

## LA MATEMATICA DEL NOVECENTO:

### I 23 PROBLEMI DI HILBERT

"Se vogliamo immaginarci lo sviluppo presumibile della conoscenza matematica nel prossimo futuro, dobbiamo far passare davanti alla nostra mente le questioni aperte e dobbiamo considerare i problemi che sono posti dalla scienza attuale e la cui soluzione attendiamo dal futuro. Questi giorni, che stanno a cavallo tra due secoli, mi sembrano ben adatti per una rassegna dei problemi ...." Così David Hilbert aprì la sua conferenza al secondo congresso internazionale dei matematici a Parigi. Era l' 8 agosto 1900. Finiva un secolo che era stato straordinario per la matematica ed era l'inizio di un altro le cui aspettative si prefiguravano non meno lusinghiere.

"Chi di noi - iniziò Hilbert - non vorrebbe sollevare il velo sotto cui sta nascosto il futuro, per gettare uno sguardo sui prossimi progressi della nostra scienza e sui segreti del suo sviluppo durante i secoli venturi? Quali saranno gli speciali obiettivi a cui mireranno le più insigni menti matematiche delle generazioni future? Quali nuovi metodi e quali nuovi risultati scopriranno i nuovi secoli, nell'ampio e ricco campo del pensiero umano?"

#### Ma chi era David Hilbert ?

Nato il 23 gennaio 1862, morto il 14 febbraio 1943, egli fu un matematico tedesco la cui ricerca in geometria ebbe la maggiore influenza nel campo dal tempo di Euclide. Hilbert conseguì il dottorato all'Università di Königsberg e lavorò qui dal 1886 al 1895. Divenne professore di matematica (1895) all'Università di Göttingen, dove rimase per il resto della sua vita. Molti matematici che più tardi ebbero un ruolo importante nello sviluppo della matematica andarono a Göttingen per studiare con lui. L'idea esposta da Hilbert nella sua famosa conferenza del 1900 ancora oggi è molto valida. Si trattava in definitiva di fare il punto della situazione, una completa ricognizione dell'esistente e su questa si sarebbe potuto prevedere ed innestare un programma di attività e di ricerca. La lista di Hilbert riscontrò un consenso unanime ed enorme fu la sua incidenza: i suoi problemi giocarono il ruolo di grandi problemi, di veri e propri punti di riferimento o mete alle quali il lavoro dei matematici doveva tendere e mirare. Di lì a poco molti dei problemi di Hilbert cominciarono ad avere una risposta e i percorsi di ricerca prima illuminati dettero luogo ad itinerari didattici, universitari e secondari, accettati ed universalmente seguiti.

## La rassegna di Hilbert

I problemi che compongono la rassegna di Hilbert sono 23, e non tutti egli riuscì ad esporre quella mattina. Possiamo suddividerli in tre gruppi. Il primo gruppo, i problemi da 1 a 6, sono di natura fondazionale. Il secondo gruppo di problemi dal 7 al 14, è di natura aritmetica e algebrica. L'ultimo gruppo dal 16 al 23 sostanzialmente la topologia e l'analisi. I problemi 19, 20 e 23 riguardano il calcolo delle variazioni alle cui questioni Hilbert assegnava una grande importanza prevedendone anche una marcata influenza nel successivo sviluppo della ricerca matematica.

Esaminiamo ora alcuni di quei problemi, anche per far cogliere al lettore il loro straordinario valore culturale.

<a href="#">Problema 1</a>	L' <a href="#">ipotesi del continuo</a> e il fatto che l'insieme dei numeri reali sia ben ordinato
<a href="#">Problema 7</a>	Dati $a \neq 0,1$ <a href="#">algebrico</a> e $b$ <a href="#">irrazionale</a> , il numero $a^b$ è sempre <a href="#">trascendente</a> ?
<a href="#">Problema 8</a>	Dimostrare l' <a href="#">ipotesi di Riemann</a>
<a href="#">Problema 10</a>	Determinazione delle soluzioni generali di un' <a href="#">equazione diofantea</a>
<a href="#">Problema 18</a>	Riempimento dello spazio per mezzo di poliedri congruenti.

