Unità 1

I numeri relativi

I numeri relativi sono quelli preceduti dal segno <<+>> o dal segno <<->>. I numeri positivi sono quelli preceduti dal segno + (zero escluso). I numeri negativi sono quelli preceduti dal segno - (zero escluso). I numeri positivi, quelli negativi e lo zero formano l'insieme dei numeri relativi.

Valore assoluto di un numero relativo

Definiamo valore assoluto o modulo di un numero relativo il numero stesso senza segno.

$$|-7|=7 \quad , \quad |+7|=7 \quad , \quad \left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

Due numeri relativi si dicono concordi (discordi) se hanno (non hanno) lo stesso segno. I numeri relativi -5 e $-\frac{3}{4}$ sono concordi; i numeri $+\frac{3}{4}$ e $-\frac{2}{7}$ sono discordi. Due numeri relativi discordi aventi lo stesso modulo si dicono opposti. I numeri relativi $-\frac{3}{8}$ e $+\frac{3}{8}$ sono opposti.

Confronto di numeri relativi

Due numeri relativi sono uguali se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto.

Per confrontare due numeri relativi, cioè per stabilire se uno di essi è maggiore, uguale o minore dell'altro, si tiene presente quanto segue:

1) di due numeri positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore

2) di due numeri negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore

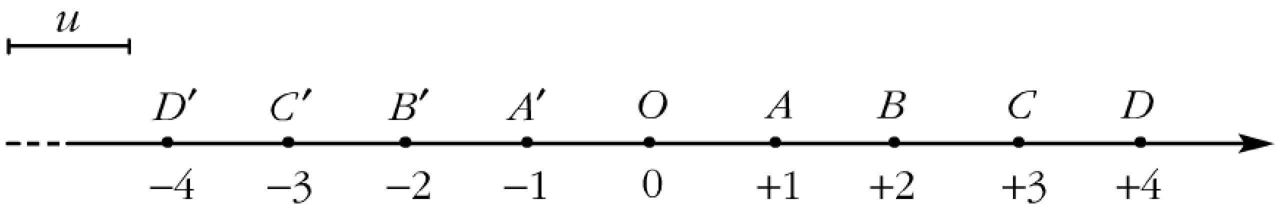
3) ogni numero positivo è maggiore di un qualsiasi numero negativo

4) lo zero è maggiore di ogni numero negativo e minore di ogni numero positivo

Rappresentazione grafica dei numeri relativi

Esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri relativi ed i punti di una retta sulla quale abbiamo fissato una origine **O**, un verso positivo ed una unità di misura.

Il numero associato ad ogni punto di tale retta prende il nome di ascissa del punto. Sulla seguente retta orientata, sulla quale abbiamo fissato l'origine **O**, il verso positivo e l'unità **u**, abbiamo disegnato le immagini di alcuni numeri interi relativi.



Il punto **D** è l'immagine geometrica del numero relativo **+4** che rappresenta l'ascissa del punto **D**.

I numeri relativi si introducono per rendere sempre possibile l'operazione di sottrazione. Infatti dall'aritmetica sappiamo che l'operazione di sottrazione è possibile solo se il sottraendo è minore o uguale al minuendo. In aritmetica l'operazione $8-11$ non è possibile, in algebra, invece, dà come risultato il numero relativo -3, cioè: **8-11=-3**

Numeri reali

Dicesi numero razionale un qualsiasi numero che può essere scritto sotto forma i frazione. Sono pertanto numeri razionali: 1) tutti i numeri interi 2) tutti i numeri decimali limitati 3) tutti i numeri decimali periodici. Dicesi **numero irrazionale** ogni numero che non può essere scritto sotto forma di frazione. Un numero **razionale** o **irrazionale** dicesi reale.

Un numero reale è un qualsiasi numero che è razionale o irrazionale.

$$\text{numeri reali}\begin{cases}\text{RAZIONALI (numeri frazionari)}\begin{cases}\text{1) Numeri interi}\\ \text{2) Numeri decimali limitati}\\ \text{3) Numeri decimali periodici}\end{cases}\\ \\ \text{IRRAZIONALI} = \text{numeri che non si possono scrivere sotto forma di frazione} = \\ \qquad = \text{numeri decimali illimitati e non periodici}\end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Ogni numero irrazionale può essere espresso con esattezza solo mediante il simbolo che lo rappresenta e mai con un numero razionale. Ad esempio, sono irrazionali i seguenti numeri:

$$\sqrt{2} \quad , \quad \pi \quad , \quad \sqrt[3]{11}$$

Quando un numero irrazionale è dato mediante un numero intero o mediante un numero decimale, il valore che l'esprime è un valore **approssimato**.

