

# Algebra

## I numeri relativi

I **numeri relativi** sono quelli preceduti dal segno  $\langle\langle + \rangle\rangle$  o dal segno  $\langle\langle - \rangle\rangle$ . I **numeri positivi** sono quelli preceduti dal segno  $+$  (zero escluso). I **numeri negativi** sono quelli preceduti dal segno  $-$  (zero escluso). I numeri positivi, quelli negativi e lo zero formano l'insieme dei **numeri relativi**. Definiamo **valore assoluto** o **modulo** di un numero relativo il numero stesso senza segno.

$$|-7| = 7 \quad , \quad |+7| = 7 \quad , \quad \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

Due numeri relativi si dicono **concordi** (**discordi**) se hanno (non hanno) lo stesso segno. I numeri relativi  $-5$  e  $-\frac{3}{4}$  sono **concordi**; i numeri  $+\frac{3}{4}$  e  $-\frac{2}{7}$  sono **discordi**. Due numeri relativi discordi aventi lo stesso modulo si dicono **opposti**. I numeri relativi  $-\frac{3}{8}$  e  $+\frac{3}{8}$  sono **opposti**. Due numeri relativi sono **uguali** se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto. Per confrontare due numeri relativi, cioè per stabilire se uno di essi è maggiore, uguale o minore dell'altro, si tiene presente quanto segue:

- 1) di due numeri positivi è **maggiore** quello che ha valore assoluto maggiore
- 2) di due numeri negativi è **maggiore** quello che ha valore assoluto minore
- 3) ogni numero positivo è **maggiore** di un qualsiasi numero negativo
- 4) lo zero è **maggiore** di ogni numero negativo e **minore** di ogni numero positivo

## Addizione di due numeri relativi

La somma di **due numeri positivi** (negativi) è un **numero positivo** (negativo) avente come valore assoluto la somma dei valori assoluti dei due addendi.

$$\begin{aligned} (+8) + (+3) &= +11 \\ (-8) + (-3) &= -11 \\ (+8) + (-3) &= +5 \\ (-8) + (+3) &= -5 \end{aligned}$$

La somma di due numeri relativi **discordi** è un numero relativo avente come segno il segno dell'addendo che ha valore assoluto maggiore e come valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e quello minore. Due numeri si dicono **opposti** quando la loro somma è **zero**.

## Sottrazione di due numeri relativi

La differenza tra due numeri relativi è uguale al primo numero più l'opposto del secondo. Quindi per effettuare la **differenza** tra due numeri relativi basta aggiungere al primo l'opposto del secondo.

$$(+8) - (-2) = (+8) + (+2) = +10 \quad , \quad (+8) - (+2) = (+8) + (-2) = +6$$

# Algebra

$$(-8) - (-2) = (-8) + (+2) = -6$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{7}{10}\right) - \left(+\frac{3}{15}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{7}{10}\right) + \left(-\frac{3}{15}\right) = \frac{-18 + 21 - 6}{30} = -\frac{3}{30} = -\frac{1}{10}$$

## Moltiplicazione di numeri relativi

Il **prodotto** di due numeri relativi è uguale al numero relativo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei numeri e come segno quello positivo se i numeri sono concordi, quello negativo se i numeri sono discordi.

### REGOLA DEI SEGNI

$$+ \text{ per } + = +$$

$$- \text{ per } - = +$$

$$+ \text{ per } - = -$$

$$- \text{ per } + = -$$

$$(-2) \cdot (-5) = +10$$

$$(-2) \cdot (+5) = -10$$

$$(+2) \cdot (-5) = -10$$

$$(-2) \cdot (+5) = -10$$

### OSSERVAZIONE

Due numeri si dicono **reciproci** o **inversi** quando il loro prodotto è **1**. I numeri  $-\frac{3}{4}$  e  $-\frac{4}{3}$  sono

**reciproci** perché:  $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 1$ . Il **reciproco** del numero  $\frac{3}{7}$  è il numero  $\frac{7}{3}$  in quanto:

$$\left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{7}{3}\right) = 1$$

Il **reciproco** di un numero è il numero che si ottiene scambiando il numeratore col denominatore.

Due numeri si dicono **antireciproci** quando il loro prodotto è  $-1$ .

## Divisione di due numeri relativi

Il **quoziente** di due numeri relativi è uguale al prodotto del primo numero per il reciproco del secondo.

$$\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = +\frac{21}{10}$$

$$+ \text{ diviso } + = +$$

$$- \text{ diviso } - = +$$

$$+ \text{ diviso } - = -$$

$$- \text{ diviso } + = -$$

### REGOLA DEI SEGNI

**OSSERVAZIONE** Per calcolare la potenza di un numero relativo basta ricordare che una potenza

è un prodotto di fattori uguali:  $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{16}{81}$

# Algebra

La potenza di un numero positivo è un numero positivo. La potenza di un numero negativo è un numero positivo se l'esponente è pari, un numero negativo se l'esponente è dispari. In conclusione possiamo affermare che la potenza di un numero relativo è un numero negativo solo quando la base è negativa e l'esponente è dispari. In tutti gli altri casi è un numero positivo.

## Espressione algebrica

Dicesi **espressione algebrica** (razionale) un insieme di numeri e di lettere legati fra di loro da almeno una delle quattro operazioni razionali: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione.

Esempi di espressioni algebriche:  $3x^2y$ ,  $-\frac{3ab}{4x^5y}$ ,  $3x + 2y^2 - \frac{3ab^4}{xy^5}$

## Monomi

Dicesi **monomio** una espressione algebrica non contenente le operazioni di addizione e sottrazione, cioè una espressione algebrica dove figura o l'operazione di moltiplicazione o l'operazione di divisione o entrambe. Sono monomi:

$$-3x^2y, \quad \frac{2ab^2x^3}{y^4z}$$

Ogni monomio è costituito da una parte numerica detta **coefficiente** e da una **parte letterale**.

$$3ab \rightarrow \text{monomio}, \quad 3 \rightarrow \text{coefficiente}, \quad ab \rightarrow \text{parte letterale}$$

Un monomio è **ridotto a forma canonica** (o normale o tipica) quando i suoi fattori letterali sono tutti fra loro diversi.  $3ax^2y^5$  è un **monomio ridotto a forma normale**

$-3axy^35a^2xb$  non è un monomio ridotto a forma normale. Ridotto a forma normale diventa:

$$-15a^3bx^2y^3$$

Dicesi **grado** di un monomio rispetto ad una lettera l'esponente con cui la lettera si presenta nel monomio. Il monomio  $5ax^5y^2z^{12}$  ha grado **1** rispetto alla lettera **a**, grado **5** rispetto alla lettera **x**, grado **2** rispetto alla lettera **y**, grado **12** rispetto alla lettera **z**.

Dicesi **grado assoluto** o semplicemente **grado** di un monomio ridotto a forma canonica la somma degli esponenti delle sue lettere.

Il monomio  $5ax^5y^2z^{12}$  ha **grado assoluto**  $1 + 5 + 2 + 12 = 20$ . Il monomio  $\frac{3ax^2}{b^3} = 3ab^{-3}x^2$  ha grado  $-3$  rispetto alla lettera **b**, mentre il **grado assoluto** è **zero**.

Due monomi si dicono **simili** se hanno la stessa parte letterale. I monomi  $-3ab$ ,  $2ab$ ,  $\frac{1}{2}ab$  sono **monomi simili**. Due monomi simili aventi lo stesso coefficiente si dicono **uguali**.

