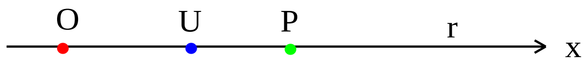
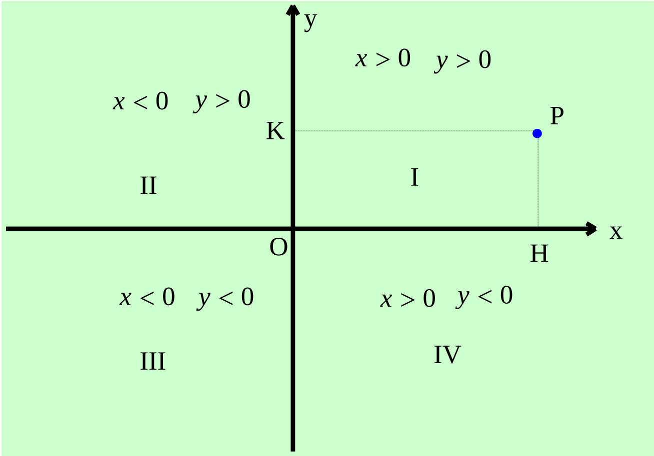
Coordinate Cartesiane

Su di una retta **r** consideriamo un punto O, detto **origine**, un **verso positivo** indicato con una freccia ed un **segmento unitario** OU. In questo caso la retta **r** dicesi **asse delle ascisse** e viene indicata col simbolo **x** e di solito è disegnata in **posizione orizzontale**.



Ogni punto $P \in r$ individua il segmento OP. Noi sappiamo che $\frac{OP}{OU}$ è un numero reale che esprime la misura del segmento OP rispetto ad OU. Adesso poniamo: $\frac{OP}{OU} = x$ e conveniamo di considerare **x positivo** (**negativo**) se P si trova alla **destra** (**sinistra**) di O. Il numero reale relativo **x** dicesi **ascissa del punto P**. Da quanto abbiamo detto è evidente che esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali relativi **R** ed i punti **P** di una retta **r** sulla quale abbiamo fissato un punto origine **O**, un verso positivo ed una unità di misura per i segmenti. Adesso consideriamo due rette orientate **x** ed **y** fra loro perpendicolari , La retta x è orientata da sinistra verso destra , la retta y dal basso verso l'alto . Sia O il punto comune alle rette x ed y . Sia **P** un punto qualsiasi del piano. Sia **H** la proiezione ortogonale di P sulla retta x, **K** la proiezione ortogonale di P sulla retta y. Sia $\frac{OH}{OU} = x$ l'ascissa del punto H rispetto alla retta orientata x, sia $\frac{OK}{OU} = y$ l'ascissa del punto K rispetto alla retta orientata y , I numeri reali relativi **x** ed **y** si dicono le **coordinate cartesiane** del punto P. Si scrive $P(x,y)$ e si legge <<**P di coordinate x ed y**>>. x è detta **ascissa** del punto P, y è detta **ordinata** del punto P. La retta orientata **x** è detta **asse delle ascisse** o **asse delle x** , la retta orientata y è detta **asse delle ordinate** o **asse delle y** . Le due rette x ed y costituiscono un **sistema di assi cartesiani ortogonali** . Il punto **O** è detto **origine degli assi cartesiani** .Da quanto detto si deduce che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra le coppie ordinate di numeri reali relativi ed i punti P di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani . Le rette **x** ed **y** dividono il piano in 4 parti ciascuna delle quali prende il nome di **quadrante** . Le rette x ed y e le loro due bisettrici dividono il piano in **8** parti , ciascuna delle quali prende il nome di **ottante**.



