Il concetto di insieme ed i primi elementi di logica matematica

- I concetti di **insieme** e di *elemento di un insieme* sono **concetti primitivi**, cioè non definibili mediante altri concetti più semplici. Il termine **insieme** è sinonimo di collezione, raccolta, aggregato. Cantor scrisse: << *Un insieme è una collezione di oggetti determinati e distinti, facenti parte del mondo della nostra intuizione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono* **elementi** *dell'insieme* >>. Questa, però, non è la definizione di insieme ma è soltanto la sua descrizione in quanto non è stato definito il significato di collezione mediante nozioni più semplici. Un insieme esiste come ente matematico quando è possibile stabilire se un dato oggetto è o non è elemento dell'insieme. Concludendo possiamo affermare che un **insieme è individuato** quando è assegnata una **legge** o una **proprietà caratteristica** in base alla quale è possibile stabilire in maniera univoca se un elemento appartiene o non appartiene all'insieme. E' importante tenere presente che la **proprietà caratteristica** deve essere tale da costituire un vero e proprio **criterio** in base al quale si possa stabilire con certezza l'appartenenza o la non appartenenza di un elemento ad un insieme.

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino: **A, B, C, D, E, F, G, ...**

Gli **elementi di un insieme** si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto latino: **x, y, a, b, c..**

Di solito noi avremo a che fare con uno dei seguenti insiemi numerici :

$N = \{0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}$ = insieme dei **numeri naturali**

$Z = \{\cdots\cdots,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}$ = insieme dei **numeri interi relativi**

Q = insieme dei **numeri razionali** , **R** = insieme dei **numeri reali**

C = insieme dei **numeri complessi**

Se **G** é un insieme, con la scrittura $x \in G$ (si legge : **x appartiene** a G, oppure, **x è un elemento dell'insieme G**) si indica che **x** è uno degli elementi che costituiscono l'insieme **G**. Il segno $\in$ è detto simbolo di appartenenza. Il simbolo $\notin$ è la negazione della relazione di appartenenza. Con la scrittura $x \notin G$ (si legge: x non appartiene a G) si vuole significare che l'elemento **x** non fa parte dell'insieme G. Esempi: $2 \in N$, $\frac{1}{4} \notin N$.

$a \in A$ a appartiene ad A $m \in A$ m appartiene ad A

$b \notin A$ b non appartiene ad A $c \notin A$ c non appartiene ad A

Chiamiamo insieme vuoto l'insieme privo di elementi. Esso viene indicato col simbolo $\varnothing$. Due insiemi **A** e **B** si dicono uguali e si scrive $A=B$ quando sono costituiti dagli stessi elementi, cioè quando ogni elemento di **A** è un elemento di **B** ed ogni elemento di **B** è un elemento di **A**.

Sono uguali gli insiemi $A=\{a,b,d\}$ e $B=\{d,a,b\}$. L'ordine secondo il quale vengono scritti gli elementi di un insieme è ininfluente.

- Le frasi **qualunque sia** oppure **per ogni** ed equivalenti si esprimono col simbolo $\forall$ detto **quantificatore universale**. Cosi la scrittura $\forall\ x \in A$ si legge: <<per ogni elemento **x** appartenente all'insieme **A**>> oppure <<qualunque sia l'elemento **x** appartenente all'insieme **A**>>. Analogamente la scrittura $\forall\ x, y \in A$ si legge: <<qualunque siano gli elementi **x** ed **y** appartenenti all'insieme A>> .
- Spesso la frase << **tale che** >> si indica con uno dei seguenti simboli << | >> oppure << : >>
- Le frasi <<**esiste almeno un**>> ed equivalenti si indicano col simbolo $\exists$ detto **quantificatore esistenziale**. Cosi la scrittura $\exists\ x \in A$ si legge << *esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme* A>>. La frase <<**esiste ed è unico**>> viene indicata col simbolo $\exists^*$ (oppure col simbolo $\exists!$) . Ad esempio la scrittura $\exists^*\ x \in N : x + 2 = 8$ si legge << *esiste ed è unico il numero x tale che* $x + 2 = 8$ >> . Il numero in questione è il numero 6 . La scrittura $\exists\ x \in A :$ $(\exists\ x \in A \,|)$ si legge: << *esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme A tale che*>>.

Due importanti **connettivi logici** che compongono due proposizioni sono:

- **e** (sarebbe l'**et** latino) con cui si forma la proposizione p e q (p et q) che viene indicata col simbolo $p \wedge q$
- **o** con cui si forma la proposizione p o q che viene indicata col simbolo $p \vee q$

La rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere rappresentato in diverse maniere:

1) Rappresentazione tabulare o per elencazione

Questa rappresentazione consiste nell'elencare tutti gli elementi che appartengono all'insieme racchiudendoli tra parentesi graffe e separandoli con una virgola. Con questo tipo di rappresentazione occorre tenere presente che uno stesso elemento non deve essere ripetuto più volte: gli elementi di un insieme debbono essere tutti distinti

Esempi: $A = \{a, e, i, o, u\}$ = rappresentazione tabulare dell'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano $B = \{1, 3, 8, 17, 25\}$