Simbolismo di particolari insiemi numerici

L'insieme dei numeri interi relativi è indicato col simbolo **Z**

$Z = \{\cdots\cdots -3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ .....insieme dei numeri interi relativi, zero compreso

$\mathbf{Z^+ = \{0,+1,+2,+3,+4,+5,+6\cdots\}}$ rappresenta l'insieme dei numeri interi positivi, zero compreso

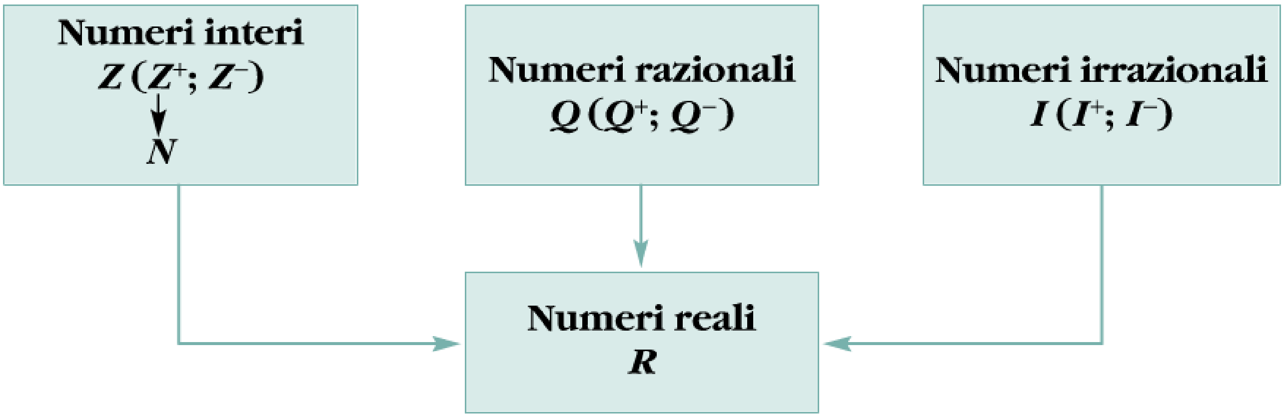
$\mathbf{Z^- = \{-1,-2,-3,-4,-5,-6\cdots\}}$ rappresenta l'insieme dei numeri interi negativi, zero escluso

L'insieme dei numeri razionali relativi è indicato col simbolo **Q**, l'insieme dei numeri razionali positivi è indicato col simbolo $\mathbf{Q^+}$ e quello dei numeri razionali negativi col simbolo $\mathbf{Q^-}$

$\mathcal{J} = \mathbf{R - Q}$ = insieme dei numeri irrazionali

L'insieme dei numeri reali relativi è indicato col simbolo **R**, l'insieme dei numeri razionali positivi è indicato col simbolo $\mathbf{R^+}$ e quello dei numeri razionali negativi col simbolo $\mathbf{R^-}$

Quanto scritto è indicato sinteticamente nella seguente tabella:



Unità 2

Le operazioni con i numeri relativi

Addizione di due numeri relativi

La somma di due numeri positivi (negativi) è un numero positivo (negativo) avente come valore assoluto la somma dei valori assoluti dei due addendi. La somma di due numeri relativi discordi è un numero relativo avente come segno il segno dell'addendo che ha valore assoluto maggiore e come valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e quello minore. Due numeri si dicono opposti quando la loro somma è **zero**.

$$(+8)+(+3)=+11 \qquad (-8)+(-3)=-11 \qquad (+8)+(-3)=+5 \qquad (-8)+(+3)=-5$$

La somma di più di due numeri relativi

Per sommare più di due numeri relativi basta sommare i primi due addendi, la somma ottenuta col terzo addendo e così di seguito fino all'ultimo addendo.

$$(+12)+(-10)+(-5)+(-13)+(+20)=(+2)+(-5)+(-13)+(+20)=(-3)+(-13)+(+20)=$$

$$=(-16)+(+20)=+4$$

Proprietà formali dell'addizione

Proprietà commutativa

La somma di due o più numeri relativi non cambia se si cambia l'ordine degli addendi. In simboli abbiamo: $\mathbf{a+b=b+a}$

Proprietà associativa

La somma di tre o più numeri relativi non cambia se a due o più addendi si sostituisce la loro somma. In simboli abbiamo: $\mathbf{a+b+c=a+(b+c)=a+d}$ con $\mathbf{b+c=d}$

Sottrazione di due numeri relativi

La differenza tra due numeri relativi è uguale al primo numero più l'opposto del secondo. Quindi per effettuare la differenza tra due numeri relativa basta aggiungere al primo l'opposto del secondo.

$$(+8)-(-2)=(+8)+(+2)=+10 \quad , \quad (+8)-(+2)=(+8)+(-2)=+6$$

$$(-8)-(-2)=(-8)+(+2)=-6$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{7}{10}\right)-\left(+\frac{3}{15}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{7}{10}\right)+\left(-\frac{3}{15}\right)=\frac{-18+21-6}{30}=-\frac{3}{30}=-\frac{1}{10}$$

La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.

Moltiplicazione di numeri relativi

Il prodotto di due numeri relativi è uguale al numero relativo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei numeri e come segno quello positivo se i numeri sono concordi, quello negativo se i numeri sono discordi.