La distanza tra due punti

La distanza tra i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ si calcola applicando la seguente formula:

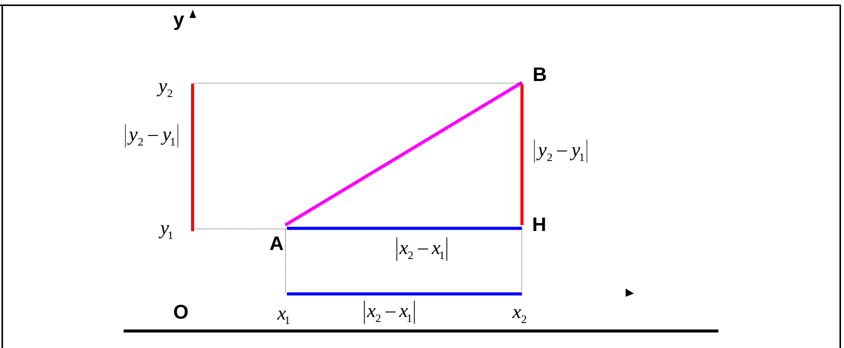
$$d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dimostrazione: Basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB.

$$d(A,B) = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$A(-1;2) \ , \ B(-5;3) \qquad d(A,B) = \sqrt{(-5+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$AH = |x_2 - x_1|$ _ $BH = |y_2 - y_1|$

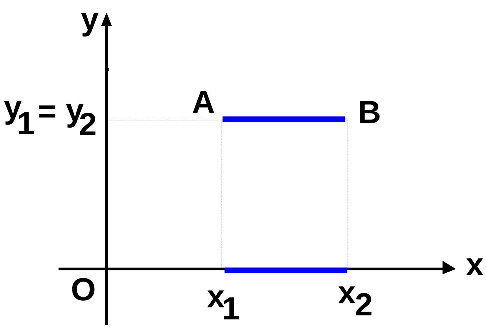


Osservazione: A e B hanno la stessa ordinata $(y_1 = y_2)$ allora il segmento AB è **parallelo** all'asse delle ascisse.

In questo caso abbiamo: $\boxed{d(A,B) = |x_2 - x_1|}$

Possiamo anche dire che:

d(A,B) = **ascissa maggiore - ascissa minore**

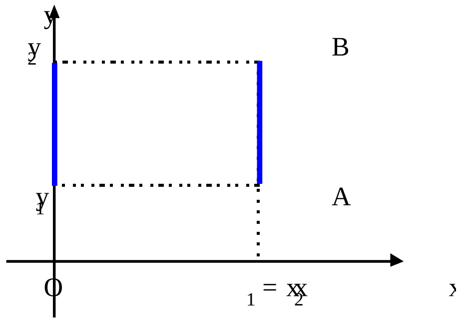


Se i punti **A** e **B** hanno la stessa ascissa $(x_1 = x_2)$ allora il segmento AB è **parallelo** all'asse delle ordinate.

In questo caso abbiamo: $d(A,B)=|y_2 - y_1|$

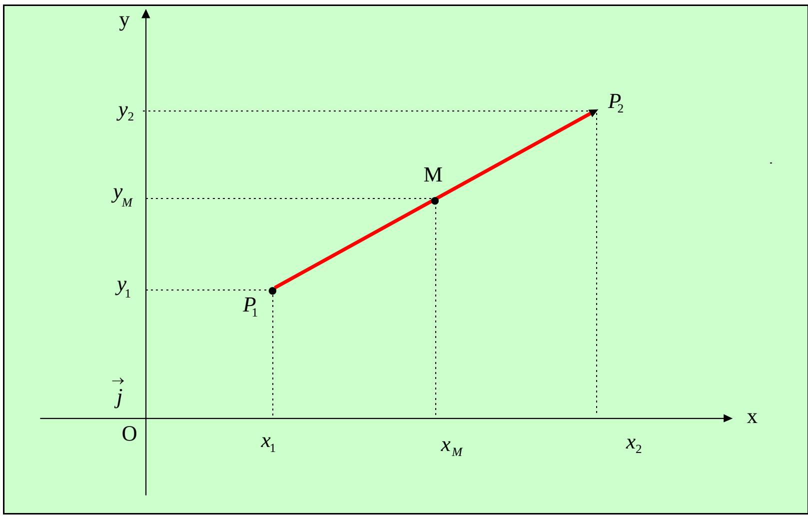
Possiamo anche dire che:

d(A,B) = **ordinata maggiore - ordinata minore**



Le coordinate del punto medio di un segmento

Per calcolare le coordinate del punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ basta applicare la seguente formula:

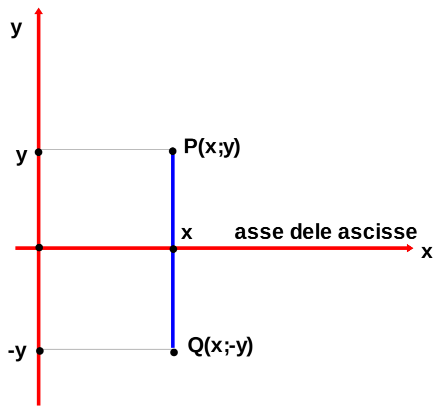


$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Punti simmetrici rispetto agli assi cartesiani e rispetto all'origine

Il punto $Q(x_Q; y_Q)$ è **simmetrico del punto** $P(x_P, y_P)$ **rispetto all'asse delle ascisse** se ha la stessa ascissa di P ma ordinata opposta, cioè se:

$$\begin{cases} x_Q = x_P \\ y_Q = -y_P \end{cases}.$$

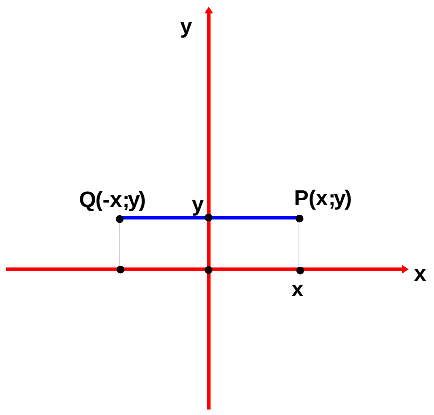


Il punto $Q(x;-y)$ è simmetrico del punto $P(x;y)$ rispetto all'asse delle ascisse.

Il punto $Q(5;-7)$ è simmetrico del punto $P(5;7)$ rispetto all'asse delle ascisse.

Il punto $Q(x_Q;y_Q)$ è **simmetrico del punto** $P(x_P,y_P)$ **rispetto all'asse delle ordinate** se ha la stessa ordinata di P ma ascissa opposta, cioè se:

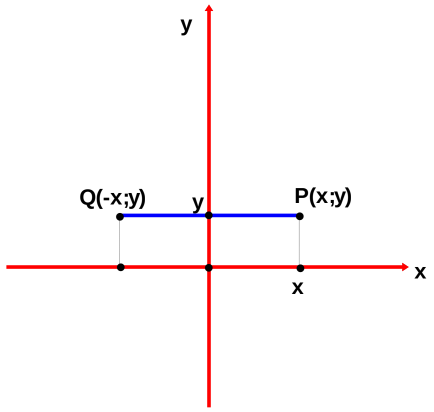
$$\begin{cases} x_Q=-x_P \\ y_Q=y_P \end{cases}.$$



Il punto $Q(-x;y)$ è simmetrico del punto $P(x;y)$ rispetto all'asse delle ordinate.

Il punto $Q(-5;-3)$ è simmetrico del punto $P(5;-3)$ rispetto all'asse delle ordinate.

Il punto $Q(x_Q;y_Q)$ è **simmetrico del punto** $P(x_P,y_P)$ **rispetto all'origine degli assi cartesiani** se hanno opposte sia l'ascissa che l'ordinata, cioè se: $\begin{cases} x_Q=-x_P \\ y_Q=-y_P \end{cases}$.