### PRIMO PROBLEMA

**L'ipotesi del continuo.** Esiste un numero cardinale intermedio fra la potenza numerabile e quella del continuo? Esistono gli insiemi infiniti. Sono insiemi infiniti:  $N$ (=insieme dei numeri naturali)  $R$ (=insieme dei numeri reali)  
 $N$  ed  $R$  non hanno la stessa cardinalità. E fu proprio questa la prima grande scoperta di Cantor nella teoria degli insiemi : con una dimostrazione basata sul suo famoso metodo diagonale egli riuscì a dimostrare che l'insieme dei numeri naturali non è equipotente all'insieme dei numeri reali. Esistono quindi almeno due tipi di infinità. Il primo tipo, l'infinità dei numeri naturali e di ogni insieme infinito con esso equipotente, viene detta **aleph con zero**  $\aleph_0$  e gli insiemi di cardinalità  $\aleph_0$  sono detti numerabili. Il secondo tipo di infinità è quello rappresentato da tutti i punti di un segmento e la sua cardinalità è indicata con una  $c$  gotica minuscola, che sta per «continuo». Ogni segmento, di qualunque lunghezza, ha la cardinalità  $c$  ovvero  $\aleph_1$ . A questo punto ci si può chiedere : **Esiste un insieme infinito la cui potenza è compresa tra  $\aleph_0$  e  $\aleph_1$ ?**

“La questione si presentò a Cantor, il quale però non riuscì a trovare un insieme con tali caratteristiche: ne concluse- o meglio suppose - che un insieme di tale tipo non esistesse. Se non esistesse, questa è l'ipotesi formulata da Cantor, allora varrebbe il teorema che Hilbert presentò nella

forma seguente: " ogni insieme infinito di numeri o di punti, è equivalente o all'insieme dei numeri interi naturali 1, 2, 3, ... oppure all'insieme di tutti i numeri reali e quindi al continuo (cioè, ad es., ai punti di un segmento); perciò nel senso dell'equivalenza, ci sono solo due insiemi di numeri, gli insiemi numerabili e il continuo".

Dopo prolungati sforzi fu scoperto che l'ipotesi di Cantor è indipendente dagli altri assiomi della teoria degli insiemi. Il potente metodo per la dimostrazione dell'indipendenza, ideato da P.Cohen (1963), condusse a stabilire l'indipendenza di tutta una serie di altre affermazioni nella teoria degli insiemi.

## Il settimo problema di Hilbert:

### irrazionalità e trascendenza di determinati numeri

L'esistenza di numeri trascendenti era stata dimostrata per la prima volta da Liouville (in una memoria presentata il lunedì 13 maggio 1844).

Nel 1873 Hermite aveva dimostrato la trascendenza del numero  $e$  (base dei logaritmi naturali) e Lindemann nel 1882 quella di  $\pi$ . Ma il problema di provare la irrazionalità o la trascendenza di molti numeri rimaneva una questione aperta.

Un numero della forma  $\alpha^\beta$ , con  $\alpha$  e  $\beta$  algebrici, è algebrico o trascendente? Ossia si può ottenere o no come soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti razionali?

Hilbert fece l'esempio specifico del numero  $2^{\sqrt{2}}$  (escludeva i casi corrispondenti ad  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  e  $\beta$  razionale, perchè per essi è abbastanza facile provare che  $\alpha^\beta$  è algebrico). Il problema fu risolto nel 1934 indipendentemente da A. Gelfond e Th. Schneider sulla base di risultati ottenuti da Gelfond nel 1929. La trascendenza di  $2^{\sqrt{2}}$  rientra come caso particolare in questo risultato generale, dal quale segue pure la trascendenza di  $\text{Log} 2$ . Infatti indicando  $\text{Log} 2$  e 10 rispettivamente con  $\beta$  e  $\alpha$ , per definizione di logaritmo, si può scrivere:  $10^{\text{Log} 2} = \alpha^\beta = 2$

Se  $\beta$  fosse algebrico e irrazionale, allora, per il teorema di Gelfond-Scheider,  $2$  sarebbe trascendente. Quindi, poichè  $2$  è invece algebrico,  $\beta = \text{Log} 2$  è razionale o è trascendente. Ma  $\text{Log} 2$  è irrazionale, quindi esso deve essere trascendente.

## OTTAVO PROBLEMA DI HILBERT

La successione dei numeri primi rappresenta fin dall'antica Grecia uno dei misteri più affascinanti della scienza: c'è un ordine prevedibile nella serie dei numeri primi, una regola per stabilire ad esempio quale sarà il centesimo numero primo? Nel 1859, il matematico tedesco Bernhard Riemann presentò una sua ipotesi, che sembrava rivelare una magica armonia tra i primi e gli altri numeri. Bernhard Riemann morì a quarant'anni non ancora compiuti, il 20 luglio 1866. La memoria del 1859 che contiene la celebre congettura sulla funzione zeta - nota sotto il nome di ipotesi di Riemann - affronta un problema con cui si erano già cimentati matematici del calibro di Adrien-Marie Legendre e Carl Friedrich Gauss: quanti sono i numeri primi inferiori a un numero assegnato, comunque grande? Nell'ultimo decennio del Settecento essi ebbero l'idea che la distribuzione in media dei numeri primi obbedisca a semplici leggi statistiche e giunsero così a enunciare, senza riuscire a dimostrarlo, il teorema fondamentale dei numeri primi, che fornisce una stima di massima del numero dei primi più piccoli di un intero  $N$ , con approssimazione sempre migliore al crescere di  $N$ . Riemann, nell'articolo del 1859, migliorò le stime di Legendre e Gauss e scoprì alcune delle mirabolanti proprietà della funzione zeta, che costituirà l'ingrediente fondamentale per le dimostrazioni - quasi simultanee e indipendenti l'una dall'altra - del teorema fondamentale dei numeri primi da parte di Jacques Hadamard e Charles de la Vallée-Poussin nel 1896.