Quando dobbiamo rappresentare per elencazione un insieme infinito, elenchiamo solo alcuni elementi e si mettono dei puntini per indicare gli altri infiniti elementi mancanti.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 \cdots\}$ rappresenta l'insieme dei numeri pari

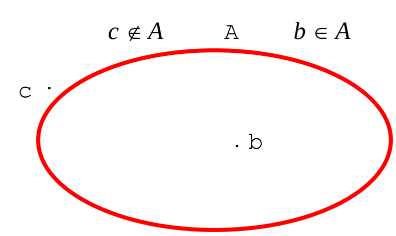
2) Rappresentazione caratteristica

Questa rappresentazione consiste nell'esprimere in modo esplicito una proprietà caratteristica che permetta di stabilire senza ambiguità se un elemento appartiene o non appartiene all'insieme considerato. Si scrive, tra parentesi graffe, un generico elemento x dell'insieme e poi si esplicita la proprietà caratteristica di x, separando la lettera x da questa proprietà con la sbarra | e mediante i due punti : che, simbolicamente rappresentano la frase <<tale che>>.

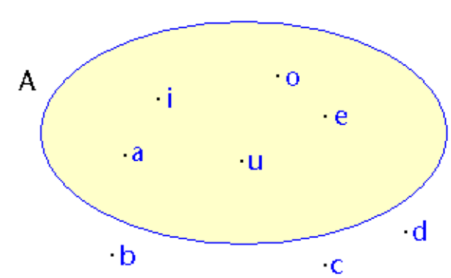
$A = \{x : x < 8 \land x \in N\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Si legge: **A** è l'insieme i cui elementi sono numeri naturali minori di 8, oppure: **A** è l'insieme degli elementi x appartenenti all'insieme dei numeri naturali tali che siano minore del numero 8.

Rappresentazione grafica mediante i diagrammi di Eulero - Venn

Si disegna una linea chiusa priva di nodi nella cui regione interna si immagina siano racchiusi gli elementi dell'insieme. *Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme.* Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all'insieme.



Rappresentazione mediante i diagrammi di **Eulero - Venn** dell'insieme **A** delle vocali dell'alfabeto italiano. Gli elementi inseriti all'interno della linea chiusa appartengono all'insieme considerato, gli elementi lasciati fuori non appartengono all'insieme **A**.



Sottoinsieme di un insieme

Si dice che un insieme **A** è un **sottoinsieme proprio** dell'insieme **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B**, ma esiste almeno un elemento di **B** che non appartiene ad **A**. Questa relazione fra insiemi, detta **relazione d'inclusione stretta**, si scrive: $A \subset B$

e si legge : << **A** è sottoinsieme proprio di **B**, oppure **A** è parte propria di **B**, oppure **A** è incluso (o contenuto) propriamente (o in senso stretto) in **B**. Il simbolo $\subset$ è detto simbolo di **inclusione stretta**. Si dice anche che **B** include o contiene **A** e si scrive $B \supset A$.

Se invece **A** non è incluso in **B** si scrive : $A \not\subset B$ oppure $B \not\supset A$

Dati due insiemi **A** e **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B** si dice che **A** è un **sottoinsieme** di **B** od anche che è contenuto o incluso in **B**. In questo caso scriviamo: $A \subseteq B$ e si legge: <<**A** è un sottoinsieme di **B** oppure **A** è incluso in **B**>> . Il simbolo $\subseteq$ è il **simbolo di inclusione larga** nel senso che questa volta non si esclude che ogni elemento di **B** possa appartenere ad **A** . Si legge: <<L'insieme **A** è contenuto o coincide con l'insieme **B**>>. Dalla definizione di sottoinsieme si deduce che fra i sottoinsiemi di un certo insieme **B** c'è l'**insieme vuoto** $\varnothing$ e c'è l'insieme **B**. Si abbia l'insieme $B = \{a,b,c\}$ I **sottoinsiemi** di **B** sono:

$$\varnothing \ , \ \{a\} \ , \ \{b\} \ , \ \{c\} \ , \ \{a,b\} \ , \ \{a,c\} \ , \ \{b,c\} \ , \ \{a,b,c\}$$

Quando **A** è un sottoinsieme non vuoto di **B** e che non coincide con **B**, si dice che **A** è un *sottoinsieme proprio* di **B**, mentre l'insieme vuoto e l'insieme **B** si chiamano **sottoinsiemi impropri** di **B**. Il simbolo $\subset$ si legge: <<*contenuto*>>.

La relazione di **inclusione in senso largo** gode delle tre seguenti proprietà formali:

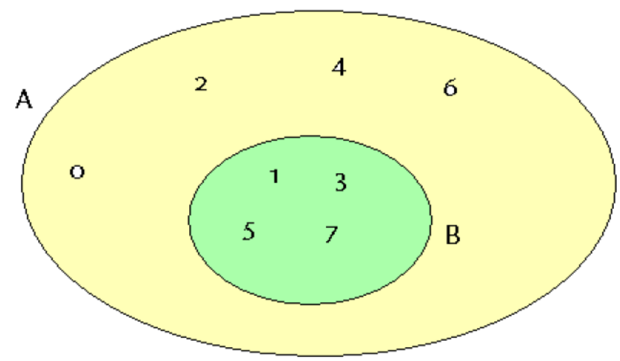
1) RIFLESSIVA : $A \subseteq A$

2) TRANSITIVA : $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \ \Rightarrow \ A \subseteq C$

3) ANTISIMMETRICA : $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A \ \Rightarrow \ A = B$

Un esempio di sottoinsieme:

Consideriamo i due seguenti insiemi: $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ e $B=\{1,3,5,7\}$. Notiamo che ogni elemento di **B** è anche un elemento di **A**. Questo ci consente di affermare che **B** è un sottoinsieme di **A**.



