I numeri naturali

Definizione: Tra due insiemi **A** e **B** esiste una corrispondenza biunivoca quando ad ogni elemento di **A** corrisponde un solo elemento di **B** e ad ogni elemento di **B** corrisponde un solo elemento di **A**.

Definizione: Un insieme si dice **finito** se non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Definizione: Due insiemi non vuoti **A** e **B** si dicono **equipotenti** quando tra essi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca.

Insiemi **finiti ed equipotenti** hanno lo stesso numero di elementi. Viceversa, insiemi aventi lo stesso numero di elementi sono equipotenti. Agli insiemi equipotenti possiamo associare un **numero cardinale** che chiamiamo **numero naturale**. Dunque, ad ogni **insieme finito è associato un numero naturale** che esprime quanti sono i suoi elementi. E' evidente che uno stesso numero naturale risulta associato ad un insieme finito ed a tutti gli insiemi finiti che gli sono equipotenti.

Definizione: **Un numero naturale esprime la proprietà che hanno in comune tutti gli insiemi finiti tra loro equipotenti, cioè la loro cardinalità.**

Quindi ad ogni insieme finito corrisponde un numero naturale che è lo stesso per tutti gli insiemi tra loro equipotenti. Nel caso dell'insieme vuoto $\varnothing$, il numero ad esso associato è lo **zero** indicato col simbolo 0. A tutti gli insiemi costituiti da un solo elemento facciamo corrispondere il numero **uno** indicato col simbolo 1. A tutti gli insiemi costituiti da due elementi facciamo corrispondere il numero **due**, indicato col simbolo 2. Considerando poi gli insiemi che si ottengono aggiungendo sempre un elemento otteniamo la **successione dei numeri naturali:**

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\cdots$$

L'insieme dei numeri naturali viene indicato col simbolo $\mathbb{N}$. Risulta pertanto:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\cdots\}$$

L'insieme dei numeri naturali privato della zero viene indicato col simbolo:

$$\mathbb{N}_o=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\cdots\}$$

Definizione: Si chiama **successivo** di un numero naturale dato, il numero naturale che immediatamente lo segue nella successione dei numeri naturali.

Definizione: Diciamo che il numero naturale a è il **precedente** del numero naturale b se nella successione dei numeri naturali a si trova alla sinistra di b e non c'è alcun numero naturale tra a e b.

Nella successione dei numeri naturali ogni numero ha un **precedente**, escluso lo zero, ed un **successivo**. Il **successivo** del numero n è il numero $n+1$, il **precedente** del numero n è il numero $n-1$.

L'insieme $\mathbb{N}$ è un insieme infinito in quanto non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Numeri cardinali e numeri ordinali

Numero cardinale è quello che indica quanti sono gli elementi di un insieme. **Numero ordinale** è quello che indica il posto occupato da ciascun elemento di un insieme.

La rappresentazione grafica dei numeri naturali

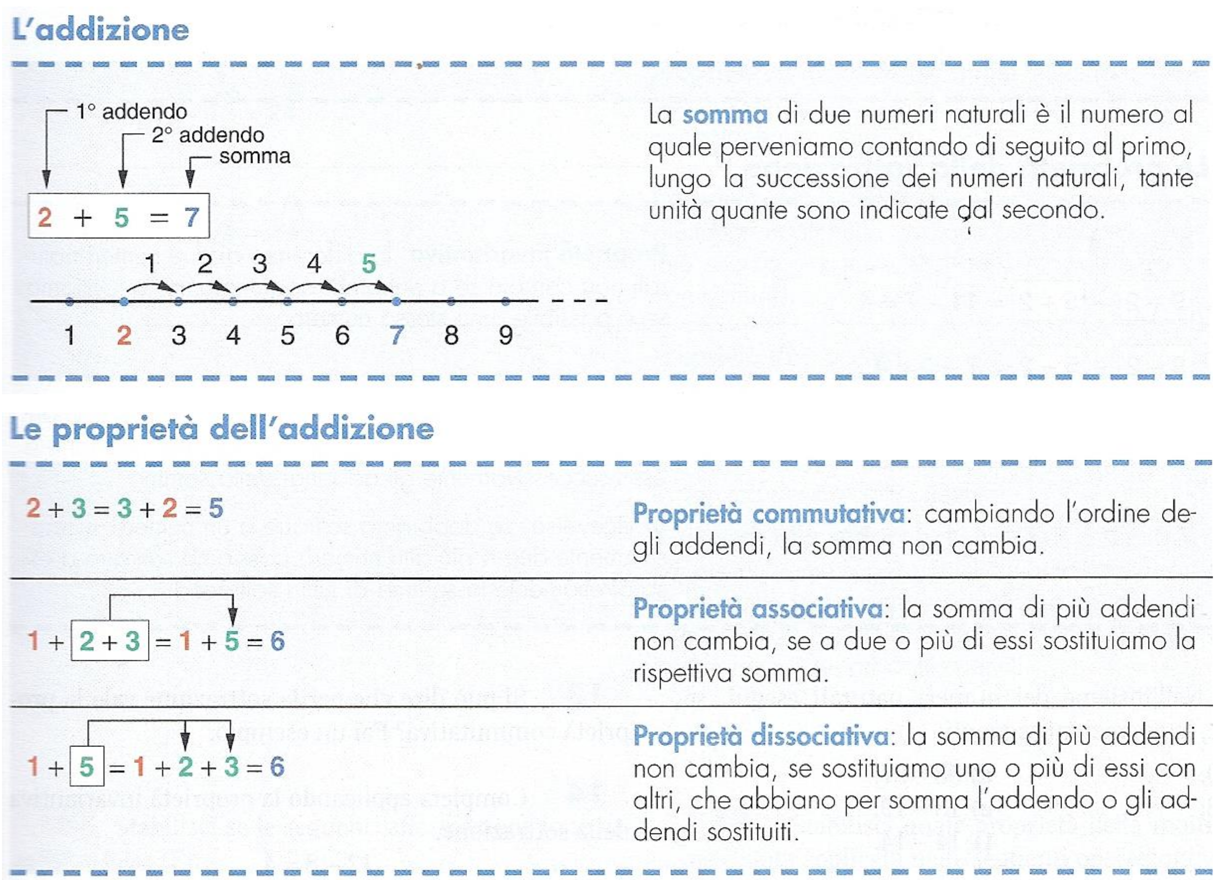
E' possibile rappresentare i numeri naturali su una semiretta sulla quale scegliamo una origine O, una unità di misura per i segmenti ed un orientamento positivo. All'origine O della semiretta orientata facciamo corrispondere il numero zero. Determiniamo poi, a partire da O, un punto A in modo che il segmento unitario sia congruente al segmento OA. Al punto A facciamo corrispondere il numero successivo del numero zero, cioè il numero naturale 1. Al punto B facciamo corrispondere il numero successivo del numero naturale 1, cioè il numero naturale 2. Se continuiamo in questo modo, potremo fare corrispondere ad ogni numero naturale un ben preciso punto della semiretta. Stabiliamo così una corrispondenza biunivoca tra i numeri naturale e l'insieme $\{O, A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, \cdots\}$ dei punti individuati sulla semiretta, ricordando che i segmento $OA, AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IL, LM, MN, \cdots$ sono tutti congruenti al segmento unitario. In questo modo abbiamo rappresentato su una semiretta tutti i numeri naturali.

Abbiamo così creato una rappresentazione grafica dei numeri naturali, detta **rappresentazione cartesiana** dei numeri naturali.

I punti $O, A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, \cdots$ sono le immagini geometriche dei numeri naturali $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,15,16,\cdots\}$.

La rappresentazione grafica dei numeri naturali ci permette di formulare la seguente regola: Ogni numero naturale è minore di tutti i numeri che lo seguono ed è maggiore di tutti i numeri che lo precedono.

Le quattro principali operazioni aritmetiche con i numeri naturali



L'addizione

1° addendo
2° addendo
somma

$2 + 5 = 7$

La **somma** di due numeri naturali è il numero al quale perveniamo contando di seguito al primo, lungo la successione dei numeri naturali, tante unità quante sono indicate dal secondo.

Le proprietà dell'addizione

$2 + 3 = 3 + 2 = 5$

Proprietà commutativa: cambiando l'ordine degli addendi, la somma non cambia.

$1 + \boxed{2 + 3} = 1 + 5 = 6$

Proprietà associativa: la somma di più addendi non cambia, se a due o più di essi sostituiamo la rispettiva somma.

$1 + \boxed{5} = 1 + 2 + 3 = 6$

Proprietà dissociativa: la somma di più addendi non cambia, se sostituiamo uno o più di essi con altri, che abbiano per somma l'addendo o gli addendi sostituiti.

Le proprietà formali dell'addizione

- **Proprietà commutativa**: $a+b=b+a$
- **Proprietà associativa**: $a+(b+c)=a+b+c$
- **Proprietà dissociativa**: La somma di due o più numeri naturali non cambia se sostituiamo ad un addendo la somma di due o più numeri che abbiano come somma l'addendo sostituito.

$$a+b=a+c+d \quad \text{se} \quad b=c+d$$

- **Esistenza dell'elemento neutro**: Qualunque sia il numero naturale n si ha:

$$n+0=0+n=n$$

Il numero 0 è **l'elemento neutro** rispetto all'addizione

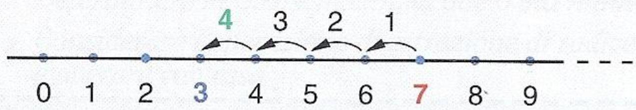
La sottrazione

minuendo, sottraendo, differenza

$\boxed{7 - 4 = 3}$

La **differenza** di due numeri naturali, dei quali il primo sia maggiore o uguale al secondo, è il numero naturale che, addizionato al secondo, dà come somma il primo.

