nel tentativo di superarla , ricorse al << **principio di ragione sufficiente** >> che stabilisce quanto segue :

due eventi aleatori sono da considerarsi equiprobabili quando non sussistono validi motivi per ritenere che uno di essi possa verificarsi più facilmente dell'altro .

Definizione frequentista di probabilità

Volendo utilizzare il calcolo delle probabilità nello studio della realtà che ci circonda , l'uso della **probabilità matematica** si rivela assai limitato . Ad esempio , la definizione classica di probabilità non ci consente di stabilire quale probabilità ha una persona di 30 anni di essere in vita tra 10 anni . Occorre introdurre altri metodi che ci consentano di determinare la probabilità di più vaste classi di eventi aleatori .

La definizione classica di probabilità è applicabile soltanto quanto siamo in grado di definire il numero dei casi possibili ed equiprobabili . Quando questo non è possibile può essere utile fare ricorso alla teoria frequentista di probabilità di un evento . Concetto base per i frequentisti è quello della **frequenza relativa di un evento** intesa come il rapporto fra il numero h di volte in cui l'evento **E** si è verificato ed il numero n delle prove effettuate : $f(E)=\frac{h}{n}$

Evidentemente la frequenza di un certo evento **E** varia al variare delle prove e , addirittura , pur mantenendo fisso il numero delle prove sullo stesso evento **E** e nelle stesse condizioni le frequenze di ogni singolo insieme di prove potranno risultare tra loro diverse .

Tuttavia l'esperienza dimostra che , se il numero **n** di prove è abbastanza grande , i valori delle frequenze differiscono di poco l'uno dall'altro . Il più grande dei frequentisti é **Cournot** . Egli si dedica dapprima allo studio dei fenomeni di massa . Osserva , ad esempio , che il rapporto tra il numero delle nascite maschili e nascite totali in grandi città ed in intere nazioni tende a rimanere quasi immutato o , per meglio dire , stabile . Da questa osservazione evidenzia che il rapporto $\frac{h}{n}$ assume un valore tendenzialmente costante quanto più grande è n , ove con h si intenda il numero delle volte in cui l'evento A si verifica su n prove indipendenti . Tale valore si assume come **probabilità dell'evento A** , enunciando in tal modo la **legge dei grandi numeri** .

LEGGE EMPIRICA DEL CASO o LEGGE DEI GRANDI NUMERI

In una serie di prove , ripetute un gran numero di volte e tutte nelle stesse condizioni , un evento casuale **E** si verifica con una frequenza **f** che varia di poco al variare del numero delle prove e le variazioni , in generale , sono tanto più piccole quanto più grande è il numero delle prove ripetute .

Teoricamente la probabilità frequentista $p(E)$, secondo la definizione di **Von Mises** , ci viene fornita dal seguente limite : $p(\mathrm{E}) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(\mathrm{E}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{h}{n}$

secondo il quale **la probabilità matematica** $p(A)$ **dell'evento E coincide con il limite a cui tende la frequenza relativa** $f(\mathrm{E})$ **dell'esito A di un esperimento ripetibile quanto si vuole , al tendere all'infinito del numero delle prove effettuate .**

A volte , molti sinteticamente , il postulato empirico del caso si enuncia nella seguente maniera :

<< all'aumentare del numero delle prove , la frequenza relativa di un evento tende alla probabilità matematica dell'evento stesso >> .

Questa probabilità è chiamata **probabilità empirica** di un evento o **probabilità a posteriori** o ***probabilità statistica*** in contrapposizione a quella classica detta **probabilità teorica** o *probabilità a priori* o **probabilità matematica** .

Quindi la **probabilità statistica** di un evento aleatorio **E** è un numero atto a prevedere la frequenza relativa dell'evento **E** in un gran numero di prove fatte tutte nelle medesime condizioni .

La concezione frequentista di probabilità presenta i seguenti inconvenienti :

1) non sempre possiamo disporre di un numero rilevante di prove

2) il significato di numero di prove molto grande o tendente all'infinito è ambiguo e non precisato matematicamente

3) nessuno ci garantisce che le prove ripetute avvengano sempre nelle stesse condizioni .

In sintesi possiamo affermare quanto segue .

In generale risulta $p(\mathrm{E}) \neq f(\mathrm{E})$, anzi il valore di $f(\mathrm{E})$ dipende dal numero di prove effettuate ed , a parità di prove effettuate , possiamo trovare valori diversi di $f(\mathrm{E})$.