In simboli scriviamo: $B \subset A$ e leggiamo "l'insieme **B** è un sottoinsieme di **A**"; oppure: $A \supset B$ e leggiamo "l'insieme **A** contiene l'insieme **B**".

Insieme ambiente o insieme universo o insieme totale

Quando si assegna un insieme **A** mediante una **proprietà caratteristica** $P(x)$, occorre indicare l'**ambiente** dal quale estrarre gli elementi x dell'insieme. Questo ambiente dal quale preleviamo gli elementi x dell'insieme **A** è, a sua volta, un insieme denominato **insieme ambiente**, o **insieme universo** o **insieme totale** e, di solito, viene indicato col simbolo **U**. Se **U** è l'insieme universo e $P(x)$ la **proprietà caratteristica** che individua l'insieme **A**, scriviamo:

$$A = \{x | P(x) \wedge x \in U\}$$

e leggiamo: << **A** **è l'insieme formato dagli elementi x prelevati dall'insieme U per i quali risulta vera la proprietà caratteristica $P(x)$** >>.

$A = \{x : x = 2n \wedge x \in N\}$ rappresenta l'insieme dei **numeri pari**.

• Diremo che un insieme A è **finito** se esiste un numero naturale n tale che ad A appartengono n elementi, cioè quando non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme. Quindi, si chiamano finiti gli insiemi composti da un numero di elementi che è possibile contare fino all'esaurimento. • L'insieme formato da un solo elemento si dice un **singolo** e si indica col simbolo $\{a\}$. L'insieme formato da due elementi si dice un **paio** e si indica col simbolo $\{a,b\}$. L'insieme privo di elementi si dice **insieme vuoto** e si indica con $\varnothing = \{\,\}$. Tali insiemi sono tutti insiemi finiti. • L'ordine secondo cui sono elencati gli elementi di un insieme non ha importanza, cioè gli insiemi $\{a,b,c\}$ e $\{b,a,c\}$ rappresentano lo stesso insieme.

Diremo invece che A è **infinito** se, qualunque sia il numero naturale n, all'insieme appartengono più di n elementi, cioè un insieme è infinito se può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Intersezione di due o più insiemi

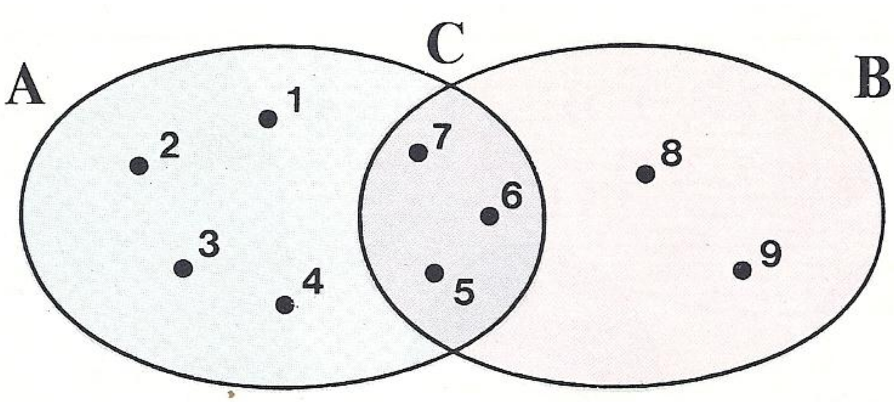
- Dati due insiemi **A** e **B**, l'insieme C formato dagli elementi comuni ad **A** e **B** si chiama **insieme intersezione** o **intersezione** di **A** e **B**. Scriviamo $C = A \cap B$ e leggiamo : << *C è uguale ad* **A** *intersecato* **B**>>. In simboli abbiamo : $C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$\cap$ è il simbolo di **intersezione**

<< **Dire che x appartiene all'intersezione di A con B equivale a dire che x appartiene contemporaneamente ad A e B** >>.

Consideriamo ancora i seguenti insiemi:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.



Si ha: $A \cap B = C$, essendo $C = \{5, 6, 7\}$.
I numeri 5, 6 e 7 sono infatti comuni ai due insiemi.

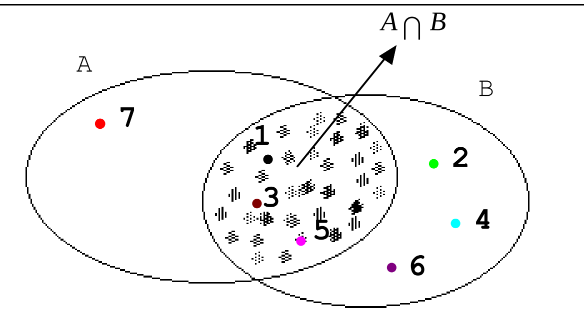
Graficamente l'insieme intersezione è rappresentato dalla parte spruzzata.