## Algebra

$3ab^2$  e  $3ab^2$  sono **monomi uguali** ,  $\frac{1}{2}xy^8$  e  $-\frac{1}{2}xy^8$  sono **monomi opposti**

### **Somma algebrica ( addizione e sottrazione ) di monomi simili**

La **somma algebrica** di due o più monomi simili è un monomio che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti e come parte letterale la stessa parte letterale .

$$-\frac{7}{3}ax^2y + \frac{2}{5}ax^2y - 3ax^2y = \left(-\frac{7}{3} + \frac{2}{5} - 3\right)ax^2y = \frac{-35 + 6 - 45}{15}ax^2y = -\frac{74}{15}ax^2y$$

### **Prodotto di due o più monomi**

Il prodotto di due o più monomi è un monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali .

$$\left(\frac{2}{3}a^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}ax^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}b^2x\right) = \left(+\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)a^3b^2x^3 = \frac{1}{4}a^3b^2x^3$$

### **Quoziente di due monomi**

Il quoziente di due monomi è un monomio avente come coefficiente il quoziente dei coefficienti e come parte letterale il quoziente delle parti letterali .

$$\left(-\frac{3}{5}a^5y^4z^2b\right) : \left(\frac{7}{15}a^2y^3z\right) = \left(-\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{7}\right)a^{5-2}y^{4-3}z^{2-1}b = -\frac{9}{7}a^3yzb$$

$$\left(-\frac{6}{7}a^2b^5x^8y\right) : \left(-\frac{33}{14}a^5b^2x^3d^5\right) = \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{33}\right)a^{2-5}b^{5-2}x^{8-3}yd^{-5} = \frac{4}{11}a^{-3}b^3x^5yd^{-5} = \frac{4}{11} \frac{b^3x^5y}{a^3d^5}$$

### **Potenza di un monomio**

La potenza di un monomio è un monomio che ha come coefficiente la potenza del coefficiente e come parte letterale la potenza della parte letterale .

$$\left(-\frac{1}{2}ax^2y^4\right)^3 = -\frac{1}{8}a^3x^6y^{12}$$

### **Massimo comune divisore di due o più monomi**

Il massimo comune divisore ( *M.C.D.* ) di due o più monomi interi a coefficienti interi è un monomio avente per coefficiente il *M.C.D.* dei coefficienti e per parte letterale quella formata dalle sole lettere comuni prese una sola volta con l'esponente minore .

$$12a^5b^4x^3y^7 \quad , \quad 6a^3b^5x \quad , \quad 21a^4b^2z \quad \quad \quad M.C.D. = 3a^3b^2$$

# Algebra

## Minimo comune multiplo di due o più monomi

Il minimo comune multiplo ( *m.c.m.* ) di due o più monomi interi è un monomio avente per coefficiente il *m.c.m.* dei coefficienti e per parte letterale quella formata dalle lettere comuni e non comuni , prese una sola volta , con l' esponente maggiore .

$$12a^5b^4x^3y^7 , 6a^3b^5x , 21a^4b^2z \qquad m.c.m. = 84a^5b^5x^3y^7z$$

**OSSERVAZIONE:** Quando i coefficienti dei monomi non sono tutti numeri interi , allora si assume come coefficiente del *M.C.D.* e del *m.c.m.* il numero +1 . Questo per semplicità e per opportunità di calcolo.

## Polinomi

**Definizione:** Dicesi **polinomio** la somma algebrica di due o più monomi . I monomi si dicono i **termini** del polinomio . Un polinomio formato da due termini dicesi **binomio** , da tre termini **trinomio** , etc...

### Esempi di polinomi

$$-5a^2b^3x + \frac{2}{3}ab^2x^3 - \frac{5}{4}ay^4 \text{ Polinomio intero , } -3a^2b + 5\frac{ab^3}{x} - \frac{7ay^5x^7}{4} \text{ Polinomio Frazionario}$$

**DEFINIZIONE:** Dicesi **grado** di un polinomio rispetto ad una lettera il maggiore esponente con cui quella lettera figura nel polinomio . Il polinomio  $5a^2b - \frac{7}{2}ab^3x^2 + \frac{1}{3}a^4bx$  è di **quarto** grado rispetto ad a , di **terzo** grado rispetto a b , di **secondo** grado rispetto ad x .

**Definizione:** Dicesi **grado assoluto** , o semplicemente grado di un polinomio, il maggiore dei

$$\begin{array}{ccc} 8a^2b^3y^5 & - & \frac{5}{2}ab^5 & - & 3ax^2 \\ \text{gradi (assoluti) dei suoi termini. Il polinomio} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \text{è di } \mathbf{decimo} \text{ grado.} \\ & 10 & 6 & 3 & \end{array}$$

**Definizione:** Un polinomio si dice **omogeneo** quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado (assoluto) Il polinomio  $5a^2b^3c - \frac{7}{2}ab^5 + 6ax^2y^3$  è **omogeneo di sesto grado**.

**Definizione:** Un polinomio si dice **ordinato secondo le potenze crescenti o decrescenti di una data lettera** se i suoi termini si succedono in modo che gli esponenti di quella lettera vadano crescendo o decrescendo. Il polinomio  $6x^4 + 5x^3 - 2x + 5 = 0$  è un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti della x .

# Algebra

**Definizione:** Un polinomio ordinato si dice **completo rispetto alla lettera ordinatrice** se contiene tutte le potenze di quella lettera, dal grado massimo al grado zero.

$8x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 5x - 2$  è un polinomio completo di sesto grado ordinato secondo le potenze decrescenti della  $x$ .

## Somma algebrica di polinomi

Per sommare algebricamente due o più polinomi basta sommare algebricamente i monomi simili.

$$\begin{aligned} & \left(x^4 - \frac{3}{5}x^3 + 2x^2 - x - 5\right) + \left(x^3 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right) - \left(3x^4 - \frac{2}{7}x + 5\right) = \\ & = x^4 - \frac{3}{5}x^3 + 2x^2 - x - 5 + x^3 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 1 - 3x^4 + \frac{2}{7}x - 5 = \\ & = (1 - 3)x^4 + \left(-\frac{3}{5} + 1\right)x^3 + (2 - 3)x^2 + \left(-1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{7}\right)x - 11 = \\ & = -2x^4 + \frac{2}{5}x^3 - x^2 - \frac{1}{21}x - 11 \end{aligned}$$

## Prodotto di un polinomio per un monomio

Per moltiplicare un polinomio per un monomio basta moltiplicare ogni termine del polinomio per il monomio e sommare algebricamente i prodotti ottenuti.

$$(a^2 + ab + a^3b^2) \cdot 3a^2bx = 3a^4bx + 3a^3b^2x + 3a^5b^3x$$

## Prodotto di due o più polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine di uno di essi per tutti i termini dell'altro. Al risultato ottenuto bisogna applicare la somma algebrica dei monomi simili.

$$\begin{aligned} & (-3x^2 - 2xy + 5) \cdot (xy^2 - 5x^2y) = -3x^3y^2 - 2x^2y^3 + 5xy^2 + 15x^4y + 10x^2y^2 - 25x^2y = \\ & = 7x^3y^2 - 2x^2y^3 + 5xy^2 + 15x^4y - 25x^2y \end{aligned}$$

Se i polinomi sono più di due, il loro prodotto si ottiene moltiplicando i primi due e, poi, moltiplicando il polinomio ottenuto per il terzo polinomio e così di seguito fino ad esaurire i polinomi dati.

## Prodotti notevoli

Si chiamano **prodotti notevoli** alcuni prodotti fra polinomi che si effettuano in base a determinate regole che ci consentono di semplificare certi calcoli.

**1)** Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

# Algebra

**REGOLA:** Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale alla differenza dei loro quadrati .

$$\left(\frac{2}{3}a^2by^3 + 5x^2t\right)\left(\frac{2}{3}a^2by^3 - 5x^2t\right) = \frac{4}{9}a^4b^2y^6 - 25x^4t^2$$

**2) Quadrato di un binomio:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**REGOLA:** Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine più il doppio prodotto del primo termine per il secondo , più il quadrato del secondo termine .

$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 \quad , \quad \left(-\frac{3}{5}xy^2 + \frac{1}{3}x^2y\right)^2 = \frac{9}{25}x^2y^4 - \frac{2}{5}x^3y^3 + \frac{1}{9}x^4y^2$$

$$\left(-2xy - \frac{1}{4}ax\right)^2 = 4x^2y^2 + ax^2y + \frac{1}{16}a^2x^2$$

**3) Quadrato di un polinomio**

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

**REGOLA:** Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei suoi termini più la somma algebrica dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno di quelli che lo seguono.

$$\left(-\frac{3}{4}a + 2b^2 - \frac{1}{3}c + 2\right)^2 = \frac{9}{16}a^2 + 4b^4 + \frac{1}{9}c^2 + 4 - 3ab^2 + \frac{1}{2}ac - 3a - \frac{4}{3}b^2c + 8b^2 - \frac{4}{3}c$$

**4) Cubo di un binomio**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

**REGOLA:** Il cubo di un binomio è uguale alla somma algebrica del cubo del primo termine , del triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo , del triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo , del cubo del secondo termine .

$$(a + 2b)^3 = a^3 + 3 \cdot (a)^2 \cdot (2b) + 3 \cdot a \cdot (2b)^2 + 8b^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

$$\left(3x^2 - \frac{1}{3}y\right)^3 = 27x^6 + 3 \cdot (3x^2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}y\right) + 3 \cdot (3x^2) \cdot \left(-\frac{1}{3}y\right)^2 - \frac{1}{27}y^3 = 27x^6 - 9x^4y + x^2y^2 - \frac{1}{27}y^3$$

$$\left(-\frac{3}{4}a^3 - 2a\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}a^3\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{4}a^3\right)^2(-2a) + 3\left(-\frac{3}{4}a^3\right)(-2a)^2 + (-2a)^3 = -\frac{27}{64}a^9 - \frac{27}{8}a^7 - 9a^5 - 8a^3$$

**5)**  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

## Algebra

$$(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) = 8a^3 + 1, \quad \left(\frac{2}{5}ax - b^2\right)\left(\frac{4}{25}a^2x^2 + \frac{2}{5}ab^2x + b^4\right) = \frac{8}{125}a^3x^3 - b^6$$

### Potenza di un binomio , triangolo di Tartaglia

Potenza di un binomio è una potenza del tipo:  $(a + b)^n$

Vogliamo sviluppare questa potenza senza moltiplicare tra loro gli n fattori uguali  $(a + b)$  .