$7 - 4 = 3$



La sottrazione è l'**operazione inversa** dell'addizione.

Le proprietà della sottrazione

$9 - 5 = 4$

$\boxed{9+2} - \boxed{5+2} = 11 - 7 = 4$

$\boxed{9-2} - \boxed{5-2} = 7 - 3 = 4$

Proprietà invariantiva: la differenza di due numeri naturali non cambia se a entrambi aggiungiamo, o togliamo se è possibile, uno stesso numero.

$5 - \boxed{2+1} = 5 - \boxed{2} - \boxed{1} = 3 - \boxed{1} = 2$

a) Se dobbiamo sottrarre a un numero la somma non ancora eseguita di due o più addendi, possiamo sottrarre a esso successivamente gli addendi della somma;

$5 - 2 - 1 = 5 - \boxed{2 + 1} = 5 - \boxed{3} = 2$

b) viceversa, se dobbiamo sottrarre a un numero successivamente due o più altri numeri, possiamo sottrarre a esso direttamente la somma di tutti i sottraendi.

$a-b=c \Leftrightarrow a=b+c$ cioè la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.

a si chiama **minuendo**, b si chiama **sottraendo**, c si chiama **differenza**.

- **Proprietà invariantiva**: $a-b=(a+x)-(b+x)=(a-x)-(b-x)$

La moltiplicazione

1° fattore, 2° fattore, prodotto

$\boxed{2 \cdot 3 = 6}$

Il **prodotto** di due numeri naturali, il secondo dei quali sia diverso da zero e da uno, è la somma di tanti addendi uguali al primo quante sono le unità del secondo.

Infatti: $3 \neq 0$; $3 \neq 1$; $\underbrace{2 + 2 + 2}_{3} = 6$

$7 \cdot 0 = 0$ ← per convenzione

$7 \cdot 1 = 7$ ← per convenzione

Se il **secondo fattore** è uguale a **0**, il valore del prodotto è posto convenzionalmente uguale a **0**; se il **secondo fattore** è uguale a **1**, il prodotto è posto uguale al **primo fattore**.

Le proprietà della moltiplicazione

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$	**Proprietà commutativa**: cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia.
$2 \cdot \boxed{3 \cdot 4} = 2 \cdot 12 = 24$	**Proprietà associativa**: se a due o più fattori sostituiamo il loro prodotto, il risultato della moltiplicazione non cambia.
$2 \cdot \boxed{12} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$	**Proprietà dissociativa**: se scomponiamo uno o più fattori in altri che abbiano per prodotto il fattore scomposto, il risultato della moltiplicazione non cambia.
$2 \cdot \boxed{3+4} = \boxed{2 \cdot 3} + \boxed{2 \cdot 4} = 6 + 8 = 14$	**Proprietà distributiva:** • **rispetto all'addizione**: se dobbiamo moltiplicare un numero per una somma non ancora calcolata, lo possiamo moltiplicare per ciascuno dei termini della somma, calcolando in seguito la somma dei prodotti ottenuti;
$2 \cdot \boxed{7-3} = \boxed{2 \cdot 7} - \boxed{2 \cdot 3} = 14 - 6 = 8$	• **rispetto alla sottrazione**: se dobbiamo moltiplicare un numero per una differenza non ancora eseguita, lo possiamo moltiplicare per ciascun termine della sottrazione, calcolando in seguito la differenza dei prodotti ottenuti.

- **Proprietà commutativa**: $a \cdot b = b \cdot a$
- Esistenza dell'**elemento neutro**: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \Rightarrow$ il numero 1 è l' **elemento neutro** della moltiplicazione in N.
- **Legge di annullamento di un prodotto di fattori**: Se un prodotto di fattori è nullo, allora almeno un fattore deve essere nullo. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oppure $b = 0$ oppure $a = b = 0$
- **Proprietà associativa**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
- **Proprietà dissociativa**: $a \cdot b = a \cdot (c \cdot d)$ se $b = c \cdot d$
- **Proprietà distributiva** della moltiplicazione rispetto all'addizione ed alla sottrazione

$$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \qquad (a-b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c)$$

La divisione propria

dividendo
divisore
quoziente esatto

6 : 3 = 2

Infatti: $3 \neq 0$ e $2 \cdot 3 = 6$

Una divisione è detta **propria** quando non lascia alcun resto, cioè quando il suo quoziente è **esatto**.

Il **quoziente esatto** di due numeri naturali, il secondo dei quali sia diverso da zero, è il numero naturale (se esiste) che moltiplicato per il secondo dà come prodotto il primo.

6 : 3 = 2

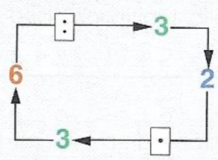
ovvero:

6 è divisibile per o multiplo di 3

3 è divisore o sottomultiplo di 6

Se tra due numeri esiste il quoziente esatto:

- il primo si dice **divisibile** per il secondo o **multiplo** del secondo;
- il secondo si dice **divisore** o **sottomultiplo** del primo.



La divisione propria è l'**operazione inversa** della moltiplicazione.

Definizione: Dati due numeri a, b la divisione $a:b$ è definita nell'insieme N se e solo se:

- $b \neq 0$ • a è multiplo di b. $a:b=q \Leftrightarrow a=b \cdot q$. Il numero a si chiama **dividendo**, il numero b si chiama **divisore**, il numero q si chiama **quoziente**.

Quando il divisore è lo zero, la divisione è priva di significato. Quindi non è possibile dividere un numero a per un numero $b=0$.

Se a non è multiplo di b, la divisione non è definita in N perché non esiste nessun numero naturale q che moltiplicato per b dia a. In questo caso si parla di divisione impropria o divisione con resto. In questo caso scriviamo: $a=b \cdot q+r$ e diciamo che q è un **quoziente approssimato**.

- La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione
- **Proprietà invariantiva**: $a:b=(a \cdot x):(b \cdot x)=(a:x):(b:x)$
- **Proprietà distributiva** della divisione rispetto all'addizione ed alla sottrazione

$$(a+b):c=(a:c)+(b:c) \qquad (a-b):c=(a:c)-(b:c)$$

- Se dal dividendo e dal divisore eliminiamo eventuali fattori comuni, il quoziente non cambia

$$(a \cdot x):(b \cdot x)=a:b$$

La divisione impropria

dividendo
divisore
quoziente intero

$\boxed{17 : 3 = 5}\ \boxed{2}$ resto

Infatti: $3 \neq 0$

e $3 \cdot 5 = 15 < 17$

$3 \cdot 6 = 18 > 17$

Una divisione è detta **impropria** quando lascia un **resto**.

Dati due numeri naturali, il secondo dei quali sia diverso da zero e non sia sottomultiplo del primo, è detto loro **quoziente intero** il più grande numero naturale che, moltiplicato per il secondo, dà come prodotto un numero minore del primo.

resto = dividendo − (divisore · quoziente intero)

Infatti: $17 - 3 \cdot 5 = 17 - 15 = 2$

Il **resto** è la differenza tra il dividendo e il prodotto del divisore e del quoziente intero.

resto < divisore

Infatti: $2 < 3$

Il resto è sempre **minore** del divisore.

Le proprietà della divisione

$24 : 6 = 4$

$\boxed{24 \cdot 2} : \boxed{6 \cdot 2} = 48 : 12 = 4$

Proprietà invariantiva: moltiplicando, o dividendo se è possibile, il dividendo e il divisore per uno stesso numero, il quoziente non cambia.

$\boxed{21 + 6} : 3 = \boxed{21 : 3} + \boxed{6 : 3} = 7 + 2 = 9$

Infatti: 21 e 6 sono multipli di 3

$\boxed{21 - 6} : 3 = \boxed{21 : 3} - \boxed{6 : 3} = 7 - 2 = 5$

Infatti: 21 e 6 sono multipli di 3

Proprietà distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione: la divisione di una somma (o di una differenza) non ancora calcolata per un numero dato che sia divisore di tutti i termini, può essere eseguita:

- dapprima dividendo ciascun termine per il numero dato;
- poi calcolando la somma (o la differenza) dei quozienti parziali ottenuti.

$\boxed{10 \cdot 6} : 2 = \boxed{10 : 2} \cdot 6 = 5 \cdot 6 = 30$

Infatti: 10 è multiplo di 2

Se dobbiamo dividere un prodotto non ancora calcolato per un numero dato, possiamo:

- dapprima dividere per il numero dato uno solo dei fattori (purché il quoziente sia esatto);
- quindi moltiplicare il quoziente ottenuto per i fattori rimasti.

$\boxed{10 \cdot \cancel{6} \cdot 4} : \cancel{6} = 10 \cdot 4 = 40$

Infatti: $6 = 6$

Se però il divisore è uguale a uno dei fattori del dividendo, è sufficiente sopprimere tale fattore e moltiplicare tra loro i fattori rimasti.

Nell'insieme N un generico numero pari, cioè divisibile per 2, è indicato col la formula $2n$, mentre un numero dispari, cioè non divisibile per 2, è indicato con la formula $2n+1$.

