Elementi di logica matematica

Molte grammatiche definiscono la **proposizione** come "**un giudizio della mente espresso con parole**", cioè da un punto di vista grammaticale la parola proposizione sta ad indicare l'espressione di un pensiero compiuto, formato da almeno un soggetto e da un predicato (cui possono fare eventualmente seguito alcuni complementi). La *logica matematica* respinge questa definizione e per la logica matematica la **proposizione** è una combinazione di parole o di simboli a cui compete uno solo dei seguenti attributi: **vero** o **falso**. Tali attributi saranno simbolicamente indicati con le lettere **V, F**.

Definizione: Nella logica matematica si definisce **proposizione** una frase per la quale si può stabilire se è vera o se è falsa. << Roma è una città bella >> non rappresenta una *proposizione* in quanto non possiamo stabilire se la circostanza è vera o falsa. Rappresenteremo le nostre proposizioni mediante lettere, ad esempio **p, q,**. La terra è un pianeta è una **proposizione vera^**, la luna è una stella è una **proposizione falsa**.

Definizione: Si chiama **variabile logica** ogni lettera utilizzata al posto di una proposizione.

Definizione: Se la proposizione **p** è vera, diremo che il valore di verità di **p** è **V** o anche che il valore di verità di **p** è 1. Se la proposizione **q** è falsa, diremo che il valore di verità di **q** è **F** o anche che il valore di verità di **q** è 0 .

La logica formale alla quale intendiamo riferirci si occupa unicamente di quelle proposizioni alle quali compete uno ed uno solo degli attributi **vero** o **falso**. Si tratta di una **logica bivalente**. In tale logica sussistono ancora i **principi fondamentali della logica aristotelica**, che sono: **(1)** il **principio di identità** secondo il quale ogni oggetto del pensiero logico è identico a se stesso e a nessun altro oggetto **(2)** il **principio di non contraddizione** secondo il quale una proposizione non può essere sia vera che falsa **(3)** il **principio del terzo escluso** (**tertium non datur**) secondo il quale i valori di verità di una proposizione sono soltanto due e sono il **vero** o il **falso** non potendo esistere un terzo valore di verità.

Definizione: Una proposizione si dice **semplice** o **atomica** o **elementare** se non può essere scomposta in proposizioni più semplici; altrimenti si dice **composta** o **molecolare**.

La parte della logica che si occupa delle operazioni con le proposizioni prende il nome di **calcolo delle proposizioni** o **logica delle proposizioni.**

Le tavole di verità

Attribuire un **valore di verità** ad una singola particolare proposizione significa affermare che essa è vera oppure falsa. Se invece consideriamo una proposizione generica **A**, dobbiamo esaminare i casi possibili: **A** è vera, oppure **A** è falsa. In questo caso usiamo una tabella, chiamata tavola di verità formata da una colonna perché la proposizione esaminata è una. Se le proposizioni da analizzare sono due, A e B, si possono presentare i seguenti quattro casi: sono entrambe vere, la prima è vera e la seconda è falsa, la prima è falsa e la seconda è vera, sono entrambe false. Se le proposizioni sono tre, A, B, C si presentano $2^3 = 8$ casi. Se le proposizioni presi in considerazione sono n allora i casi possibili sono 2^n .

A
V
F

A	*B*
V	*V*
V	*F*
F	*V*
F	*F*

A	*B*	*C*
V	*V*	*V*
V	*V*	*F*
V	*F*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*
F	*F*	*F*

I connettivi logici

Abbiamo visto che si possono eseguire operazioni con gli insiemi. Anche con le proposizioni si possono eseguire operazioni: due o più proposizioni si possono connettere tra loro mediante opportuni connettivi in modo da ottenere una nuova proposizioni. Ad ognuno di questi connettivi corrisponde un'operazione elementare. Mediante uno di questi connettivi a due proposizioni date in un certo ordine corrisponde una terza nuova proposizione.

Definizione: Nella logica matematica, due proposizioni **p**, **q** possono essere unite mediante opportune particelle dette **connettivi** o **operatori logici** per formare una nuova proposizione.