Per  $n = 0$  ,  $n = 1$  ,  $n = 2$  ,  $n = 3$  lo sappiamo già fare . Vediamo come si fa a sviluppare

$(a + b)^n$  per un **n** numero intero qualsiasi. Lo sviluppo di  $(a + b)^n$  è un polinomio avente  $n + 1$  termini , di grado **n** , omogeneo , completo ed ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b . I coefficienti del suddetto polinomio si deducono dal **triangolo di Tartaglia** tenendo presente che i coefficienti estremi sono sempre uguali ad 1 , e che ogni altro coefficiente si trova addizionando al coefficiente che gli sta sopra con quello che sta alla sinistra di questo .

n    coefficienti

0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Il triangolo di **Tartaglia** può essere scritto anche a forma di triangolo isoscele

n																			
0						1													
1					1		1												
2				1		2		1											
3			1		3		3		1										
4			1		4		6		4		1								
4			1		5		10		10		5		1						
6			1		6		15		20		15		6		1				
7			1		7		21		35		35		21		7		1		
8			1		8		28		56		70		56		28		8		1

**REGOLA PRATICA PER IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI**



# Algebra

**1)** I termini estremi hanno coefficiente uguale ad 1

**2)** scritto un coefficiente , si ottiene il successivo moltiplicando il coefficiente scritto per l'esponente di **a** nel termine già scritto e dividendo il prodotto ottenuto per il numero che indica il posto occupato dal monomio di cui abbiamo già scritto il coefficiente ( oppure dividendo per l'esponente di **b** aumentato di 1 )

$$(a + b)^2 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

1            2            3            4            5            6

$$6 = \frac{1 \cdot 6}{1} , 15 = \frac{6 \cdot 5}{2} , 20 = \frac{15 \cdot 4}{3} , 15 = \frac{20 \cdot 3}{4} , 6 = \frac{15 \cdot 2}{5}$$

## Divisione di un polinomio per un monomio

Per dividere un polinomio per un monomio basta dividere ciascun termine del polinomio per il monomio .  $(-18a^5b^3x^2 + 9a^3b^4x - 21a^2b^2x^3) : (-3a^2b) = 6a^3b^2x^2 - 3ab^3x + 7bx^3$

$$\begin{aligned} (-3a^2b + 4a^3c^4 - 8ab^4c^2 + 2) : (-6a^3b^2c) &= \frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}c^{-1} - \frac{2}{3}c^3b^{-2} + 4b^2a^{-2} - \frac{1}{3}a^{-3}b^{-2}c^{-1} = \\ &= \frac{1}{2abc} - \frac{3c^3}{3b^2} + \frac{4b^2c}{a^2} - \frac{1}{3a^3b^2c} \end{aligned}$$

## Divisione fra due polinomi

Spesso per indicare un generico polinomio in una certa variabile ( ad esempio  $x$  ) si usa uno dei seguenti simboli:  $A(x)$  ,  $B(x)$  ,  $C(x)$  (se legge: << a di  $x$  >>, << b di  $x$  >> , << c di  $x$  >>), cioè una lettera maiuscola per indicare un polinomio ed una lettera minuscola racchiusa tra due parentesi rotonde per indicare la variabile del polinomio.

Siano dati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$  , il primo di grado  $n$  ed il secondo di grado  $m$  (  $\leq n$  ) .

# Algebra

Dividere il polinomio  $A(x)$  ( detto **dividendo** ) per il polinomio  $B(x)$  ( detto **divisore** ) significa trovare due polinomi  $Q(x)$  ( detto **quoziente** ) di grado  $n - m$  ed  $R(x)$  ( detto **resto** ) di grado minore di  $m$  per i quali sussiste la seguente relazione :

$$\begin{array}{ccccccc}
 A(x) & = & Q(x) & \cdot & B(x) & + & R(x) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{dividendo} & & \text{quoziente} & & \text{divisore} & & \text{resto}
 \end{array}$$

Se  $R(x) = 0$  la divisione è **esatta** ed il polinomio  $A(x)$  è **divisibile** per il polinomio  $B(x)$  .

in questo caso scriviamo :  $A(x):B(x) = Q(x)$  oppure:  $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x)$

Se  $R(x)$  non vale **zero** la divisione non è esatta e si scrive:  $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

## REGOLA

Per eseguire la divisione fra due polinomi secondo le potenze decrescenti di una stessa lettera si opera come segue:

- 1)** si divide il primo termine del **dividendo** per il primo termine del **divisore**: il monomio ottenuto è il primo termine del **quoziente**
- 2)** si moltiplica il monomio ottenuto per il divisore ed il prodotto che si ricava , cambiato di segno , si scrive sotto il dividendo
- 3)** si divide il primo termine del primo resto per il primo termine del divisore ottenendo il secondo termine del quoziente
- 4)** l'operazione cessa quando si trova come resto parziale un polinomio di grado minore rispetto al grado del polinomio divisore

$$(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x - 3):(3x^2 - 2x + 1)$$

$2x^4$	$-3x^3$	$+x^2$	$-5x$	$-3$	$3x^2$	$-2x$	$+1$
$-2x^4$	$+\frac{4}{3}x^3$	$-\frac{2}{3}x^2$			$\frac{2}{3}x^2$	$-\frac{5}{9}x$	$-\frac{7}{27}$
#	$-\frac{5}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}x^2$	$-5x$	$-3$			

# Algebra

$+\frac{5}{3}x^3$	$-\frac{10}{9}x^2$	$+\frac{5}{9}x$	
#	$-\frac{7}{9}x^2$	$-\frac{40}{9}x$	$-3$
	$+\frac{7}{9}x^2$	$\frac{14}{27}x$	$+\frac{7}{27}$
	#	$-\frac{134}{27}x$	$-\frac{74}{27}$

$$Q(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{9}x - \frac{7}{27}$$

$$R(x) = -\frac{134}{3}x - \frac{74}{27}$$

## OSSERVAZIONE

Se il dividendo è un polinomio incompleto, l'operazione di divisione si dispone come per i polinomi completi, spostando però i termini del dividendo in modo da lasciare liberi i posti dei termini mancanti

## OSSERVAZIONE

Se i polinomi non sono ordinati, prima di eseguire la divisione, bisogna ordinarli secondo le potenze decrescenti della lettera rispetto alla quale si vuole eseguire la divisione

## OSSERVAZIONE

Se  $A(x)$  e  $B(x)$  contengono più lettere bisogna stabilire rispetto a quale lettera si vuole eseguire la divisione

## OSSERVAZIONE

Per eseguire la prova della divisione dei polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$  basta tenere presente la relazione:

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

cioè moltiplicando il quoziente per il divisore ed aggiungendo il resto si dovrà ottenere il dividendo

## Divisione di un polinomio per un binomio di primo grado

Supponiamo che il divisore  $B(x)$  sia un binomio di primo grado:

$$B(x) = x + k$$

## TEOREMA DEL RESTO

Il resto  $R$  della divisione di un polinomio intero  $A(x)$  per un binomio del tipo  $x + k$  è uguale al valore numerico che il polinomio dividendo assume quando al posto della  $x$  si sostituisce il secondo termine del divisore cambiato di segno (cioè  $-k$ ).