I sistemi di numerazione

Premesse: Come abbiamo visto, l'insieme ordinato dei numeri naturali è infinito ed illimitato, cioè contiene infiniti elementi e non esiste in esso l'ultimo numero. Poiché ogni numero deve avere un nome ed un simbolo per rappresentarlo e distinguerlo dagli altri, si comprende facilmente che se non si pone alcun legame fra i diversi nomi e i diversi simboli, si dovrebbero usare infinite parole ed infiniti simboli, il che sarebbe impossibile. Da qui la necessità di creare un metodo che permetta di nominare tutti i numeri mediante pochi vocaboli opportunatamente combinati tra loro, e di rappresentarli per mezzo di pochi simboli anch'essi opportunatamente combinati tra loro.

Definizione: Un **sistema di numerazione** è un insieme di simboli, detti **cifre**, e di **regole** per combinarli, per mezzo dei quali è possibile rappresentare qualunque numero naturale.

Un **sistema di numerazione** comporta: **(1)** un **alfabeto**, cioè un insieme finito e non vuoto di simboli (**cifre**) utilizzati **(2)** una **sintassi**, cioè un insieme finito e non vuoto di **regole** mediante le quali è possibile scrivere e leggere i numeri naturali.

Possiamo distinguere due sistemi diversi di notazione dei numeri naturali: il **sistema additivo** e quello **posizionale**. Nel **sistema additivo** il valore di un numero si ottiene come somma o differenza dei valori attribuiti convenzionalmente alle singole cifre. Nel sistema **posizionale** le cifre che intervengono nella scrittura di un numero naturale hanno valore diverso a seconda della loro posizione.

Sistema di numerazione decimale: Nel sistema di numerazione decimale, o a base 10, tutti i numeri naturali vengono rappresentati mediante **dieci** simboli, o **cifre** che, come è noto, sono:

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

E si è stabilito che tali cifre rappresentino rispettivamente i primi **dieci** numeri naturali (zero compreso), cioè i numeri chiamati: **zero**, **uno**, **due**, **tre**, **quattro**, **cinque**, **sei**, **sette**, **otto**, **nove**

Il successivo del numero nove si chiama **dieci**. Il numero uno si dice **unità semplice** o **unità del primo ordine**. Si sono stabilite le seguenti regole:

- **Dieci unità semplici** o del primo ordine formano una unità del **secondo ordine**, chiamata **decina**

- Dieci decine formano una unità del **terzo ordine**, chiamata **centinaio**
- Dieci centinaia formano una unità del **quarto ordine**, chiamata **migliaio**
- Dieci migliaia formano una decina di migliaia o unità del **quinto ordine**
- Dieci decine di migliaia formano un centinaio di migliaia o unità del **sesto ordine**, mentre dieci centinaia di migliaia formano una nuova unità, che si chiama **milione** o unità del settimo **ordine**.

Procedendo con lo stesso metodo si trovano le unità degli altri ordini, cioè i **miliardi** (o **bilioni**), i trilioni, e così di seguito. **Dieci unità di un ordine formano un'unità dell'ordine immediatamente superiore**. Gli ordini si raggruppano a tre a tre formando le classi.

Il numero dieci è la **base** di questo sistema di numerazione, che prende il nome di sistema decimale. Si tratta di un sistema: **(a)** **decimale** perché utilizza **dieci simboli** per rappresentare tutti i numeri naturali e perché dieci unità di qualsiasi ordine formano una unità dell'ordine immediatamente successivo **(b)** **posizionale** in quanto il valore di una cifra dipende dalla posizione che questa occupa nella scrittura del numero.

In base alle cose dette, segue che ogni numero naturale contiene un certo numero di unità semplici, un certo numero di decine, un certo numero di centinaia, e così di seguito. Questo ci consente di scrivere un qualsiasi numero naturale come somma i cui termini sono prodotti di una cifra per una potenza del dieci.

E' la scrittura polinomiale di un numero naturale. Il numero 3479 può essere scritto in forma polinomiale nella seguente maniera: $3479 = 3\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 9$ per cui possiamo affermare che la cifra 3 rappresenta le migliaia, la cifra 4 rappresenta le centinaia, la cifra 7 rappresenta le decine, la cifra 9 rappresenta le unità.

Concludendo possiamo affermare che nel sistema di numerazione decimale (cioè in base dieci)

(a) L'**alfabeto** è: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ **(b)** La **sintassi** è formata dalle seguenti regole:

(1) Le cifre rappresentano, nell'ordine, i numeri minori della base dieci

(2) **Principio della scrittura posizionale**:

- si scrive il numero sotto forma di somma i cui addendi sono prodotti di una potenza del dieci per un'opportuna cifra
- si sopprimono le successive potenze del dieci ed il simbolo $+$ posto tra i vari addendi della somma

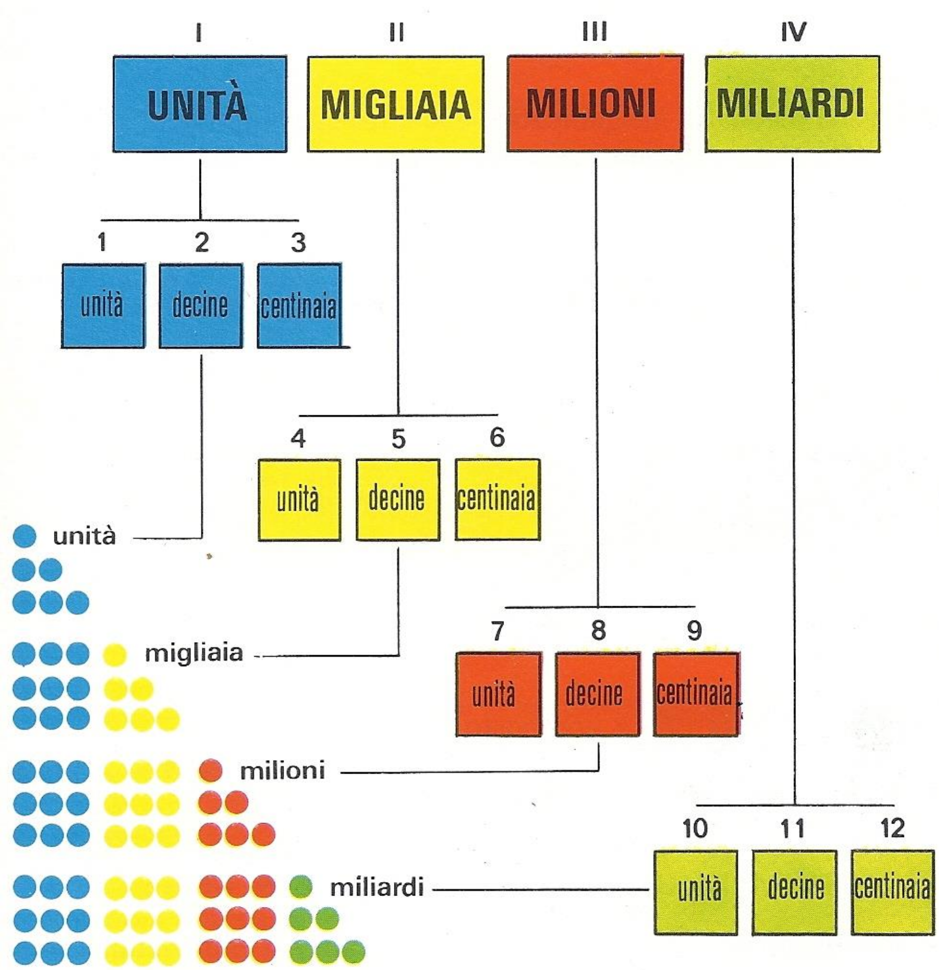
- si scrivono una accanto all'altra le cifre che moltiplicano le varie potenze del dieci, in modo che la prima cifra a destra rappresenti le unità semplici, la seconda cifra da destra le decine, la terza le centinaia e così di seguito.

Osservazione: Ogni cifra ha un **valore intrinseco o assoluto** che è il valore della cifra presa singolarmente ed un **valore relativo** che dipende dalla **posizione** che occupa nel numero.

Consideriamo il numero 723. In tale numero la cifra 7 ha 7 come valore assoluto e 700 come valore relativo, la cifra 2 ha 2 come valore assoluto e 20 come valore relativo

Nel numero 777 i tre 7 hanno lo stesso **valore assoluto** in quanto cifre, ma hanno **valori relativi** diversi in quanto occupano posizioni diverse. Infatti il primo 7, da destra, rappresenta 7 **unità semplici**, il secondo 7 **decine** ed il terzo 7 **centinaia**.

Come abbiamo già detto, allo scopo di usare un numero limitato di vocaboli si sono raggruppati gli ordine a tre a tre, in gruppi chiamati **classi** come risulta sinteticamente dal seguente prospetto.