REGOLA DEI SEGNI

$+ \quad per \quad + \quad = \quad +$	$(-2) \cdot (-5) = +10$
$- \quad per \quad - \quad = \quad +$	$(-2) \cdot (+5) = -10$
$+ \quad per \quad - \quad = \quad -$	$(+2) \cdot (-5) = -10$
$- \quad per \quad + \quad = \quad -$	$(-2) \cdot (-5) = +10$

OSSERVAZIONE

Due numeri si dicono **reciproci** o **inversi** quando il loro prodotto è **1**. I numeri $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{4}{3}$ sono **reciproci** perché: $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = 1$. Il **reciproco** del numero $\frac{3}{7}$ è il numero $\frac{7}{3}$ in quanto:

$$\left(\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\right) = 1$$

Il **reciproco** di un numero è il numero che si ottiene scambiando il numeratore col denominatore.

Due numeri si dicono **antireciproci** quando il loro prodotto è -1.

Proprietà formali della moltiplicazione

proprietà commutativa	$(-4)\cdot(+5) = (+5)\cdot(-4)$	$a \cdot b = b \cdot a$
proprietà associativa	$(+2)\cdot(-4)\cdot(-3) = (+2)[(-4)\cdot(-3)]$	$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
proprietà dissociativa	$(+12)\cdot(-2) = (+3)\cdot(+4)\cdot(-2)$	$a \cdot b = (c \cdot d) \cdot b$
proprietà distributiva rispetto all'addizione algebrica	$(-6)\cdot[(+3)+(-4)] = (-6)\cdot(+3)+(-6)\cdot(-4)$	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Divisione di due numeri relativi

Il **quoziente** di due numeri relativi è uguale al prodotto del primo numero per il reciproco del secondo .

$$\left(-\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) = +\frac{21}{10}$$

REGOLA DEI SEGNI

$+ \quad diviso \quad + \quad = \quad +$

$- \quad diviso \quad - \quad = \quad +$

$+ \quad diviso \quad - \quad = \quad -$

$- \quad diviso \quad + \quad = \quad -$

Proprietà formali della divisione

proprietà invariantiva	$\cdot(+2) \quad \cdot(+2)$ $(+15):(-3)=(+30):(-6)=-5$ $:(+4) \quad :(+4)$ $(-24):(+12)=(-6):(+3)=-2$	$a:b=(a\cdot c):(b\cdot c)$ $a:b=(a:c):(b:c)$
proprietà distributiva rispetto all'addizione algebrica	$(-14-10+8):(-2)=$ $=(-14):(-2)+(-10):(-2)+(+8):(-2)=$ $=+7+5-4=+8$	$(a+b):c=(a:c)+(b:c)$

Espressioni algebriche numeriche

Si dice espressione algebrica numerica un insieme di numeri relativi legati tra di loro da almeno una delle quattro operazioni, addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione.

Se nell' espressione algebrica numerica sono presenti delle parentesi vanno eliminate prima le parentesi rotonde, poi quelle quadrate ed infine quelle graffe. Per calcolare il valore di una espressione algebrica numerica prima bisogna eseguire le moltiplicazioni e le divisioni e poi le addizioni e le sottrazione, almeno che sia indicato diversamente dalla presenza di opportune parentesi.

OSSERVAZIONE

Per calcolare la potenza di un numero relativo basta ricordare che una potenza è un prodotto di fattori uguali:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=+\frac{16}{81}$$

La potenza di un numero positivo è un numero positivo. La potenza di un numero negativo è un numero positivo se l'esponente è pari, un numero negativo se l'esponente è dispari.

In conclusione possiamo affermare che la potenza di un numero relativo è un numero negativo solo quando la base è negativa e l'esponente è dispari. In tutti gli altri casi è un numero positivo.

Potenza con esponente un numero intero negativo

La potenza di un numero relativo diverso da zero avente come esponente un numero intero negativo è uguale ad una frazione avente come numeratore il numero **1** e come denominatore la stessa potenza con esponente positivo. In simboli abbiamo: $\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ $\quad \left(-\frac{3}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{7}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{27}{343}} = -\frac{343}{27}$ oppure $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-3} = \left(-\frac{7}{3}\right)^3 = -\frac{343}{27}$ basta scambiare il numeratore col denominatore e cambiare contemporaneamente il segno dell'esponente della potenza.

Calcolare il valore delle seguenti espressioni algebriche

$$\left[15 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + 1\right) - \left(-1 - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2} - \frac{11}{4}\right)\right] : \left(-\frac{23}{3}\right) =$$

$$= \left[15 \cdot \left(\frac{10 - 9 + 15}{15}\right) - \left(\frac{-4 - 3}{4}\right) : \left(\frac{5 - 4 - 22}{8}\right)\right] : \left(-\frac{23}{3}\right) =$$

$$= \left[\cancel{15}^{1} \cdot \left(+\frac{16}{\cancel{15}_{1}}\right) - \left(-\frac{7}{4}\right) : \left(-\frac{21}{8}\right)\right] : \left(-\frac{23}{3}\right) =$$

$$= \left[+16 - \left(-\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{4}_{1}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{21}_{3}}\right)\right] : \left(-\frac{23}{3}\right) = \left[+16 - \left(+\frac{2}{3}\right)\right] : \left(-\frac{23}{3}\right) =$$

$$= \left[+16 - \frac{2}{3}\right] : \left(-\frac{23}{3}\right) = \left[\frac{48 - 2}{3}\right] : \left(-\frac{23}{3}\right) = \frac{\cancel{46}^{2}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \left(-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{23}_{1}}\right) = -2$$

$$-\left(+\frac{1}{2}\right)^3+\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{8}:\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=$$

$$=-\left(+\frac{1}{8}\right)+\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{8}:\left(+\frac{9}{4}\right)+\left(+\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{2}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{8}+\left[\frac{1}{2}+\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}_{2}}\cdot\left(+\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{9}_{3}}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{8}+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}\right]=-\frac{1}{8}+\left[\frac{3+1-9}{6}\right]=$$

$$=-\frac{1}{8}+\left[-\frac{5}{6}\right]=-\frac{1}{8}-\frac{5}{6}=\frac{-3-20}{24}=-\frac{23}{24}$$