L'ipotesi di Riemann fu inclusa da David Hilbert come ottavo problema nella sua famosa lista. Nonostante i formidabili progressi compiuti dalle discipline matematiche negli ultimi cento anni, rimane una questione ancora senza risposta (c'è anche chi ne mette in dubbio la validità), che tuttavia si è dimostrata preziosa per stimolare lo sviluppo di molte nuove linee di ricerca. I numeri primi hanno di recente trovato un'importante applicazione commerciale nei metodi crittografici a chiave pubblica, sviluppati a partire dalla seconda metà degli anni 70, che consentono di scambiare messaggi in codice senza la necessità di comunicare in anticipo una chiave segreta. C'è tuttavia da dubitare che sarà soprattutto in vista delle possibili ricadute pratiche se l'ipotesi di Riemann troverà una soluzione.

## DECIMO PROBLEMA

Un'equazione diofantea è un'equazione di cui si cercano soluzioni intere. Ad esempio, l'equazione diofantea  $x^2 + y^2 = z^2$  ammette soluzioni intere, le cosiddette terne pitagoriche, cioè le terne di numeri interi che rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo, ad esempio  $x = 3$ ,  $y = 4$ ,  $z = 5$ . Recentemente è stato dimostrato, risolvendo il noto

problema di Fermat, che per ogni intero  $n \geq 3$  l'equazione diofantea  $x^n + y^n = z^n$  non ammette soluzioni (interi).

Nel decimo problema Hilbert si chiedeva se fosse possibile costruire una procedura che potesse decidere l'esistenza di soluzioni di una data equazione diofantea. Ai tempi di Hilbert non esisteva la teoria della calcolabilità e non c'erano gli strumenti matematici per dare una risposta a questo problema.

La diffusione degli elaboratori elettronici negli ultimi 50 anni ha creato le premesse per lo sviluppo di discipline che si collocano alla frontiera tra Matematica ed Informatica e, incredibilmente, ha consentito la risoluzione del problema.

Alla base di queste discipline vi è la nozione di "problema computazionale", ovvero di un problema che si intende risolvere mediante un algoritmo, cioè una procedura costituita da una sequenza di passi semplici che portano alla soluzione del problema stesso. Esempi di problemi computazionali sono: il calcolo dei numeri primi, il calcolo del massimo comune divisore di due interi, la ricerca di soluzioni di una equazione algebrica, etc.

La teoria degli algoritmi e della calcolabilità ha sviluppato e studiato la nozione di problema decidibile, ovvero di problema computazionale per il quale è possibile costruire un algoritmo che lo risolve. Sorprendentemente, nell'ambito di questa teoria è stata dimostrata l'esistenza di problemi, anche semplici, che non sono decidibili.

Per il decimo problema di Hilbert la risposta è arrivata solo nel 1970 ad opera del matematico russo Yuri Matiyasevich: il decimo problema di Hilbert non è decidibile. Usando un linguaggio più moderno possiamo dire: non è possibile programmare un calcolatore in modo da potere decidere se una qualunque equazione diofantea, data in input, ammetta o meno una soluzione.

### **DICIOTTESIMO PROBLEMA**

NEL 1611 il navigatore Walter Raleigh, organizzatore delle spedizioni dalle quali nacque l'impero coloniale inglese, propose al matematico Thomas Harriot il seguente problema, di evidente interesse pratico: qual è il miglior modo di impilare palle di cannone? Il metodo più ovvio è quello che si usa anche per accatastare le arance sui banchi del mercato: si dispone anzitutto una fila di arance; la seconda fila si dispone sfalsata, in modo da porre le arance negli avvallamenti della prima fila, e così via; una volta disposto un primo strato, si dispone un secondo strato sfalsato nello stesso modo, e si continua fino a costruire una piramide. In alcune fortezze rimangono ancora cataste di palle di cannone disposte così. Niente però assicura che, soltanto perché questa è la maniera intuitiva di disporre le arance o le palle di cannone, essa sia anche la migliore possibile, e proprio