I segni $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ mediante i quali si rappresentano i primi dieci numeri naturali di tale sistema, si dicono **cifre arabiche** perché furono adoperate dagli arabi, che le avevano apprese dagli indiani. Le cifre arabiche furono introdotte in Europa nel 1200 dal matematico pisano **Leonardo Fibonacci**. In generale un qualsiasi numero naturale n può essere sempre scritto sotto la forma di un polinomio (somma di più addendi) ordinato secondo le potenze decrescenti del numero 10, cioè:

$$n=a\cdot 10^{m}+b\cdot 10^{m-1}+c\cdot 10^{m-2}+\cdots \qquad \text{dove } a,b,c,\cdots \text{ sono cifre}$$

1ª classe unità semplici	unità semplici decine semplici centinaia semplici	1 10 100
2ª classe unità di migliaia	unità di migliaia decine di migliaia centinaia di migliaia	1 000 10 000 100 000
3ª classe unità di milioni	unità di milioni decine di milioni centinaia di milioni	1 000 000 10 000 000 100 000 000
4ª classe unità di bilioni o miliardi	unità di bilioni decine di bilioni centinaia di bilioni	1 000 000 000 10 000 000 000 100 000 000 000
5ª classe unità di trilioni	unità di trilioni decine di trilioni centinaia di trilioni	1 000 000 000 000 10 000 000 000 000 100 000 000 000 000

Approfondimento sui sistemi di numerazione posizionali

- Il sistema di numerazione da noi usato è un sistema posizionale. Questo significa che le cifre che intervengono nella scrittura di un numero hanno valore diverso a seconda della loro posizione occupata. Dicesi **base x** di un sistema di numerazione posizionale il numero di cifre fra loro distinte necessarie per rappresentare tutti i numeri. Prendere $x=10$ (sistema di numerazione decimale, che è quello comunemente utilizzato) vuole dire che utilizziamo i seguenti dieci simboli $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ per scrivere un qualsiasi altro numero naturale.
- Un qualsiasi numero, in qualsiasi base, può essere scritto in forma polinomiale. Precisamente, se **x** è la base ($x=2$ sistema binario, $x=3$ sistema ternario, $x=10$ sistema decimale) di un sistema di numerazione, noi sappiamo che **x** sono le cifre disponibili per la scrittura di un qualsiasi numero naturale N e, quindi, il numero N scritto sotto forma di polinomio diventa:

$$N=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_o\cdot x^o$$

$$x=10 \quad \Rightarrow \quad N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_o\cdot 1$$

$$x=5 \quad \Rightarrow \quad N=a_n\cdot 5^n+a_{n-1}\cdot 5^{n-1}+\cdots+a_2\cdot 5^2+a_1\cdot 5+a_o$$

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad N=a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots+a_2\cdot 2^2+a_1\cdot 2+a_o$$

Nella pratica il numero N, già espresso in forma polinomiale, può essere scritto omettendo le potenze della base **x** ed i segni di addizione tra i termini del polinomio, scrivendo la successione dei coefficienti

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2}\cdots a_2\, a_1\, a_0$$

dove i coefficienti $a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2}\cdots a_2\, a_1\, a_0$ sono tutti minori di **x** ($a_n<x$)

Esempi: $2304_{(5)}=2\cdot 5^3+3\cdot 5^2+0\cdot 5^1+4\cdot 5^0=2\cdot 125+3\cdot 25+0\cdot 5+4\cdot 1=329_{(10)}$

$$1110_{(2)}=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^2+0\cdot 2^0=8+4+2+0=10_{(10)}$$

$x^0=$ primo ordine $\quad a_0=$ unità del primo ordine

$x^1=$ secondo ordine $\quad a_1=$ unità del secondo ordine

$x^2=$ terzo ordine $\quad a_2=$ unità del terzo ordine

- Nel sistema binaria le cifre che si utilizzano sono due: 0 e 1

Passaggio dal sistema binario al sistema decimale

$$1100101_{(2)}=1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=64+32+4+1=101_{(10)}$$

(Nel sistema decimale risulta $2^6=64$)

Passaggio dal sistema decimale al sistema binario

$$20_{(10)}=11101_{(2)}$$

Si ragiona così: Poiché $2^5=32$, la massima potenza del 2 contenuta nel 29 è 2^4 in quanto risulta:

$$29=16+13=2^4+\mathbf{13}$$

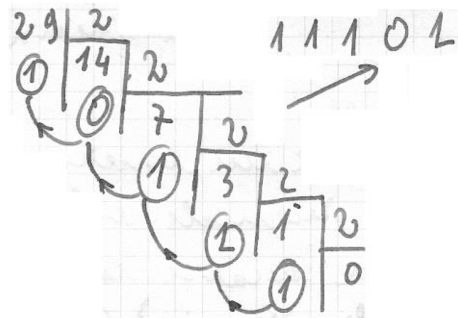
La massima potenza del 2 contenuta nel 13 è $2^3=8$ in quanto risulta:

$$13=8+5=2^3+5$$

La massima potenza del 2 contenuta nel 5 è $2^2=4$ in quanto risulta:

$$5=4+1=2^1+1$$

Quindi: $\quad 20_{(10)}=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=11101_{(2)}$



Si può procedere anche così:

(1) Si divide il numero (29) per 2. Il resto (1) rappresenta la cifra più a destra del numero binario, cioè rappresenta le unità del primo ordine.

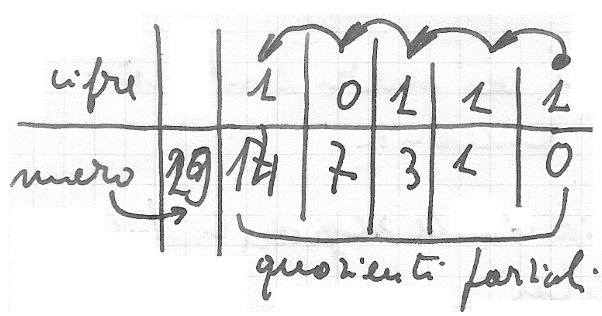
(2) Si divide il quoziente ottenuto (14) per 2 ed il nuovo resto (0) rappresenta la seconda cifra a destra del numero binario

(3) Si procede fino a quando otteniamo un quoziente zero ed un resto 1

(4) L'ultimo resto ottenuto (1) è la prima cifra (da sinistra) del numero scritto in forma binaria, cioè nel sistema di numerazione binario.

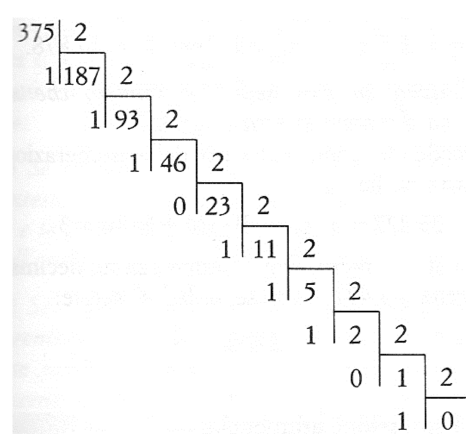
Con parole diverse: "Per trasformare un numero N dalla forma decimale alla forma binaria occorre effettuare una successione di divisioni del numero N per 2, del quoziente ottenuto per 2, e così di seguito sino ad ottenere un quoziente zero. L'ultimo resto seguito dai resti delle precedenti divisioni, in ordine ascendente (cioè da sinistra verso destra) costituisce il numero in forma binaria."

Il calcolo può essere effettuato utilizzando la seguente tabella:



Scrivere, in base 2, il numero che, nel sistema decimale, si scrive 375.

Otteniamo: $375_{(10)} = 101110111_{(2)}$



Operazioni fondamentali nel sistema binario

Premettiamo le seguenti tabelle elementari

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

$1-0=1$
$1-1=0$
$10-1=1$

Le quattro operazioni fondamentali, nel sistema binario, si eseguono con procedimenti simili a quelli imparati con i numeri naturali del sistema decimale.

- **Addizione**: Disposti i numeri in colonna, si sommano le unità dello stesso ordine tenendo presente che per ogni coppia di un'unità della stessa colonna si ha una unità dell'ordine immediatamente superiore (cioè a sinistra).

$$\begin{array}{rrrrrrl} & & 1 & 1 & 1 & 1 & + \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

		1	**1**		**1**	**1**

$1+1=10$ si scrive 0 e si riporta 1 nella colonna alla sinistra delle due cifre sommate; dovendo sommare 1 con 1 si scrive 0 e si riporta 1 nella colonna immediatamente alla sinistra delle cifre sommate.

Nella prima colonna (da destra verso sinistra) abbiamo tre 1, si scrive 1 e si riporta 1; nella seconda colonna abbiamo, col riporto, tre 1, si scrive 1 e si riporta 1; nella terza colonna abbiamo il numero 1 del riporto; nella quarta colonna abbiamo tre 1, si scrive 1 e si riporta 1; nella quinta colonna, col riporto, abbiamo tre 1, si scrive 1 e si riporta 1; nella sesta colonna abbiamo $1+1=10$. La somma è così calcolata.

Per i **riporti** ci si regola come nel sistema decimale, ricordando che una unità di un certo ordine vale due unità dell'ordine immediatamente inferiore, per cui:

(a) se una colonna contiene un **numero pari** di cifre 1, si scrive 0 e si riportano tanti 1 quanto vale la metà dei numeri 1 incolonnati.

(b) se una colonna contiene un **numero dispari** di cifre 1, si scrive 1 e si riportano tanti 1 quanto vale la metà dei numeri 1 incolonnati meno il numero 1 considerato.

Altro esempio

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\
 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & + \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}$$

		1	**1** **1**	**1**	**1** **1**	**1**	

Nella prima colonna abbiamo due 1, scriviamo 0 e riportiamo una cifra uguali ad 1; nella seconda colonna, col riporto, abbiamo quattro cifre uguali ad 1, scriviamo 0 e riportiamo due 1; nella terza colonna, col riporto, abbiamo tre 1, scriviamo 1 e riportiamo un 1; nella quarta colonna, col riporto abbiamo quattro 1, scriviamo zero e riportiamo due 1; nella quinta colonna, col riporto, abbiamo tre 1, scriviamo 1 e riportiamo 1; nella sesta colonna, col riporto, abbiamo due 1, otteniamo come somma 10.