La radice quadrata algebrica di un numero relativo positivo

Si dice radice quadrata aritmetica di un numero positivo **a** il numero positivo **x** che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato **a** . In simboli abbiamo:

$\sqrt{a}=x \Leftrightarrow x^2=a$ $\sqrt{9}=3$ in quanto risulta radice quadrata aritmetica di un numero positivo **a** radice quadrata algebrica di un numero positivo **a** **x** che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato **a** .In simboli abbiamo:

$\sqrt{a}=x \Leftrightarrow x^2=a$ $\sqrt{9}=\pm 3$ in quanto risulta La radice quadrata algebrica del numero positivo **a** rappresenta due valori espressi da due numeri relativi opposti.

radice quadrata algebrica di un numero negativo **a** non esiste, in quanto nessun numero elevato al quadrato dà come risultato un numero negativo.

Unità didattica 3: Il calcolo letterale

Espressione algebrica

Dicesi **espressione algebrica** un insieme di numeri e di lettere legati fra di loro da almeno una delle quattro operazioni razionali: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione.

Esempi di espressioni algebriche: $3x^2y \quad , \quad -\frac{3}{4}\frac{ab}{x^5y} \quad , \quad 3x + 2y^2 - \frac{3ab^4}{xy^5}$

Il **valore numerico** di un'espressione letterale si ottiene sostituendo a ciascuna lettera il valore assegnato ed eseguendo le operazioni dell'espressione numerica così ottenuta.

Esempio: calcolare il valore numerico dell'espressione letterale $\mathbf{a^2+3ab}$ per $a=-1$ e $b=+2$.

Basta sostituire alle lettere a e b i rispettivi valori. Nel nostro esempio a vale -1 e b vale $+2$.

Otteniamo: $\mathbf{a^2+3ab}=(-1)^2+3(-1)(+2)=1-6=-5$ Il **valore numerico** dell'espressione letterale proposta è -5.

Monomi

Dicesi **monomio** una espressione algebrica non contenente le operazioni di addizione e sottrazione, cioè una espressione algebrica dove figura o l'operazione di moltiplicazione o l'operazione di divisione o entrambe. Sono monomi: $-3x^2y \quad , \quad \frac{2ab^2x^3}{y^4z}$

Ogni monomio è costituito da una parte numerica detta **coefficiente** e da una **parte letterale**.

$3ab \rightarrow$ **monomio**, $3 \rightarrow$ **coefficiente**, $ab \rightarrow$ **parte letterale**

Un monomio è **ridotto a forma canonica** o a **forma normale** quando i suoi fattori letterali sono tutti fra loro diversi . $3ax^2y^5$ è un **monomio ridotto a forma canonica**

$-3axy^3 5a^2xb$ non è un monomio ridotto a forma normale. Ridotto a forma normale diventa:

$$-15a^3bx^2y^3$$

Un monomio si dice **intero** se le lettere compaiono solo al numeratore, si dice **frazionario** se almeno una delle sue lettere compare al denominatore.

$3x^2$, $-\frac{3}{7}b^2y^3$ $+0{,}89ab^5c^{13}$ sono monomi interi

$-\frac{3}{4}\frac{x}{y^2}$, $\frac{a^4x^6}{2y^3}$, $\frac{5a^6b^7}{2x^2y^4}$ sono monomi frazionari

Grado di un monomio Monomi simili

Dicesi grado di un monomio rispetto ad una lettera l'esponente con cui la lettera si presenta nel monomio. Il monomio $5ax^5y^2z^{12}$ ha grado **1** rispetto alla lettera **a**, grado **5** rispetto alla lettera **x**, grado **2** rispetto alla lettera **y**, grado **12** rispetto alla lettera **z**.

Dicesi grado assoluto o semplicemente grado di un monomio ridotto a forma canonica la somma degli esponenti delle sue lettere. Il monomio $5ax^5y^2z^{12}$ ha grado assoluto $1+5+2+12=20$. Il monomio $\frac{3ax^2}{b^3}=3ab^{-3}x^2$ ha grado -3 rispetto alla lettera **b**, mentre il grado assoluto è **zero**. Due monomi si dicono simili se hanno la stessa parte letterale. I monomi $-3ab$, $2ab$, $\frac{1}{2}ab$ sono monomi simili. Due monomi simili aventi lo stesso coefficiente si dicono uguali.