$A = \{1,3,5,7\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$C = A \cap B = \{1,3,5\}$

Per convenzione si pone:

$A \cap \varnothing = \varnothing, \ \varnothing \cap A = \varnothing$

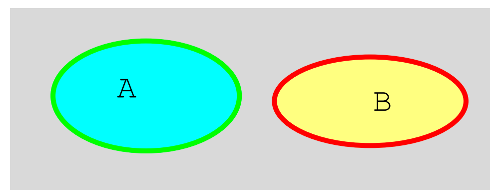


Due insiemi **A** e **B** si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune, cioè se $A \cap B = \varnothing$

Immagine grafica di due insiemi **disgiunti**

$A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow \ A = \varnothing$ oppure $B = \varnothing$

oppure **A** e **B** sono **insiemi disgiunti** .



L'intersezione di due insiemi gode delle seguenti proprietà formali:

1) **proprietà iterativa** o di ***idempotenza*** $A \cap A = A$

2) **proprietà commutativa** $A \cap B = B \cap A$

3) **proprietà associativa** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

La definizione di intersezione si estende anche al caso di tre o più insiemi. L'intersezione degli insiemi $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ è l'insieme C formato dagli elementi comuni a tutti gli insiemi dati -

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap ....A_k$$

Unione di due insiemi

Definiamo **unione** di due insiemi **A** e **B** l'insieme **C** costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, cioè dagli elementi che appartengono ad **A** o **B** o ad entrambi.

(Gli elementi comuni agli insiemi **A** e **B** vanno presi una sola volta). In simboli abbiamo:

$$C = A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

e si legge <<**U** uguale **A** unito **B** >>. Qui il significato di **oppure** ($\vee$)non ha valore esclusivo, cioè il significato di $\vee$ è quello di **vel** latino e non di aut. Quindi un elemento appartiene all'unione se:

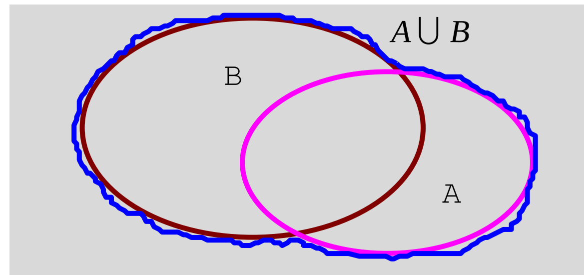
1) appartiene ad **A** **2)** oppure appartiene a **B** **3)** oppure appartiene ad entrambi gli insiemi.

$\bigcup$ è il **simbolo di unione**.

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4\} \Rightarrow C = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$A = \{2,3,4,7\}$, $B = \{5,9\} \Rightarrow C = A \cup B = \{2,3,4,5,7,9\}$

La parte di piano delimitata dal contorno azzurro a tratto pieno rappresenta $A \cup B$



Per l'unione di due insiemi valgono le seguenti **proprietà formali**:

1) $A \cup A = A$ **idempotenza**

2) $A \cup B = B \cup A$ **commutativa**

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ **associativa**

4) $A \cup \varnothing = A$ $\varnothing$ è l'elemento neutro

Si dice unione di più insiemi **A**, **B**, **C**, **D**,... l'insieme X formato dagli elementi appartenenti ad uno almeno di tali insiemi. $X = A \cup B \cup C \cup D ...$

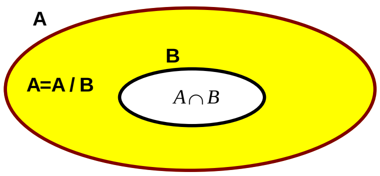
Differenza di due insiemi

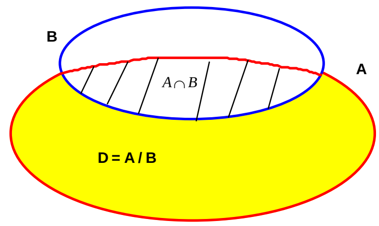
Si dice **differenza** di due insiemi **A** e **B** (in questo ordine) l'insieme **D** costituito dagli elementi dell'insieme **A** che non appartengono all'insieme **B**. In simboli abbiamo:

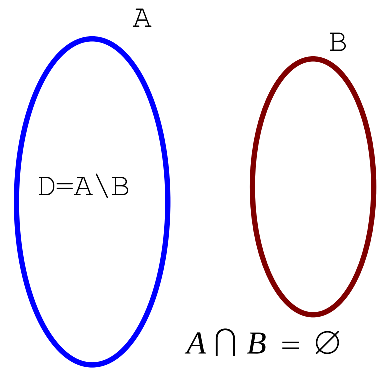
$$D = A \setminus B = A - B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$$

e si legge << **D uguale A meno B** >> .

I seguenti **diagrammi di Eulero-Venn** visualizzano la situazione nei vari casi. La differenza è rappresentata dalla parte di piano riempita con lo spruzzo.