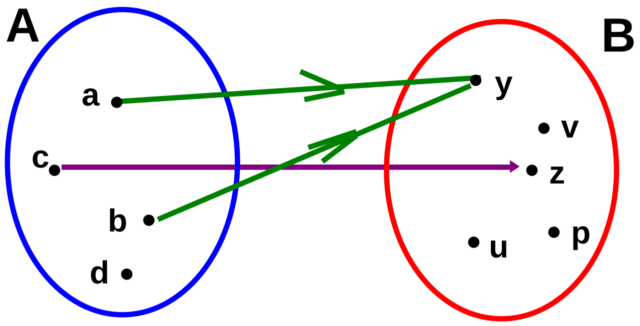
Il punto $Q(-x;-y)$ è simmetrico del punto $P(x;y)$ rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Il punto $Q(-5;+4)$ è simmetrico del punto $P(5;-4)$ rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Corrispondenza tra due insiemi

Dati due insiemi **A** e **B**, si dice che tra essi è definita una **corrispondenza** quando è indicata una **legge di natura qualsivoglia** che associa a qualche elemento dell'insieme **A** uno o più elementi dell'insieme **B**.

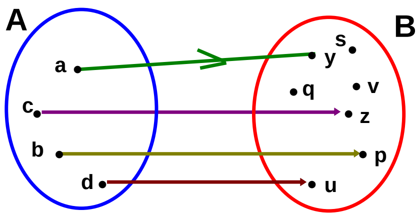
Diagramma a frecce o **diagramma sagittale** della corrispondenza esistente tra gli insiemi **A** e **B**.



Una corrispondenza fra due insiemi A e B è una **funzione** se ad ogni elemento dell'insieme **A** associa un solo elemento dell'insieme **B**. Una funzione si indica col seguente simbolo: $y=f(x)$

dove x è la **variabile indipendente**, y è la **variabile dipendente**.

Diagramma a frecce o **diagramma sagittale** della funzione f che ad ogni elemento dell'insieme **A** fa corrispondere un solo elemento dell'insieme **B**.



Quando **A** e **B** sono insiemi numerici, le funzioni vengono chiamate **funzioni numeriche** e vengono espresse mediante formule matematiche del tipo: $y=f(x)=x^2-9 \quad y=f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-9}$

Diagramma a frecce o **diagramma sagittale** della funzione f con **dominio A** e **codominio** $f(A)$. $f(x)$ dicesi **immagine** di x nella **f** mentre la x è la **controimmagine** di y nella **f**.

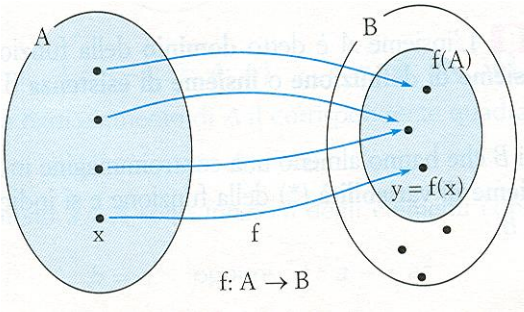


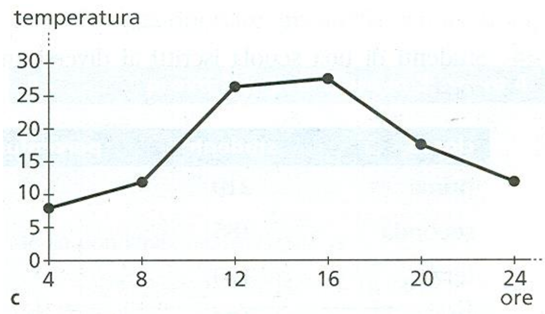
Grafico di una funzione matematica

Di una funzione numerica possiamo disegnare il suo grafico che è una curva del piano cartesiano. Basta tracciare in un piano riferito ad un sistema ortogonale di assi cartesiani tutti i punti P che hanno come ascissa il numero x e come ordinata il numero $f(x)$. La costruzione del grafico della funzione $y=f(x)$ si può effettuare "per punti", assegnato alla x alcuni particolari e convenienti valori e determinando i corrispondenti valori $y=f(x)$. Noi, in seguito, vedremo come è possibile attraverso la conoscenza di pochi elementi effettuare la costruzione dei grafici di alcune funzioni come quelle che generalo la retta, la parabola, la circonferenza, l'ellisse e l'iperbole.