- **Sottrazione**: Disposti i numeri in colonna, si sottraggono le unità dello stesso ordine tenendo presente che quando si deve sottrarre la cifra 1 dalla cifra 0, si **prende a prestito** una unità di ordine superiore che vale due di quella di ordine immediatamente inferiore.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & - \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} &
\end{array}$$

Nella prima colonna, da destra verso sinistra, abbiamo: $1-1=\mathbf{0}$; nella seconda colonna abbiamo: $0-1 \to 10-1=\mathbf{1}$ (la cifra 0 prende a prestito una unità di ordine superiore e diventa 10, nel contempo la prima cifra della terza colonna diventa 0); nella terza colonna abbiamo $0-1 \to 10-1=\mathbf{1}$)

- **Moltiplicazione**: Si procede come nel sistema decimale, tenendo presente la tabella della moltiplicazione e quella dell'addizione.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & = \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}$$

	1	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**			

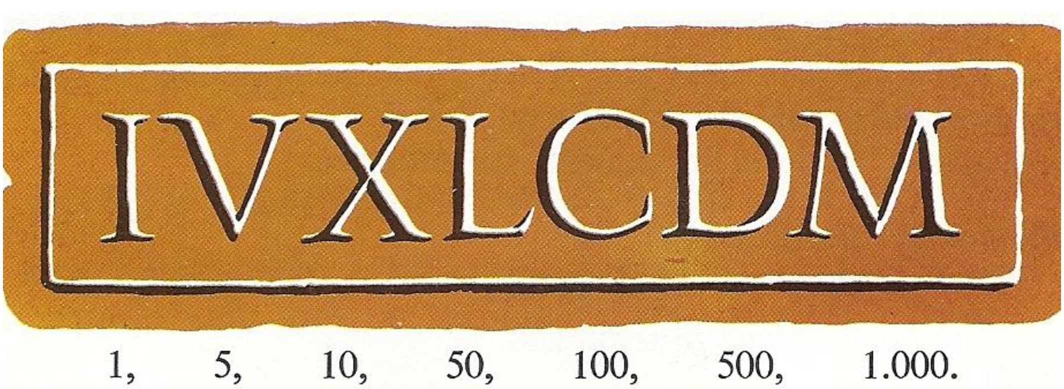
- **Divisione**: Si procede come nel sistema decimale, ricordando di eseguire la sottrazione secondo le regole della sottrazione fra due numeri scritti in forma binaria. Ogni cifra del quoziente o è 0 o è 1.

```
101101 | 101
101    |------
------ | 1001
000101
   101
   ---
   000
```

```
101011 | 110
110    |-----
------ | 111
010011
  110
 -----
 00111
   110
  ----
   001
```

Numerazione additiva romana

I Romani rappresentavano i numeri mediante i seguenti **sette simboli**, in corrispondenza dei quali abbiamo indicato, nella riga successiva i loro valori.



$I=1,\ V=5,\ X=10,\ L=50,\ C=100,\ D=500,\ M=1000$

La numerazione romana comprende:

(a) l'alfabeto, formato dalle cifre $\{I,V,X,L,C,D,M\}$

(b) la sintassi, formata dalle seguenti regole:

(1) Il **valore** del numero è la **somma** dei valori dei simboli che esso contiene.

(2) Le cifre dei numeri romani sono sempre scritte dal più grande al più piccolo (**ordine decrescente**) e letti da sinistra verso destra.

(3) Ogni cifra posta immediatamente a destra di una cifra maggiore o uguale, si aggiunge a quest'ultima.

Esempi: $XVI = 10+5+1 = 16 = \text{sedici}$ $XI = 10+1 = 11 = \textit{undici}$ $DC = 500+100 = 600 = \textit{seicento}$

$LXI = 50+10+1 = 61 = \textit{sessantuno}$ $XXVI = 10+10+5+1 = 26 = \text{ventisei}$

(4) Ogni cifra posta immediatamente a sinistra di una cifra maggiore o uguale, si sottrae a quest'ultima.

Esempi: $IX = 10-1 = 9 = \text{nove}$ $XL = 50-10 = 40 = \textit{quaranta}$

$CDX = 500-100+10 = 410 = \text{quattrocentodieci}$

$CMXI = 1000-100+10+1 = 911 = \text{novecentoundici}$

(5) Ogni cifra posta tra due cifre ad essa superiore, si sottrae a quella di destra

Esempi: $CIV = 100+5-1 = 104 = \text{centoquattro}$ $CDX = 500-100+10 = 410 = \text{quattrocentodieci}$

$CMXI = 1000-100+10+1 = 911 = \text{novecentoundici}$

(6) I simboli **V**, **L**, **D** non si raddoppiano mai ed i simboli **I**, **X**, **C**, **M** non si possono ripetere più di tre volte di seguito. Alla quarta, si deve sottrarre uno dal più vicino simbolo **V**, **L**, **D**.

Esempi: $III = 1+1+1 = 3$, ma per indicare il numero naturale 4 si scrive: $IV = 5-1 = 4$

$XXX = 10+10+10 = 30$, ma per indicare il numero naturale 40 si scrive: $XL = 50-10 = 40$

(7) Se si pone su una cifra o su un gruppo di cifre un trattino orizzontale, la cifra o il gruppo di cifre assumono un valore 1000 volte maggiore, ponendo due tratti paralleli, il valore della cifra o del gruppo di cifre diventa $1000 \cdot 1000 = 1000\,000 = 10^6$ volte maggiore.

Con parole diverse possiamo dire che per indicare la moltiplicazione per 1000 si ricorre alla sovrapposizione di un trattino sul valore da moltiplicare, mentre per indicare la moltiplicazione per $1000\,000$ si sovrappone un doppio trattino al valore da moltiplicare.

$\overline{V} = 5000$, $\overline{X} = 10000$, $\overline{C} = 100000$, $\overline{M} = 1000000$, $\overline{\overline{M}} = 1\,000\,000\,000$

Esempi: $\overline{V} = 5 \cdot 1000 = 5000$ $\overline{VI} = 6 \cdot 1000 = 6000$ $\overline{\overline{IV}} = 4 \cdot 1000000 = 4000000$

$\overline{XX}II = 20 \cdot 1000 + 2 = 20000 + 2 = 20002$ $\overline{C}LI = 100 \cdot 1000 + 50 + 1 = 100051$

La numerazione romana viene ancora usata per indicare le date nelle epigrafi, per distinguere pontefici e regnanti, per la numerazione dei capitoli di un libro ed in altri pochi casi.

Sistema di numerazione esadecimale

Un altro sistema di numerazione posizionale, utile nei calcolatori, è quello a **base sedici**, detto anche **sistema di numerazione esadecimale**. In questo sistema occorrono **sedici simboli** o **cifre** per rappresentare tutti i numeri e questi simboli sono:

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$$

Sedici unità del $1°$ ordine formano una unità del secondo ordine, sedici unità del $2°$ ordine formano una unità del terzo ordine, e così di seguito.

Una unità del $2°$ ordine = $16^1 = 16$ unità semplici

Una unità del $3°$ ordine = $16^2 = 256$ unità semplici

Una unità del $4°$ ordine = $16^3 = 4096$ unità semplici

Esempi: "**Scrivere nel sistema decimale, il numero che, in base sedici, si scrive** $3A1E$"

$3\cdot 16^3 + A\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + E = 3\cdot 16^3 + 10\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 14 = 14878 \qquad 3A1E_{(16)} = 14878_{(10)}$

"**Scrivere in base sedici, il numero che nel sistema decimale si scrive** 23427"

Procedendo come nella numerazione binaria, otteniamo: $23427 = 5\cdot 16^3 + B\cdot 16^2 + 8\cdot 16^1 + 3 = 5B83$

$$23427_{(10)} = 5B83_{(16)}$$

$$A_{(16)} = 10_{(10)},\ B_{(16)} = 11_{(10)},\ C_{(16)} = 12_{(10)},\ D_{(16)} = 13_{(10)},\ E_{(16)} = 14_{(10)},\ F_{(16)} = 15_{(10)}$$

Il concetto di potenza

La potenza di un numero è il prodotto di più fattori uguali a quel numero.

Il fattore che si ripete si chiama **base della potenza** ed il numero di fattori uguali prende il nome di **esponente della potenza** . $\qquad 3^5 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 \qquad a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a\cdot a}_{n\ volte}$

L'operazione mediante la quale si calcola la potenza di un numero prende il nome di **elevazione a potenza**.

- La potenza con esponente zero di un numero qualsiasi diverso da zero è sempre uguale ad 1 :

$$a^0 = 1 \quad \forall\ a \neq 0$$

- La prima potenza (o potenza con esponente 1) di un qualsiasi numero è uguale al numero stesso

$$a^1 = a$$

Proprietà delle potenze

- **Il prodotto di due o più potenze aventi la stessa base è la potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti** $\boxed{a^n \cdot a^p \cdot a^q = a^{n+p+q}}$
- **Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è la potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti** $\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$
- **La potenza di una potenza è la potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti** $\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$
- **La potenza di un prodotto di fattori è uguale al prodotto delle potenze con uguale esponente dei singoli fattori** $\boxed{(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n}$
- **La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze con uguale esponente del dividendo e del divisore** $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

La nozione di radice aritmetica

- Si dice **radice quadrata** di un numero a il numero x che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato a. . In simboli abbiamo : $\sqrt{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a \qquad \sqrt{9} = 3$ in quanto $3^2 = 9$
- Si dice **radice cubica** di un numero a il numero x che elevato al cubo dà come risultato il numero dato **a**. . In simboli abbiamo : $\sqrt[3]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = a \qquad \sqrt[3]{125} = 5$ in quanto $5^3 = 125$
- Si dice **radice quarta** di un numero a il numero x che elevato alla quarta potenza dà come risultato il numero dato a. . In simboli abbiamo : $\sqrt[4]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = a$
- Si dice **radice ennesima** di un numero a il numero x che elevato alla potenza ennesima dà come risultato il numero dato a. . In simboli abbiamo : $\sqrt[n]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a$

Multipli e divisori di un numero

Si dice che il numero a è **divisore** del numero b (diverso da zero) se il resto della divisione del numero a per il numero b è uguale a zero . Il numero a si dice che è **multiplo** del numero b che a sua volta si dice **sottomultiplo** o **divisore** del numero a .