$A \cap B = \varnothing$

$\forall\ A$ risulta : $\quad A - \varnothing = A \quad , \quad A - A = \varnothing \quad , A - B \neq B - A$

Se in particolare risulta $A \subset B$ allora l'insieme differenza $D = A \setminus B$ si dice il **complementare di B rispetto ad A**, si scrive $C_A B$ (vedere **primo diagramma di Eulero-Venn**) e si indica con $C_A B = A \setminus B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$

e si legge: << ***differenza complementare di B rispetto ad A*** >>

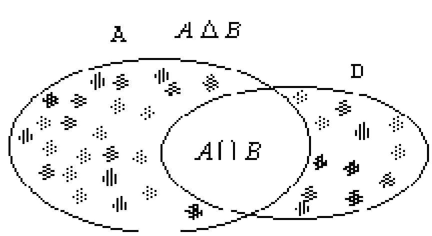
OSSERVAZIONE

Le operazioni di intersezione e di unione corrispondono, volendo fare una analogia con le operazioni aritmetiche, al prodotto ed alla somma.

Si definisce **differenza simmetrica** di due insiemi **A** e **B** l'insieme i cui elementi sono quelli non comuni ad **A** e **B**. In simboli abbiamo:

$$A \,\Delta\, B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \cap B \} = (A - B) \cup (B - A)$$

e si legge : << **differenza simmetrica fra gli insiemi A e B**>>



La **differenza simmetrica** con i **diagrammi di Eulero-Venn**. La parte di piano macchiata rappresenta la differenza simmetrica fra gli insiemi **A** e **B**

Insieme delle parti di un insieme

Si definisce **insieme delle parti** di un insieme non vuoto **A** e si indica col simbolo $P(A)$ l'insieme che ha come elementi tutti i possibili sottoinsiemi di **A**, compresi l'insieme stesso A e l'insieme vuoto $\varnothing$.

Dato l'insieme $A = \{a, b, c\}$, tutti i suoi possibili sottoinsiemi sono:

$$\varnothing \ , \ \{a\} \ , \ \{b\} \ , \ \{c\} \ , \ \{a,b\} \ , \ \{a,c\} \ , \ \{b,c\} \ , \ \{a,b,c\}$$

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Si dimostra che un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi. In particolare, un insieme con 3 elementi ha $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0$ sottoinsiemi, come constatiamo dall'esempio precedente.

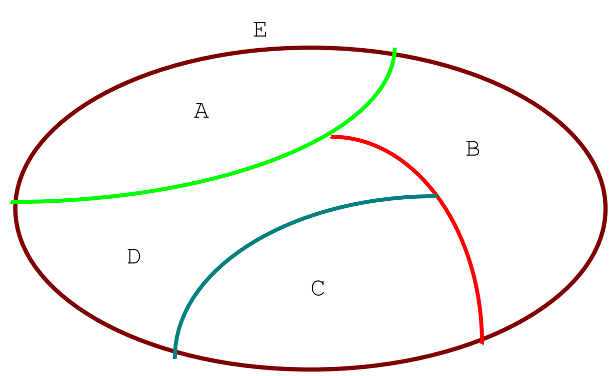
Partizione di un insieme

Dato un insieme **E** consideriamo i suoi sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, che verificano le seguenti condizioni:

1) nessuno dei sottoinsiemi è vuoto **2)** due sottoinsiemi distinti sono **disgiunti**, cioè la loro intersezione è l'insieme vuoto **3)** l'unione di tali sottoinsiemi è l'insieme dato **E**. In tali condizioni si dice che i sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, costituiscono una **partizione** dell'insieme **E**.

- L'insieme dei **numeri naturali pari** e quello dei **numeri naturali dispari** costituiscono una partizione dell'insieme dei numeri naturali.

I sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, costituiscono una **partizione** dell'insieme **E** perché sono insiemi non vuoti a due a due **disgiunti** e la loro unione è l'insieme **E**



Coppie ordinate

Siano dati due insiemi **A** e **B** non vuoti. Col simbolo (a, b) con $a \in A$, $b \in B$ indichiamo una **coppia ordinata** avente come **prima componente** (o **primo elemento**) un elemento $a \in A$ e come **seconda componente** (o secondo elemento) un elemento $b \in B$. Non bisogna fare confusione tra la coppia ordinata (a, b) e l'insieme $\{a, b\}$. Nella coppia ordinata (a, b) è essenziale l'ordine in cui vengono considerate le componenti, mentre nell'insieme $\{a, b\}$ l'ordine in cui si considerano gli elementi non ha importanza. Il concetto di **coppia ordinata** può essere meglio precisato stabilendo un opportuno **criterio di uguaglianza**.

Per i nostri scopi risulta necessario stabilire che due coppie ordinate (a,b) e (c,d) sono **uguali** se, e solo se, $a=c \wedge b=d$.

Prodotto cartesiano

Siano **A** e **B** due insiemi non vuoti (distinti o non). Si chiama **prodotto cartesiano** di **A** per **B** e si indica col simbolo $A\times B$ (si legge **A** cartesiano **B** oppure **A** per **B**) un nuovo insieme che ha per elementi tutte le coppie ordinate che hanno come prima componente un elemento di **A** e come seconda componente un elemento di **B**, cioè: $A\times B=\{(a,b): a\in A\wedge b\in B\}$

$A\times B$ = **prodotto cartesiano di A per B**

Il prodotto cartesiano di un insieme **A** per se stesso si indicherà anche col simbolo A^2.