$3ab^2$ e $3ab^2$ sono monomi uguali, $\frac{1}{2}xy^8$ e $-\frac{1}{2}xy^8$ sono monomi opposti

Somma algebrica (addizione e sottrazione) di monomi simili

La somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti e come parte letterale la stessa parte letterale.

$$-\frac{7}{3}ax^2y+\frac{2}{5}ax^2y-3ax^2y=\left(-\frac{7}{6}+\frac{2}{5}-3\right)ax^2y=\frac{-35+6-45}{15}ax^2y=-\frac{74}{15}ax^2y$$

Se i monomi non sono simili, la somma algebrica rimane solo indicata.

Moltiplicazione di due o più monomi

Il prodotto di due o più monomi è un monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali, cioè tutte le lettere che compaiono in ogni monomio, ciascuna presa una sola volta con esponente uguale alla somma degli esponenti.

$$\left(\frac{2}{3}a^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}b^2x\right)=\left(+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)a^{2+1}b^2x^{2+1}=\left(+\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{3}{4}\right)a^3b^2x^3=\frac{1}{4}a^3b^2x^3$$

Potenza di un monomio

La potenza di un monomio è un monomio che ha come coefficiente la potenza del coefficiente e come parte letterale la potenza della parte letterale. Generalizzando possiamo dire che: la potenza **n-esima** (ennesima) di un monomio è uguale ad un monomio che ha per coefficiente la potenza **n-esima** del coefficiente del monomio dato e per parte letterale tutte le lettere ognuna con esponente uguale al prodotto di **n** per l’esponente di ciascuna di esse. $\left(-\frac{1}{2}ax^2y^4\right)^3=-\frac{1}{8}a^3x^6y^{12}$

Divisione di due monomi

Il quoziente di due monomi è un monomio avente come coefficiente il quoziente dei coefficienti e come parte letterale il quoziente delle parti letterali. La parte letterale contiene ciascuna lettera comune ai due monomi, con esponente uguale alla differenza fra l’esponente del dividendo e quella del divisore. Per le lettere non comuni, si scrivono inalterate quelle del dividendo e con l’esponente cambiato di segno quelle del divisore.

$$\left(-\frac{3}{5}a^5y^4z^2b\right):\left(\frac{7}{15}a^2y^3z\right)=\left(-\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{7}\right)a^{5-2}y^{4-3}z^{2-1}b=-\frac{9}{7}a^3yzb$$

$$\left(-\frac{6}{7}a^2b^5x^8y\right):\left(-\frac{33}{14}a^5b^2x^3d^5\right)=\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{14}{33}\right)a^{2-5}b^{5-2}x^{8-5}yd^{-5}=\frac{4}{11}a^{-3}b^3x^5yd^{-5}=\frac{4}{11}\frac{b^3x^5y}{a^3d^5}$$

Massimo comune divisore di due o più monomi

Il massimo comune divisore ($M.C.D.$) di due o più monomi interi a coefficienti interi è un monomio avente per coefficiente il $M.C.D.$ dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle sole lettere comuni ai monomi dati, prese una sola volta con l’esponente minore.

$$12a^5b^4x^3y^7\,,\quad 6a^3b^5x\,,\quad 21a^4b^2z \qquad 12=2^2\cdot 3 \quad 6=2\cdot 3 \quad 21=3\cdot 7 \qquad M.C.D.\ =\ 3a^3b^2$$

Minimo comune multiplo di due o più monomi

Il minimo comune multiplo ($m.c.m.$) di due o più monomi interi è un monomio avente per coefficiente il $m.c.m.$ dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle lettere comuni e non comuni ai monomi dati, prese una sola volta, con l'esponente maggiore.

$$12a^5b^4x^3y^7\,,\quad 6a^3b^5x\,,\quad 21a^4b^2z \qquad 12=2^2\cdot 3 \quad 6=2\cdot 3 \quad 21=3\cdot 7 \qquad m.c.m.\ =\ 84a^5b^5x^3y^7z$$

OSSERVAZIONE: Quando i coefficienti dei monomi non sono tutti numeri interi, allora si assume come coefficiente del $M.C.D.$ e del $m.c.m.$ il numero $+1$. Questo per semplicità e per opportunità di calcolo.

I polinomi

Definizione: Dicesi polinomio la somma algebrica di due o più monomi. I monomi si dicono i termini del polinomio. Un polinomio formato da due termini dicesi binomio, da tre termini trinomio, etc...

Esempi di polinomi

$-5a^2b^3x\ +\ \frac{2}{3}ab^2x^3\ -\ \frac{5}{4}ay^4$ Polinomio intero , $-3a^2b\ +\ 5\frac{ab^3}{x}\ -\ \frac{7}{4}\frac{ay^5x^7}{}$ Polinomio Frazionario

Definizione: Dicesi grado di un polinomio rispetto ad una lettera il maggiore esponente con cui quella lettera figura nel polinomio. Il polinomio $\mathbf{5a^2b - \frac{7}{2}ab^3x^2 + \frac{1}{3}a^4bx}$ è di quarto grado rispetto alla lettera $\mathbf{a}$, di terzo grado rispetto alla lettera $\mathbf{b}$, di secondo grado rispetto alla lettera $\mathbf{x}$.