Definizione : dato il numero naturale a , tutti i numeri naturali b per i quali risulta che il quoziente $\frac{a}{b} = k \in N$ è un numero naturale , si chiamano **divisori del numero a** .

$\frac{a}{b} = k \in N \Rightarrow a = k \cdot b$. a è **multiplo** del numero b secondo il numero k , b è **sottomultiplo** del numero a secondo il numero k o **divisore** numero a .

a = **dividendo** , b = **divisore** , k = **quoziente**

Criteri di divisibilità per i numeri naturali

01) Criterio di divisibilità per 2 : Un numero è divisibile per 2 se la sua ultima cifra è pari , cioè quando il numero termina con una delle seguenti cifre : 0 , 2 , 4 , 6 , 8 .

02) Criterio di divisibilità per 3 : Un numero è divisibile per **3** se la somma delle sue cifre è divisibile per **3**

03) Criterio di divisibilità per 5: Un numero è divisibile per **5** se termina con **0** o con **5** .

04) **Criterio di divisibilità per 9**: Un numero è divisibile per **9** se la somma delle sue cifre è divisibile per **9**

05) Criterio di divisibilità per 11 : Un numero è divisibile per **11** se è divisibile per **11** la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari .

06) *Criterio di divisibilità per 7* :

a) Un numero è divisibile per 7 , se è divisibile per 7 la somma delle sue decine e del quintuplo della sua cifra delle unità .

$\boxed{n = 693}$; 69 = numero delle decine del numero 693 [1]

$69 + 5 \cdot 3 = 69 + 15 = 84$; $8 + 5 \cdot 4 = 8 + 20 = 28$; $\frac{28}{7} = 4$

$\boxed{n = 15939}$; $1593 + 5 \cdot 9 = 1593 + 45 = 1638$; $163 + 5 \cdot 8 = 163 + 40 = 203$;

$20 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$; $\frac{35}{7} = 5$ $\boxed{n = 15939}$ $1593 + 5 \cdot 9 = 1593 + 45 = 1638$

$163 + 5 \cdot 8 = 163 + 40 = 203$ $20 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$ $35 : 7 = 5$

b) Un numero è divisibile per 7, se è divisibile per 7 la differenza fra il numero sue decine (numero scritto senza la cifra delle unità) **ed il doppio della sua cifra delle unità.**

$\boxed{n = 693}$; $69 - 2 \cdot 3 = 63$; $\frac{63}{7} = 9$; $\boxed{n = 15939}$ $1593 - 2 \cdot 9 = 1593 - 18 = 1575$;

$157 - 2 \cdot 5 = 157 - 10 = 147$; $14 - 2 \cdot 7 = 14 - 14 = 0$; $\frac{0}{7} = 0$

$\boxed{n = 15939}$ $1593 - 2 \cdot 9 = 1593 - 18 = 1575$ $157 - 2 \cdot 5 = 157 - 10 = 147$ $14 - 14 = 0$

[1] Per scrivere le decine di un numero basta scrivere lo stesso numero privato della cifra che rappresenta le unità

c) Terzo criterio di divisibilità per 7

● Del numero che si vuole esaminare, si elimini l'ultima cifra (cifra dell'unità) e si sottragga il doppio di essa dal numero formato dalle cifre rimaste: il numero così ottenuto è o non è multiplo di 7 assieme al precedente, ed è più piccolo in quanto ha una cifra in meno

● ripetendo il procedimento si ottengono numeri sempre più piccoli con la stessa proprietà di essere o non essere multipli di 7 assieme al numero di partenza.

● si ha la divisibilità per 7 se l'ultimo numero è 0, oppure 7 oppure 14.

Applichiamo il procedimento ai due numeri 276752 **e** 276753**.**

Il numero 276752 **è divisibile per 7 in quanto l'ultimo numero ottenuto è il 14 che è multiplo del 7. Il numero** 276753 **non è divisibile per 7 in quanto l'ultimo numero ottenuto è il 9 che non è multiplo del 7.**

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 7 & 6 & 7 & 5 & \cancel{2} \\
 & & & & -4 & \\
\hline
2 & 7 & 6 & 7 & \cancel{1} & \\
 & & & -2 & & \\
\hline
2 & 7 & 6 & \cancel{5} & & \\
 & -1 & 0 & & & \\
\hline
2 & 6 & \cancel{6} & & & \\
-1 & 2 & & & & \\
\hline
1 & 4 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
2 & 7 & 6 & 7 & 5 & \cancel{3} \\
 & & & & -6 & \\
\hline
2 & 7 & 6 & 6 & \cancel{9} & \\
 & & -1 & 8 & & \\
\hline
2 & 7 & 4 & \cancel{8} & & \\
 & -1 & 6 & & & \\
\hline
2 & 5 & \cancel{8} & & & \\
-1 & 6 & & & & \\
\hline
 & 9 & & & &
\end{array}$$

07) ***Criterio di divisibilità per 13*** :

Un numero è divisibile per 13 **se è divisibile per** 13 **la somma del numero che esprime le sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del quadruplo della sua cifra dell'unità** .

$\boxed{n = 27027}$ $\quad 2702 + 4 \cdot 7 = 2730 \quad 273 + 4 \cdot 0 = 273 \quad 27 + 4 \cdot 3 = 27 + 12 = 30 \quad 39 : 13 = 3$

08) ***Criterio di divisibilità per 17*** :

a) Un numero è divisibile per 17 **se è divisibile per** 17 **la somma del doppio delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del settuplo della sua cifra dell'unità .**

$\boxed{n = 9945}$ $\quad 2 \cdot 994 + 7 \cdot 5 = 1988 + 35 = 2023 \quad : \quad 2 \cdot 202 + 7 \cdot 3 = 404 + 21 = 425$

$2 \cdot 42 + 7 \cdot 5 = 84 + 35 = 119 \qquad 2 \cdot 11 + 63 = 22 + 63 = 85 \qquad 85 : 17 = 5$

b) Un numero è divisibile per 17 **se è divisibile per** 17 **la differenza tra il numero che esprime le sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **ed il quintuplo della cifra dell'unità .** $\boxed{n = 9945}$ $\quad 994 - 5 \cdot 5 = 994 - 25 = 969 \; ; \; 96 - 5 \cdot 9 = 96 - 45 = 51 \; ; \; 51 : 17 = 3$

09) ***Criterio di divisibilità per*** 19 :

a) Un numero è divisibile per 19 **se è divisibile per** 19 **la somma del numero delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del doppio della sua cifra delle unità .** $\boxed{n = 4864}$ $486 + 2 \cdot 4 = 486 + 8 = 494$ $49 + 8 = 57$ $57 : 19 = 3$

10) ***Criterio di divisibilità per*** 19 :

a) Un numero è divisibile per 23 **se è divisibile per** 23 **la somma del numero delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del settuplo della sua cifra delle unità .** $\boxed{n = 5888}$ $588 + 7 \cdot 8 = 644$ $64 + 7 \cdot 4 = 64 + 28 = 92$ $92 : 23 = 4$

Numeri primi e numeri composti

- Un numero maggiore di 1 si dice **primo** se è divisibile soltanto per se stesso e per l'unità .

- un numero non primo , cioè un numero che ammette altri divisori oltre se stesso e l'unità , si dice **numero composto** .

Scomposizione di un numero composto in fattori primi

Scomporre il numero composto a in fattori primi significa trovare tutti i numeri primi il cui prodotto è uguale al numero a .

$$\begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Principio fondamentale dell'aritmetica

Un **numero naturale composto** si può decomporre in fattori primi in una sola maniera .

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

- Il **massimo comune divisore** **(M.C.D.)** di due o più numeri è il maggiore dei loro divisori comuni .
- Per calcolare il **M.C.D.** di due o più numeri , col **metodo della scomposizione in fattori primi** , si decompongono i numeri dati in fattori primi e poi si moltiplicano fra loro i fattori primi comuni , presi una sola volta , con l'esponente più piccolo .

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1188 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$ $\qquad M.C.D.(540,840,1188) = 2^2 \cdot 3 = 12$

- Due numeri si dicono **primi fra loro** quando hanno come **M.C.D.** l'unità .