Risulta pertanto: $A\times A=A^2=\{(a,b): a\in A\wedge b\in A\}$

$$A=\{1,3,5\} \quad , \quad B=\{2,4\} \quad , \quad A\times B=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$$

$$B\times A=\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$$

$$A\times A=A^2=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

Dagli esempi precedenti si può concludere che il prodotto cartesiano non è commutativo, cioè in generale risulta: $A\times B\neq B\times A$ in quanto di tratta di insiemi i cui elementi sono coppie ordinate.

Si può, anzi, dimostrare che se **A** e **B** sono insiemi non vuoti , si ha : $A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=B$

Si può dimostrare che se l'insieme **A** contiene **m** elementi e l'insieme **B** contiene **n**, allora l'insieme $A\times B$ contiene $m\cdot n$ elementi.

E' particolarmente importante il caso in cui il secondo insieme è uguale al primo $A=B$. Allora tra le coppie ordinate di $A\times B=A\times A=A^2$ ve ne sono di quelle costituite dagli stessi elementi, cioè del tipo: (a_1,a_1) , (a_2,a_2) , (a_3,a_3) , (a_4,a_4) ,$\cdots$

Esse costituiscono un sottoinsieme si $A\times A$ detto **sottoinsieme diagonale** di A^2 . Si conviene inoltre di porre: $A\times\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\times A=\varnothing$, $\varnothing\times\varnothing=\varnothing$

Proprietà formali del prodotto cartesiano:

1) proprietà distributiva rispetto all'intersezione:

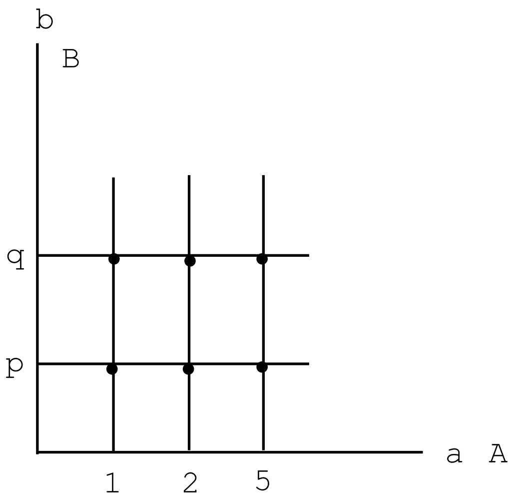
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C) \quad , \quad (A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$

2) proprietà distributiva rispetto all'unione

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad , \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Rappresentazione reticolare di un prodotto cartesiano

Gli elementi (coppie ordinate) di un prodotto cartesiano possono essere indicati mediante i **nodi** delle maglie di un reticolo. Conviene disegnare due semirette fra loro ortogonali e con l'origine in comune, rappresentando sulla semiretta orizzontale a gli elementi dell'insieme **A** e sulla semiretta verticale b tutti gli elementi dell'insieme **B**.



Rappresentazione reticolare del **prodotto cartesiano**

$A \times B = \{(1,p),(1,q),(2,p),(2,q),(5,p),(5,q)\}$

quando $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{p,q\}$

Le rette condotte per i punti di a che rappresentano gli elementi di **A** parallele alla semiretta b e le rette condotte per i punti di b che rappresentano gli elementi di B parallele alla semiretta a individuano dei **nodi** che rappresentano simbolicamente gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

Poiché nel prodotto cartesiano l'ordine è importante , può essere utile convenire di considerare come **primo insieme A** quello rappresentato sulla semiretta a disposta orizzontalmente ed il **secondo insieme** B sulle semiretta b disposta verticalmente .

Il prodotto cartesiano di due insiemi **A** e **B** può essere visualizzato anche mediante una tabella rettangolare, detta **tabella a doppia entrata**, nella quale:

1) ogni riga è contrassegnata da una sola ascissa

2) ogni ascissa contrassegna una sola riga

3) ogni colonna è contrassegnata da una sola ordinata

4) ogni ordinata contrassegna una sola colonna

5) nell'intersezione della riga contrassegnata con $a \in A$ e della colonna contrassegnata con $b \in B$ si colloca la coppia ordinata (a,b).

	p	q
1	$(1,p)$	$(1,q)$
2	$(2,p)$	$(2,q)$
5	$(5,p)$	$(5,q)$

Visualizzazione del **prodotto cartesiano** $A \times B$ mediante una tabella a doppia entrata quando $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{p,q\}$