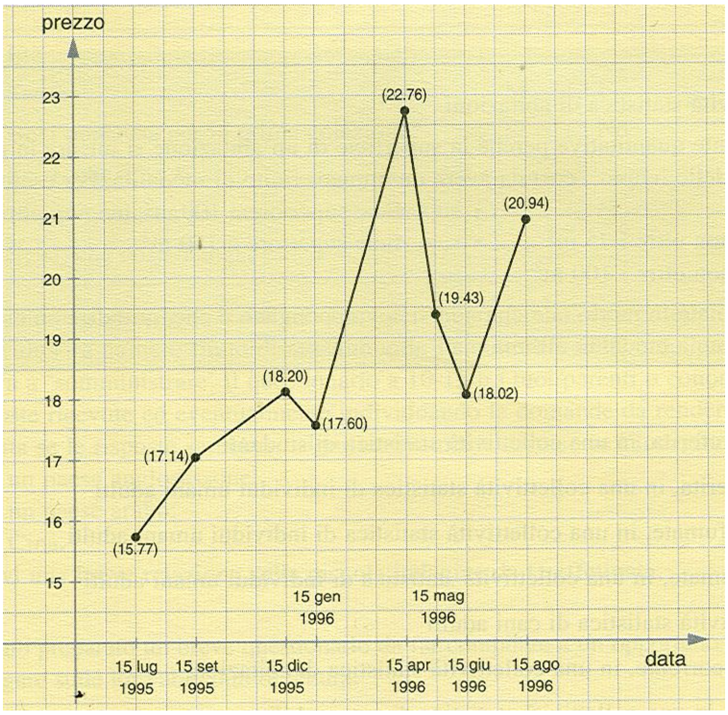
Grafico di una funzione empirica

Le **funzioni empiriche** sono quelle funzioni, numeriche o non, per le quali l'elemento corrispondente $y \in B$ dell'elemento $x \in A$ non si ottiene mediante una formula matematica ma per mezzo di **misurazioni sperimentali** (come in fisica, in chimica) o di **rilevazioni** (come avviene in economia, statistica).

Grafico empirico che ci indica come varia la temperatura di una città durante un determinato giorno. In ascissa riportiamo le ore della giornata, sull'asse delle ordinate riportiamo i valori delle temperature misurate.



Il grafico rappresenta la variazione del prezzo del petrolio tra il 15 luglio del 1995 ed il 15 agosto del 1996. Sull'asse delle ascisse riportiamo i tempi rispetto ai quali si studia la variazione del prezzo. Sull'asse delle ordinate riportiamo i prezzi in dollari per barile di petrolio. La spezzata che si ottiene evidenzia i periodi durante i quali si è verificato un aumento o una diminuzione del prezz0.



Equazione cartesiana di una retta

Definizione: Dicesi retta il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate $(x; y)$ verificano una equazione di primo grado a due incognite.

$$ax + by + c = 0 \qquad \textbf{[B]}$$

è l'**equazione generale** della retta o **equazione della retta sotto forma implicita**.

$by = -ax - c \qquad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ Ponendo $m = -\frac{a}{b}$, $n = -\frac{c}{b}$ l'equazione **[B]** diventa:

$$y = mx + n \qquad \textbf{[C]}$$

che rappresenta l'**equazione canonica** della retta o **equazione della retta sotto forma esplicita**. Il numero reale relativo **n** dicesi **ordinata all'origine** perché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y , mentre **m** dicesi **coefficiente angolare** della retta. L'equazione **[C]** non si presta a rappresentare rette parallele all'asse delle y in quanto **m** perde di significato.

$4x + 3y - 12 = 0$ **equazione generale della retta** , $y = -\frac{4}{3}x + 4$ *e***quazione canonica della retta**,

$m = -\frac{4}{3}$ = **coefficiente angolare** della retta , $n = 4$ = **ordinata all'origine**

Equazioni di rette aventi una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani

$x = k$ rappresenta l'equazione di una generica retta parallela all'asse delle y. Essa si ricava ponendo: $b = 0$, $k = -\frac{c}{a}$. Risulta: $m = -\frac{a}{b} = \infty$ k rappresenta l 'ascissa di un generico punto della retta.