di questo Raleigh voleva sincerarsi. Harriot non seppe risolvere il problema, e lo passò all'astronomo Keplero, che gli diede questa forma: determinare quale configurazione di sfere nello spazio abbia la massima densità. Un analogo problema si pone per i cerchi nel piano, nel qual caso il problema si può illustrare chiedendo quale sia la più efficiente disposizione di monete su un tavolo. Keplero effettuò alcuni calcoli, per entrambi i casi, ma dovette limitarsi a congetturare che le disposizioni ovvie sono effettivamente le migliori. Il primo progresso si ebbe nel 1831 grazie al principe dei matematici Karl Gauss. Egli dimostrò che, nel caso dei cerchi, la configurazione ovvia è la migliore fra tutte quelle reticolari, tali cioè che i centri dei cerchi formino un reticolo planare, cioè una configurazione simmetrica di parallelogrammi. Anche per lo spazio Gauss dimostrò che la configurazione ovvia è la migliore fra tutte quelle reticolari, tali cioè che i centri delle sfere formino un reticolo spaziale, cioè una configurazione simmetrica di parallelepipedi. Il caso generale rimase però aperto, e andò a costituire una parte del diciottesimo problema della famosa lista di Hilbert. Molti dei problemi di Hilbert sono stati risolti, ma quello mutuato da Keplero resisteva scandalosamente. Finalmente, il 9 agosto del 1998 Thomas Hales, dell'Università del Michigan, ha annunciato di aver concluso la ricerca e risolto il problema: la dimostrazione richiede 250 pagine e un programma di computer da 3 gigabytes, ed è esposta nel sito Internet di Hales. Quando il numero di dimensioni sale, la cosa diventa ancora più interessante. Il problema della miglior configurazione fra tutte quelle reticolari è stato risolto fino alla dimensione 8. Ma non sempre le configurazioni reticolari offrono la migliore densità. Il problema della configurazione di sfere a massima densità in spazi multidimensionali riveste oggi una grande importanza nella teoria dei codici di correzione d'errore per la trasmissione di messaggi. Proprio in queste applicazioni sta l'importanza del problema di Keplero e della sua recente soluzione.

### Sinteticamente

- Un insieme si dice finito se non esiste nessun suo sottoinsieme proprio ad esso equipotente (si dice che due insiemi sono equipotenti se esiste una corrispondenza biunivoca fra essi).
- La cardinalità di un insieme finito è il numero dei suoi elementi.
- Un insieme si dice infinito se possiede un sottoinsieme proprio ad esso equipotente.
- L'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  è un insieme infinito.

• La cardinalità di  $\mathbb{N}$  è  $\aleph_0$ .

• Gli insiemi equipotenti ad  $\mathbb{N}$  si dicono numerabili ed hanno cardinalità  $\aleph_0$ .

Insiemi infiniti non numerabili. Insiemi continui. L'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali è un insieme infinito numerabile. L'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  è un insieme infinito numerabile. Sorge a questo punto spontanea una domanda: esistono insiemi infiniti non numerabili, cioè che siano infiniti ma che non siano equipotenti ad  $\mathbb{N}$  ?

### Numeri ALGEBRICI e TRASCENDENTI:

**ALGEBRICI**: sono quei numeri che possono essere risolti con un'equazione di coefficienti razionali. Ad esempio  $\sqrt{2}$  è algebrico perché soddisfa l'equazione  $x^2 = 2$ . È evidente che tutti i numeri razionali sono algebrici perché, ad esempio  $15/7$  si può esprimere come  $7x=15$ . Anche i numeri irrazionali possono essere anche algebrici.

**TRASCENDENTI**: sono numeri reali o complessi, risultati di radici con coefficienti razionali, che non possono essere espressi con equazioni algebriche. Oltre i numeri  $e$  e  $\pi$  è trascendente, ad esempio, anche il numero  $2^{\pi^2}$  e in genere ogni numero della forma  $a^b$  con  $a$  numero algebrico  $\neq 0$  e  $b$  un numero algebrico irrazionale. È trascendente anche  $\log 2$  ed in genere  $\log n$  quando  $n$  non è una potenza di 10.

L'insieme dei numeri algebrici è numerabile mentre l'insieme di tutti i numeri reali è non numerabile; ciò implica che neanche l'insieme dei numeri trascendenti è numerabile, cioè, in maniera molto significativa, che esistono più numeri trascendenti che algebrici. Comunque, sono note soltanto poche classi di numeri algebrici e dimostrare che un dato numero è trascendente può essere molto difficile. Un'altra proprietà di un numero, e cioè la normalità, potrebbe aiutare a determinarne la trascendenza.