- Il **minimo comune multiplo** **(m.c.m.)** di due o più numeri è il più piccolo dei multipli comuni diversi da zero .
- Per calcolare il **m.c.m.** tra due o più numeri , col metodo della scomposizione in fattori primi , si decompongono in fattori primi i numeri dati e poi si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta , ciascuno col massimo esponente .

$$220=2^2\cdot5\cdot11 \quad , \quad 224=2^5\cdot7 \quad , \quad 360=2^3\cdot3^2\cdot5 \quad , \quad m.c.m.(220,224,360)=2^5\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11=110\cdot880$$

Le frazioni

- **Unità frazionaria** è una qualsiasi delle parti uguali in cui è stata divisa una grandezza considerata come **unità**.
- **Frazione** è l'insieme di più unità frazionarie .
- Il simbolo che rappresenta una frazione è costituito da due numeri interi separati da un tratto orizzontale detto **linea di frazione** . Il numero posto al di sotto della linea di frazione si chiama **denominatore** ed indica in quante parti uguali è stata divisa l'unità. Il numero posto al di sopra della linea di frazione si chiama **numeratore** ed indica quante di queste parti uguali sono state considerate. Il numeratore ed il denominatore si dicono **termini della frazione** .
- *Una frazione rappresenta il quoziente tra due numeri interi.*
- Una **frazione** di dice **propria** se il numeratore è minore del denominatore . Una frazione propria è minore dell'unità .
- Una frazione si dice **apparente** se il numeratore è multiplo del denominatore. Uuna frazione apparente rappresenta una o più unità intere.
- Una frazione di dice **impropria** se il numeratore è maggiore (ma non multiplo) del denominatore. Una frazione impropria rappresenta un numero maggiore dell'unità .
- In aritmetica per **numero misto** si intende la somma di un numero intero e di una frazione propria . Per passare da una frazione impropria ad un numero misto si procede come segue :

a) si divide il numeratore della frazione per il suo denominatore .

b) siano **Q**, **R**, **D** rispettivamente il **quoziente**, il **resto**, il **denominatore** della frazione considerata:

Risulta : $\frac{N}{D}=Q+\frac{R}{D}$ $\quad \begin{array}{c|c} N & D \\ \hline R & Q \end{array}$ $\quad \frac{8}{3}=2+\frac{2}{3} \quad Q=2 \quad R=3 \quad D=3$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \cline{2-2} 6 & 2 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Proprietà invariantiva per le frazioni

Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente a quella data.

- **Semplificare una frazione** significa trasformarla in un'altra equivalente avente numeratore e denominatore più piccoli . La semplificazione si effettua dividendo numeratore e denominatore della data frazione per un loro divisore comune
- Una frazione si dice **irriducibile** o **ridotta ai minimi termini** quando il suo numeratore ed il suo denominatore sono primi fra loro . Per **ridurre ai minimi termini** una frazione basta dividere il suo numeratore ed il suo denominatore per il loro **M.C.D.**

I numeri decimali e le loro frazioni generatrici

La divisione tra due numeri interi può dare luogo ad un **numero decimale limitato** o ad un **numero decimale periodico.** In un **numero decimale**, il numero formato dalle cifre alla sinistra della virgola si chiama **parte intera** del numero decimale, quello formato dalle cifre a destra della virgola si chiama **parte decimale**. Quindi dicesi **numero decimale** un qualsiasi numero formato da una parte intera e da una parte decimale.

Si chiamano **frazioni decimali** quelle frazioni che hanno come denominatore una potenza del 10 . Per contrapposto , si chiamano **frazioni ordinarie** tutte le frazioni non decimali .

Sono frazioni decimali: $\frac{13}{10}$, $\frac{721}{100}$, $\frac{53427}{1000}$

I simboli 23,5647 , 0,2305 , 6784,235 rappresentano **numeri decimali** . Le cifre che precedono (seguono) la virgola rappresentano la **parte intera** (**decimale**) del numero decimale .

Regola: Per scrivere un numero decimale sotto forma di frazione decimale , si scrive la frazione che ha per numeratore il numero naturale che si ottiene sopprimendo la virgola del numero decimale dato e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero. $23{,}45=\frac{2345}{100}$, $0{,}047=\frac{47}{1000}$, $567{,}2346=\frac{5672346}{10000}$

Regola: Una frazione decimale può essere trasformata in un numero decimale trascrivendo il numeratore della frazione e separando con una virgola . a partire da destra , tante cifre quanti sono gli zeri del denominatore, aggiungendo , alla sinistra del numeratore , uno o più zeri quando il numero delle cifre del numeratore è inferiore al numero degli zeri del denominatore .

$$\frac{735}{10} = 73{,}5 \quad , \quad \frac{32}{1000} = 0{,}032 \quad , \quad \frac{5}{10000} = 0{,}0005$$

N.B. Il numero delle cifre decimali deve coincidere col numero degli zeri presenti nel denominatore della frazione decimale.

La notazione scientifica di un numero decimale

Ogni numero può essere scritto come il prodotto di un numero decimale compreso tra 1 e 10 e di una opportuna potenza del 10 .

Si dice pure che il numero è scritto in **forma esponenziale** o con **notazione scientifica .**

Di solito le calcolatrici tascabili utilizzano la **notazione scientifica** . Esempi

a) $300 = 3 \cdot 10^2 = 3E02$ nella calcolatrice con notazione scientifica il simbolo 10^2 diventa $E02$

b) $1250 = 1{,}25 \cdot 10^3 = 1{,}25E03$ (10^3 diventa $E03$)

c) $27561 = 2{,}7561 \cdot 10^4 = 2{,}7561E04$ (10^4 diventa $E04$)

d) $0{,}002346 = 2{,}346 \cdot 10^{-3} = 2{,}346E-03$ (10^{-3} diventa $E-03$)

- Per numeri non troppo grandi questa forma di scrittura non è conveniente in quanto si userebbero più simboli di quelli presenti nel numero ; diventa vantaggiosa quando si hanno numeri con molte cifre .

Numeri decimali periodici

Dicesi **numero decimale periodico** ogni numero formato da una parte intera (che può anche essere 0) seguita da infinite cifre decimali che, da un certo punto in poi, si ripetono a gruppi sempre nello stesso ordine. La cifre o il gruppo di cifre che si ripete dicesi **periodo**. Il periodo può cominciare, oppure no, subito dopo la virgola; nel primo caso il numero dicesi **periodico semplice**, nel secondo caso dicesi **periodico misto.** In un numero periodico misto il gruppo delle cifre decimali che precede il periodo si chiama **antiperiodo**.

I numeri decimali periodici si rappresentano scrivendo una sola volta il periodo e soprassegnandolo, oppure mettendolo entro due parentesi rotonde.

$$8{,}2727272727\cdots = 8{,}\overline{27} = 8{,}(27) \qquad 23{,}856\overline{32} = 23{,}856(32)$$

Una frazione si dice riducibile quando il suo quoziente è un numero decimale limitato. Una frazione si dice irriducibile quando il suo quoziente è un numero decimale illimitato.

Teorema N°1 **Una frazione irriducibile il cui denominatore non contiene come fattori primi né 2 né 5 , è trasformabile in un numero decimale periodico semplice.**

Teorema N°2 **Una frazione irriducibile il cui denominatore contiene come fattori primi il 2 o il 5 anche qualche altro fattore primo, è trasformabile in un numero decimale periodico misto.**

Teorema N°3 **Non esiste alcuna frazione dalla quale derivi un numero decimale illimitato periodico con periodo 9 .**

Esempio $1,\overline{9} = \frac{19-1}{9} = \frac{18}{9} = 2$ $\quad 1,2\overline{9} = \frac{129-12}{90} = \frac{129-12}{90} = \frac{117}{90} = \frac{13}{10} = 1,3$

Questo significa che i simboli $1,3$ **e** $1,2\overline{9}$ **rappresentano lo stesso numero , cioè :** $1,3 = 1,2\overline{9}$

Definizione **Chiamasi** **frazione generatrice** **di un numero decimale periodico , quella frazione tale che il quoziente del suo numeratore per il suo denominatore è il numero periodico dato.**

Teorema N°4 **La frazione generatrice di un** **numero periodico semplice** è una frazione che ha per numeratore la differenza fra il numero stesso privato della virgola (e con il periodo scritto una sola volta) ed il numero formato dalle cifre della parte intera , e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

$$5,\overline{21} = \frac{521-5}{99} = \frac{516}{99} = \frac{172}{33} \qquad 0,\overline{37} = \frac{37}{99}$$

Teorema N°5 La frazione generatrice di un **numero decimale periodico misto** è una frazione che ha per numeratore la differenza fra il numero stesso privato della virgola (e con il periodo scritto una sola volta) ed il numero formato dalle cifre della parte intera seguita da quelle dell'antiperiodo, e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

$$2,3\overline{41} = 2,3(41) = \frac{2341-23}{990} = \frac{1159}{495} \qquad 0,18(3) = 0,18\overline{3} = \frac{183-18}{900} = \frac{165}{900} = \frac{11}{60}$$

$$0,253\overline{6} = 0,253(6) = \frac{2536-253}{9000} = \frac{2283}{9000} = \frac{761}{3000}$$

OSSERVAZIONE << Come si fa a stabilire se una fraziona dà luogo ad un numero decimale finito , ad un numero decimale periodico semplice, ad un numero decimale periodico misto ? >>

01) Una frazione , ridotta ai minimi termini , è trasformabile in un **numero decimale finito** se il suo denominatore ha come fattori potenze del 2 o potenze del 5 o potenze di entrambi i fattori .

$$\frac{7}{5} = 1,4 \qquad \frac{13}{4} = 3,25 \qquad \frac{13}{20} = 0,65$$

02) Una frazione ridotta ai minimi termini si trasforma in un numero decimale periodico semplice se il denominatore non contiene i fattori 2 e 5 .

$$\frac{41}{11} = 3,7272727272\cdots = 3,\overline{72} = 3,(72)$$

03) Una frazione ridotta ai minimi termini si trasforma in un numero decimale periodico misto se il suo denominatore , assieme ad eventuali altri fattori , contiene come fattori potenze del 2 e del 5 , oppure di uno solo di essi.

$$\frac{41}{44} = \frac{41}{2^2 \cdot 11} = 0,93181818\cdots = 0,93\overline{18} = 0,93(18)$$

Operazioni con numeri decimali periodici

Per eseguire le operazioni con numeri decimali periodici , basta sostituire ad essi le corrispondenti frazioni generatrici ed eseguire i calcoli secondo le regole note .