Definizione: Dicesi grado assoluto, o semplicemente grado di un polinomio, il maggiore dei gradi (assoluti) dei suoi termini. Il polinomio $\begin{array}{ccccc} 8a^2b^3y^5 & - & \frac{5}{2}ab^5 & - & 3ax^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 10 & & 6 & & 3 \end{array}$ è di decimo grado.

Definizione: Un polinomio si dice omogeneo quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado (assoluto) Il polinomio $5a^2b^3c - \frac{7}{2}ab^5 + 6ax^2y^3$ è omogeneo di sesto grado.

Definizione: Un polinomio si dice ordinato secondo le potenze crescenti o decrescenti di una data lettera se i suoi termini si succedono in modo che gli esponenti di quella lettera vadano crescendo o decrescendo. Il polinomio $6x^4 + 5x^3 - 2x + 5 = 0$ è un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti della x.

Definizione: Un polinomio ordinato si dice completo rispetto alla lettera ordinatrice se contiene tutte le potenze di quella lettera, dal grado massimo al grado zero.

$8x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 5x - 2$ è un polinomio completo di sesto grado ordinato secondo le potenze decrescenti della x. Il numero -2 si dice termine noto del polinomio considerato.

Addizione algebrica di polinomi

Per sommare algebricamente due o più polinomi basta sommare algebricamente i monomi simili.

$$(-2ab+4a^2)+(-3ab-7ab^2+5a^2)=-2ab+4a^2-3ab-7ab^2+5a^2=(-2-3)ab+(4+5)a^2-7ab^2=$$

$$=-5ab+9a^2-7ab^2$$

$$(8ab^2+5a^2b^3)-(-7a^2b^3+2a^2+4ab^2)=8ab^2+5a^2b^3+7a^2b^3-2a^2-4ab^2=$$

$$=(8-4)ab^2+(5+7)a^2b^3-2a^2=4ab^2+12a^2b^3-2a^2$$

$$\left(x^4-\frac{3}{5}x^3+2x^2-x-5\right)+\left(x^3-3x^2+\frac{2}{3}x-1\right)-\left(3x^4-\frac{2}{7}x+5\right)=$$

$$= x^4-\frac{3}{5}x^3+2x^2-x-5+x^3-3x^2+\frac{2}{3}x-1-3x^4+\frac{2}{7}x-5 =$$

$$= (1-3)x^4+\left(-\frac{3}{5}+1\right)x^3+(2-3)x^2+\left(-1+\frac{2}{3}+\frac{2}{7}\right)x-11 =$$

$$(1-3)x^4+\left(\frac{-3+5}{5}\right)x^3+(2-3)x^2+\left(\frac{-21+14+6}{21}\right)x-11$$

$$= -2x^4+\frac{2}{5}x^3-x^2-\frac{1}{21}x-11$$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Il prodotto di un monomio per un polinomio è il polinomio che si ottiene moltiplicando il monomio per ciascun termine del polinomio.

$$-5ab^2(-2a+4b-3c)=-5ab^2(-2a)-5ab^2(+4b)-5ab^2(-3c)=10a^2b^2-20ab^3+15ab^2c$$

Moltiplicazione di un polinomio per un monomio

Per moltiplicare un polinomio per un monomio basta moltiplicare ogni termine del polinomio per il monomio e sommare algebricamente i prodotti ottenuti.

$$(a^2+ab+a^3b^2)\cdot 3a^2bx = 3a^4bx+3a^3b^2x+3a^5b^3x$$

Moltiplicazione di due o più polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine di uno di essi per tutti i termini dell'altro. Al risultato ottenuto bisogna applicare la somma algebrica dei monomi simili.

$$(-3x^2-2xy+5)\cdot(xy^2-5x^2y)=(-3x^2-2xy+5)(xy^2)+(-3x^2-2xy+5)(-5x^2y)=$$

$$=-3x^3y^2-2x^2y^3+5xy^2+15x^4y+10x^2y^2-25x^2y=7x^3y^2-2x^2y^3+5xy^2+15x^4y-25x^2y$$

Se i polinomi sono più di due, il loro prodotto si ottiene moltiplicando i primi due e, poi, moltiplicando il polinomio ottenuto per il terzo polinomio e così di seguito fino ad esaurire i polinomi dati.

Prodotti notevoli

Si chiamano prodotti notevoli alcuni prodotti fra polinomi che si effettuano in base a determinate regole che ci consentono di semplificare certi calcoli.

1) Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=a^2-b^2$

REGOLA: **Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale alla differenza dei loro quadrati.**

$$\left(\frac{2}{3}a^2by^3 + 5x^2t\right)\left(\frac{2}{3}a^2by^3 - 5x^2t\right) = \frac{4}{9}a^4b^2y^6 - 25x^4t^2$$

2) Quadrato di un binomio: $(\mathbf{a+b})^2 = a^2+2ab+b^2$ $\quad(\mathbf{a-b})^2 = a^2-2ab+b^2$

REGOLA: **Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine più il doppio prodotto del primo termine per il secondo, più il quadrato del secondo termine**.