$y = h$ rappresenta l'equazione di una generica retta parallela all'asse delle x. Essa si ricava ponendo: $a = 0$, $h = -\frac{c}{b}$. Risulta: $m = -\frac{a}{b} = 0$ h rappresenta l'ordinata di un generico punto della retta.

$x = 0$ è l'equazione dell'asse delle ordinate . Si ottiene per: $b = c = 0$, $a = 1$, $m = \infty$

$y = 0$ è l'equazione dell'asse delle ascisse . Si ottiene per: $a = c = 0$, $b = 1$, $m = 0$

$y = x$ è l'equazione della bisettrice del I e III quadrante , detta anche **bisettrice fondamentale** degli assi cartesiani . Risulta: $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, $m = 1$

$y = -x$ è l'equazione della bisettrice del II e IV quadrante , detta anche **bisettrice secondaria** degli assi cartesiani . Risulta: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $m = -1$

$ax + by = 0$ oppure $y = mx$ è l'equazione di una generica retta passante per l'origine degli assi cartesiani.

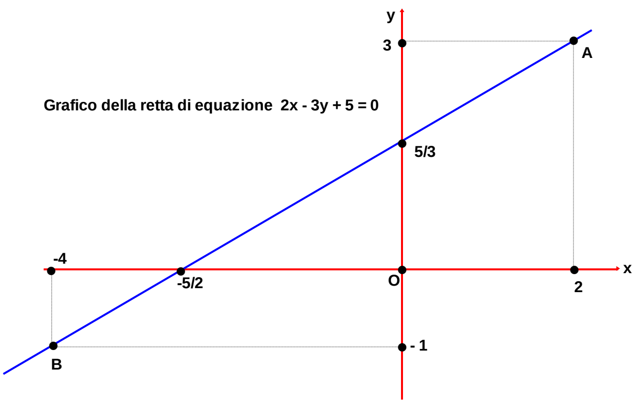
Grafico di una retta

Per disegnare il grafico di una retta basta individuare le coordinate di due suoi opportuni punti. Se possibile, è conveniente utilizzare punti a coordinate intere.

Disegnare il grafico della retta di equazione $2x - 3y + 5 = 0$ che, sotto forma esplicita, assume la forma: $y = \frac{2x+5}{3}$

x	y	
2	3	$A(2;3)$
-4	-1	$B(-4;-1)$

Per disegnare il grafico della retta di equazione $2x - 3y + 5 = 0$ avrei potuto utilizzare le intersezioni con gli assi cartesiani. Tali intersezioni hanno rispettivamente ascissa ed ordinata espresse da numeri frazionari.



Rette parallele

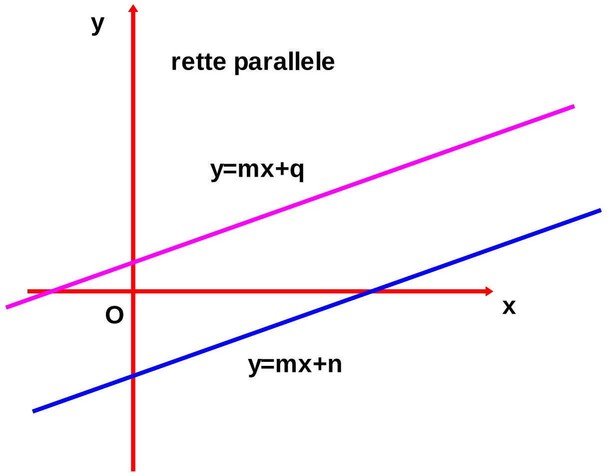
Teorema: Condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano **parallele** è che i **lor coefficienti angolari siano uguali**.

$$\mathbf{r}:\ ax + by + c = 0 \ ,\ y = mx + n \ ,\ \mathbf{s}:\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ ,\ y = m_1x + n_1$$

$$r // s \Rightarrow \ m = m_1 \ \text{oppure} \ a_1 = ka \ , b_1 = kb \ \text{con} \ k \in R - \{0\}$$

cioè **k** è una costante di proporzionalità non nulla . In particolare essa può assumere il valore $k = 1$ ed il parallelismo tra le due rette si trasforma nella uguaglianza tra i coefficienti delle variabili omonime: $a_1 = a \ ,\ b_1 = b$.