## DIMOSTRAZIONE

## Algebra

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \quad \text{Ma: } B(x) = x + k, \quad A(x) = (x + k) \cdot B(x) + R(x)$$

$$x = -k \Rightarrow A(-k) = (-k + k) \cdot B(-k) + R(-k), \quad A(-k) = R(-k)$$

$$(5x^2 - 7x + 11):(x - 2), \quad R = 5(2)^2 - 7(2) + 11 = 20 - 14 + 11 = 17$$

$$(x^3 - 6x^2 - 4x + 3):(x + 2), \quad R = (-2)^3 - 6(-2)^2 - 4(-2) + 3 = -8 - 24 + 8 + 3 = -21$$

### TEOREMA DEL RESTO

Il resto **R** della divisione di un polinomio  $A(x)$  per un binomio del tipo  $ax + b$  è uguale al valore numerico che il polinomio dividendo  $A(x)$  assume quando al posto della  $x$  sostituiamo il numero  $-\frac{b}{a}$

### DIMOSTRAZIONE

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x), \quad A(x) = (ax + b) \cdot B(x) + R(x), \quad x = -\frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$A\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(-a\frac{b}{a} + b\right) \cdot B\left(-\frac{b}{a}\right) + R\left(-\frac{b}{a}\right), \quad A\left(-\frac{b}{a}\right) = R\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$(3x^3 - 2x^2 - 5):(2x - 5), \quad R = 3\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 = \frac{5}{8}$$

### Regola di Ruffini

Serve a trovare rapidamente il quoziente ed il resto della divisione di un polinomio  $A(x)$  per un binomio del tipo  $x + k$  oppure del tipo  $ax + b$

- $B(x) = x + k \quad (2x^4 - 9x^2 - 16):(x + 3)$


coefficienti del quoziente  $Q(x)$  che è un polinomio inferiore di un grado rispetto al dividendo

$$Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 27, \quad R = 65$$

- $B(x) = ax + b \quad \text{Si procede come segue :}$

**1)** Si divide ogni termine del dividendo  $A(x)$  ed ogni termine del divisore per **a**

**2)** si esegue la divisione come nel caso precedente

# Algebra

3) i coefficienti dei termini del quoziente non vengono alterati

4) il resto trovato, moltiplicato per  $a$ , è il resto della divisione del polinomio  $A(x)$  per il polinomio  $B(x)$

$$(7x^3 - 2x^2 - 3x + 1):(3x - 1) \quad , \quad a = 3 \quad , \quad b = -1$$

$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-1$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{27}$	$-\frac{26}{81}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{26}{27}$	$\frac{1}{81}$

$$Q(x) = \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{26}{27} \quad , \quad R = \frac{1}{81} \cdot 3 = \frac{1}{27}$$

## Decomposizione in fattori di un polinomio

**Decomporre un polinomio in fattori** significa trovare un monomio o dei polinomi il cui **prodotto** è uguale al polinomio dato . Più semplicemente possiamo dire che **decomporre un polinomio in fattori** significa sostituirlo con un prodotto di fattori . La decomposizione di un polinomio in fattori è detta anche **fattorizzazione** del polinomio . Analizziamo adesso i casi più comuni di decomposizione in fattori di un polinomio .

### MESSA IN EVIDENZA TOTALE

Si applica questo metodo quando tutti i termini del polinomio ammettono un *M.C.D.* diverso da 1 . In questo caso si raccoglie a fattore comune il *M.C.D.* di tutti i termini .

$$x^3 + x^2 + 6x = x(x^2 + x + 6)$$

$$12a^3b^3 + 6a^2b + 2ab^2 = 2ab(6a^2b^2 + 3a + b)$$

$$x(a + b) + 2y(a + b) + 4xy(a + b) = (a + b)(x + 2y + 4xy)$$

$$(2x + 3y)(5x - 4y) - 2(2x + 3y)(2x + y) = (2x + 3y)[5x - 4y - 2(2x + y)]$$

$$\begin{aligned} (x - 3y)^2 - 2(x - 3y)(4x - y) + y(x - 3y) &= (x - 3y)[(x - 3y) - 2(4x - y) + y] = \\ &= (x - 3y)(x - 3y - 8x + 2y + y) = -7x(x - 3y) = 7x(3y - x) \end{aligned}$$

### MESSA IN EVIDENZA PARZIALE

Si applica questo procedimento quando è possibile la messa in evidenza a gruppi in modo che , mediante una successiva messa in evidenza totale , il polinomio dato viene decomposto nel prodotto di due polinomi .

$$ax + ay + bx + xy = a(b + y) + x(b + y) = (b + y)(a + x)$$

$$20a^2x^2 - 25x^2y - 16a^2y + 20y^2 = 5x^2(4a^2 - 5y) - 4y(4a^2 - 5y) = (4a^2 - 5y)(5x^2 - 4y)$$

# Algebra

## Il polinomio da decomporre è un binomio differenza di due quadrati

La decomposizione si effettua tenendo presente la seguente identità:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$25x^4y^2 - \frac{1}{4}a^2 = (5x^2y)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(5x^2y - \frac{1}{2}a\right)\left(5x^2y + \frac{1}{2}a\right)$$

## Il polinomio da decomporre è un binomio somma o differenza di due cubi

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$27y^6 + 8a^3 = (3y^2)^3 + (2a)^3 = (3y^2 + 2a)(9y^4 - 6ay^2 + 4a^2)$$

$$\frac{1}{8}a^9b^3 - 125 = \left(\frac{1}{2}a^3b\right)^3 - (5)^3 = \left(\frac{1}{2}a^3b - 5\right)\left(\frac{1}{4}a^6b^2 + \frac{5}{2}a^3b + 25\right)$$

## Il polinomio da decomporre è un trinomio che è lo sviluppo del quadrato di un binomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$4a^4b^2 + 9c^2 - 12a^2bc = (2a^2b - 3c)^2 \quad 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

## Il polinomio da decomporre è un quadrinomio che è lo sviluppo del cubo di un binomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x - y)^3$$

$$8a^3x^3 - 60a^2x^2y + 150axy^2 - 125y^3 = (2ax - 5y)^3$$

## Il polinomio da decomporre è lo sviluppo del quadrato di un polinomio .

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente una delle seguenti identità :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

$$4x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{9}{16} - \frac{4}{3}xy - 3x + \frac{1}{2}y = \left(2x - \frac{1}{3}y - \frac{3}{4}\right)^2$$

## Il polinomio da decomporre è un trinomio del tipo

$$x^2 + sx + p$$

Se è possibile trovare due numeri **a** e **b** per i quali risulta  $a + b = s$   $a \cdot b = p$  allora il polinomio si decompone tenendo presente la seguente identità:  $x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$

$$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$$

$$a = -2, b = +7$$

## Algebra

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$$

$$a = -3, b = -5$$

**Se il polinomio da decomporre si annulla per un certo valore**  $x = k$  della sua variabile, esso può essere decomposto applicando una o più volte la **regola di Ruffini**.

Un fattore è  $x - k$ , l'altro fattore è un polinomio (inferiore di un grado rispetto al polinomio da decomporre) i cui coefficienti si ricavano applicando la regola di Ruffini.

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 &= (x-1)(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) = \\ &= (x-1)(x-2)(x^2 - x - 12) = (x-1)(x-2)(x-4)(x+3) \end{aligned}$$

1		1	-4	-7	+34	-24	
			1	-3	-10	+24	
		1	-3	-10		+24	#
2		2	-2			-24	
		1	-1			-12	#
-3		-3				12	
		1	-4				#

I numeri **k**, se sono numeri interi relativi, vanno ricercati tra i sottomultipli (positivi o negativi) del termine noto del polinomio.