Il connettivo $\wedge$, cioè la congiunzione logica

Si definisce **congiunzione** di due proposizioni **p** e **q** e si indica col simbolo $p \wedge q$ (si legge p e q oppure p et q) la proposizione composta che è vera se **p** e **q** sono contemporaneamente vere, mentre è falsa in ogni altro caso.
La tavola di verità della proposizione composta $p \wedge q$ è:

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La prima riga della tavola si legge: “Se p è vera, se q è vera , allora $p \wedge q$ è vera.” La seconda riga si legge: “Se p è vera, se q è falsa , allora $p \wedge q$ è falsa.”

Il connettivo $\vee$, cioè la disgiunzione inclusiva

Si definisce **disgiunzione inclusiva** di due proposizioni p e q e si indica col simbolo $p \vee q$ (si legge “p o q” ed anche “p vel q”) la proposizione composta che è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, ed è falsa se entrambe le proposizioni sono false.
La tavola di verità della proposizione composta $p \vee q$ è:

p	q	p∨q
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il connettivo $\dot{\vee}$, cioè la disgiunzione esclusiva

Si definisce **disgiunzione esclusiva** di due proposizioni p e q e si indica col simbolo $p \dot{\vee} q$ (si legge “p o q” ed anche “p aut q”) la proposizione composta che è vera se una soltanto delle due proposizioni è vera, falsa in tutti gli altri casi.

La tavola di verità della proposizione composta $p \dot{\vee} q$ è:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	*V*	*F*
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il connettivo di negazione $\neg$

La negazione di una proposizione p, che si indica col simbolo $\neg$ (oppure con $\overline{p}$) è la proposizione che è vera se p è falsa ed è falsa se p è vera.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

L'implicazione materiale

Si definisce **implicazione materiale** di due proposizioni p e q e si indica col simbolo $p \rightarrow q$ (si legge "se p….allora q" oppure " p implica q") la proposizione che risulta falsa se solo se p è vera e q è falsa. In tutti gli altri casi è vera.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$A \rightarrow B$
V	V	*F*	V	V
V	F	F	*F*	F
F	V	V	*V*	*V*
F	F	V	V	V

Coimplicazione materiale

Si definisce **coimplicazione materiale** di due proposizioni p e q e si indica col simbolo $p \leftrightarrow q$ (si legge "**p se e solo se q**, oppure **p coimplica q**") la proposizione che è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità ed è falsa in caso contrario.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	*F*
F	F	V

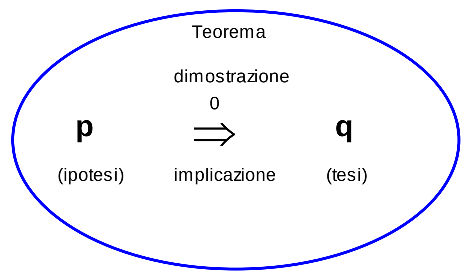
A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La doppia implicazione equivale alla congiunzione di delle due implicazioni $A \to B$ e $B \to A$, come si vede dalla tavola di verità. I valori di verità $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$ coincidono con i valori $A \leftrightarrow B$.

Deduzione logica

Un importantissimo concetto fondamentale è quello di **deduzione o implicazione logica**. Se p e q sono due proposizioni, se dalla verità di p deduciamo, attraverso ragionamenti logici, la verità di q, diciamo che p implica q e scriviamo $p \Rightarrow q$ e questo procedimento del ragionamento logico matematico si chiama **implicazione** o **deduzione logica**. La proposizione p si chiama **ipotesi**, la proposizione q si chiama **tesi**, il ragionamento che ci permette di passare dalla verità di p alla verità di q si chiama **dimostrazione**.

Il simbolo $\Rightarrow$ si dice simbolo di **implicazione logica**. **Ipotesi**, **dimostrazione** e **tesi** costituisco il teorema come risulta dallo schema realizzato nella figura accanto.