Se due rette hanno lo **stesso coefficiente angolare** esse **sono parallele**, viceversa se esse **sono parallele** allora hanno lo **stesso coefficiente angolare**.



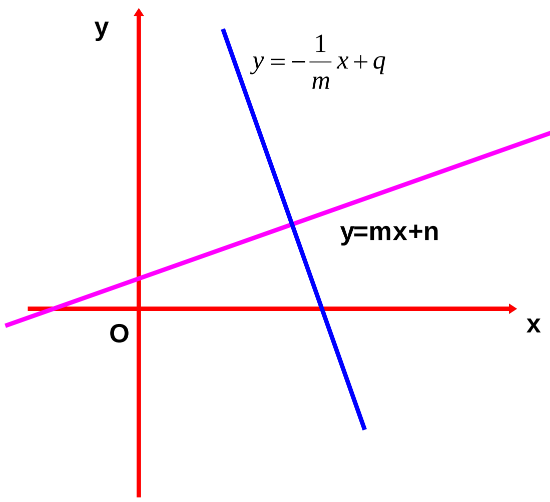
Rette perpendicolari

Condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano perpendicolari è che i loro coefficienti angolari siano **antireciproci**, cioè che il prodotto dei loro coefficienti angolari sia -1.

$$r \perp s \quad \Leftrightarrow \quad [\, m \cdot m_1 = -1 \text{, oppure } a a_1 + b b_1 = 0$$

Due rette **sono perpendicolari** se e solo se il **prodotto dei loro coefficienti angolari** è uguale a -1 ($m \cdot m_1 = -1$), oppure se:

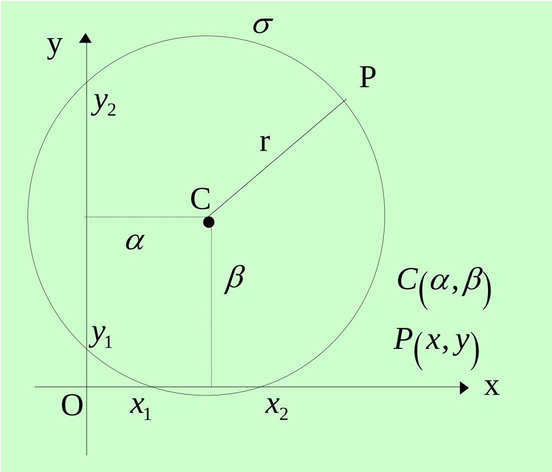
$$a a_1 + b b_1 = 0$$



Equazione della circonferenza

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **C** detto **centro**. Riferito il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani, detto $C(\alpha,\beta)$ il centro della circonferenza σ, $P(x,y)$ un generico punto di σ abbiamo: $CP = r$

$\Rightarrow \quad CP^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ [1]



La [1] è l'equazione di una circonferenza di dato centro e dato raggio . Se $C \equiv O$ la [1] diventa :

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \qquad [2]$$

La [2] rappresenta l ' equazione di una circonferenza avente il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani .

Equazione generale della circonferenza

L'equazione [1] assume la seguente forma $\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$ [3]

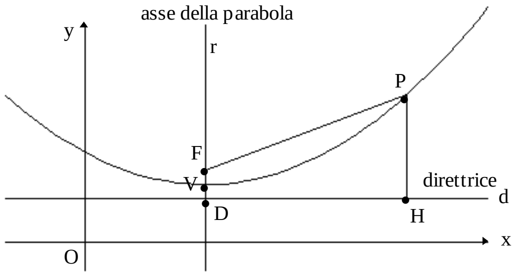
se poniamo : [4] $\boxed{a = -2\alpha \ , \ b = -2\beta \ , \ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2}$

$$\boxed{\alpha = -\frac{a}{2} \ , \ \beta = -\frac{b}{2} \ , \ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}} \qquad [5]$$

La parabola

Definizione : Dicesi **parabola** il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **F** detto **fuoco** e da una retta fissa **d** (non contenente il fuoco) detta **direttrice** .