### ALTRI ESEMPI DI DECOMPOSIZIONE IN FATTORI

$$\begin{aligned} x^5 - xy^4 - x^4y + y^5 &= x(x^4 - y^4) - y(x^4 - y^4) = (x^4 - y^4)(x - y) = \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x - y) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(x - y) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + x^2y^2 + x^3 + y^3 &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 + (x + y)(x^2 - xy + y^2)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) + (x + y)(x^2 - xy + y^2)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy + x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + a^2 - b^2 + a^2b + ab^2 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a - b)(a + b) + ab(a + b) = \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2 + a - b + ab) = (a + b)(a^2 + b^2 + a - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - x^2 + y^2 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)(x + y) = \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y) \end{aligned}$$

$$a^4 + a^2 - b^4 - b^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 1) =$$

# Algebra

$$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2 + 1)$$

$$\begin{aligned}x^2 - 4y^2 - x^3 - 8y^3 &= (x - 2y)(x + 2y) - (x^3 + 8y^3) = \\&= (x - 2y)(x + 2y) - (x + 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = \\&= (x + 2y)(x - 2y - x^2 + 2xy - 4y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 &= a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a + b) = \\&= (a + b)(a + b)(a - b) = (a + b)^2(a - b)\end{aligned}$$

## M.C.D. e m.c.m. di polinomi

Prima bisogna decomporre in **fattori primi** (cioè non ulteriormente decomponibili) i polinomi di cui vogliamo calcolare il *M.C.D.* o il *m.c.m.*.

Il *M.C.D.* di due o più polinomi è uguale al prodotto dei fattori comuni presi una sola volta con l'esponente minore.

Il *m.c.m.* di due o più polinomi è uguale al prodotto dei fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente maggiore.

## Calcolare il M.C.D. ed il m.c.m. dei seguenti polinomi:

$$a^2 - 4ab + b^2$$

$$a^2 - 4b^2$$

$$a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$$

$$a^2 - 4ab + b^2 = (a - 2b)^2, \quad a^2 - 4b^2 = (a - 2b)(a + 2b),$$

$$a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 = (a - 2b)^3$$

$$M.C.D. = a - 2b$$

$$m.c.m. = (a + 2b)(a - 2b)^3$$

## Frazioni algebriche

Dicesi **frazione algebrica** il quoziente indicato di due espressioni algebriche intere (monomi o polinomi). I termini delle frazioni algebriche si chiamano **numeratore** (o **dividendo**) e **denominatore** (o **divisore**). Se il denominatore di una frazione algebrica è **zero**, la frazione non ha significato.

## Semplificazione di una frazione algebrica

**PROPRIETA' INVARIANTIVA:** Moltiplicando o dividendo il numeratore ed il denominatore di una stessa frazione algebrica per una stessa espressione algebrica non nulla si ottiene una frazione equivalente. Questa proprietà ci consente di eseguire la semplificazione delle frazioni algebriche che consiste nella soppressione di eventuali fattori comuni ai due termini



# Algebra

di una frazione. Una frazione algebrica si dice **ridotta ai minimi termini** o irriducibile quando il numeratore ed il denominatore non hanno alcun fattore in comune.

Per semplificare una frazione algebrica si procede come segue:

**1)** Si decompongono in fattori primi sia il numeratore che il denominatore

**2)** Si sopprimono i fattori comuni del numeratore e del denominatore

$$\frac{m^3 + 3m^2}{m^2 - 9} = \frac{m^2(m + 3)}{(m + 3)(m - 3)} = \frac{m^2}{m - 3}, \quad \frac{a^2 - 4}{a^2 + 2a} = \frac{(a + 2)(a - 2)}{a(a + 2)} = \frac{a - 2}{a}$$

$$\frac{a^2 - 4}{3a + 6} = \frac{(a + 2)(a - 2)}{3(a + 2)} = \frac{a - 2}{3}$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1 - y^2}{4x^2 - 4xy + y^2 - 1} = \frac{(2x - 1)^2 - y^2}{(2x - y)^2 - 1} = \frac{(2x - 1 + y)(2x - 1 - y)}{(2x - y + 1)(2x - y - 1)} = \frac{2x - 1 + y}{2x - y + 1}$$

## Riduzione di due o più frazioni algebriche al minimo comune denominatore

Per ridurre due o più frazioni algebriche al loro minimo comune denominatore si procede come segue:

**1)** Si riducono le frazioni algebriche ai minimi termini

**2)** Si calcola il *m.c.m.* fra i denominatori di tutte le frazioni e lo si pone come **minimo comune denominatore**

**3)** Si divide il *m.c.m.* fra i denominatori di tutte le frazioni e lo si pone come **minimo comune denominatore**

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{2a}{x - 1}, \quad \frac{-5b}{x + 1}, \quad \frac{4a^2 - 3b}{x^2 - 1} \quad m.c.m. = x(x + 1)(x - 1)$$

$$\frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 1)(x - 1)}, \quad \frac{2ax(x + 1)}{x(x + 1)(x - 1)}, \quad \frac{-5bx(x - 1)}{x(x + 1)(x - 1)}, \quad \frac{x(4a^2 - 3b)}{x(x + 1)(x - 1)}$$

## Somma algebrica di due o più frazioni algebriche

Per sommare due o più frazioni algebriche si procede come segue:

**1)** Si riducono tutte le frazioni algebriche al **minimo comune denominatore**

**2)** Si scrive una frazione algebrica che ha come denominatore il **minimo comune denominatore**

# Algebra

precedentemente trovato e come numeratore la somma algebrica dei numeratori delle frazioni algebriche ridotte al **minimo comune denominatore**

**3)** Si eseguono tutte le operazioni indicate nel numeratore, si riducono i termini simili e si decompone in fattori primi il polinomio trovato. Se possibile, si semplifica la frazione ottenuta.

$$\begin{aligned} \frac{5}{x^2 - 2x} - \frac{4x(x + 2)}{x^2 - 4} + \frac{3x + 5}{2x} &= \frac{5}{x(x - 2)} - \frac{4x(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{3x + 5}{2x} = \\ &= \frac{10 - 8x^2 + (3x + 5)(x - 2)}{2x(x - 2)} = \frac{10 - 8x^2 + 3x^2 - 6x + 5x - 10}{2x(x - 2)} = \frac{-5x^2 - x}{2x(x - 2)} = \\ &= \frac{-x(5x + 1)}{2x(x - 2)} = \frac{-(5x + 1)}{2(x - 2)} = \frac{5x + 1}{2(2 - x)} \end{aligned}$$

## Moltiplicazione di due o più frazioni algebriche

Il prodotto di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

### OSSERVAZIONE

Conviene, per prima cosa, decomporre in fattori primi il numeratore ed il denominatore di ciascuna frazione, poi si semplifica ed infine si esegue la moltiplicazione.

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - x^2}{a + b} \cdot \frac{x(a^2 - b^2)}{a + x} \cdot \frac{-2}{a - x} &= \frac{\cancel{(a+x)} \cancel{(a-x)} \cdot x \cancel{(a+b)} (a-b)}{a + b} \cdot \frac{-2}{\cancel{a-x}} = -2x(a-b) = 2x(b-a) \\ \frac{a^2 - x^2}{a + b} \cdot \frac{x(a^2 - b^2)}{a + x} \cdot \frac{-2}{a - x} &= \frac{(a + x)(a - x) \cdot x(a + b)(a - b)}{a + b} \cdot \frac{-2}{a - x} = -2x(a - b) = \\ &= 2x(b - a) \end{aligned}$$

## Divisione di due frazioni algebriche

Il quoziente di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione algebrica per l'inversa della seconda.

$$\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x + a} : \frac{(x - a)^4}{x + a} = \frac{(x - a)^3}{(x + a)} \cdot \frac{(x + a)}{(x - a)^4} = \frac{1}{x - a}$$

## Potenza di una frazione algebrica

Per elevare a potenza una frazione algebrica basta elevare alla data potenza sia il numeratore che il denominatore.

# Algebra

$$\left[ \frac{(x+y)^2}{a(x-y)^3} \right]^4 = \frac{(x+y)^8}{a^4(x-y)^{12}}$$

## OSSERVAZIONE

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{A}{B}\right)^n} = \frac{1}{\frac{A^n}{B^n}} = \frac{B^n}{A^n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n$$

## Identità ed equazioni

Dicesi **identità** l'uguaglianza tra due espressioni algebriche verificata da tutti i possibili valori numerici assegnati a tutte le lettere che vi figurano. Con parole diverse possiamo dire che l'**identità** è una **uguaglianza incondizionata**. L'uguaglianza  $(2x - y)^2 = y^2 + 4x^2 - 4xy$  è una **identità** in quanto qualunque siano i valori numerici attribuiti alla  $x$  ed alla  $y$  il primo membro è sempre numericamente uguale al secondo membro. Siano  $A(x)$  e  $B(x)$  due generici polinomi in  $x$ . L'uguaglianza  $A(x) = B(x)$  posta allo scopo di stabilire se esistono valori numerici della  $x$  che rendono il primo membro numericamente uguale al secondo membro dicesi **equazione ad una incognita**. Con altre parole possiamo dire che l'**equazione è una uguaglianza condizionata**, cioè una uguaglianza verificata un numero finito di volte. L'uguaglianza  $x + 1 = 2x$  è una **equazione** in quanto l'uguaglianza tra i polinomi  $x + 1$  e  $2x$  si verifica una sola volta, precisamente quando attribuiamo alla  $x$  il valore **1**.