$$(\mathbf{2x+3y})^2 = 4x^2+12xy+9y^2 \quad , \quad \left(-\frac{3}{5}\mathbf{xy^2}+\frac{1}{3}\mathbf{x^2y}\right)^2 = \frac{9}{25}x^2y^4-\frac{2}{5}x^3y^3+\frac{1}{9}x^4y^2$$

$$\left(-\mathbf{2xy}-\frac{1}{4}\mathbf{ax}\right)^2 = 4x^2y^2+ax^2y+\frac{1}{16}a^2x^2$$

3) Cubo di un binomio $(\mathbf{a+b})^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $\quad(\mathbf{a-b})^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

REGOLA: **Il cubo di un binomio è uguale alla somma algebrica del cubo del primo termine, del triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, del triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo, del cubo del secondo termine**.

$$(\mathbf{a+2b})^3 = a^3+3\cdot(a)^2\cdot(2b)+3\cdot a\cdot(2b)^2+8b^3 = a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$$

$$\left(\mathbf{3x^2}-\frac{1}{3}\mathbf{y}\right)^3 = 27x^6+3\cdot(3x^2)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}y\right)+3\cdot(3x^2)\cdot\left(-\frac{1}{3}y\right)^2-\frac{1}{27}y^3 = 27x^6-9x^4y+x^2y^2-\frac{1}{27}y^3$$

$$\left(-\frac{3}{4}\mathbf{a^3}-\mathbf{2a}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}a^3\right)^3+3\left(-\frac{3}{4}a^3\right)^2(-2a)+3\left(-\frac{3}{4}a^3\right)(-2a)^2+(-2a)^3 = -\frac{27}{64}a^9-\frac{27}{8}a^7-9a^5-8a^3$$

Divisione di un polinomio per un monomio

Per dividere un polinomio per un monomio basta dividere ciascun termine del polinomio per il monomio. $\left(-18a^5b^3x^2+9a^3b^4x-21a^2b^2x^3\right):\left(-3a^2b\right) = 6a^3b^2x^2-3ab^3x+7bx^3$

$$\left(-3a^2b + 4a^3c^4 - 8ab^4c^2 + 2\right):\left(-6a^3b^2c\right) = \frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}c^{-1} - \frac{2}{3}c^3b^{-2} + 4b^2a^{-2} - \frac{1}{3}a^{-3}b^{-2}c^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2abc} - \frac{3c^3}{3b^2} + \frac{4b^2c}{a^2} - \frac{1}{3a^3b^2c}$$

Unità 4

Identità ed equazioni

Dicesi identità l'uguaglianza tra due espressioni algebriche verificata da tutti i possibili valori numerici assegnati a tutte le lettere che vi figurano. Con parole diverse possiamo dire che **una identità è una uguaglianza incondizionata**.

L'uguaglianza $x+5=7$ è vera soltanto quando attribuiamo alla x il valore 2. Infatti: $2+5=7 \quad 7=7$. In tutti gli altri casi è falsa. Una uguaglianza di questo tipo è una equazione.

Definizione: Un'equazione è una uguaglianza verificata solo da particolari valori attribuiti alla lettera che vi figura. Tale lettera dicesi incognita dell'equazione; il numero che la verifica dicesi radice o soluzione dell'equazione. Se l'esponente dell'incognita è il numero 1, l'equazione è di primo grado, se è il numero 2 è di secondo grado, e così di seguito.

Risolvere una equazione di primo grado significa trovare la sua soluzione che è soltanto una.

Con parole diverse possiamo dire che **una equazione è una uguaglianza condizionata**, cioè una uguaglianza verificata un numero finito di volte.

Equazione di primo grado ad una incognita

E' una equazione riconducibile alla seguente forma: $\mathbf{ax = b}$ $[1]$

dove $\mathbf{a}$ indica il coefficiente dell'incognita e $\mathbf{b}$ il termine noto. Un'equazione di questo tipo si dice ridotta a forma normale o a forma canonica.

La soluzione dell'equazione $[1]$ è una frazione che ha per numeratore il termine noto del secondo membro e per denominatore il coefficiente dell'incognita, cioè: $\mathbf{x = \frac{b}{a}}$

Esempio numerico: $7x=21 \quad x=\frac{21}{7}=3$

Due equazioni di primo grado si dicono equivalenti se ammettono la stessa soluzione. Per risolvere una equazione di primo grado bisogna applicare alcuni principi di equivalenza:

Primo principio di equivalenza: Addizionando o sottraendo ai due membri di una equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita, otteniamo una equazione equivalente a quella data.

L'equazione $x+9=12$ ha come soluzione $x=3$. Addizionando ai due membri dell'equazione proposta il numero **4** otteniamo l'equaione $x+9+\mathbf{4}=12+\mathbf{4} \quad x+13=16 \quad x=16-13 \quad \mathbf{x=3}$

Questo significa che l'equazione ottenuta è equivalente a quella proposta.

Sottraendo ai due membri dell'equazione proposta il numero **5** otteniamo l'equazione $x+9-\mathbf{5}=12-\mathbf{5} \quad x+4=7 \quad x=7-4=3$

Questo significa che l'equazione ottenuta è equivalente a quella proposta.