La retta **r** passante per **F** e perpendicolare alla direttrice **d** è l ' **asse** della parabola . La retta **r** incontra la retta **d** nel punto **D** . Il punto medio **V** del segmento FD è il **vertice** della parabola .



La parabola ad asse verticale

Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle ascisse sia parallelo alla direttrice **d** , l'equazione della parabola assume la forma $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

$\boxed{V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)}$ **Vertice** della parabola $\boxed{F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)}$ **Fuoco** della parabola

$\boxed{y = -\frac{1+\Delta}{4a}}$ equazione della **direttrice** della parabola

$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$ equazione dell ' **asse** della parabola

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la **concavità verso l'alto** (il basso)

Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma : $\boxed{y = ax^2 = \frac{1}{4p}x^2} \Leftrightarrow \boxed{x^2 = 4py}$

$F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ $F(0, p)$ $y = -p = -\frac{1}{4a}$ = **equazione della direttrice** $\Delta = b^2 - 4ac$

Intersezioni con gli assi cartesiani

La parabola ad asse verticale incontra sempre l'asse delle **y** nel punto $A(0, c)$. Per calcolare le coordinate delle eventuali intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ cioè la seguente equazione di secondo grado :

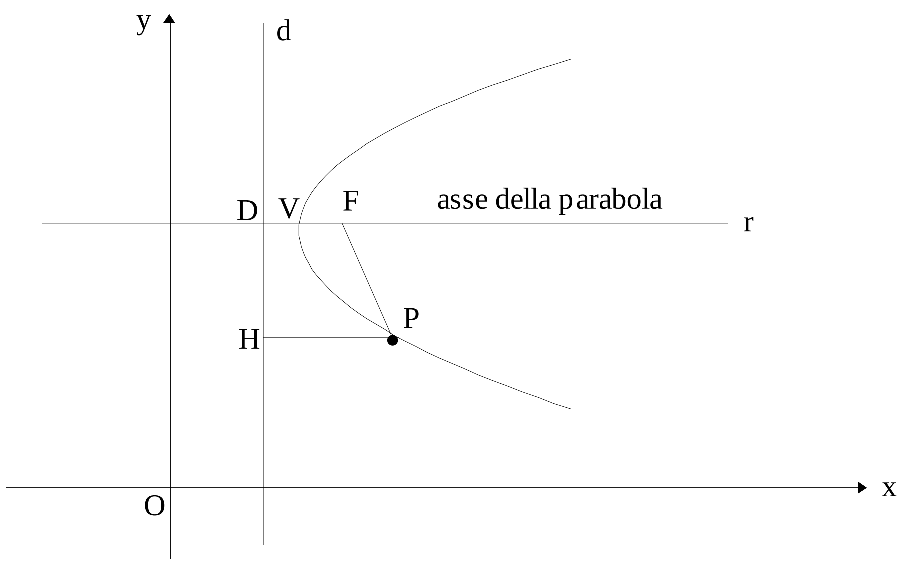
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta > 0$: la parabola incontra l'asse delle ascisse in due punti distinti

$\Delta = 0$: la parabola incontra l'asse delle ascisse in due punti coincidenti . Questo significa che la parabola ha il vertice **V** sull'asse delle x , cioè l'asse x è **tangente** alla parabola nel vertice

$\Delta < 0$: la parabola non incontra l'asse delle ascisse

La parabola ad asse orizzontale



Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle **y** risulti parallelo alla direttrice **d** , allora l'equazione della parabola assume la forma: $\boxed{x = ay^2 + by + c}$

$V\left(\frac{-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$ **Vertice** della parabola $F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$ **Fuoco** della parabola

$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$ equazione della **direttrice** della parabola

$y = \frac{-b}{2a}$ equazione dell ' **asse** della parabola

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la **concavità verso destra** (sinistra)

Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma : $x = ay^2 = \frac{1}{4p}y^2 \Leftrightarrow y^2 = 4px$

$F\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$ $F(p, 0)$ $x = -p = -\frac{1}{4a}$ = equazione della direttrice $\Delta = b^2 - 4ac$