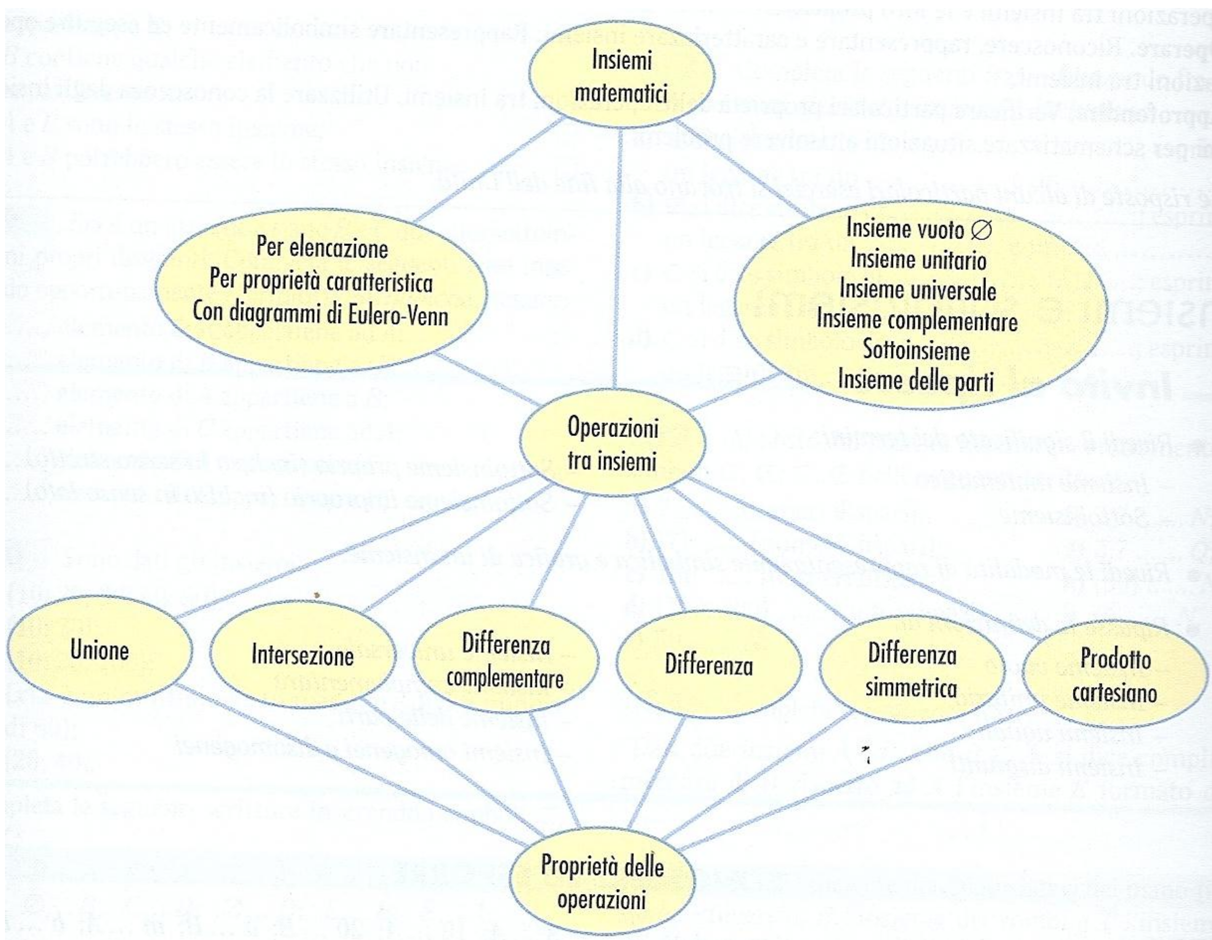
Prospetto riassuntivo dei simboli finora introdotti.

Simbolo di	*Lettura*	*Significato*
appartenenza $\in$	$a \in \mathbf{A}$ a appartiene all'insieme **A**	significa che l'elemento a appartiene all'insieme **A**
non appartenenza $\notin$	$b \notin \mathbf{A}$ b non appartiene all'insieme **A**	significa che l'elemento b non appartiene all'insieme **A**
insieme vuoto $\varnothing$	$\mathbf{A} = \varnothing$ **A** insieme vuoto	significa che l'insieme **A** è privo di elementi
inclusione $\subset$	$\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ l'insieme **B** è incluso in **A**	significa che l'insieme **B** è un sottoinsieme di **A**
intersezione $\cap$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{C}$ **A** intersecato **B** uguale a **C**	significa che l'insieme **C** è costituito dagli elementi che appartengono sia ad **A**, sia a **B**
insiemi disgiunti $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$ **A** intersecato **B** uguale a un insieme vuoto	significa che l'intersezione degli insiemi **A** e **B** è un insieme vuoto, cioè i due insiemi non hanno alcun elemento in comune
unione $\cup$	$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{C}$ **A** unito **B** uguale a **C**	significa che l'insieme **C** ha come elementi tutti gli elementi dei due insiemi **A** e **B** e solo quelli; se **A** e **B** hanno elementi comuni, ciascuno di questi figura una sola volta in **C**