**Osservazione:** Una **identità** esprime un **teorema**, una **equazione** esprime un **problema**

La variabile che figura nell'equazione dicesi **incognita** dell'equazione. I valori dell'incognita che verificano l'equazione sono le **soluzioni** o **radici** dell'equazione. L'espressione algebrica scritta alla sinistra del segno di uguaglianza  $\ll = \gg$  dicesi **primo membro** dell'equazione l'altra, posta alla destra del segno  $=$ , dicesi **secondo membro**. **Risolvere** una equazione significa trovare le soluzioni dell'equazione. Una equazione i cui termini hanno soltanto coefficienti numerici dicesi **equazione numerica**, mentre dicesi **equazione letterale** se almeno un termine di essa ha coefficiente letterale. Una **equazione** si dice **intera** se l'incognita non figura in nessun denominatore, altrimenti dicesi **fratta** o **frazionaria**. Due equazioni si dicono **equivalenti** se ogni soluzione della prima è soluzione della seconda e viceversa ogni soluzione della seconda è anche soluzione della prima. La risoluzione delle equazioni si basa su alcuni principi fondamentali:

**Primo principio di equivalenza** Aggiungendo o togliendo ad ambo i membri di una equazione una stessa espressione algebrica si ottiene una equazione equivalente alla data. In simboli abbiamo:

# Algebra

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \pm M(x) = B(x) \pm M(x)$$

Dal principio di equivalenza si deducono i seguenti corollari

**COROLLARIO N°1** In una equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno

**COROLLARIO N°2** Se nei due membri di un'equazione figurano due termini uguali e con lo stesso segno, essi si possono eliminare

**Secondo principio di equivalenza** Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per un numero diverso da zero o per una espressione algebrica diversa da zero e non contenente l'incognita si ottiene una equazione equivalente alla data.

**COROLLARIO** Cambiando il segno a tutti i termini del primo e del secondo membro di un'equazione (il significa **moltiplicare ambo i membri per -1**) si ottiene una equazione equivalente alla data.

**Terzo principio** Una equazione che sia il prodotto uguagliato a zero di polinomi contenenti l'incognita è equivalente alle equazioni che si ottengono uguagliando a zero i singoli polinomi

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ oppure } B(x) = 0 \text{ oppure } C(x) = 0$$

**OSSERVAZIONE** Ogni equazione  $A(x) = B(x)$  può essere ricondotta alla seguente forma:

$$P(x) = 0 \text{ dove } P(x) \text{ è un polinomio di grado } n \text{ che dicesi anche } \mathbf{grado \text{ dell'equazione.}}$$

Infatti basta eseguire tutte le operazioni indicate nei due membri dell'equazione, portare tutti i termini ottenuti al primo termine e sommare i termini simili.

## Equazione di primo grado ad una incognita

E' una equazione riconducibile alla seguente forma:  $ax = b$  [\*]

La soluzione dell'equazione [\*] è una frazione che ha per numeratore il termine noto del secondo

membro e per denominatore il coefficiente dell'incognita, cioè:  $x = \frac{b}{a}$

$$\frac{14x - 9}{11} - \frac{1}{3} \left[ \frac{17}{2}x - (5 - 4x) \right] = \frac{1}{2} - \frac{8x + 1}{3}$$

$$\frac{14x - 9}{11} - \frac{1}{3} \left( \frac{17x - 10 + 8x}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{8x + 1}{3}, \quad \frac{14x - 9}{11} - \frac{25x - 10}{6} = \frac{1}{2} - \frac{8x + 1}{3}$$

$$6(14x - 9) - 11(25x - 10) = 33 - 22(8x + 1), \quad 84x - 54 - 275x + 110 = 33 - 176x - 2$$

$$84x - 275x + 176x = 33 - 22 + 54 - 110, \quad -15x = -45, \quad 15x = 45, \quad x = \frac{45}{15} = 3$$

$x = 3$  è la **soluzione** dell'equazione data.

# Algebra

La **verifica** dell'equazione si effettua nella seguente maniera:

- 1)** nell'equazione data al posto della  $x$  si sostituisce la soluzione trovata
- 2)** si eseguono tutti i calcoli nel primo membro e nel secondo membro dell'equazione
- 3)** il membro deve essere numericamente uguale al secondo membro

$$\frac{14 \cdot 3 - 9}{11} - \frac{1}{3} \left[ \frac{17 \cdot 3}{2} - (5 - 4 \cdot 3) \right] = \frac{1}{2} - \frac{8 \cdot 3 + 1}{3}, \quad \frac{42 - 9}{11} - \frac{1}{3} \left( \frac{51}{2} + 7 \right) = \frac{1}{2} - \frac{25}{3}$$

$$3 - \frac{65}{6} = \frac{3 - 50}{6}, \quad -\frac{47}{6} = -\frac{47}{6}$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x^2}{x^2-1} \quad x \neq \pm 1 \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}, \quad m.c.m. = (x+1)(x-1)$$

$$(x+1)^2 - 3(x-1) = x^2, \quad x^2 + 2x + 1 - 3x + 3 = x^2, \quad x = 4$$

$$\frac{6x}{16x^2-9} - \frac{5x-3}{6x-8x^2} + \frac{2x+9}{8x^2+6x} = \frac{5}{4x-3}$$

$$\frac{6x}{(4x+3)(4x-3)} - \frac{5x-3}{2x(3-4x)} + \frac{2x+9}{2x(4x+3)} = \frac{5}{4x-3}$$

$$\frac{6x}{(4x+3)(4x-3)} + \frac{5x-3}{2x(4x-3)} + \frac{2x+9}{2x(4x+3)} = \frac{5}{4x-3} \quad m.c.m. = 2x(4x+3)(4x-3)$$

$$x \neq 0, \quad x \neq \pm \frac{3}{4} \quad 12x^2 + (5x-3)(4x+3) + (2x+9)(4x-3) = 10x(4x+3)$$

$$12x^2 + 20x^2 + 15x - 12x - 9 + 8x^2 - 6x + 36x - 27 = 40x^2 + 30x$$

$$15x - 12x - 6x + 36x - 30x = 9 + 27, \quad 3x = 36, \quad x = \frac{36}{3} = 12$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{3}{x} - \frac{1}{2x-4} - \frac{1}{2x+4} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-4}$$

$$\frac{3}{2x} - \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+2)(x-2)}, \quad m.c.m. = 4x(x+2)(x-2), \quad x \neq 0, x \neq \pm 1$$

$$6(x^2-4) - x(x+2) - x(x-2) = 4(x^2-4) - 4x, \quad 6x^2 - 24 - x^2 - 2x - x^2 + 2x = 4x^2 - 16 - 4x$$

$$-2x + 2x + 4x = -16 + 24, \quad 4x = 8, \quad x = 2 \quad (\text{R.N.A.})$$

## Disequazioni razionali intere di primo grado ad una incognita

Sono disequazioni che possono essere ricondotte ad una delle seguenti forme:

$$ax > b$$

$$ax < b$$

# Algebra

Per risolvere una inequazione di primo grado ridotta a forma canonica basta dividere ambo i membri per  $a$ , ricordando di cambiare il senso della disequazione se è  $a < 0$ .