A volte succede che si verifichino contemporaneamente le due seguenti implicazioni:

$p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$

In tal caso si dice che le proposizioni p e q sono logicamente equivalenti e si scrive $p \Leftrightarrow q$

Quando una **proposizione** **q** è la conseguenza di una **proposizione** **p** si dice che **p** implica **q** *e si scrive:* $p \Rightarrow q$ (p implica **q**). Questa scrittura vuole dire che << se è vera la proposizione **p** è vera anche la proposizione **q** >>: **p** dicesi **premessa** o ipotesi, **q** **conseguenza** o tesi.

In matematica ogni teorema del tipo: << **p** **è condizione sufficiente per** **q** >> oppure, ed è la stessa cosa, << **q** ***è condizione necessaria per*** **p** >> si può esprimere semplicemente scrivendo:

$p \Rightarrow q$, cioè ogni **teorema** avente **p** come **ipotesi** e **q** come **tesi** si esprime dicendo che **p** è condizione sufficiente per **q**, mentre **q** **è condizione necessaria per** **p** .

Quando l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera si dice che è un TEOREMA, **p** si chiama **ipotesi**, **q** **tesi**.

Quindi, in ogni teorema la verità dell'ipotesi è **condizione sufficiente** per la verità della tesi, mentre la verità della tesi è **condizione necessaria** (ma in generale non sufficiente) per la verità dell'ipotesi; cioè **una condizione sufficiente va posta come ipotesi, una condizione necessaria come tesi**. Il segno $\Rightarrow$ rappresenta il simbolo di **implicazione logica**.

Il simbolo $\not\Rightarrow$ si legge <<**non implica**>>. Se è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$ non è detto che debba risultare vera l'implicazione inversa $q \Rightarrow p$.

Esempio: Paolo è torinese $\Rightarrow$ Paolo è italiano, mentre Paolo è italiano $\not\Rightarrow$ Paolo è torinese .

Se **p** e **q** sono due proposizioni per le quali risulta contemporaneamente $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ allora diremo che le proposizioni **p** e **q** sono equivalenti e scriviamo: $p \Leftrightarrow q$ e leggiamo:

<< **p equivale logicamente a q** >> oppure più semplicemente <<**p equivale a q** >> oppure <<**p coimplica q** >>.

$\Leftrightarrow$ simbolo di **equivalenza logica** o di *doppia implicazione* o di **coimplicazione**

si legge : << *equivale logicamente* oppure coimplica >> $\not\Leftrightarrow$ non equivale a

In matematica, ogni teorema del tipo << **p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q** >> si può esprimere semplicemente scrivendo: $p \Leftrightarrow q$

La coesistenza di un teorema e del suo inverso determina le cosiddette **condizioni necessarie e sufficienti**. Precisamente una **condizione C**, rispetto ad una proprietà **P** si dice che è:

1) necessaria quando considerando **P** come ipotesi si deduce **C** come tesi

2) sufficiente quando considerando **C** come ipotesi si deduce **P** come tesi

Metodi di dimostrazione di un teorema

Per dimostrare un teorema si utilizzano due tipi di ragionamento: il **metodo diretto** o il **metodo indiretto**, detto anche **ragionamento per assurdo**.

Metodo diretto: La **dimostrazione col metodo diretto** si realizza attraverso una successione di ragionamenti che partendo dalle verità dell'ipotesi (**I**), si perviene alla verità della tesi (**T**).

Metodo indiretto o per assurdo: Il **metodo indiretto** o **ragionamento per assurdo** consiste nel supporre falsa la tesi ($\overline{T}$) e nel dimostrare, attraverso una successioni di ragionamenti corretti, che anche l'ipotesi è falsa ($\overline{I}$). Ma l'ipotesi di un teorema è sempre vera e non può essere negata e quindi la tesi non può essere falsa. Se la tesi non può essere negata è vera ed il teorema è dimostrato.

Bibliografia

(1) Bergamini Trifone Modulo B pag. 30

(2) Tonolini Modulo A pag. 564

(3) Trigiante Fazio Algebra 1 pag. 36

(4) Rosati Matematica 1 a pag 21

(5) Dodero Algebra 1 pag. 21

(6) Campitelli Logica pag. 43