Gli insiemi

Che cosa?	Definito come?	Esempi
Uguaglianza tra insiemi proprietà riflessiva proprietà simmetrica proprietà transitiva	Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi $A = A$ Se $A = B$, allora $B = A$ Se $A = B$ e $B = C$, allora $A = C$	
Sottoinsieme di un insieme Sottoinsieme proprio di un insieme	B è sottoinsieme di A ($B \subseteq A$) se A contiene tutti gli elementi di B B è un sottoinsieme proprio di A ($B \subset A$) se B è un sottoinsieme di A e A non è un sottoinsieme di B	L'insieme dei numeri pari è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali
Differenza tra insiemi Insieme complementare	La differenza tra A e B è l'insieme $A - B$ che contiene solo gli elementi di A che non appartengono anche a B Il complementare $\overline{A}$ di un insieme A contiene tutti gli elementi dell'insieme universo che non appartengono ad A	$\{1, 2, 3, 7, 9\} - \{1, 2, 3\} = \{7, 9\}$ Il complementare rispetto a $\mathcal{N}$ dell'insieme dei numeri pari è l'insieme dei numeri dispari
Unione di insiemi Proprietà commutativa Proprietà associativa	L'unione di A e B è l'insieme $A \cup B$ i cui elementi appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B $A \cup B = B \cup A$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	 $\{1, 2, 3\} \cup \{4, 8, 9\} = \{4, 8, 9\} \cup \{1, 2, 3\}$ $(\{1, 2, 3\} \cup \{4, 8, 9\}) \cup \{7, 9\} =$ $= \{1, 2, 3\} \cup (\{4, 8, 9\} \cup \{7, 9\})$
Intersezione di insiemi Proprietà commutativa Proprietà associativa Proprietà distributiva	L'intersezione di A e B è l'insieme $A \cap B$ i cui elementi appartengono sia ad A sia a B $A \cap B = B \cap A$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	 $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 6\} = \{4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$ $(\{1, 4\} \cap \{2, 4\}) \cap \{4\} =$ $= \{1, 4\} \cap (\{2, 4\} \cap \{4\})$ $\{4\} \cap (\{1, 4\} \cup \{2, 4\}) =$ $= (\{4\} \cap \{1, 4\}) \cup (\{4\} \cap \{2, 4\})$
Corrispondenza biunivoca tra insiemi	Tra due insiemi A e B si può stabilire una corrispondenza biunivoca se a ogni elemento di A si può far corrispondere un solo elemento di B e a ogni elemento di B si può far corrispondere un solo elemento di A	Gli insiemi $\{1, 2, 3\}$ e {uno, due, tre} si possono mettere in corrispondenza biunivoca facendo corrispondere (per esempio): 1. a uno 2. a due 3. a tre
Coppia ordinata Uguaglianza tra coppie ordinate	Insieme di due elementi con un ordine $(a, b) = (c, d)$ se e solo se $a = c$ e $b = d$	$(2, 3) \neq (3, 2)$ $(2, 3) = (x, y)$ se e solo se $x = 2$ e $y = 3$
Prodotto cartesiano di due insiemi	$A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con a elemento di A e b elemento di B	$\{1, 2\} \times \{a, b\} =$ $= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

Insiemi e sottoinsiemi. Operazioni tra insiemi

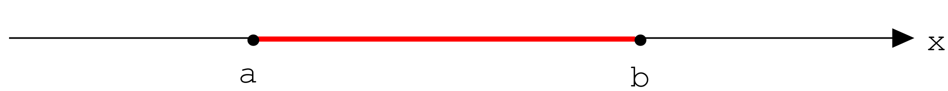


Concetto di intervallo

Detti **a** e **b** due qualsiasi numeri reali con $a < b$, definiamo **intervallo limitato e chiuso** di estremi **a** e **b** il seguente insieme numerico:

$[a,b] = \{x : x \in R \wedge a \le x \le b\}$ = **intervallo limitato e chiuso di estremi a, b**

a è detto **estremo inferiore** (o *estremo sinistro*), **b estremo superiore** (o *estremo destro*), $b - a$ **ampiezza dell'intervallo**, $\frac{b-a}{2}$ **raggio** dell'intervallo, $\frac{a+b}{2}$ **centro** dell'intervallo. Un intervallo limitato e chiuso ha la seguente immagine geometrica:



Se **a** o **b** oppure entrambi non appartengono all'intervallo, allora questi dicesi **aperto**, in particolare abbiamo:

$[a,b[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ a \leq x < b\}$ = intervallo limitato, chiuso a sinistra ed aperto a destra

$]a,b] = \{x : x \in R \ \wedge \ a < x \leq b\}$ = **intervallo limitato, chiuso a destra ed aperto a sinistra**

$]a,b[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ a < x < b\}$ = **intervallo limitato aperto**

L'**immagine geometrica** di un intervallo limitato è un segmento. Esistono anche **intervalli illimitati** per i quali **a** o **b** o entrambi assumono valore infinito.

$[a,+\infty[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x \geq a\}$ = **intervallo illimitato a destra** (o illimitato superiormente) e **chiuso a sinistra** (o di estremo inferiore a)

$]a,+\infty[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x > a\}$ = **intervallo illimitato a destra** (o illimitato superiormente) **ed aperto a sinistra** (o di estremo inferiore a)

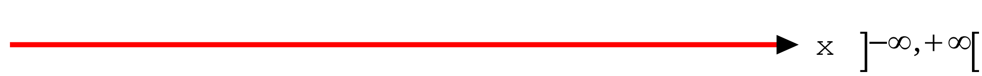
$[-\infty,a] = \{x : x \in R \ \wedge \ x \leq a\}$ = **intervallo illimitato a sinistra** (o illimitato inferiormente) **e chiuso a destra** (o di estremo superiore a)

$[-\infty,a[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x < a\}$ = **intervallo illimitato a sinistra** (o illimitato inferiormente) **e aperto a destra** (o di estremo superiore a)

L'immagine geometrica di uno di questi intervalli illimitati è una semiretta.

$R = \ ]-\infty,+\infty[\ = \{x : x \in R\}$ = **intervallo illimitato**

La sua immagine geometrica è l'intera retta



$R^{+} = \ ]0,+\infty[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x > 0\}$

$R^{-} = \ ]-\infty,0[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x < 0\}$