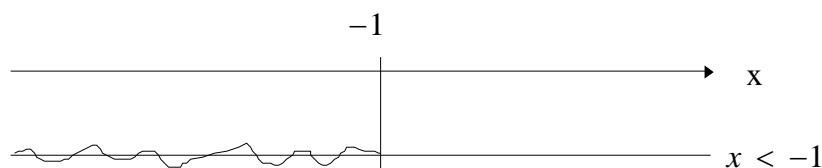
$$ax > b \Rightarrow x > \frac{b}{a} \text{ se } a > 0, \quad x < \frac{b}{a} \text{ se } a < 0$$

$$ax < b \Rightarrow x < \frac{b}{a} \text{ se } a > 0, \quad x > \frac{b}{a} \text{ se } a < 0$$

ESEMPI

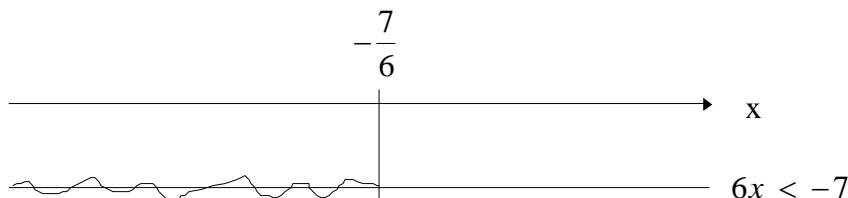
$$\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} > \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3} \quad \text{per } x < -1$$

$$6 - 3x - 12 - 6x > 6x + 21 - 8x - 20 \quad ; \quad -7x > 7, \quad 7x < -7 \quad ; \quad x < -1$$



$$(x+1)^3 + 3x + 3 < x^3 + 3(x+1)(x-1) \quad \text{per } x < -\frac{7}{6}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x + 3 < x^3 + 3x^2 - 3, \quad 6x < -7, \quad x < -\frac{7}{6}$$



Per le disequazioni valgono i seguenti **principi di equivalenza**:

## 01) Principio preliminare

Operando secondo le regole del calcolo algebrico all'interno del primo o del secondo membro o di entrambi i membri di una inequazione otteniamo una inequazione equivalente alla data.

## 02) Principio di addizione e di sottrazione

Se  $p(x)$  è un polinomio in  $x$  allora è valido il seguente **teorema fondamentale**:

$$f(x) \gtrless g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm p(x) \gtrless g(x) \pm p(x)$$

Da questo teorema si deducono i due seguenti **corollari**:

**a)** Se nei due membri di una stessa inequazione compaiono due termini uguali, questi si possono eliminare

**b)** un qualsiasi termine di una inequazione può essere trasportato da un membro all'altro

purchè lo si cambi di segno

## 03) PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE E DI DIVISIONE

Esso afferma quanto segue:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow m \cdot f(x) \geq m \cdot g(x) \quad \forall m \in \mathbb{R}^+$$

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{m} \geq \frac{g(x)}{m} \quad \forall m \in \mathbb{R}^+$$

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow k \cdot f(x) \leq k \cdot g(x) \quad \forall k \in \mathbb{R}^-$$

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{k} \leq \frac{g(x)}{k} \quad \forall k \in \mathbb{R}^-$$

Per  $k = -1$  abbiamo

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow -f(x) \leq -g(x)$$

cioè possiamo cambiare il segno a tutti i termini di una inequazione purché ne cambiamo il senso.

Le disequazioni  $f(x) \geq g(x)$  e  $f(x) - g(x) \geq 0$  sono **equivalenti**, per cui una qualsiasi

inequazione può essere ricondotta alla seguente **forma canonica** :

$$P(x) > 0$$

Se  $P(x)$  è un polinomio ridotto a forma canonica, allora il suo grado dicesi **grado** dell'inequazione razionale intera.

## Sistema di primo grado a due incognite

Sistema di primo grado a due incognite è l'insieme di due equazioni di primo grado a due incognite di cui vogliamo trovare , quando esiste , la **soluzione comune** . Ridotto a forma **normale** o

**canonica** o **tipica**, assume la seguente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

dove  $x$  ed  $y$  sono le **incognite**,  $a$  ed  $a_1$  sono i coefficienti dell'incognita  $x$ ,  $b$  e  $b_1$  sono i **coefficienti dell'incognita  $y$** ,  $c$  e  $c_1$  sono i **termini noti**.

Un sistema di primo grado a due incognite può essere risolto con 4 metodi diversi :

1) **metodo del confronto** 2) **metodo di sostituzione** 3) *metodo di addizione e sottrazione* detto anche metodo di riduzione 4) **metodo di Cramer** .

## METODO DI SOSTITUZIONE

Si procede come segue:

**1)** Si risolve una delle due equazioni rispetto alla  $x$  (rispetto alla  $y$ )

**2)** L'espressione così ricavata si sostituisce nell'altra equazione al posto della  $x$  (della  $y$ ) .

Si ottiene una equazione di primo grado in  $y$  ( $x$ ) la cui soluzione dà il valore della  $y$  ( $x$ )

## Algebra

**3)** Il valore trovato per la  $y$  (per la  $x$ ) viene sostituito nell'espressione precedentemente trovata, pervenendo così al valore della  $x$  (della  $y$ ).

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4 - 3y \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4-3y}{2} \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad -5\left(\frac{4-3y}{2}\right) + y = 7 \quad \frac{-20 + 15y}{2} + y = 7$$

$$-20 + 15y + 2y = 14 \quad , \quad 17y = 20 + 14 \quad , \quad 17y = 34 \quad , \quad y = \frac{34}{17} = 2$$

$$x = \frac{4 - 3y}{2} = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\boxed{x = -1, y = 2}$$

### METODO DEL CONFRONTO

Si procede come segue:

- 1)** Si risolvono le due equazioni del sistema rispetto alla medesima incognita, ad esempio rispetto ad  $x$
- 2)** Si uguagliano le due espressioni algebriche ottenute e si perviene ad una equazione di primo grado in  $y$
- 3)** Si risolve questa equazione ottenendo il valore della  $y$ , cioè si ottiene  $y = y_0$
- 4)** Il valore dell'altra incognita (nel nostro caso  $x$ ) si ottiene sostituendo quello trovato  $y_0$  in una qualsiasi delle due espressioni precedentemente trovate.

$$\begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{7y + 27}{3} \\ x = \frac{-2y + 4}{5} \end{cases} \quad \frac{7y + 27}{3} = \frac{-2y + 4}{5} \quad , \quad 35y + 135 = -6y + 12$$

$$35y + 6y = -135 + 12 \quad , \quad 41y = -123 \quad , \quad y = -\frac{123}{41} = -3$$

$$x = \frac{7(-3) + 27}{3} = \frac{-21 + 27}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad , \quad x = 2 \quad , \quad y = -3$$

### METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE (o di riduzione o della combinazione lineare)

Si procede come segue:

- 1)** Se vogliamo ricavare la  $x$  allora bisogna eliminare la  $y$
- 2)** Si calcola il **m.c.m.** tra i coefficienti della  $y$ , cioè tra  $b$  e  $b_1$ . Sia  $k = m.c.m.(b, b_1)$ .

Si moltiplicano ambo i membri della prima equazione per  $\frac{k}{b}$  ed ambo i membri

della seconda equazione per  $\frac{k}{b_1}$ . Otteniamo due equazioni nelle quali i termini

contenenti la  $y$  hanno coefficienti uguali od opposti.



## Algebra

**3)** Sommiamo o sottraiamo ambo i membri delle due equazioni così ottenute pervenendo ad una equazione di primo grado nella  $x$ , risolta la quale otteniamo il valore della  $x$ , ad esempio  $x = x_0$ .

**4)** Il valore dell'altra incognita (nel nostro caso la  $y$ ) può essere determinato con un procedimento analogo, oppure sostituendo il valore trovato  $x_0$  in una delle due equazioni del sistema e risolvendo l'equazione ad una incognita (nel nostro caso in  $x$ ) che ne risulta

$$\begin{cases} 2 \{ 3x - 7y = 27 \\ 7 \{ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$m.c.m.(7,2) = 14 \quad , \quad \frac{14}{2} = 7 \quad , \quad \frac{14}{7} = 2$$

$$\begin{cases} 6x - 14y = 54 \\ 35x + 14y = 28 \\ \hline 41x \quad \quad \neq = 82 \end{cases}$$

$$\text{sommiamo membro a membro} \quad , \quad x = \frac{82}{41} = 2$$

$$\begin{cases} 5 \{ 3x - 7y = 27 \\ 3 \{ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$m.c.m.(3,5) = 15 \quad , \quad \frac{15}{3} = 5 \quad , \quad \frac{15}{5} = 3$$

$$\begin{cases} 15x - 35y = 135 \\ 15x + 6y = 12 \\ \hline \neq \quad -41y = 123 \end{cases}$$

$$\text{Si sottrae membro a membro} \quad y = -\frac{123}{41} = -3$$

### METODO DI CRAMER

Dati quattro numeri  $a, b, a_1, b_1$  il numero  $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b$  dicesi **determinante**

**del secondo ordine** e si ottiene sottraendo dal prodotto dei termini della diagonale discendente il prodotto dei termini della diagonale ascendente.