Conseguenze del primo principio di equivalenza

Dal principio di equivalenza si deducono i seguenti corollari

COROLLARIO N°1 In una equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno (regola del trasporto)

COROLLARIO N°2 Se nei due membri di un'equazione figurano due termini uguali e con lo stesso segno, essi si possono eliminare

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo ogni termine del primo membro e ogni termine del secondo membro per uno stesso numero diverso da zero otteniamo una equazione equivalente a quella data.

Conseguenze del secondo principio di equivalenza

Cambiando il segno a tutti i termini del primo e del secondo membro di un'equazione (il significa **moltiplicare ambo i membri per** -1) si ottiene una equazione equivalente alla data.

L'equazione di primo grado $3x-5=12x+38$ è equivalente all'equazione $-3x+5=-12x-38$

Risoluzione di un a equazione di primo grado

Risolvere la seguente equazione:

$\mathbf{6x-x-4=-3x+12}$ $\quad 6x-x+3x=12+4 \quad 8x=16 \quad x=\frac{16}{8}=2$

Risolvere la seguente equazione di primo grado fratta

$\mathbf{\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{x^2}{x^2-1}}$ $\quad x \neq \pm 1 \quad \frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$, $m.c.m.=(x+1)(x-1)$

$(x+1)^2-3(x-1)=x^2$, $x^2+2x+1-3x+3=x^2$, $\mathbf{x=4}$

Discussione e verifica di una equazione di primo grado

Abbiamo visto che $\mathbf{x=\frac{b}{a}}$ è la soluzione dell'equazione $\mathbf{ax=b}$. Tale equazione è:

- determinata se risulta $\mathbf{a\neq 0}$
- indeterminata se risulta $\mathbf{a=0 \text{ e } b=0}$
- impossibile se risulta $\mathbf{a=0 \text{ e } b\neq 0}$.

Risolvere la seguente equazione di primo grado a fare la verifica

$$\mathbf{\frac{14x-9}{11}-\frac{1}{3}\left[\frac{17}{2}x-(5-4x)\right]=\frac{1}{2}-\frac{8x+1}{3}}$$

$\frac{14x-9}{11}-\frac{1}{3}\left(\frac{17x-10+8x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{8x+1}{3}$, $\frac{14x-9}{11}-\frac{25x-10}{6}=\frac{1}{2}-\frac{8x+1}{3}$

$6(14x-9)-11(25x-10)=33-22(8x+1)$, $84x-54-275x+110=33-176x-2$

$84x-275x+176x=33-22+54-110$, $-15x=-45$, $15x=45$, $x=\frac{45}{15}=3$

x = 3 è la soluzione dell'equazione data.

La verifica dell'equazione si effettua nella seguente maniera:

1) nell'equazione data al posto della x si sostituisce la soluzione trovata

2) si eseguono tutti i calcoli nel primo membro e nel secondo membro dell'equazione

3) il membro deve essere numericamente uguale al secondo membro

$$\frac{14\cdot 3 - 9}{11} - \frac{1}{3}\left[\frac{17\cdot 3}{2} - (5 - 4\cdot 3)\right] = \frac{1}{2} - \frac{8\cdot 3 + 1}{3} \quad , \quad \frac{42 - 9}{11} - \frac{1}{3}\left(\frac{51}{2} + 7\right) = \frac{1}{2} - \frac{25}{3}$$

$$3 - \frac{65}{6} = \frac{3 - 50}{6} \quad , \quad -\frac{47}{6} = -\frac{47}{6}$$

Disequazioni razionali intere di primo grado ad una incognita

Sono disequazioni che possono essere ricondotte ad una delle seguenti forme:

$$ax > b \qquad ax < b$$

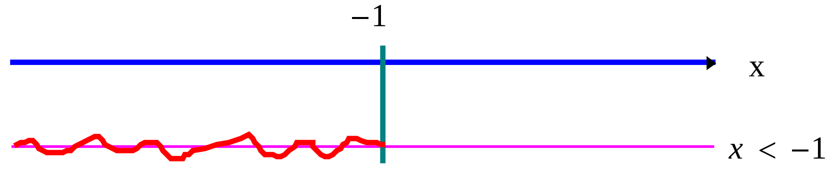
Per risolvere una disequazione di primo grado ridotta a forma canonica basta dividere ambo i membri per **a**, ricordando di cambiare il senso della disuguaglianza se è $a < 0$.

Una proprietà importante per le disequazioni: moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per uno stesso numero negativo si ottiene una disequazione equivalente a quella data ma di verso opposto.

La disequazione $3x+2-8x>-12x+34$ è equivalente alla disequazione $-3x-2+8x<+12x-34$

Risolvere la seguente disequazione $\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} > \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3}$ per $x < -1$

$6-3x-12-6x>6x+21-8x-20$; $-7x > 7$, $7x < -7$; $x < -1$



Elogio della matematica

Nessun altro studio richiede meditazione più pacata;

nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare,

semplici ed ordinati nell'argomentare,

precisi e chiari nel dire;

e queste semplicissime qualità sono sì rare

che possono bastare da sole ad elevare chi ne è dotato

molto al di sopra della maggioranza degli uomini.

Perciò io esorto a studiare matematica

pur chi si accinga a divenire avvocato o economista,

filosofo o letterato; perché io credo

e spero che non gli sarà inutile sapere bene ragionare

e chiaramente esporre .

Alessandro Padoa