Tuttavia, quando il numero delle prove effettuate è abbastanza grande (teoricamente infinito), il valore di $f(\mathrm{E})$ tende a stabilizzarsi attorno ad un valore ben preciso che si discosta poco dalla probabilità matematica **p(E)** dell'evento **E** . Osservazioni ripetute hanno portato alla formulazione della seguente legge che , traendo origine dall'esperienza , non è dimostrabile ed è detta , per questo motivo , **legge empirica del caso** o **legge dei grandi numeri** :

<< su un numero molto grande di prove , effettuate tutte nelle medesime condizioni , la **frequenza** $f(\mathrm{E})$ con la quale si presenta un certo evento A assume generalmente valori molto prossimi a quello della probabilità **p(E)** dello stesso evento e tale approssimazione è tanto migliore quanto più elevato è il numero delle prove effettuate >>

Definizione di probabilità secondo la teoria soggettiva

La teoria soggettivista si sviluppa negli anni venti per opera del filosofo inglese Ramsey (1903-1930) ma solo con De Finetti la concezione soggettivista della probabilità diviene una vera e propria teoria matematica .

Se vogliamo conoscere la probabilità che una squadra di calcio di serie A vinca il campionato in corso non possiamo applicare né la probabilità classica né quella frequentista . Potremmo introdurre la seguente nuova definizione di probabilità : la probabilità p che la squadra vinca il campionato in corso (evento E) è uguale al rapporto $\frac{S}{V}$ se uno scommettitore coerente ritiene equo pagare la somma **S** per riscuotere la somma **V** nel caso che la squadra di calcio vinca il campionato .

La probabilità soggettivista di un evento rappresenta il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al presentarsi di un evento .

Probabilità soggettivista secondo la definizione di **De Finetti** **(1906—1985)**

La probabilità di un evento aleatorio E è espressa dal seguente rapporto

$$\boxed{p(E) = \frac{S}{V}} \qquad \text{con} \quad S \leq V$$

dove S rappresenta la somma che un individuo coerente è disposto a pagare per ricevere un compenso V nel caso in cui si verifichi l'evento E .

Come si vede , per il **soggettivismo** è accettabile che due individui giungano a valutazioni diverse della probabilità di uno stesso evento , purché ognuno di essi sia coerente con le proprie opinioni . Un individuo si considera coerente nella propria valutazione se è disposto ad accettare indifferentemente il ruolo di **scommettitore** o quello di **controparte** .

La probabilità classica e quella frequentista possono essere considerati casi particolari della teoria soggettivista .

Teoria assiomatica

La teoria assiomatica si deve al matematico russo **Andrei Kolmogorov** (**1933**) .

Probabilità classica, frequentista, assiomatica, soggettivistica

Tale teoria non si pone il problema di definire cosa dobbiamo intendere per probabilità che si verifichi l'evento aleatorio **E** . Essa considera come primitivo il concetto di probabilità che viene definito implicitamente attraverso opportuni postulati come avviene in geometria euclidea per gli enti primitivi : punto , retta e piano .

La **definizione assiomatica di probabilità** si basa su tre assiomi :

Assioma 1 o assioma della non negatività

Ad ogni evento **A** dello spazio degli eventi è associabile un numero reale non negativo detto **probabilità dell ' evento A** $\boxed{p(A) \geq 0}$

Assioma 2 o assioma della certezza

La probabilità dello spazio campionario Ω è 1 : $\boxed{p(\Omega)=1}$

Assioma 3 o assioma dell ' additività degli eventi incompatibili

Se gli eventi $A_1 , A_2 , \cdots\cdots , A_n$ sono a due a due incompatibili allora :

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \cdots + p(A_n)$$

Il matematico russo , partendo dai tre assiomi descritti in precedenza , elabora la teoria completa dell'intero calcolo delle probabilità . Si serve elegantemente della teoria degli insiemi che rende la trattazione sobria nella forma e completa nella sostanza .

La definizione assiomatica di probabilità include come casi particolari sia la definizione classica di probabilità che quella di probabilità frequentista .

Concludendo posiamo affermare che è conveniente utilizzare :

1) il **modello classico** quando siamo in grado di individuare il numero m dei casi favorevoli all'evento **E** e quando possiamo stabilire con assoluta certezza che tutti i casi possibili sono equiprobabili . Tale modello è utilizzato nel lancio dei dadi , nell'estrazione di palline da un'urna ed in esperimenti simili .

2) il **modello frequentista** quando abbiamo a che fare con esperimenti casuali che possono essere ripetuti , a nostro piacimento . Tale modello è usato nella statistica e nella matematica attuariale .

3) il **modello soggettivo** quando dobbiamo esprimere il grado di fiducia che abbiamo nella realizzazione di un evento aleatorio .Si usa , di solito , quando gli eventi casuali non sono riproducibili .

4) il **modello assiomatico** quando vogliamo prescindere dalla particolare natura degli eventi aleatori considerati .

Probabilità classica, frequentista, assiomatica, soggettivistica