Se il sistema che vogliamo risolvere è ridotto a forma canonica, cioè è del tipo: 
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

allora abbiamo:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \text{determinante del sistema} = \text{determinante formato dai coefficienti delle incognite}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = \text{determinante dell'incognita } x = \text{determinante che si ottiene dal determinante}$$

del sistema sostituendo la colonna dei coefficienti della  $x$  con la colonna dei termini noti

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \text{determinante dell'incognita } y = \text{determinante che si ottiene dal determinante}$$

del sistema sostituendo la colonna dei coefficienti della  $y$  con la colonna dei termini noti

# Algebra

Le soluzioni del sistema dato ci vengono fornite dalle due seguenti frazioni :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{54 + 28}{6 + 35} = \frac{82}{41} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 27 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 135}{6 + 35} = -\frac{123}{41} = -3$$

## Numeri reali

Dicesi **numero razionale** un qualsiasi numero che può essere scritto sotto forma di frazione. Sono pertanto **numeri razionali**: **1)** tutti i **numeri interi** **2)** tutti i **numeri decimali limitati** **3)** tutti i **numeri decimali periodici**. Dicesi **numero irrazionale** ogni numero che non può essere scritto sotto forma di frazione. Un numero **razionale** o **irrazionale** dicesi **reale**.

$$\text{numeri reali} \begin{cases} \text{RAZIONALI (numeri frazionari)} \begin{cases} 1) \text{ Numeri interi} \\ 2) \text{ Numeri decimali limitati} \\ 3) \text{ Numeri decimali periodici} \end{cases} \\ \text{IRRAZIONALI} = \text{numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione} = \\ = \text{numeri decimali illimitati e non periodici} \end{cases}$$

### OSSERVAZIONE

Ogni numero irrazionale può essere espresso con esattezza solo mediante il simbolo che lo rappresenta e mai con un numero razionale. Ad esempio, sono irrazionali i seguenti numeri:

$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad \sqrt[3]{11}$$

# Algebra

Quando un numero irrazionale è dato mediante un numero intero o mediante un numero decimale, il valore che l'esprime è un valore **approssimato**.

## Simbolismo di particolari insiemi numerici

$N = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$	insieme dei numeri <b>naturali</b> , zero compreso
$N^* = N_o = \{1,2,3,4,5,\dots\}$	insieme dei numeri naturali, zero escluso
$Z = \{\dots-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\dots\}$	insieme dei numeri <b>interi relativi</b> , zero compreso
$Z^* = Z_o = \{\dots-3,-2,-1,1,2,3,4,5,\dots\}$	insieme dei numeri <b>interi non nulli</b>
	insieme dei numeri interi relativi, zero escluso
$Z^+ = \{1,2,3,4,5,\dots\}$	insieme dei numeri interi positivi
$Z^- = \{\dots-5,-4,-3,-2,-1\}$	insieme dei numeri interi negativi
$Q$	insieme dei <b>numeri razionali relativi</b> , zero incluso
$Q^* = Q_o$	insieme dei <b>numeri razionali relativi</b> , zero escluso
$Q^+$	insieme dei <b>numeri razionali positivi</b>
$Q^-$	insieme dei <b>numeri razionali negativi</b>
$R$	insieme dei <b>numeri reali relativi</b> , zero compreso
$R^+$	insieme dei <b>numeri reali positivi</b>
$R^-$	insieme dei <b>numeri reali negativi</b>
$R - Q$	insieme dei <b>numeri irrazionali relativi</b>
$C$	insieme dei <b>numeri complessi</b>
$Q_a$	insieme dei numeri razionali assoluti, zero compreso
$R_a$	insieme dei numeri reali assoluti, zero compreso

## Radice quadrata aritmetica

Se  $a$  è un numero reale positivo, definiamo **radice quadrata aritmetica** del numero positivo  $a$ , e la indichiamo con la scrittura  $\sqrt{a}$ , il numero reale positivo  $x$  il cui quadrato è uguale ad  $a$ , cioè:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a \quad \forall a, x \in R^+$$

# Algebra

Leggiamo **radice quadrata di a**.

<<L'operazione mediante la quale si passa dal numero reale **a** alla sua radice quadrata aritmetica **x** si chiama **estrazione di radice**>>.

## Radice quadrata algebrica

Finora abbiamo supposto che **a** sia un numero reale positivo e che il risultato dell'estrazione della radice quadrata aritmetica sia unico ed espresso da un numero reale positivo, cioè la radice quadrata aritmetica di un numero positivo esiste sempre ed è un numero positivo. Adesso abbandoniamo tale ipotesi restrittiva e supponiamo che  $a \in R$ , cioè supponiamo che **a** sia un numero reale relativo.

Definiamo **radice quadrata algebrica** del numero reale relativo **a**, il numero reale relativo **x** (se esiste) che ha come quadrato il numero a.

$$\sqrt{a}=x \Leftrightarrow x^2=a \quad \forall a,x \in R$$

Abbiamo visto che la **radice quadrata aritmetica** di un numero positivo esiste sempre e rappresenta un solo valore positivo. Per i **radicali algebrici** le cose vanno diversamente:

### 1) radicando positivo ( $a > 0$ )

In questo caso il simbolo  $\sqrt{a}$  rappresenta due valori espressi da due numeri opposti.

$$\sqrt{4} = \pm 2 \quad \text{Infatti: } (\pm 2)^2 = 4$$

### 2) radicando negativo ( $a < 0$ )

La radice quadrata algebrica di un numero reale negativo non esiste nell'insieme dei numeri reali, cioè se  $a \in R^-$ , il simbolo  $\sqrt{a}$  non ha significato in quanto non esiste nessun numero reale relativo il cui quadrato è un numero negativo.  $\sqrt{-4}$  non esiste nell'insieme dei numeri reali relativi in quanto non è possibile trovare un numero reale relativo il cui quadrato è  $-4$ .

### OSSERVAZIONE N°1

Il simbolo  $\sqrt{a}$  è utilizzato tanto per indicare un **radicale aritmetico** quanto per utilizzare un radicale algebrico. Si dovrebbero usare simboli diversi come avviene in altre nazioni:

$\sqrt{a} =$  **radice quadrata aritmetica** del numero reale **a**,

$\sqrt{a} =$  **radice quadrata algebrica** del numero reale **a**

# Algebra

$\sqrt{a}^*$  = **radice quadrata complessa** del numero reale **a**, o radice quadrata del numero reale **a** nell'insieme dei numeri complessi.

La consuetudine italiana attribuisce al simbolo  $\sqrt{a}$  il significato di **radice quadrata aritmetica**; nel caso in cui il simbolo  $\sqrt{a}$  va considerato come **radicale quadrata algebrico** bisogna dichiararlo esplicitamente.

## OSSERVAZIONE N° 2

In **R** il simbolo  $\sqrt{a}$  può avere due significati:

- 1)** quello di **radice quadrata aritmetica** se  $a \in R^+$  ed allora il simbolo rappresenta un **solo numero positivo**
- 2)** quello di **radice quadrata algebrica** se  $a \in R$  ed allora il simbolo può rappresentare **due numeri relativi opposti, un solo numero relativo, nessun numero reale relativo.**

## I numeri complessi

Noi sappiamo che la radice quadrata di un numero negativo non esiste nel campo dei numeri reali. Infatti  $\sqrt{-4}$  non esiste in **R** in quanto non è possibile trovare un numero reale il cui quadrato è  $-4$ . Per rendere possibile l'estrazione di radice ad indice pari di un numero reale negativo si introducono i **numeri immaginari**. Si pone per definizione:  $\sqrt{-1} = i$  cioè:  $i^2 = -1$ . Il simbolo **i**, che rappresenta la radice quadrata del numero  $-1$ , è detto **unità immaginaria**.

Si definisce poi **numero immaginario** il simbolo  $bi$ , che esprime il prodotto del numero reale **b** per l'unità immaginaria **i**. Infine, dicesi **numero complesso** la somma di un numero reale **a** e di un numero immaginario  $bi$ . Un **numero complesso** assume la seguente forma:  $a + bi$

Alla luce di quanto detto possiamo affermare che nell'insieme dei numeri complessi esiste sempre la radice quadrata di un numero negativo. Il simbolo  $\sqrt{-4}$ , nell'insieme **C**, rappresenta due numeri immaginari opposti. Infatti:  $\sqrt{-4} = \pm 2i$  in quanto:  $(\pm 2i)^2 = (\pm 2) \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

# Algebra