Operazioni con le frazioni

- La **somma** (**differenza**) di due frazioni aventi lo stesso denominatore è la frazione avente per numeratore la **somma** (**differenza**) dei numeratori e per denominatore lo stesso denominatore.
- Per **addizionare** (**sottrarre**) due frazioni aventi denominatori diversi, si riducono prima allo stesso minimo comune denominatore e poi si applica la regola per l'addizione (sottrazione) di frazioni aventi lo stesso denominatore.
- Il **prodotto** di due o più frazioni è la frazione avente come numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori .
- Per effettuare la **divisone** di due frazione basta **moltiplicare** la prima frazione per l'inversa della seconda .
- Per **elevare a potenza** una frazione basta elevare a quella potenza sia il numeratore che il denominatore della frazione .
- Una frazione si dice a **termini frazionari** se il suo numeratore o il suo denominatore o entrambi sono delle frazioni .

- Una **frazione a termini frazionari** è uguale al prodotto del numeratore per il reciproco del denominatore oppure è uguale ad una frazione che ha come numeratore il prodotto dei termini estremi e come denominatore il prodotto dei termini medi .

Esempi

$$\boxed{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{2}:\frac{9}{8}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{7}+\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{90+280+105-84}{210}=\frac{391}{210}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\right):\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right):\frac{3}{4}=\frac{6+5}{10}:\frac{2}{3}+\frac{9-8}{12}:\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{11}{10}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3}=\frac{33}{20}+\frac{1}{9}=\frac{297+20}{180}=\frac{317}{180}$$

$$\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{9}{8}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{8}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{10}{9}=\frac{8}{27}\cdot\frac{9}{10}+\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}-\frac{9}{25}\cdot\frac{10}{9}=\frac{4}{15}+\frac{3}{10}-\frac{2}{5}=\frac{8+9-12}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}}$$

Rapporti e proporzioni fra numeri

Si dice **rapporto** fra i numeri **a** e **b**, con **b** diverso da zero, il **quoziente** che si ottiene dividendo il numero **a** per il numero **b**.

Il rapporto fra i numeri **a** e **b** viene indicato con una delle due seguenti scritture:

$$a:b \qquad \frac{a}{b} \qquad b\neq 0$$

Definizione: 4 numeri **a, b, c, d** **formano una proporzione**, se il rapporto tra il primo ed il secondo numero è uguale al rapporto fra il terzo ed il quarto numero. In simboli abbiamo :

$$a:b=c:d \qquad \text{oppure} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Lessico

1) I numeri **a, b, c, d** sono i **termini della proporzione**

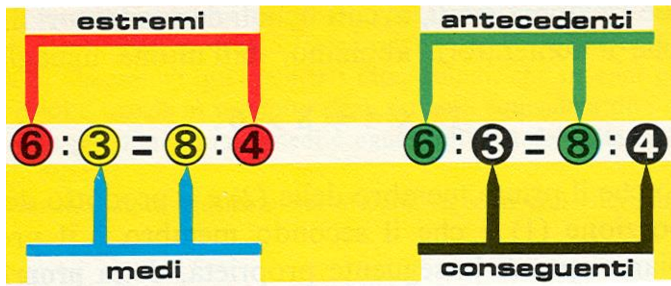
2) **a** e **b** sono gli << **estremi** >> della proporzione, **b** e **c** sono i << **medi** >> della proporzione , **a** e **c** sono gli << **antecedenti** >> della proporzione, **b** e **d** sono i << **conseguenti** >> della proporzione.

3) Se tra i numeri **a, b, c** sussiste la seguente proporzione $a:b=b:c$ allora il numero **b** prende il nome di **medio proporzionale** fra i numeri **a** e **c** , mentre il numero **c** prende il nome di

terzo proporzionale dopo i numeri **a** e **b**. Una **proporzione** si dice **continua** quando i suoi medi sono uguali.

I numeri **6, 3, 8, 4** formano una proporzione in quanto risulta: $6:3=8:4$

Il numero **6** è medio proporzionale tra i numeri **12** e **3** in quanto risulta: $12:6=6:3$



Teorema fondamentale delle proporzioni fra numeri

In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$6:3=8:4 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot 4=8\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 24=24$$

Altre proprietà delle proporzioni fra numeri

La proporzione $a:b=c:d$ fra i numeri **a, b, c, d** gode delle seguenti proprietà formali :

1) In ogni proporzione fra numeri è lecito scambiare ogni antecedente col proprio conseguente (proprietà dell'invertendo)

$$a:b=c:d \quad \Leftrightarrow \quad b:a=d:c$$

2) Se 4 numeri a, b, c, d sono in proporzione , allora si possono scambiare i medi tra loro o gli estremi tra loro (proprietà del permutando)

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad a:c=b:d \quad \wedge \quad d:b=c:a$$

3) In ogni proporzione fra numeri, la somma del primo e del secondo termine sta al primo (o al secondo) termine, come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine.

(proprietà del componendo)

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad (a+b):a=(c+d):C \quad \wedge \quad (a+b):b=(c+d):d$$

4) Se in una proporzione il primo termine è maggiore del secondo (e quindi il terzo è maggiore del quarto), la differenza fra il primo ed il secondo termine sta al primo (o al secondo) termine come la differenza tra il terzo ed il quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine.

(proprietà dello scomponendo o del dividendo)

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad (a-b):a=(c-d):c \quad \wedge \quad (a-b):b=(c-d):d$$

5) In ogni serie di rapporti uguali tra numeri, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente sta al proprio conseguente .

$$a:b=c:d=e:f \qquad \Rightarrow \qquad (a+c+e):(b+d+f)=c:d$$

$a:b=c:d$	$a \times d = b \times c$	proprietà fondamentale
$a:b=c:d$	$b:a=d:c$	invertire
$a:b=c:d$	$a:c=b:d$	permutare dei medi
$a:b=c:d$	$d:b=c:a$	permutare degli estremi

$$a:b=c:d \qquad \left.\begin{array}{l}(a+b):a=(c+d):c\\(a+b):b=(c+d):d\end{array}\right\} \text{ comporre}$$

$$\begin{array}{l}a:b=c:d\\ \text{essendo } a>b\\ \text{e quindi } c>d\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}(a-b):a=(c-d):c\\(a-b):b=(c-d):d\\ \end{array}\right\} \text{ scomporre}$$

$$a:b=c:d \qquad \left.\begin{array}{l}(a+c):(b+d)=a:b\\(a+c):(b+d)=c:d\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{comporre degli antecedent}\\ \text{e dei conseguenti}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}a:b=c:d\\ \text{essendo } a>c\\ \text{e quindi } b>d\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}(a-c):(b-d)=a:b\\(a-c):(b-d)=c:d\\ \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{scomporre degli antecedent}\\ \text{e dei conseguenti}\end{array}$$

Calcolo del termine incognito di una proporzione

Regola: *In ogni proporzione un estremo incognito è uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo*.

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $12:8=3:x$ $\quad x=\frac{8\cdot 3}{12}=2$

Regola: *In ogni proporzione un medio incognito è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio*.

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $15:5=x:3$ $\quad x=\frac{15\cdot 3}{5}=9$

Regola: *In ogni proporzione continua il medio incognito è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi*.

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $12:x=x:3$ $\quad x=\sqrt{12\cdot 3}=\sqrt{36}=6$

Problemi del tre semplice

Si chiamano problemi del **tre semplice** quei problemi nei quali intervengono due grandezze direttamente o inversamente proporzionali. Conosciamo una coppia di valori corrispondenti delle due grandezze (ad esempio **X** ed **Y**) ed un altro valore di una di esse (ad esempio di **X**); vogliamo calcolare il valore della grandezza **Y** che corrisponde alla grandezza **X**.

Osservazione: Si chiamano **problemi del tre semplice** in quanto noti tre valori vogliamo calcolarne un quarto. La denominazione **semplice** deriva dal fatto che in questi problemi intervengono soltanto **due grandezze**. I problemi nei quali sono presenti più di due grandezze prendono il nome di **problemi del tre composto**.

Problema del tre semplice quando le grandezze sono direttamente proporzionali.

Un rubinetto versa in 4 ore 160 litri di acqua. Quanti litri di acqua verserà in 7 ore?

Per la risoluzione del problema possiamo utilizzare il seguente schema convenzionale, nel quale le frecce aventi lo stesso orientamento ci dicono che le grandezze presenti nel problema sono direttamente proporzionali.

Tempo (ore)	*Litri versati*
4 ↓	160 ↓
7	x

$$4 : 7 = 160 : x \qquad x = \frac{160 \times 7}{4} = 280 .$$

Il rubinetto verserà in 7 ore, 280 litri di acqua.

Problema del tre semplice quando le grandezze sono inversamente proporzionali.

Per compiere un determinato lavoro 10 operai impiegano 18 giorni; quanti giorni impiegheranno 15 operai aventi la stessa capacità lavorativa per compiere lo stesso lavoro?

Per la risoluzione del problema possiamo utilizzare il seguente schema convenzionale, nel quale le frecce aventi orientamento opposto ci dicono che le grandezze presenti nel problema sono inversamente proporzionali.

Operai	*Tempo* (giorni)
10	18
15	x

$$10 : 15 = x : 18$$

$$x = \frac{10 \times 18}{15} = 12\,.$$

Concludiamo così che 15 operai impiegheranno **12** giorni per compiere il lavoro.